Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

Propiedades de Lenguajes Regulares

Primer Cuatrimestre 2025

Bibliografía: Capítulo 4, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Teorema

El conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por union, intersección y complemento.

Es decir, el conjunto de los lenguajes regulares incluidos en Σ^* es un álgebra Booleana de conjuntos.

Demostración: el conjunto delos lenguajes regulares está cerrado por unión

Sean L_1 y L_2 lenguajes regulares. Debemos pobar que $L_1 \cup L_2$ es regular.
Sean AFDs $M_1 =< Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1 >$ y $M_2 =< Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2 >$, $\delta_1 : Q_1 \times \Sigma \to Q_1$, $\delta_2 : Q_2 \times \Sigma \to Q_2$, donde $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$ tales que $L_1 = \mathcal{L}(M_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(M_2)$.

Definimos AFND-λ $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$, con
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$ donde

- q_0 es un nuevo estado es decir, $q_0 \notin Q_1$ y $q_0 \notin Q_2$.
- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$.
- *si* $\lambda \notin L_1$ y $\lambda \notin L_2$ entonces $F = F_1 \cup F_2$. Sino, $F = F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\}$.
- $\delta(q_0, \lambda) = \{q_1, q_2\}$.
- $\forall q \in Q_1, \forall a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_1(q, a)\}$.
- $\forall q \in Q_2, \forall a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_2(q, a)\}$.

Notemos que $Cl_\lambda(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$ y para todo $q \neq q_0$, $Cl_\lambda(q) = \{q\}$.

Notemos que
para todo $q \in Q_1$, $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_1(q, a)\}$, y
para todo $q \in Q_2$, $a \in \Sigma$, $\delta(q, a) = \{\delta_2(q, a)\}$.

Por definición tenemos $\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\overline{\delta}}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$
donde
$\overline{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$,
$\overline{\delta}(q, a) = Cl_\lambda \left(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q)} \delta(p, a) \right)$

$\widehat{\overline{\delta}} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,
$\widehat{\overline{\delta}}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$,
$\widehat{\overline{\delta}}(q, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\overline{\delta}}(q,x)} \overline{\delta}(p, a)$.

Caso $w = \lambda$.

$$
\begin{aligned}
\lambda \in \mathcal{L}(M_) &\Leftrightarrow \hat{\overline{\delta}}(q, \lambda) \cap F \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \{q_0, q_1, q_2\} \cap F \neq \emptyset, \quad \text{porque } \hat{\overline{\delta}}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q_0) \\
&\Leftrightarrow q_1 \in F_1 \text{ o } q_2 \in F_2, \quad \text{por def de } M \\
&\Leftrightarrow \lambda \in (\mathcal{L}(M_1) \text{ o } \lambda \in \mathcal{L}(M_2) \\
&\Leftrightarrow \lambda \in (\mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2)).
\end{aligned}
$$

Caso $w \neq \lambda$. Consideremos
$\hat{\delta_1} : Q_1 \times \Sigma^* \to Q_1$, $\hat{\delta_1}(q, \lambda) = q$, $\hat{\delta_1}(q, xa) = \delta_1(\hat{\delta_1}(q, x), a)$
$\hat{\delta_2} : Q_2 \times \Sigma^* \to Q_2$, $\hat{\delta_2}(q, \lambda) = q$, $\hat{\delta_2}(q, xa) = \delta_2(\hat{\delta_2}(q, x), a)$

Demostremos que para todo $q \in Q$, $w \in \Sigma^+$,

$$\hat{\overline{\delta}}(q_0, w) = \{\widehat{\delta_1}(q_1, w)\} \cup \{\widehat{\delta_2}(q_2, w)\}$$

Para $w = a$.

$$\hat{\overline{\delta}}(q_0, a) = \overline{\delta}(q_0, a) = Cl_\lambda\Big(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q_0)} \delta(p, a)\Big) = \{\delta_1(q_1, a)\} \cup \{\delta_2(q_2, a)\}.$$

Para $w = xa$, con $x \in \Sigma^+$, es decir $|x| \geq 1$.
Supongamos la propiedad vale para x.

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{\delta}}(q_0, xa) &= \cup_{p \in \hat{\overline{\delta}}(q_0, x)} \overline{\delta}(p, a) \\
&= \cup_{p \in (\{\hat{\delta_1}(q_1, x)\} \cup \{\hat{\delta_2}(q_2, x)\})} \overline{\delta}(p, a), \quad \text{por HI} \\
&= \Big(\cup_{p \in \{\hat{\delta_1}(q_1, x)\}} \{\delta_1(p, a)\}\Big) \cup \Big(\cup_{p \in \{\hat{\delta_2}(q_1, x)\}} \{\delta_2(p, a)\}\Big) \\
&= \{\delta_1(\hat{\delta_1}(q_1, x), a)\} \cup \{\delta_2(\hat{\delta_2}(q_1, x), a)\} \\
&= \{\hat{\delta_1}(q_1, xa)\} \cup \{\hat{\delta_2}(q_1, xa)\}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w \in \mathcal{L}(M) &\Leftrightarrow \widehat{\overline{\delta}}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \{\hat{\hat{\delta}}_1(q_1, w), \hat{\hat{\delta}}_2(q_2, w)\} \cap (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \hat{\hat{\delta}}_1(q_1, w) \in F_1, \text{ o } \hat{\hat{\delta}}_2(q_1, w) \in F_2 \\
& w \in \mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2).
\end{aligned}
$$

Demostración: El conjunto de lenguajes regulares es cerrado por complemento.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ completo, con $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ y sea $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Usamos $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$,
$\widehat{\delta}(q, \lambda) = q$, $\widehat{\delta}(q, xa) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a)$, Sea $w \in \Sigma^*$.

