

Manual práctico de Ejercicios de Matemática con NumPy

Asignatura: Programación II
Universidad Nacional de Chimborazo

20 de mayo de 2025

Índice

| | |
|--|----------|
| 1. Álgebra lineal y operaciones básicas | 2 |
| 1.1. Ejercicio 1 – Producto punto vs. producto Hadamard | 2 |
| 1.2. Ejercicio 2 – Normas matriciales | 2 |
| 1.3. Ejercicio 3 – Sistemas lineales parametrizados | 2 |
| 2. Cálculo numérico y análisis | 2 |
| 2.1. Ejercicio 4 – Derivada numérica por diferencias centradas | 2 |
| 2.2. Ejercicio 5 – Integración numérica: trapecio y Simpson | 2 |
| 2.3. Ejercicio 6 – Serie de Fourier discreta | 2 |
| 3. Estadística y probabilidad | 2 |
| 3.1. Ejercicio 7 – Estimación de parámetros de una normal | 2 |
| 3.2. Ejercicio 8 – Bootstrap de la mediana | 3 |
| 3.3. Ejercicio 9 – Correlación de Pearson y covarianza | 3 |
| 4. Álgebra matricial avanzada | 3 |
| 4.1. Ejercicio 10 – Descomposición QR (Gram–Schmidt) | 3 |
| 4.2. Ejercicio 11 – Potencia iterada | 3 |
| 4.3. Ejercicio 12 – SVD truncado y compresión de imágenes | 3 |
| 5. Optimización y mínimos cuadrados | 3 |
| 5.1. Ejercicio 13 – Ajuste lineal múltiple (fórmula normal) | 3 |
| 5.2. Ejercicio 14 – Descenso de gradiente para $\ Aw - b\ ^2$ | 3 |

1. Álgebra lineal y operaciones básicas

1.1. Ejercicio 1 – Producto punto vs. producto Hadamard

Genere dos matrices aleatorias A y B de tamaño 200×200 :

- a) Calcule el producto Hadamard $A * B$.
- b) Calcule el producto punto AB .
- c) Con `%timeit` compare el tiempo medio de ambas operaciones y discuta la diferencia teórica.

1.2. Ejercicio 2 – Normas matriciales

Implemente una función para la norma de Frobenius. Verifique sus resultados con `np.linalg.norm` y calcule la norma infinita de la misma matriz.

1.3. Ejercicio 3 – Sistemas lineales parametrizados

Para $k = 1, \dots, 20$ construya el sistema $A_k x = b_k$ donde $A_k = I + k J$ (I es la identidad y J la matriz de unos).

- a) Resuelva cada sistema.
- b) Grafique k frente al número de condición $\text{cond}(A_k)$ y comente la estabilidad numérica.

2. Cálculo numérico y análisis

2.1. Ejercicio 4 – Derivada numérica por diferencias centradas

Sea $f(x) = \sin x e^{-x/4}$. Aproximar $f'(x)$ en el intervalo $[0, 10]$ usando diferencias centradas de orden 2 con 500 puntos y comparar con la derivada analítica.

2.2. Ejercicio 5 – Integración numérica: trapecio y Simpson

- a) Implemente la regla del trapecio vectorizada.
- b) Implemente la regla de Simpson vectorizada.
- c) Aplique ambos métodos a $f(x)$ del ejercicio 4 en $[0, 10]$ y estime el error respecto a la integral exacta.

2.3. Ejercicio 6 – Serie de Fourier discreta

Escriba una función para la DFT mediante multiplicación matricial (sin `np.fft`). Pruebe con una señal senoidal pura y verifique que el espectro muestre un pico en la frecuencia correcta.

3. Estadística y probabilidad

3.1. Ejercicio 7 – Estimación de parámetros de una normal

Simule 10 000 muestras de $N(\mu = 2.5, \sigma = 1.3)$. Estime μ y σ^2 con fórmulas vectorizadas y compare con `np.mean` y `np.var`.

3.2. Ejercicio 8 – Bootstrap de la mediana

Con 500 valores de una $\chi^2(\text{df} = 4)$:

- a) Genere 2 000 remuestras bootstrap.
- b) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para la mediana.

3.3. Ejercicio 9 – Correlación de Pearson y covarianza

Simule $X \sim N(0, 1)$ y $Y = 3X + \varepsilon$ con $\varepsilon \sim N(0, 0.5^2)$. Calcule la covarianza y el coeficiente de Pearson sin usar `np.corrcoef`.

4. Álgebra matricial avanzada

4.1. Ejercicio 10 – Descomposición QR (Gram–Schmidt)

Implemente el proceso de Gram–Schmidt clásico que devuelva Q y R . Verifique $Q^T Q \approx I$ y $QR \approx A$.

4.2. Ejercicio 11 – Potencia iterada

Diseñe `power_iteration` que calcule el autovalor dominante y su eigenvector. Compare con `np.linalg.eig`.

4.3. Ejercicio 12 – SVD truncado y compresión de imágenes

- a) Cargue una imagen en escala de grises.
- b) Aplique SVD y reconstruya la imagen con $r = 5, 20, 50$ valores singulares.
- c) Grafique la PSNR frente a r .

5. Optimización y mínimos cuadrados

5.1. Ejercicio 13 – Ajuste lineal múltiple (fórmula normal)

Genere un conjunto sintético con 3 predictores y ruido gaussiano. Calcule β usando $(X^T X)^{-1} X^T y$ y compare con `np.linalg.lstsq`.

5.2. Ejercicio 14 – Descenso de gradiente para $\|Aw - b\|^2$

Implemente descenso de gradiente (sin bucles anidados) para minimizar $f(w) = \|Aw - b\|^2$, registrando el error cada 100 iteraciones.

Conclusiones

Estos 14 ejercicios ponen en práctica la vectorización de NumPy en álgebra lineal, análisis numérico, estadística y optimización, fomentando un enfoque eficiente y reproducible en la resolución de problemas matemáticos.