



---

**UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN MATEMÁTICA

---

**CARTOGRAMA DE CHILE**

Sebastián Moraga Scheuermann

Profesor Leonardo Figueroa

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Enunciado</b>	<b>2</b>
2.1. Interés . . . . .	2
2.2. Base teórica . . . . .	3
2.3. Resultados numéricos . . . . .	5
2.4. Bibliografía . . . . .	15

# Capítulo 1

## Introducción

Un cartograma es un mapa que muestra gráficamente datos de un lugar geográfico alterando su imagen, por medio de algún patrón o medida de área que sea identificable y fácilmente interpretable. El siguiente texto trata sobre la creación de un cartograma de Chile basado en el método de difusión de Gastner/Newman [2004], que adapta mapas según la densidad de una región sin alterar sus relaciones con otras regiones.

A medida que ha pasado el tiempo se han creado varios métodos de cómo crear un cartograma, pero todos de ellos con algún problema como fuerte dependencia de los ejes coordenados que se usan, o simplemente problemas al tener zonas que se sobreponen, esto entre otros problemas.

Un archivo .shp es un archivo con información sobre alguna región, límites, además de contener las delimitaciones de las zonas puede almacenar distintas variables como población, densidad, o cualquier otro atributo que se le quiera asignar a alguna zona. Este es el archivo con el cual trabajaremos para crear el cartograma, además fue usado el programa QGIS 2.18.1 para agregar atributos a un archivo `division_comunal.shp` y así poder trabajar con él.

# Capítulo 2

## Enunciado

### 2.1. Interés

- Sea  $\Omega$  la superficie de la República de Chile y sea  $\rho$  una aproximación de la función densidad humana definida sobre  $\Omega$ . Queremos tener un cartograma de Chile a partir de la información regida del censo 2012



Figura 2.1: Chile continental

## 2.2. Base teórica

Este proyecto es una aplicación del trabajo realizado en el paper "Diffusion-based method for producing density-equalizing maps" creado por "Michael T. Gastner and M. E. J. Newman" es claro que su método será explicado en lo que sigue y se mostrarán los resultados obtenidos.

Básicamente se realiza es describir la población por una función densidad  $\rho(r)$  donde  $r$  es la posición geográfica, y de ello vamos a obtener la difusión. Tal como se describe en el paper, a medida que  $t \rightarrow \infty$  la densidad completa del mapa geográfico se vuelve uniforme y el desplazamiento total determina la proyección necesaria para obtener el cartograma. El procedimiento completo está explicado en su paper, sin embargo resaltaremos lo más importante, que es la construcción de la solución y los métodos usados.

En difusión estandar la densidad actual está dada por

$$J = v(r, t)\rho(r, t) \quad (2.1)$$

Donde  $v(r, t)$  y  $\rho(r, t)$  son la velocidad y la densidad respectivamente, con  $r$  y  $t$  la posición y el tiempo. Además el gradiente del campo densidad es

$$J = -\nabla\rho \quad (2.2)$$

lo que indica que el flujo va en dirección de más densidad a donde hay menos, se indica que podemos omitir una constante de difusión que podría aparecer en la ecuación anterior, asumirla como 1. Entonces la difusión de población es conservada localmente así que se tiene

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

Combinando estas ecuaciones se tiene la ecuación de difusión:

$$\nabla^2\rho - \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

y la expresión del campo velocidad en términos de la densidad de población es:

$$v(r, t) = -\frac{\nabla\rho}{\rho} \quad (2.5)$$

Para calcular el cartograma se debe resolver la ecuación (2.4) para  $\rho(r, t)$ . Bajo las condiciones mencionadas en el paper se tiene que se resolvió la ecuación de difusión en espacios de Fourier, el cual es diagonal y se vuelve a la transformada antes de integrar sobre el campo de velocidades, con esto y con las condiciones de borde del tipo Neumann, la base de Fourier de cosenos en cuyo caso la solución a la ecuación de difusión tienen la forma

$$\rho(r, t) = \frac{4}{L_x L_y} \sum_k \bar{\rho}(k) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t) \quad (2.6)$$

Tales que  $L_x, L_y$  son las dimensiones de la zona rectangular donde se encontrará el mapa, en el cual son lo suficientemente más amplias que las propias coordenadas de las regiones para efectos de la difusión.

