Las ecuaciones diferenciales en las ciencias y en la ingeniería

Una expresión matemática con un signo de igual se llama **ecuación**. Una ecuación que incluye las derivadas de una o más funciones se llama **ecuación diferencial**. En otras palabras, una ecuación diferencial expresa una relación entre funciones y sus derivadas. El término *ecuación diferencial* se utiliza desde 1676, cuando Leibniz lo empleó por primera vez; desde entonces, los científicos y los ingenieros han usado extensamente las ecuaciones diferenciales para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos.

Probablemente usted se pregunte por qué estudiamos ecuaciones diferenciales. Después de todo, parece que podríamos resolver prácticamente cualquier problema mediante ecuaciones algebraicas. Bueno, bastará con decir que, hasta este punto, usted se enfrentó principalmente a problemas cuyo modelo matemático resultaba en ecuaciones algebraicas. Ahora, está a punto de entrar a un nuevo mundo de problemas ubicados en diversos campos de la ciencia y la ingeniería, cuyas formulaciones dan por resultado ecuaciones diferenciales y cuya solución depende de la resolución de dichas ecuaciones.

La descripción de la mayoría de los problemas científicos implica relaciones que conectan entre sí los *cambios* en algunas variables claves; usualmente, cuanto menor es el incremento elegido en las variables cambiantes, más general y exacta será la descripción. En el caso límite de *cambios infinitesimales* o *diferenciales* en las variables, obtenemos ecuaciones diferenciales que proporcionan formulaciones matemáticas precisas para los principios físicos y las leyes físicas representando la rapidez de los cambios como derivadas. Por tanto, las ecuaciones diferenciales se usan para investigar una amplia variedad de problemas en ciencias e ingeniería, y el estudio de las ecuaciones diferenciales es, desde hace tiempo, parte integral de la formación de científicos e ingenieros.

El estudio de los fenómenos físicos implica dos pasos importantes. En el primero se identifican todas las variables que afectan a los fenómenos, se realizan suposiciones y aproximaciones razonables, y se estudia la interdependencia de dichas variables. Se hace referencia a las leyes físicas y a los principios físicos pertinentes, y el problema se formula matemáticamente, usualmente en forma de ecuación diferencial. Esta ecuación en sí misma aporta mucha información porque muestra el grado de dependencia de algunas variables con respecto a otras, y la importancia relativa de varios términos. En el segundo paso se resuelve la ecuación diferencial mediante un método adecuado, y se obtiene la relación para la función desconocida en términos de las variables independientes (figura 1-1).

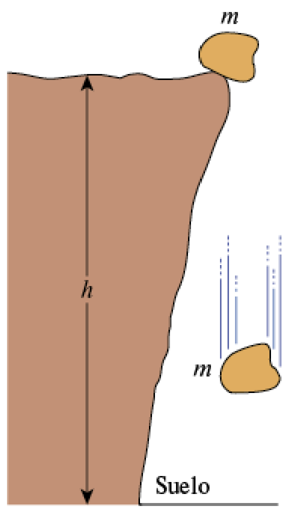
FIGURA 1-1

Modelación matemática de problemas físicos.

Muchos procesos que en la naturaleza parecen ocurrir al azar y sin ningún orden están, en realidad, gobernados por algunas leyes físicas francamente visibles o que no lo son tanto. Ya sea que las percibamos o no, estas leyes están ahí, rigiendo en forma coherente y predecible lo que parecen ser eventos ordinarios. La mayoría de ellas están bien definidas y bastante entendidas por los científicos. Esto permite predecir el desarrollo de un evento antes de que realmente suceda; o estudiar matemáticamente diversos aspectos de un evento, sin necesidad de realizar experimentos costosos y prolongados.

Considere, por ejemplo, la caída libre de una roca desde un acantilado, como se muestra en la figura 1-2. Digamos que nos gustaría saber el tiempo que ésta tarda en llegar al suelo. Una manera de averiguarlo es, por supuesto, registrar la hora en que se deja caer y la hora del impacto, para después determinar la diferencia.

FIGURA 1-2



Caída libre de una roca desde un acantilado.

Otra manera es preparar un modelo matemático de este proceso usando todas las leyes físicas aplicables para formular el problema, y resolverlo para encontrar la cantidad que nos interesa (en este caso, el tiempo de caída). Cuanto más realista sea el modelo matemático, más exacto será el resultado que se obtenga. Como recordará, en física, la caída libre de un cuerpo está regida por la ley de gravedad, y el tiempo de caída se determina como $\Delta t = 2 h / g$ donde *h* es la distancia vertical y *g* es la aceleración gravitacional local.

Página 3

Si se trata de problemas prácticos importantes se pueden obtener resultados muy exactos al usar un modelo matemático adecuado y realista; por ejemplo, al analizar la respuesta a la temperatura de una papa en un horno tratándola como si tuviera las mismas propiedades térmicas del agua (figura 1-3). La preparación de tales modelos exige un conocimiento adecuado de los fenómenos naturales involucrados y las leyes pertinentes, así como tener un razonamiento correcto. Es obvio que un modelo no realista dará resultados inexactos y, por tanto, inaceptables.

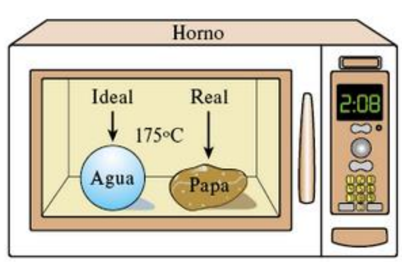


FIGURA 1-3

La modelación es una poderosa herramienta que proporciona comprensión y simplicidad a costa de perder algo de exactitud.

