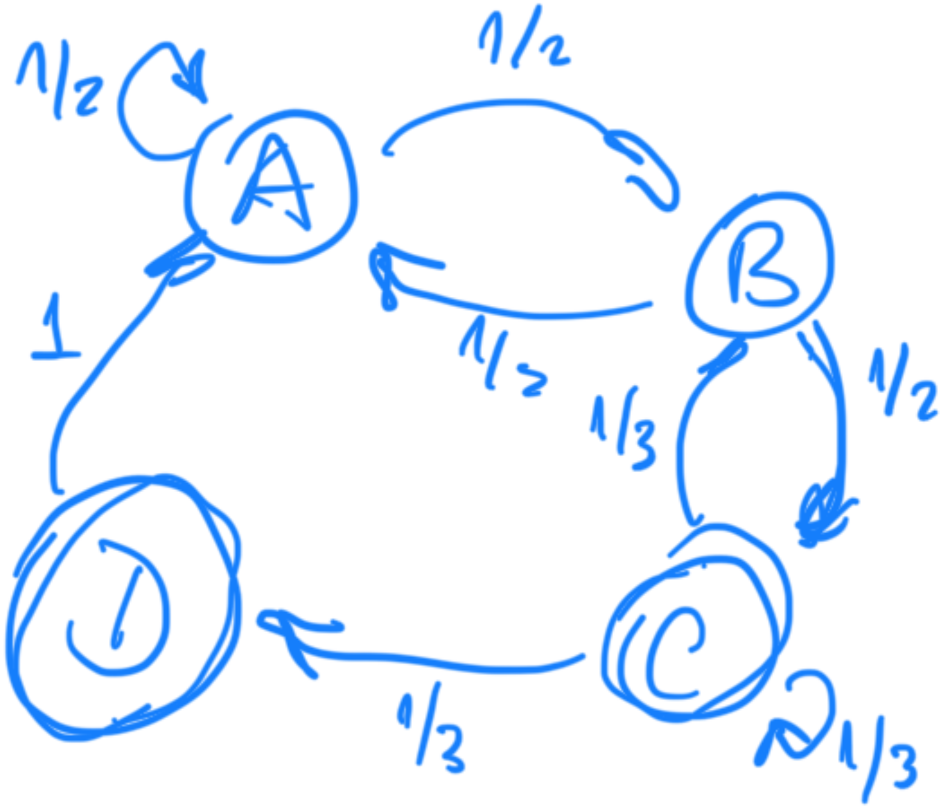
# Markov

tenemos 4 museos




$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \\ C(0) \\ D(0) \end{pmatrix}$$

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$A(1) = \frac{1}{2} A(0) + \frac{1}{2} B(0) + 1\, D(0)$$

$$B(1) = \frac{1}{2} A(0) + \frac{1}{3} C(0)$$

$$C(1) = \frac{1}{2} B(0) + \frac{1}{3} C(0)$$

$$D(1) = \frac{1}{3} C(0)$$

$$\begin{pmatrix} A(1) \\ B(1) \\ C(1) \\ D(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \\ C(0) \\ D(0) \end{pmatrix}$$

$$r^{(1)} = A \quad r^{(0)}$$

$A \rightarrow$ matriz de Markov

Def: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de Markov si:

- $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall j = 1 \dots n$

Proceso de Markov: $r^{(k+1)} = A\, r^{(k)} \quad k \geq 0$

$r^{(k)} \rightarrow$ estado del sistema en el estado $k$

$A \rightarrow$ matriz de transición.

Proposición

i) $1$ es autovalor

ii) si $\lambda$ es autovalor $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$

iii) si $\lambda \neq 1$ es autovalor $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$
y $x$ es autovector asociado.

dem

i) las columnas de $A$ suman $1 \Rightarrow$ las filas de $A^t$ suman $1$

$$A^t \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_i a_{i1}\\ \sum_i a_{i2} \\ \vdots \\ \sum_i a_{in}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

A y $A^t$ tienen los mismos autovalores

$\Rightarrow$ 1 es autovalor de A.

ii) $$Ax = \lambda x \longrightarrow (\lambda x)_i = (Ax)_i$$

$$|\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right|$$

$$|\lambda| \sum_i |x_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right| \le \sum_i \sum_j a_{ij} |x_j|$$

$$|\lambda| \sum_i |x_i| \le \sum_j |x_j| \Big(\underbrace{\sum_i a_{ij}}_{=1}\Big)$$

$$|\lambda| \sum |x_i| \le \sum |x_j| \Rightarrow |\lambda| \le 1$$

$$|\lambda| \sum_i |x_i| \leq \sum_j |x_j| \Longrightarrow |\lambda| \leq 1$$

iii) $\lambda \neq 1 \Rightarrow \sum x_i = 0$

$$(\lambda x)_i = (Ax)_i \Longrightarrow \lambda x_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\sum_i \lambda x_i = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j = \sum_j x_j \underbrace{\sum_i a_{ij}}_{= 1}$$

$$\lambda \sum_i x_i = \sum_j x_j$$

$$\lambda \sum_i x_i - \sum_i x_i = 0 \Rightarrow (\lambda - 1) \sum_i x_i = 0$$

$$\lambda \neq 1 \Rightarrow \underline{\sum_i x_i = 0}$$

---

Del estado de equilibrio

Un vector $v$ se dice estado de equilibrio

si $Av = v$ $\quad v_i \geq 0, \; \sum v_i = 1$

Propiedades

$\rightarrow$ Existe al menos un estado de equilibrio.