La suma está calculada sobre los vectores  $k = (k_x, k_y) = 2\pi(m/L_x, n/L_y)$  con  $m, n$  enteros no negativos y  $\bar{\rho}(k)$  es la transformación discreta del coseno de  $\rho(r, t = 0)$ :

$$\bar{\rho}(k) = \frac{1}{4}(\delta_{k_x, 0} + 1)(\delta_{k_y, 0} + 1) \times \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(r, 0) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy \quad (2.7)$$

Donde  $\delta_{i,j}$  es el delta de Kronecker. El campo de velocidades  $v$  es facilmente calculable de la ecuación (2.5) y (2.6) y tiene componentes

$$v_x(r, t) = \frac{\sum_k k_x \bar{\rho}(k) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t)}{\sum_k \bar{\rho}(k) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t)} \quad (2.8)$$

$$v_y(r, t) = \frac{\sum_k k_y \bar{\rho}(k) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-k^2 t)}{\sum_k \bar{\rho}(k) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \exp(-k^2 t)} \quad (2.9)$$

Ecuaciones (2.7), (2.8), (2.9) pueden ser rápidamente evaluadas usando la rápida transformada de Fourier (FFT) y su inversa respectivamente, cada una en un tiempo del orden  $L_x L_y \log(L_x L_y)$ . Entonces se usa el campo de velocidades restante para integrar la ecuación

$$r(t) = r(0) + \int_0^t v(r, \tau) d\tau$$

Que es el desplazamiento acumulativo de cualquier punto del mapa al tiempo  $t$ .

Esto genera una ecuación Volterra no lineal de segundo tipo que puede ser resuelta numéricamente por métodos estándar.

Esta es la base teórica en la que se basó el proyecto del cartograma para Chile, así pues el software ScapeToad creado por Dominique Andrieu, Christian Kaiser y André Ourednik hace uso del diseño para crear cartogramas de Michael T. Gastner and M. E. J. Newman, el cual se alimenta de un archivo .shp que contiene los datos, la forma y de limitaciones de regiones que queremos cartografiar, además de la densidad de cada región. Es por ello que ocupando el programa "QGIS Las" se retiraron zonas de Chile que no eran próximas a Chile continental, tales como Isla de Pascua o Juan Fernádes pues al estar alejadas no producen distorsión en lo que es Chile continental.

Luego el archivo original division\_comunal.shp tampoco contaba con la densidad de cada región, por lo que se debió manualmente crear ese campo de valores y establecerlos de acuerdo al censo sacado de Wikipedia.

Así se fue completando este archivo arduamente hasta obtener todo lo necesario, luego simplemente se dejó correr el programa ScapeToad creando una matriz de  $334 \times 2000$  sobre la imagen de Chile, al cual a cada nodo con coordenadas  $(x, y)$  se le asigna un valor de densidad, el cual hace uso de la técnica antes descrita.

## 2.3. Resultados numéricos

En la sección siguiente tenemos los resultados de los cartogramas de Chile.  
El programa funcionó durante 103374 segundos, o lo que es 28.715 horas continuas.  
Esto llevo a los siguientes resultados

- Error medio: 82,0803283400522
- Valor máximo de densidad: 14218,14.
- Valor mínimo de densidad: 0,0
- Valor medio=857,632238372
- Número de comunas: 344
- Iteraciones: 3
- Diffusion grid size: 1024
- Cartogram grid size:  $334 \times 2000$



Figura 2.2: Chile continental sin difusión



Figura 2.3: Chile continental con difusión



Lo siguiente es la grilla sobre la cual se hicieron los cálculos, es visible que hicieron falta bastantes puntos para poder tener una buena aproximación. El tiempo de ejecución fue de 28.7 horas, es claro que con menos iteraciones y una con menos puntos puede tardar solo minutos pero la calidad del cartograma se pierde enormemente.



