Descomposición LU.

La descomposición LU nos da una manera de escribir una matriz M como un producto

$$M = LU$$

donde L triangular inferior y U triangular superior. La manera de obtener dicha descomposición no es otra que haciendo *eliminación o triangulación gaussiana*. Veamos esto con un par de ejemplos.

Ejercicio 1. *Hallar la descomposición LU de la siguiente matriz*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Procediendo por eliminación gaussiana lo primero que hacemos es obtener ceros debajo de la primera entrada en la columna 1:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-\frac{1}{2}F_1, F_3-\frac{3}{2}F_1, F_4-\frac{1}{4}F_1} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0,5 & 1 & 1,5 \\ 0 & 1,25 & 2 & 3,75 \end{pmatrix}$$

Ahora para obtener ceros debajo de la segunda entrada de la segunda columna hacemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0,5 & 1 & 1,5 \\ 0 & 1,25 & 2 & 3,75 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2, F_4+2,5\cdot F_2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5,5 & 10,25 \end{pmatrix}$$

Finalmente para obtener una matriz diagonal superior hacemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5,5 & 10,25 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-\frac{5,5}{2}F_3} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -0,5 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 \end{pmatrix} =: U$$

Para ver como quedaría la matriz L debemos ver las operaciones que se van haciendo por filas. Por ejemplo, hacer las operaciones por filas $F_2 - \frac{1}{2}F_1$, $F_3 - \frac{3}{2}F_1$ y $F_4 - \frac{1}{4}F_1$ en la matriz M es equivalente a multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

Luego, hacer las operaciones $F_3 + F_2$ y $F_4 + 2,5 \cdot F_2$ es equivalente a multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

Finalmente hacer $F_4 - \frac{5,5}{2}F_3$ es multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2,75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M$$

El producto de las tres matrices que multplican a M por derecha resulta

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 \\ -1,5 & 1 & 1 & 0 \\ -0,25 & -2,5 & -2,75 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa es entonces

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & -1 & 1 & 0 \\ 0,25 & 2,5 & 2,75 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, resulta $M = LU$.

Este proceso de descomposición, es igual al que se hace cuando se quiere resolver sistemas de ecuaciones (donde M es una matriz de coeficientes) porque la matrices triangulares son más fáciles de invertir (esto es lo que se hace cuando se "despeja" en los sistemas). Es decir, si $M = LU$, entonces

$$Mx = y \Leftrightarrow x = U^{-1}L^{-1}y$$

Ejercicio 2. *Hallar la descomposición LU de la siguiente matriz* $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Procediendo por eliminación gaussiana:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1, F_3-\frac{1}{3}F_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2\cdot F_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =: U$$

En este caso la matriz triangular inferior resulta:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos además que la matriz L siempre tiene unos en su diagonal.

Sin embargo, no toda matriz admite una descomposición LU:

Ejercicio 3. *Probar que la siguiente matriz no admite una descomposición LU*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ lu_1 & lu_2 + u_3 \end{pmatrix}$$

Luego $u_1 = 0$ y por tanto $lu_1 = 0 \neq 2$. En consecuencia la matriz A no admite descomposición LU.

En general, esto pasa cuando haciendo el proceso de eliminación gaussiana nos encontramos con un 0 en el lugar que queremos poner ceros debajo. Por ejemplo si tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

al hacer un paso de la eliminación gaussiana resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

que impide continuar con el proceso.

Sin embargo, en este caso, permuntando la segunda fila con la tercera de A podemos llevar hasta el final el proceso de eliminación gaussiana y obtener la consiguiente descomposición LU. En términos matriciales esto quiere decir que

$$PA = LU$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Descomposición de Cholesky.

La descomposición de Cholesky nos da una manera de escribir una matriz M simétrica y definida positiva como un producto

$$M = LL^t$$

donde L triangular inferior. Recordemos que $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^n$ se dice simétrica si $m_{i,j} = m_{j,i}$, o en otras palabras si $M^t = M$. Y M se dice además definida positiva si

$$v^t M v > 0 \quad \forall v \neq 0$$

Una manera de obtener esto es a partir de la descomposición LU. En efecto, si

$$M = \widetilde{L}U$$

y D es la matriz con las entradas diagonales de U, se puede probar a partir de la simetría de M que

$$M = \widetilde{L}D\widetilde{L}^t$$

Dicho sea de paso, esto vale para matrices simétricas en general, no solo las definidas positivas. De hecho, si $M = \widetilde{L}D\widetilde{L}^t$ entonces M es definida positiva si y solo si D lo es, lo cual a su vez es equivalente a D tener todas las entradas positivas. Luego, en ese caso, $D = D_1 D_1$ y definiendo $L := \widetilde{L}D_1$ resulta finalmente

$$M = LL^t$$

Veamos esto con un ejemplo.

Ejercicio 4. *Determinar si la siguiente matriz es simétrica y definda positiva y en dicho caso determinar su descomposición de Cholesky:*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$$

Procediendo por eliminación gaussiana:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3\cdot F_1, F_3 + 4\cdot F_1} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 34 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: U$$

Luego

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

que es definida positiva y por tanto también lo es M. De hecho, su "raíz cuadrada" es

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, en este caso, la matriz triangular inferior resulta:

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que si $L = \widetilde{L}D_1$ entonces

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

y se puede verificar que $M = LL^t$.