

Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

Lema de "Pumping" y más algoritmos de decisión

Primer Cuatrimestre 2025

Bibliografía: Capítulo 4, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Lema ("Pumping", Scott & Rabin 1959, Bar Hillel, Perles & Shamir 1961)

Sea L un lenguaje regular. Existe una longitud n tal que para toda $z \in L$ con $|z| \geq n$ existe $u, v, w \in \Sigma^$ tales que*

$$z = uvw,$$

$$|uv| \leq n,$$

$$|v| \geq 1,$$

$$\forall i \geq 0, uv^i w \in L.$$

Ejemplo

$L = \{a^k b^k : k \geq 0\}$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$ no es regular.

Demostración.

Supongamos L es regular. Sea n la constante del Lema de Pumping. Sea $z = a^n b^n$. Por el Lema de Pumping, hay una descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ tal que $uv^i w \in L$, para $i \geq 0$.

Usando que $|uv| \leq n$, concluimos que v consiste solamente de a 's. Más aún, como $|v| \geq 1$, v contiene al menos una a .

Ahora bombeamos v y obtenemos $uv^2 w$.

Por Lema de Pumping, $uv^2 w$ está en L .

Pero $uv^2 w$ tiene más a 's que b 's, entonces no está en L .

Llegamos a una contradicción que provino de asumir que L es regular. Por lo tanto, L no es regular. □

Ejemplo

$L = \{0^{k^2} : k \geq 1\}$ sobre $\Sigma = \{0\}$ no es regular.

Demostración.

Supongamos L es regular. Sea n la constante del Lema de Pumping. Sea $z = 0^{n^2}$. Por el Lema de Pumping, hay una descomposición $z = uvw$ con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ tal que $uv^i w$ en L , para $i \geq 0$.

Entonces $v = 0^m$ para algun valor de m entre 1 y n . Por el Lema de Pumping, $uw = 0^{n^2-m}$ está en L .

Dado que $1 \leq m < n + 1$, y asumiendo que $n \geq 2$

$$n^2 - m > n^2 - (n + 1) \geq n^2 - (2n - 1) = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$$

Entonces $n^2 - m$ no es cuadrado perfecto y por lo tanto uw no está en L .

La contradicción que provino de asumir que L es regular. Por lo tanto, L no es regular. □

Ejemplo

$L = \{w : w \text{ tiene la misma cantidad de 0s que de 1s}\}$ no es regular.

Demostración.

Supongamos L es regular. Sea n la constante del Lema de Pumping.

Sea $z = 0^n 1^n$. Por el Lema de Pumping, hay una descomposición

$z = uvw$ con $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ tal que $uv^i w \in L$, para $i \geq 0$.

Entonces v tiene exclusivamente 0s.

Luego, uw tiene distinta cantidad de 0s que de 1s.

Por lo tanto, uw no está en L .

La contradicción que provino de asumir que L es regular.



Definición (Configuración instantánea de un AFD)

Sea AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Una configuración instantánea es un par (q, α) en $Q \times \Sigma^*$ donde q es el estado en el que está el autómata y α es la cadena de entrada aún no consumida.

Definición (Transición entre configuraciones instantáneas \vdash)

Llamamos transición a la siguiente relación sobre $Q \times \Sigma^*$:

$$(q, \alpha) \vdash (p, \beta) \text{ si } (\delta(q, a) = p \wedge \alpha = a\beta).$$

De lo anterior tenemos que $(q, \alpha\beta) \vdash^* (p, \beta)$ si y sólo si $\delta(q, \alpha) = p$ se puede pasar del estado q al estado p consumiendo la cadena α .

Lema

Sea el AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ Para todo $q \in Q$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$,

$$\text{si } (q, \alpha\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, \beta) \text{ entonces } \forall i \geq 0, (q, \alpha^i\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, \beta).$$

Demostración.

Fijemos $\alpha \in \Sigma^*$ y $q \in Q$ arbitrarias.

Demostración por inducción en i .

Caso base ($i = 0$). $(q, \alpha^0\beta) \stackrel{0}{\vdash} (q, \beta)$

Caso inductivo. Supongamos que vale para i , es decir,

(HI) si $(q, \alpha\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, \beta)$ entonces $(q, \alpha^i\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, \beta)$.

Donde dice β , podemos poner cualquier expresión. Pongamos $\alpha^i\beta$.

Nos queda

si $(q, \alpha(\alpha^i\beta)) \stackrel{*}{\vdash} (q, (\alpha^i\beta))$, entonces $(q, \alpha^i\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, \beta)$.

Por definición, $(q, \alpha^{i+1}\beta) = (q, \alpha\alpha^i\beta)$

Nos queda

si $(q, \alpha^{i+1}\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, (\alpha^i\beta))$, entonces $(q, \alpha^i\beta) \stackrel{*}{\vdash} (q, \beta)$.

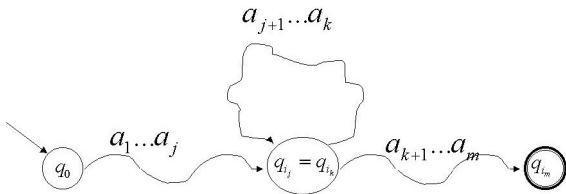


Demostración del Lema de Pumping

Sea AFD M tal que $\mathcal{L}(M) = L$. Sea n su cantidad de estados. Sea z una cadena de longitud $m \geq n$, $z = a_1 \cdots a_m$.

Para aceptar z usamos m transiciones, por lo tanto $m + 1$ estados. (estado inicial, estado luego de consumir el primer símbolo, estado luego de consumir el segundo símbolo, etc). Como $m + 1 > n$, para aceptar z el autómata pasa DOS ó más veces por un mismo estado.