Figura 2.4: grilla sobre Chile

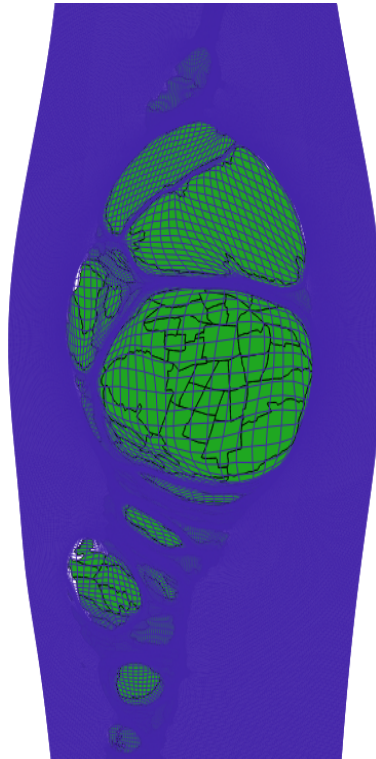


Figura 2.5: grilla sobre centro de Chile

Luego comenzamos a recorrer algunas comunas de Chile, algunas importantes o destacadas. Arica en el norte de Chile se muestra en la figura 2.6. Notando así que su las zonas aledañas contienen población mucho menor que esta comuna. Está en el lugar 133 de la lista de densidades, ordenada de mayor a menor.



Figura 2.6: Norte de Chile: Arica

La siguiente es la comuna de Putaendo que está en el lugar 32 de comunas, con una densidad aproximada de  $2261 Hab/km^2$  en el cartograma se ve que su expansión fue bastante drástica sin embargo esto se debe zona dónde está ubicada, es visible que lo que hay entre Putaendo y la región metropolitana quedó prácticamente aplastado por estas densidades.



Figura 2.7: Centro de Chile: Putaendo

La siguiente comuna es Lo espejo de la región metropolitana, la cual es la comuna con mayor densidad poblacional en Chile con alrededor de  $14,218 \text{ Hab}/\text{km}^2$ . Aunque su densidad es mucho más grande que Putaendo, Lo espejo no se deforma tan drásticamente debido a las otras comunas alrededor que tienen una densidad parecida.



Figura 2.8: Centro de Chile: Comuna de Lo espejo

En lo que sigue se presentarán comunas de Norte a Sur con su lugar en la lista de densidades.



Figura 2.9: Centro de Chile: Santiago, puesto 9<sup>no</sup>

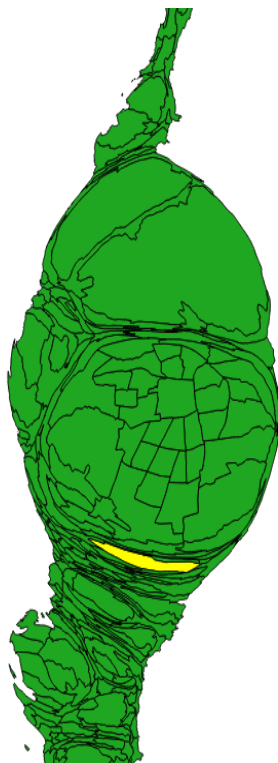


Figura 2.10: Centro de Chile: Rancagua, puesto 43

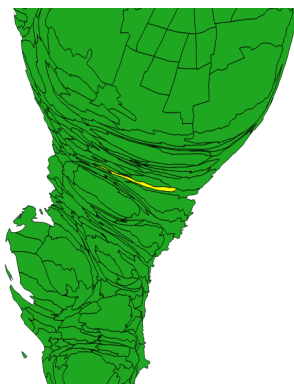


Figura 2.11: Centro de Chile: Teno, puesto 129



Figura 2.12: Centro de Chile: Curicó, puesto 79



Figura 2.13: Centro de Chile: Concepción, puesto 42



Figura 2.14: Centro de Chile: San Pedro de la Paz, puesto 46



Figura 2.15: Sur de Chile: Cabo de Hornos, puesto 335



Figura 2.16: Sur de Chile: Torres del Paine, puesto 340

Finalmente se adjunta un archivo llamado cartograma.shp que contiene el cartograma de Chile por si el lector desea revisarla, esto es posible mediante el programa QGIS 2,18,1 de licencia gratuita. Además incluido va un archivo Deformation grid.shp el cual tiene la grilla con la que se realizó el cartograma de Chile.

El lector podrá realizar su propio cartograma con ScapeToad-v11 que también está incluido. Se recomienda hacer un cartograma de baja calidad debido al tiempo de ejecución.



## 2.4. Bibliografía

- [http://www.bcn.cl/siit/mapas\\_vectoriales/index.html](http://www.bcn.cl/siit/mapas_vectoriales/index.html)
- [https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Comunas\\_de\\_Chile](https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Comunas_de_Chile)
- Gastner, M.T. and Newman, M. (2004). Diffusion-based method for producing density equalizing maps. In Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 101(20): 7499-7504.
- <http://scapetoad.choros.ch/index.php>
- Qgis Software, Lic. GNU, <http://www.qgis.org/>