Algoritmos y Estructuras de Datos

Reglas básicas de Deducción para lógica proposicional

2023

Verdades universales

- Fórmulas cuyo valor de verdad no depende de cómo se interpretan
  - En PROP son las tautologías
- Contamos con una caracterización semántica de las tautologías
  - Aquellas cuyas tablas de verdad tienen **T** en todas las filas
- Nos interesa tener una caracterización sintáctica
  - Conjunto de fórmulas que se puedan probar en un sistema deductivo
- Beneficio adicional de sistema deductivo:
  - analizar formas argumentativas
  - pruebas como objeto de estudio
- No es el tema de la materia, solamente lo vemos a título informativo

Sistema deductivo y reglas de prueba

Reglas de prueba

- Permitan deducir una fórmula (conclusión) a partir de ciertas otras (premisas)

$$\frac{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \ldots \quad \phi_n}{\psi}\ \textit{Nombre}$$

  - $\phi_1 \quad \phi_2 \quad \ldots \quad \phi_n$: premisas
  - ψ: conclusión

Prueba

- Se construye aplicando sucesivamente reglas de prueba a premisas y conclusiones obtenidas previamente

Pruebas

Un primer ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p}\,Hyp \qquad \dfrac{}{q}\,Hyp}{p \wedge q}\wedge i \qquad \dfrac{}{r}\,Hyp}{(p \wedge q) \wedge r}\wedge i$$

- Prueba de $(p \wedge q) \wedge r$ a partir de p, q y r
- *Hyp* y $\wedge i$ son los nombres de las reglas que se usan en la prueba
- No vamos a escribir los nombres de las reglas, ni las rayas (ni casi nada)

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Ejemplo

$$p, q, r \vdash (p \wedge q) \wedge r \quad \text{(prueba ya vista)}$$

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Ejemplo

$$p, q, r \vdash (p \land q) \land r \quad \text{(prueba ya vista)}$$
$$p \land q \to r,\ p,\ \neg r\ \vdash\ \neg q \quad \text{(¿qué opinan?)}$$

Secuente

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$$

- denota que a partir del conjunto de fórmulas $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ podemos obtener una prueba de ψ
- un secuente es válido si podemos construir una prueba

Ejemplo

$p, q, r \vdash (p \land q) \land r$ (prueba ya vista)
$p \land q \to r,\ p,\ \neg r \ \vdash \ \neg q$ (¿qué opinan?)
$p,\ q \vdash p \ \land \neg q$ (¿?)

Importancia de la elección de las reglas

- Deben permitir construir sólo pruebas que constituyan una argumentación válida
  - Deberían impedir probar secuentes tales como

$$p, \; q \vdash p \;\wedge \neg q$$

- Deberían permitir inferir todas las fórmulas que se desprenden de las premisas

Regla de la hipótesis

Hipótesis

$$\frac{}{\phi}\ \textit{Hyp}$$

- Si ϕ es premisa, puede probar ϕ
- Permite probar el secuente $p \vdash p$
- Se usa en combinación con las demás reglas
- A veces se omite la raya y la referencia al nombre de la regla

Reglas para la conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

Reglas para la conjunción

Introducción de la conjunción

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge i$$

Eliminación de la conjunción

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1 \qquad\qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

Ejemplo de prueba

Secuente a probar: $p,\ q,\ r\ \vdash (p \wedge q) \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad q}{p \wedge q}\,\wedge i \qquad r}{(p \wedge q) \wedge r}\,\wedge i$$

1	p	premisa
2	q	premisa
3	r	premisa
4	$p \wedge q$	$\wedge i$ 1, 2
5	$(p \wedge q) \wedge r$	$\wedge i$ 4, 3

- Dos formas de escribir
- Usaremos alguna (o ninguna)
- Observar que esta prueba hace uso de la regla de la hipótesis (pero no se escribe)

Otro ejemplo de prueba

Ejemplo: $p \wedge q,\ r \vdash q \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\ \wedge e_2 \qquad\qquad r}{q \wedge r}\ \wedge i$$

