Algoritmos y Estructuras de Datos

Lógica de predicados y
(algunas reglas de) Deducción para Lógica de predicados

2023

Predicados

Considerar la frase

Todo estudiante es más joven que algún profesor

- En PROP lo representaríamos con una variable proposicional p
- Se pierde información sobre la estructura lógica de la frase
  - ser estudiante
  - ser profesor
  - ser más joven que

Individuos, predicados, variables y cuantificadores

Todo estudiante es más joven que algún profesor

$$\forall x.(E(x) \rightarrow (\exists y(P(y) \wedge J(x,y))))$$

- Individuos (entidad distintiva e indivisible):
  - Estudiantes y profesores
  - Denotados por las variables x e y
- Predicados (predican sobre individuos):
  - $E(x)$: x es estudiante
  - $P(x)$: x es profesor
  - $J(x,y)$: x es más joven que y
- Cuantificadores
  - $\forall$: Para todo
  - $\exists$: Existe (para algún)

Funciones

Toda persona es menor que su madre biológica

- $G(x)$: x es persona
- $M(y, x)$: y es la madre de x

$$\forall x. \forall y. (G(x) \wedge M(y, x) \rightarrow J(x, y))$$

Funciones:

- Permiten representar objetos de manera más directa
- En lugar de escribir $M(y, x)$ podemos denotar a y con $m(x)$

$$\forall x. (G(x) \rightarrow J(x, m(x)))$$

Otro ejemplo: *Andrea y Pedro tienen la misma abuela materna*

$$m(m(andrea)) = m(m(pedro))$$

Términos y fórmulas

La lógica de predicados habla sobre dos clases de cosas:

- Individuos: Personas, números, colores, bolitas, grafos, árboles, etc.
  - Las expresiones que denotan individuos se llaman términos
  - Ej: las variables
  - Ej: Constantes como $andrea$ y expresiones como $m(andrea)$
- Valores de verdad
  - Las expresiones que denotan valores de verdad se llaman fórmulas
  - Ej: $J(x, y)$

Cuantificadores tipados

En general, vamos a aplicar cuantificadores a elementos de un tipo de datos

- $(\forall x : T)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **todos** los elementos de tipo T cumplen la propiedad P.
  - Se lee "Para todo x de tipo T se cumple $P(x)$"
- $(\exists x : T)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **al menos un** elemento de tipo T cumple la propiedad P.
  - Se lee "Existe al menos un x de tipo T que cumple $P(x)$"

Cuantificadores tipados

En general, vamos a aplicar cuantificadores a elementos de un tipo de datos

- $(\forall x : T)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **todos** los elementos de tipo T cumplen la propiedad P.
  - Se lee "Para todo x de tipo T se cumple $P(x)$"
- $(\exists x : T)\ P(x)$: Fórmula lógica. Afirma que **al menos un** elemento de tipo T cumple la propiedad P.
  - Se lee "Existe al menos un x de tipo T que cumple $P(x)$"

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

  $$n > 1 \ \wedge \ (\forall n' : Z)(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$$

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

  $$n > 1 \ \land \ (\forall n' : Z)(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$$

  (Observación: `x mod y` se indefine si $y = 0$)
- Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:

  $(\forall n : Z)(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0)$.

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

  $$n > 1 \ \wedge \ (\forall n' : Z)(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$$

  (Observación: `x mod y` se indefine si $y = 0$)
- Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:
  $(\forall n : Z)(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0)$.
- Existe un entero entre 1 y 10 que es par:
  $(\exists n : Z)(1 \leq n \leq 10 \wedge n \bmod 2 = 0)$.

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

  $$n > 1 \;\wedge\; (\forall n' : Z)(1 < n' < n \rightarrow_L n \text{ mod } n' \neq 0)$$

  (Observación: `x mod y` se indefine si $y = 0$)
- Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:
  $(\forall n : Z)(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \text{ mod } 2 = 0)$.
- Existe un entero entre 1 y 10 que es par:
  $(\exists n : Z)(1 \leq n \leq 10 \wedge n \text{ mod } 2 = 0)$.
- En general, si queremos decir que todos los enteros x que cumplen $P(x)$ también cumplen $Q(x)$, decimos:
  $(\forall x : Z)(P(x) \rightarrow Q(x))$.

Ejemplos

- ¿qué dice el siguiente predicado?

  $$n > 1 \;\wedge\; (\forall n' : Z)(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$$

  (Observación: `x mod y` se indefine si $y = 0$)

- Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:
  $(\forall n : Z)(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0)$.

- Existe un entero entre 1 y 10 que es par:
  $(\exists n : Z)(1 \leq n \leq 10 \wedge n \bmod 2 = 0)$.