Es frecuente que un analista necesite decidir entre un modelo muy exacto (pero complejo) y uno sencillo (pero no tan exacto). La selección correcta es el modelo más simple, depende de la situación real. La elección correcta usualmente es el modelo que produzca resultados adecuados. No es difícil preparar modelos sumamente exactos y complejos. Sin embargo, tales modelos no son tan útiles para un analista si son demasiado difíciles de resolver. Al menos, el modelo matemático debe reflejar la característica esencial del problema físico que representa.

Dicho proceso de caída libre se formula considerando solamente el efecto de la gravedad, sin tener en cuenta la resistencia del aire y la variación de la aceleración gravitacional g con la altura. Estas simplificaciones son muy razonables para la mayoría de objetos que caen, y nos permiten obtener una solución muy sencilla del problema; sin embargo, es obvio que dichas simplificaciones son inaceptables para objetos que caen cuando experimentan una gran resistencia del aire (por ejemplo, un paracaídas).

Hay muchos problemas importantes reales que pueden analizarse mediante un modelo matemático sencillo. Se debe recordar que los resultados obtenidos de un análisis matemático no son más exactos que las suposiciones hechas al simplificar el problema; por tanto, la solución obtenida no debe aplicarse a situaciones para las cuales no sean válidas las suposiciones originales.

Una solución incongruente con la naturaleza observada del problema indica que el modelo matemático empleado es demasiado burdo. En ese caso, se debe preparar un modelo más realista mediante la eliminación de una o más de las suposiciones cuestionables. Esto dará por resultado una ecuación con mayor grado de complejidad que, por supuesto, será más difícil de resolver. Por tanto, cualquier solución de una ecuación diferencial debe interpretarse dentro del contexto en que surgió dicha ecuación.

¿Por qué usamos a menudo ecuaciones diferenciales en vez de ecuaciones algebraicas?

Describa lo que implica la preparación de modelos matemáticos prácticos para problemas reales.

Instrucciones: Elija la mejor respuesta para cada pregunta.

1. ***¿Qué es una ecuación diferencial?***
   - ***(a) Una ecuación que incluye solo constantes.***
   - ***(b) Una ecuación que relaciona variables sin derivadas.***
   - ***(c) Una ecuación que incluye las derivadas de una o más funciones.***
   - ***(d) Una ecuación que solo se usa en álgebra.***
2. ***¿Quién usó por primera vez el término "ecuación diferencial"?***
   - ***(a) Newton***
   - ***(b) Leibniz***
   - ***(c) Euler***
   - ***(d) Gauss***
3. ***¿Por qué se estudian las ecuaciones diferenciales en ciencia e ingeniería?***
   - ***(a) Porque son más fáciles de resolver que las ecuaciones algebraicas.***
   - ***(b) Porque muchos problemas científicos y de ingeniería se modelan naturalmente con ecuaciones diferenciales.***
   - ***(c) Porque las ecuaciones algebraicas son obsoletas.***
   - ***(d) Para evitar el uso de modelos matemáticos.***
4. ***¿Qué proporcionan las ecuaciones diferenciales en términos de principios físicos y leyes físicas?***
   - ***(a) Representaciones visuales.***
   - ***(b) Formulaciones matemáticas precisas, representando la rapidez de los cambios como derivadas.***
   - ***(c) Simplificaciones de los principios.***
   - ***(d) Resúmenes cualitativos.***
5. ***¿Cuál es el primer paso importante en el estudio de los fenómenos físicos que involucran ecuaciones diferenciales?***
   - ***(a) Resolver la ecuación diferencial.***

- ***(b) Identificar las variables relevantes, hacer suposiciones y formular el problema matemáticamente.***
- ***(c) Ignorar las variables no esenciales.***
- ***(d) Buscar una solución aproximada.***

6. ***En el contexto de la modelación matemática, ¿qué implica un modelo más realista?***
   - ***(a) Mayor simplicidad.***
   - ***(b) Mayor exactitud, pero también mayor complejidad.***
   - ***(c) Menor necesidad de resolver la ecuación.***
   - ***(d) Resultados siempre exactos.***
7. ***¿Qué factor es crucial al preparar modelos matemáticos para problemas reales?***
   - ***(a) Usar solo ecuaciones complejas.***
   - ***(b) Un conocimiento adecuado de los fenómenos naturales y las leyes pertinentes.***
   - ***(c) Ignorar las suposiciones simplificadoras.***
   - ***(d) Evitar cualquier pérdida de exactitud.***
8. ***¿Qué indica una solución incongruente con la naturaleza observada de un problema?***
   - ***(a) El modelo matemático es demasiado refinado.***
   - ***(b) La solución es incorrecta.***
   - ***(c) El modelo matemático empleado es demasiado burdo.***
   - ***(d) Las suposiciones originales son válidas.***
9. ***En el ejemplo de la caída libre de una roca, ¿qué simplificaciones razonables se hacen comúnmente?***
   - ***(a) Ignorar la gravedad.***
   - ***(b) Considerar solo la resistencia del aire.***
   - ***(c) No tener en cuenta la resistencia del aire y la variación de la aceleración gravitacional con la altura.***

- ***(d) Aumentar la aceleración gravitacional.***

10. ***¿Qué se debe recordar sobre los resultados obtenidos de un análisis matemático?***
    - ***(a) Siempre son completamente exactos.***
    - ***(b) Son más exactos que las suposiciones hechas al simplificar el problema.***
    - ***(c) No son más exactos que las suposiciones hechas al simplificar el problema.***
    - ***(d) Son independientes del modelo matemático utilizado.***