1	$p \wedge q$	premisa
2	r	premisa
3	q	$\wedge e_2$ 1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$ 3, 2

Reglas para la doble negación

Introducción de la doble negación

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i$$

Eliminación de la doble negación

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$$

Reglas para la doble negación

Ejemplo: $p,\ \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{p}{\neg\neg p}\,\neg\neg i \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg(q \wedge r)}{q \wedge r}\,\neg\neg e}{r}\,\wedge e_2}{\neg\neg p \wedge r}\,\wedge i$$

1	p	premisa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premisa
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1
4	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 2
5	r	$\wedge e_2$ 4
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 3, 5

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
p &\equiv \text{llovió} \\
p \rightarrow q &\equiv \text{Si llovió, está mojado}
\end{aligned}
$$

De estas dos premisas queremos concluir *está mojado* (q)

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo

$$p \equiv \text{llovió}$$
$$p \to q \equiv \text{Si llovió, está mojado}$$

De estas dos premisas queremos concluir *está mojado* (q)

Eliminación de la implicación

$$\frac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi} \to e$$

Notar que dada una implicación, para inferir la conclusión debemos saber que vale su premisa

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo: $p,\ p \to (q \to r), p \to q \vdash r$

Reglas para la eliminación de la implicación

Ejemplo: $p,\ p \to (q \to r), p \to q \vdash r$

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad p \to q}{q}\,{\to}e \qquad \dfrac{p \qquad p \to (q \to r)}{q \to r}\,{\to}e}{r}\,{\to}e$$

Introducción de la implicación

Introducción de la implicación

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} \phi^{n} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\phi \rightarrow \psi} \rightarrow i, n$$

- ϕ es una suposición temporaria que nos permite probar ψ.
- ϕ es la primera fórmula en el recuadro y ψ es la última.
- Se suele darle una etiqueta a ϕ (en este caso, un número n).
- los recuadros pueden anidarse.

Ejemplos

Ejemplo: $\vdash p \land q \to p$

$$\cfrac{\boxed{\cfrac{\cfrac{}{(p \land q)^1}\ \textit{Hyp}}{p}\ \land e_1}}{p \land q \to p}\ \to_i, 1$$

Ejemplos

Ejemplo: $\vdash p \wedge q \to p$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{}{(p \wedge q)^1}\,\mathit{Hyp}}{p}\,\wedge e_1}}{p \wedge q \to p}\,\to_i, 1$$

Ejemplo: $\vdash p \wedge q \to q \wedge p$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \wedge q)^1}\,\mathit{Hyp}}{q}\,\wedge e_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{(p \wedge q)^1}\,\mathit{Hyp}}{p}\,\wedge e_1}{q \wedge p}\,\wedge i}}{p \wedge q \to q \wedge p}\,\to_i, 1$$

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash p \rightarrow p$

1	$\boxed{p}$	premisa
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ $1-1$

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash p \to p$

$$
\begin{array}{ll}
1 & \boxed{\begin{array}{ll} p & \text{premisa} \end{array}} \\
2 & \begin{array}{ll} p \to p & \to i\ 1-1 \end{array}
\end{array}
$$

- El hecho de que el conjunto de premisas es vacío indica que la prueba de $p \to p$ no depende de ninguna premisa.

Otro ejemplo

Ejemplo: $\vdash p \to p$

$$\begin{array}{ll} 1 & \boxed{p \qquad\qquad \text{premisa}} \\ 2 & p \to p \quad \to i \ 1-1 \end{array}$$

- El hecho de que el conjunto de premisas es vacío indica que la prueba de $p \to p$ no depende de ninguna premisa.

Siempre se puede transformar una prueba para $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ en una prueba para $\vdash \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi))))$ aplicando n veces $\to i$ en el siguiente orden $\phi_n, \phi_{n-1}, \ldots, \phi_1$.

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $p \rightarrow q$ y $\neg q$, podemos decir algo respecto de p?