- En general, si queremos decir que todos los enteros x que cumplen $P(x)$ también cumplen $Q(x)$, decimos:
  $(\forall x : Z)(P(x) \rightarrow Q(x))$.

- Para decir que existe un entero que cumple $P(x)$ y que también cumple $Q(x)$, decimos:
  $(\exists x : Z)(P(x) \wedge Q(x))$.

Algunas reglas de deducción

- La negación de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:

  $\neg(\forall n)P(n) \ \leftrightarrow \ (\exists n)\neg P(n).$

  $\neg(\exists n)P(n) \ \leftrightarrow \ (\forall n)\neg P(n).$

Algunas reglas de deducción

- La negación de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:
  $\neg(\forall n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\exists n)\neg P(n).$
  $\neg(\exists n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\forall n)\neg P(n).$
- Un cuantificador universal generaliza la conjunción:
  $$(\forall n : Z)P(n)\big)\leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots$$

Algunas reglas de deducción

- La negación de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:
  $\neg(\forall n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\exists n)\neg P(n).$
  $\neg(\exists n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\forall n)\neg P(n).$
- Un cuantificador universal generaliza la conjunción:
  $$\big((\forall n : Z)P(n)\big) \leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots$$
- Un cuantificador universal generaliza la disyunción:
  $$\big((\exists n : Z)P(n)\big) \leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee \dots$$

Algunas reglas de deducción

- La negación de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:

  $\neg(\forall n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\exists n)\neg P(n).$

  $\neg(\exists n)P(n) \;\leftrightarrow\; (\forall n)\neg P(n).$

- Un cuantificador universal generaliza la conjunción:

  $$\big((\forall n : Z)P(n)\big) \leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots$$

- Un cuantificador universal generaliza la disyunción:

  $$\big((\exists n : Z)P(n)\big) \leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee \dots$$

Sintaxis de PRED

Semántica de PRED

Deducción Natural para PRED

Lenguaje de primer orden

Un lenguaje de primer orden (LPO) $\mathcal{L}$ consiste en:

1. Un conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos de función cada uno con aridad[1] $n > 0$: $f_0, f_1, \ldots, f_n$
2. Un conjunto numerable $\mathcal{C}$ de constantes: $c_0, c_1, \ldots$
3. Un conjunto $\mathcal{P}$ de símbolos de predicado cada uno con aridad $n \geq 0$: $P_0, P_1, \ldots, P_m, \doteq$.
   - El símbolo de predicado $\doteq$ denotará igualdad.

Ejemplo: Lenguaje de primer orden para la aritmética

Símbolos de función: $S, +, *$; Constantes: 0; Símbolos de predicado: $\doteq, <$.

[1] Aridad=Número de argumentos que toman

Términos de primer orden

Sea $\mathcal{V} = \{x_0, x_1, \ldots\}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un LPO. El conjunto de $\mathcal{L}$-términos se define inductivamente como:

1. Toda constante de $\mathcal{L}$ y toda variable es un $\mathcal{L}$-término
2. Si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{L}$-términos y f es un símbolo de función de aridad n, entonces $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{L}$-términos

En notación abreviada:

$$t ::= c \mid x \mid f(t, \ldots, t)$$

Ejemplo: Aritmética (cont.)

$S(0), +(S(0), S(S(0))), *(S(x_1), +(x_2, S(x_3)))$

Fórmulas atómicas

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un LPO. El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas atómicas se define inductivamente como:

1. Todo símbolo de predicado de aridad 0 es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica
2. Si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{L}$-términos y P es un símbolo de predicado de aridad n, entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica
   Por ejemplo: Si $t_1, t_2 \in \mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 \doteq t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula atómica

Ejemplo: Aritmética (cont.)

$< (0, S(0)), < (x_1, +(S(0), x_2)), \doteq (0, S(S(x_1)))$

Fórmulas de primer orden

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables y $\mathcal{L}$ un LPO. El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas se define inductivamente como:

1. Toda $\mathcal{L}$-fórmula atómica es una $\mathcal{L}$-fórmula
2. Si $\phi, \psi \in \mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ y $(\neg\phi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas
3. Para toda variable x_i y cualquier $\mathcal{L}$-fórmula ϕ, $(\forall x_i.\phi)$ y $(\exists x_i.\phi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas

Variables libres y ligadas

- Una ocurrencia de x en ϕ es ligada si x ocurre en un subtérmino de la forma $\forall x.\psi$ o $\exists x.\psi$.
- Una ocurrencia es libre si no es ligada.
- Una variable es libre (ligada) en una fórmula si ocurre libre (ligada) en la fórmula.