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{L}(M) &\text{ si y solo si } \widehat{\delta}(q_0, w) \in F \\ &\text{ si y solo si } \widehat{\delta}(q_0, w) \notin (Q \setminus F) \\ &\text{ si y solo si } w \notin \mathcal{L}(M'). \end{aligned}$$

□

El conjunto de lenguajes regulares es cerrado por intersección.

Sean L_1 y L_2 regulares.

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}.$$

Dado que los lenguajes regulares están cerrdos por unión y complemento, concluimos que $L_1 \cap L_2$ es regular. $\square$

Una demostración alternativa

El conjunto de lenguajes regulares está cerrado por intersección.

Dados M_1 y M_2 AFDs, definimos M' tal que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2)$. Sea $M^{'} =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F' >$ con

- $Q' = Q_1 \times Q_2$
- $\delta'((q,r),a) = (\delta_1(q,a), \delta_2(r,a))$ para $q \in Q_1$ y $r \in Q_2$
- $q_0' = (q_{0_1}, q_{0_2})$
- $F' = F_1 \times F_2$

entonces

$$
\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(M^{'}) &\Leftrightarrow \widehat{\delta'}((q_{0_1}, q_{0_2}), \alpha) \in F' \\
&\Leftrightarrow \left(\widehat{\delta_1}(q_{0_1}, \alpha), \widehat{\delta_2}(q_{0_2}, \alpha)\right) \in F_1 \times F_2 \\
&\Leftrightarrow \left(\widehat{\delta_1}(q_{0_1}, \alpha) \in F_1\right) \text{ y } \left(\widehat{\delta_2}(q_{0_2}, \alpha) \in F_2\right) \\
&\Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{L}(M_1) \text{ y } \alpha \in \mathcal{L}(M_2).
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema

El conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por concatenacion.

Teorema

El conjunto de los lenguajes regulares está cerrado por reversa.

Teorema

La unión finita y la intersección finita de lenguajes regulares dan por resultado un leguaje regular.

Demostración.

Debemos ver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=1}^{n} L_i \text{ es regular, y } \forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=1}^{n} L_i \text{ es regular.}$$

Por inducción en n.

- Caso base $n = 0$: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{0} L_i = \emptyset$ es regular.
- Caso inductivo:
  Supongamos que para $n > 0$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ es regular. Veamos que vale para $n + 1$.
  $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n+1} L_i = \bigcup_{i=1}^{n} L_i \cup L_{n+1}$ es regular, por ser la union de dos regulares.

La demostración para $\cap$ es similar. $\square$

Teorema

Todo lenguaje finito es regular.

Demostración.

Sea L un lenguaje finito, con n cadenas, $L = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots n$, sea $L_i = \{\alpha_i\}$.

Entonces $L = \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha_i\}$.

Como cada $\{\alpha_i\}$ es regular, entonces L también lo es. $\square$

Definición

Un conjunto A de números naturales es decidible si hay un algoritmo que para cualquier número natural responde si pertenece o no al conjunto A.

La definición de decidibilidad se extiende a otros conjuntos que los naturales, y a otros problemas que la pertenecia. En cada caso significa la existencia de un algoritmos que resuelve la pregunta por sí o por no.

Teorema

Los siguentes problemas sobre lenguajes regulares son decidibles:

Vacuidad: Dado $L \subseteq \Sigma^*$ *regular, ¿Es* $L = \emptyset$*?,*
Pertenencia: Dado $L \subseteq \Sigma^*$ *regular y dada un palabra* $w \in \Sigma^*$*, ¿*$w \in L$*?*
Equivalencia: Dados $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ *regular ¿*$L_1 = L_2$*?*

1. (Pertenencia) Para toda $\alpha \in \Sigma^*$, ¿pertenece α a L?
   Sí. Sea AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$. Si α es aceptada, *entonces* pertenece a L y *sino* no.
2. (Vacuidad): Dado el lenguaje regular L,
   Se construye su AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$ Se determina el conjunto A de estados alcanzables. Si $F \cap A = \emptyset$ *entonces* el lenguaje L es vacío y *sino* no.
3. (Equivalencia) Dados los lenguajes regulares L_1 y L_2, Es decidible si $\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$?
   Sí . Dados los lenguajes regulares L_1 y L_2, aceptados por los AFDs M_1 y M_2 respectivamente

$$\left(L_1 \cap \overline{L_2}\right) \cup \left(\overline{L_1} \cap L_2\right)$$

   es vacío entonces L_1 y L_2 son equivalentes, sino no lo son.

□

Ejercicios

1. Indicar Verdadero o Falso y justificar:
   Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre el alfabeto Σ, tal que $L_1 \cup L_2$ es regular. Entonces, tanto L_1 como L_2 son regulares.
2. Dar un algoritmo de decisión que determine si el lenguaje aceptado por un autómata finito es el conjunto de todas las cadenas del alfabeto.