$\rightarrow$ $mg_A(1) = ma_A(1)$

$\rightarrow$ no toda matriz de Markov es diagonalizable.

En un proceso de Markov $v^{(0)} \rightarrow v^{(1)} \rightarrow v^{(2)} \rightarrow \cdots$

$v^{(1)} = A v^{(0)} \qquad v^{(2)} = A v^{(1)} = A^2 v^{(0)}$

$\rightarrow$ $v^{(k)} = A^k v^{(0)}$

¿existirá el lím para $r^{(k)}$ cuando $k \to \infty$?

Def: estado límite es el estado $r^{(\infty)}$ cuando existe $\lim_{k \to \infty} r^{(k)} = r^{(\infty)}$

sea $A$ diagonalizable: sea $B = \{r_1 \ldots r_n\}$.

sea $r^{(0)} = \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_n r_n$

$$r^{(k)} = A^k r^{(0)} = \alpha_1 \underline{A^k r_1} + \alpha_2 A^k r_2 + \dots + \alpha_n A^k r_n$$

$$= \underline{\alpha_1 \lambda_1^k r_1 + \alpha_2 \lambda_2^k r_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k r_n}$$

Sé que $|\lambda| \le 1$

$\begin{cases} 1 \Rightarrow \lambda_i^k = 1 \xrightarrow[k \to \infty]{} 1 \\ \dots \text{ no existe el límite} \end{cases}$

$$\lambda_i = \begin{cases} -1 \Rightarrow \text{no existe} \\ |\lambda_i| < 1 \Rightarrow \lambda_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Existe límite para $v^{(k)}$ si $-1$ no es autovalor.

Si $\lambda = -1$ es autovalor el lím puede no existir

<u>Def</u> estado límite

llamamos estado límite a $v^{(\infty)}$ cuando existe $\lim_{k\to\infty} v^{(k)}$

<u>Prop</u> si $A$ es diagonalizable y $-1$ no es autovalor entonces $\exists\, v^{(\infty)}$ para todo $v^{(0)}$ inicial.

Un vector $v$ es de probabilidad si

$$v_i \geq 0 \text{ y } \sum_i v_i = 1$$

- Si $A$ es de Markov entonces se mantienen las "proporciones"

si $v = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$ y $\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}} = Av \Rightarrow \sum x_i = \sum y_i$

$$\underline{(Av)_i} = \sum_j a_{ij} x_j \longrightarrow \boxed{\sum_i y_i = \sum_i (Av)_i}$$

$$= \sum_i (Av)_i = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j = \sum_j x_j \underbrace{\left(\sum_i a_{ij}\right)}_{=1} = \underline{\sum_j x_j}$$

En particular, si <u>$v$ es un vector</u>
<u>de probabilidad</u> $\Longrightarrow$ <u>$Av$ es un vector</u>
<u>de probabilidad</u>

<u>Propiedad</u> si $A$ y $B$ son matrices de
Markov $\Rightarrow$ $AB$ también es de Markov

$$AB = \left( A\,\underline{c_1(B)} \,\middle|\, A\,\underline{c_2(B)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A\,\underline{c_n(B)} \right)$$

$\Rightarrow$ $Ac_i$ de Markov.

$C_i(B)$ es un vector de probas. $\Rightarrow$ $A\,C_i(B)$ también

es un vector de probas. $\Rightarrow$ $AB$ es de Markov.

$\Rightarrow$ $A^k$ es de Markov.

---

## Matriz $A^\infty$

si existe $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ $\Rightarrow$ llamamos $A^\infty$

a ese límite.

Supongamos $A$ diagonalizable.

$A = CDC^{-1}$ $\qquad$ $A^k = CD^kC^{-1}$

suponguamos $\lambda = 1$ tiene multiplicidad 1

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & & & \\ & (\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_n)^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \underbrace{\left( v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n \right)}\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & & * \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \left( a_1 v_1 \middle| a_2 v_1 \middle| \cdots \middle| a_n v_1 \right) = A^\infty$$

$$\sum_i (a_1 v_1)_i = 1 \Rightarrow a_1 \sum_{i=1}^{n} (v_1)_i = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (v_1)_i}$$

$$\rightarrow a_j = \frac{1}{\sum_i (v_1)_i}$$

$$\rightarrow A^{\infty} = \left( w \,\middle|\, w \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, w \right)$$

w es autovector de autovalor 1 cuyas coordenadas suman 1

$$A^{\infty} = \lim_{k \to \infty} A^k$$

$$\rightarrow v^{(\infty)} = A^{\infty} v^{(0)}$$

si $-1$ no es autovalor $\Rightarrow \exists A^{\infty}$

si $-1$ no es autoval y 1 tiene multiplicidad 1

$\longrightarrow A^{\infty} = \left( w \middle| \cdots \middle| w \right)$ $w \in E_1$ vector de prob.