Ejemplo

$P(x) \wedge \forall x.(R(x, y) \to \exists z.P(z))$

- y es libre
- z es ligada
- x es libre y ligada

Variables libres y ligadas

- Usamos $FV(\phi)$ y $BV(\phi)$ para referirnos al conjunto de las variables libres y ligadas de ϕ, respectivamente (Free y Bounded)
- $FV(\phi)$ y $BV(\phi)$ se pueden definir por inducción estructural en ϕ

Ejemplo

Si $\phi = \forall x.(R(x, y) \to P(x))$, entonces $FV(\phi) = \{y\}$ y $BV(\phi) = \{x\}$

- Sentencia: fórmula cerrada (i.e. sin variables libres)

Sustitución

Dada una variable x, un término t y una fórmula ϕ, escribimos

$$\phi\{t/x\}$$

para denotar la fórmula que se obtiene de reemplazar cada ocurrencia libre de x en ϕ por t (evitando capturas).

Ejemplos

- $P(x, y)\{w/x\} = P(w, y)$
- $P(x, y)\{w/z\} = P(x, y)$
- $(\exists z.P(x, y))\{w/x\} = \exists z.P(w, y)$
- $(\exists x.P(x, y))\{w/x\} = \exists x.P(x, y)$
- $(\forall w.P(x, y))\{w/x\} \neq \forall w.P(w, y)$

Notación especial para fórmulas y sustitución

- Si ϕ es una fórmula, escribimos
$$\phi(x)$$
para indicar que ϕ podría tener cero o más ocurrencias de x
- Más generalmente usamos
$$\phi(x_1, \ldots, x_n)$$
para indicar que ϕ podría tener cero o más ocurrencias de $x_1, \ldots, x_n$
- Si t es un término, entonces
$$\phi(t)$$
denota $\phi\{t/x\}$
  - Se asume que t está libre para x en ϕ (i.e. no se capturan variables de t en ϕ)

Sintaxis de PRED

Semántica de PRED

Deducción Natural para PRED

Estructura de primer orden

Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una estructura para $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, es un par

$$\mathcal{M} = (M, I)$$

donde

- M (universo) es un conjunto no vacío
- I (función de interpretación) asigna funciones y predicados sobre M a símbolos de $\mathcal{L}$ de la siguiente manera:
  1. Para toda constante c, $I(c) \in M$
  2. Para todo f de aridad $n > 0$, $I(f) : M^n \to M$
  3. Para todo predicado P de aridad $n \geq 0$ $I(P) \subseteq M^n$
  4. $I(\doteq)$ es la relación de identidad sobre M

Asignación

Asignación

Sea $\mathcal{M}$ una estructura para $\mathcal{L}$. Una asignación es una función $s : \mathcal{V} \to M$

Dado s podemos definir $\widehat{s}$ que se puede aplicar a términos para obtener el individuo del universo que denota

Extensión de una asignación a términos

$$\begin{aligned}
\widehat{s}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} s(x) \\
\widehat{s}(c) &\stackrel{\text{def}}{=} I(c) \\
\widehat{s}(f(t_1, \ldots, t_n)) &\stackrel{\text{def}}{=} I(f)(\widehat{s}(t_1), \ldots, \widehat{s}(t_n))
\end{aligned}$$

Nota: a veces abusamos de la notación y escribimos simplemente s en lugar de $\widehat{s}$

Satisfactibilidad

Satisfactibilidad

La relación $s \models_{\mathcal{M}} \phi$ establece que la asignación s satisface la fórmula ϕ en la estructura $\mathcal{M}$

- Vamos a definir la relación $s \models_{\mathcal{M}} \phi$ de manera formal usando inducción estructural en ϕ
- Si s es una asignación y $a \in M$, usamos la notación $s[x \leftarrow a]$ para denotar la asignación que se comporta igual que s salvo en el elemento x, en cuyo caso retorna a