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $p \to q$ y $\neg q$, podemos decir algo respecto de p?
  - Notar que si p fuese verdadero, entonces por $\to e$, q debería ser verdadero, lo que contradice el hecho de que vale $\neg q$.
  - En este caso podemos concluir que vale $\neg p$.

Modus tollens

- Permite eliminar la implicación en el caso en que sabemos que la conclusión es falsa
  - Si vale $p \to q$ y $\neg q$, podemos decir algo respecto de p?
  - Notar que si p fuese verdadero, entonces por $\to e$, q debería ser verdadero, lo que contradice el hecho de que vale $\neg q$.
  - En este caso podemos concluir que vale $\neg p$.
- No es una regla primitiva (vamos a ver que se puede obtener como combinación de otras)

Modus tollens

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

Modus tollens

Ejemplo: $p,\ \neg r, p \to (q \to r) \vdash \neg q$

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad p \to (q \to r)}{q \to r}\,{\to}e \qquad\qquad \neg r}{\neg q}\,MT$$

Teoremas

Teorema

Llamamos teorema a toda fórmula lógica ϕ tal que el secuente $\vdash \phi$ es válido.

Ejercicio

Mostrar que $(q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$ es un teorema

Reglas para la disyunción

Introducción de la o

$$\frac{\phi}{\phi \lor \psi} \lor i_1 \qquad \frac{\psi}{\phi \lor \psi} \lor i_2$$

Reglas para la disyunción

Introducción de la o

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee i_1 \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee i_2$$

Eliminación de la o

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi^n \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi^m \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi} \vee e, n, m$$

no se pueden utilizar fórmulas probadas dentro de un recuadro en el otro!!!

Reglas para la disyunción

Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$

1	$p \vee q$	premisa
2	p	premisa
3	$q \vee p$	$\vee i_2$ 2
4	q	premisa
5	$q \vee p$	$\vee i_1$ 4
6	$q \vee p$	$\vee e$ $1, 2-3, 4-5$

Contradicción

Contradicción

Una contradicción es una expresión de la forma $\phi \wedge \neg\phi$ o $\neg\phi \wedge \phi$

- Vamos a denotar una contradicción con $\perp$
- Cualquier fórmula puede ser derivada a partir de una contradicción

Contradicción

Contradicción

Una contradicción es una expresión de la forma $\phi \land \neg\phi$ o $\neg\phi \land \phi$

- Vamos a denotar una contradicción con $\bot$
- Cualquier fórmula puede ser derivada a partir de una contradicción

Eliminación de contradicción

$$\frac{\bot}{\phi}\ \bot e$$

Pensar que $\phi \land \neg\phi \vdash \psi$ se corresponde con $\vdash \phi \land \neg\phi \to \psi$

Reglas para la negación

Eliminación de la negación

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$$

Introducción de la negación

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l}\phi^n \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i, n$$

Reglas para la negación

Ejemplo: $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Reglas para la negación

Ejemplo: $p \to \neg p \vdash \neg p$

1	$p \to \neg p$	premisa
2	p	premisa
3	$\neg p$	$\to e$ $1, 2$
4	$\bot$	$\neg e$ $2, 3$
5	$\neg p$	$\neg i$ $2 - 4$

Reglas básicas (1/2)

	Introducción	Eliminación
Hyp	$\dfrac{}{\phi}\ \mathit{Hyp}$	
$\wedge$	$\dfrac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge i$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge e_1 \qquad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge e_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee i_2$	$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi^n \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi^m \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e, n, m$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi^n \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ \rightarrow i, n$	$\dfrac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ \rightarrow e$

Reglas básicas (2/2)

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi^n\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg i, n$	$\dfrac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg e$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\phi}\ \bot e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg e$

Reglas derivadas

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg i \qquad\qquad \frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}\ MT$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l}\neg\phi^{n}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ PBC, n \qquad\qquad \frac{}{\phi \lor \neg\phi}\ LEM$$