Sea $q_{\ell_0}, q_{\ell_1}, \dots, q_{\ell_m}$, con $q_{\ell_0} = q_0$ y q_{ℓ_m} un estado final, la sucesión de estados desde q_0 hasta aceptar z .



Existen j y k mínimos tales que $q_{\ell_j} = q_{\ell_k}$ con $0 \leq j < k \leq n$. El máximo valor posible de k es n . porque M tiene n estados distintos, entonces al recorrerlo, antes de que se repita tenemos $q_{\ell_0}, q_{\ell_1}, \dots, q_{\ell_{n-1}}$, pero necesariamente q_{ℓ_n} será repetido.

Esto determina z en tres cadenas u , v y w tales que

$$u = \begin{cases} a_1 \cdots a_j & \text{si } j > 0 \\ \lambda & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

$$v = a_{j+1} \cdots a_k$$

$$w = \begin{cases} a_{k+1} \cdots a_m & \text{si } k < m \\ \lambda & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Entonces,

$$|uv| \leq n$$

$$|v| \geq 1$$

$$\text{y} \quad (q_0, uvw) \stackrel{*}{\vdash} (q_{\ell_j}, vw) \stackrel{*}{\vdash} (q_{\ell_k}, w) \stackrel{*}{\vdash} (q_{\ell_m}, \lambda).$$

Pero, como $q_{\ell_j} = q_{\ell_k}$,

$$\forall i \geq 0, \quad (q_{\ell_j}, v^i w) \stackrel{*}{\vdash} (q_{\ell_j}, w) = (q_{\ell_k}, w).$$

Por lo tanto, $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$

□.

Proposición

Sea AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, con $|Q| = n$. $\mathcal{L}(M)$ es no vacío si y solo si existe w en Σ^* tal que $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $|w| < n$.

Demostración.

Debemos ver que $\mathcal{L}(M)$ es no vacío si y solo si existe w en Σ^* tal que $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $|w| < n$, donde $n = |Q|$.

\Rightarrow). Supongamos $\mathcal{L}(M)$ es no vacío. Sabemos que es regular.

Sea z en $\mathcal{L}(M)$ de longitud mayor o igual a n y supongamos que no hay ninguna más corta en $\mathcal{L}(M)$.

El Lema de Pumping garantiza que hay u, v, w apropiados tal que $|v| \geq 1$, $z = uvw$ y $\forall i \geq 0$, $uv^i w$ en $\mathcal{L}(M)$.

Entonces uw está en $\mathcal{L}(M)$. Pero uw es más corta que z , lo que contradice nuestra suposición de que z era la más corta.

Concluimos que en $\mathcal{L}(M)$ hay cadenas más cortas que n .

\Leftarrow). Es obvio que L es no vacío.

Proposición

$\mathcal{L}(M)$ es infinito si y solo si existe w en Σ^* tal que $\widehat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $n \leq |w| < 2n$.

Demostración

Debemos ver que $\mathcal{L}(M)$ es infinito si y solo si existe w en Σ^* tal que $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ y $n \leq |w| < 2n$, donde $n = |Q|$.

\Rightarrow). Supongamos $\mathcal{L}(M)$ es infinito.

Supongamos que no hay ninguna cadena en $\mathcal{L}(M)$ de longitud entre n y $2n - 1$.

Sin pérdida de generalidad, sea z en $\mathcal{L}(M)$ de longitud $2n$ (ya que si la longitud de z es mayor, aplica el mismo argumento, usandolo tantas veces como haga falta hasta llegar a la contradicción buscada).

Por Lema de Pumping, hay u, v, w tal que $z = uvw$, con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ y $\forall i \geq 0$ $uv^i w$ está en $\mathcal{L}(M)$. Entonces $uw \in \mathcal{L}(M)$.

Como $|uvw| = 2n$ y $1 \leq |v| \leq n$ tenemos $n \leq |uw| \leq 2n - 1$, contradiciendo que no había ninguna en $\mathcal{L}(M)$ de esta longitud.

\Leftarrow). Supongamos z pertenece a $\mathcal{L}(M)$ y $n \leq |z| < 2n$.

Por el Lema de Pumping $z = uvw$ y para todo $i \geq 0$, $uv^i w$ esta en $\mathcal{L}(M)$. Luego $\mathcal{L}(M)$ es infinito.

Observación

Los lenguajes regulares no están clausurados por unión infinita.

Demostración.

Damos un contraejemplo.

Para cada $i \geq 1$ sea el lenguaje regular $L_i = \{a^i b^i\}$.

Si los lenguajes regulares estuvieran clausurados por unión infinita, $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ debería ser regular.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a^i b^i\} = \{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\}$$

Usando el el Lema de Pumping se demuestra que no es regular.



Ejercicios

1. Demostrar que los siguientes lenguajes no son regulares
 $L = \{a^i b^j : i \neq j\}$
 $L_a = \{xay : x \in \Sigma^*, y \in \Sigma^*, |x| = |y|\}$, donde a es un elemento prefijado de Σ .
2. Sea L un lenguaje regular, y sea n la constante del Lema de Pumping para L . Indicar Verdadero o Falso y justificar.
 - Para cada cadena z en L , con $|z| \geq n$, la descomposición de z en uvw , con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$, es única.
3. Indicar Verdadero o Falso y justificar:
Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre el alfabeto Σ , tal que $L_1 \cup L_2$ es regular. Entonces, tanto L_1 como L_2 son regulares.
4. Dar un algoritmo de decisión que determine si el lenguaje aceptado por un autómata finito es cofinito.