Satisfactibilidad

La relación $s \models_{\mathcal{M}} \phi$ se define inductivamente como:

$$
\begin{array}{rcl}
s \models_{\mathcal{M}} P(t_1, \ldots, t_n) & \textit{sii} & (\widehat{s}(t_1), \ldots, \widehat{s}(t_n)) \in I(P) \\
s \models_{\mathcal{M}} \neg\phi & \textit{sii} & s \not\models_{\mathcal{M}} \phi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \wedge \psi) & \textit{sii} & s \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ y } s \models_{\mathcal{M}} \psi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \vee \psi) & \textit{sii} & s \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ o } s \models_{\mathcal{M}} \psi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \rightarrow \psi) & \textit{sii} & s \not\models_{\mathcal{M}} \phi \text{ o } s \models_{\mathcal{M}} \psi \\
s \models_{\mathcal{M}} (\phi \leftrightarrow \psi) & \textit{sii} & (s \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ sii } s \models_{\mathcal{M}} \psi) \\
s \models_{\mathcal{M}} \forall x_i.\phi & \textit{sii} & s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ para todo } a \in M \\
s \models_{\mathcal{M}} \exists x_i.\phi & \textit{sii} & s[x_i \leftarrow a] \models_{\mathcal{M}} \phi \text{ para algún } a \in M
\end{array}
$$

Validez

- Una fórmula ϕ es satisfactible en $\mathcal{M}$ sii existe una asignación s tal que
$$s \models_{\mathcal{M}} \phi$$
- Una fórmula ϕ es satisfactible sii existe un $\mathcal{M}$ tal que ϕ es satisfactible en $\mathcal{M}$. En caso contrario se dice que ϕ es insatisfactible.
- Una fórmula ϕ es válida o verdadera en $\mathcal{M}$ sii
$$s \models_{\mathcal{M}} \phi, \text{ para toda asignación } s$$
- Una fórmula ϕ es válida sii es válida en toda estructura $\mathcal{M}$.
- **Nota:** ϕ es válida sii $\neg\phi$ es insatisfactible.

Ejemplos de fórmulas válidas

- $\forall x.\phi(x) \to \exists x.\phi(x)$
- $\forall x.\phi(x) \to \neg\forall x.\neg\phi(x)$
- $\forall x.\forall y.\phi(x,y) \to \forall y.\forall x.\phi(x,y)$
- $\forall x.(\phi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x.\phi(x) \wedge \forall x.\psi(x)$
- y las que vimos antes...

Sintaxis de PRED

Semántica de PRED

Deducción Natural para PRED

Reglas para el cuantificador universal

- Primero mostramos las reglas de $\forall$ (las de $\exists$ se introducirán en breve)
- Las reglas exhibidas abajo deben agregarse a las que ya teníamos de PROP

$$\frac{\phi(x)}{\forall x.\phi(x)}\,\forall i \qquad \frac{\forall x.\phi(x)}{\phi(t)}\,\forall e$$

Importante:

- En $\forall i$ x no puede ocurrir libre en ninguna de las hipótesis de las que $\phi(x)$ depende

Ejemplo

$$\vdash \forall x.(\phi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \forall x.\phi(x) \wedge \forall x.\psi(x)$$

Ejercicios

Asumiendo que $x \notin FV(\phi)$, probar:

- $\forall x.(\phi \to \psi(x)) \to (\phi \to \forall x.\psi(x))$
- $\phi \leftrightarrow \forall x.\phi$

Cuantificador existencial

$$\frac{\phi(t)}{\exists x.\phi(x)}\ \exists i \qquad\qquad \frac{\exists x.\phi(x) \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi^{n}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\psi}\ \exists e$$

Importante:

- En $\exists e$, x no debe ocurrir libre en ψ ni en ninguna hipótesis de la subderivación de ψ, salvo $\phi(x)$.

Ejemplo

- $\forall x.(\phi(x) \to \psi) \to (\exists x.\phi(x) \to \psi)$, donde $x \notin FV(\psi)$.

Reglas para la igualdad

$$\frac{}{x \doteq x}\ RI_1 \qquad \frac{x \doteq y}{y \doteq x}\ RI_2 \qquad \frac{x \doteq y \quad y \doteq z}{x \doteq z}\ RI_3$$

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \ldots x_n \doteq y_n}{t\{x_1, \ldots, x_n/z_1, \ldots, z_n\} \doteq t\{y_1, \ldots, y_n/z_1, \ldots, z_n\}}\ RI_4$$

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \ldots x_n \doteq y_n \qquad \phi\{x_1, \ldots, x_n/z_1, \ldots, z_n\}}{\phi\{y_1, \ldots, y_n/z_1, \ldots, z_n\}}\ RI_5$$

Ejemplos

- $\exists x. t \doteq x$, para cualquier término t
- $\forall z. (z \doteq x \rightarrow z \doteq y) \rightarrow x \doteq y$

Resumen de PRED

- Sintaxis
  - Lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$
  - Términos sobre $\mathcal{L}$ (denotan individuos)
  - Fórmulas sobre $\mathcal{L}$ (denotan valores de verdad)
- Semántica
  - Estructuras: universo+interpretación de los símbolos de $\mathcal{L}$
- Deducción Natural