

Práctica N° 6 - Lógica de primer orden

Aclaraciones:

Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

SINTAXIS DE LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Ejercicio 1

Dados $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$, donde d itene aridad 0, f aridad 2 y g aridad 3. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son términos sobre \mathcal{F} ?

- I. $g(d, d)$
- II. $f(X, g(Y, Z), d)$
- III. $g(X, f(d, Z), d)$
- IV. $g(X, h(Y, Z), d)$
- V. $f(f(g(d, X), f(g(d, X), Y, g(Y, d))), g(d, d)), g(f(d, d, X), d), Z)$

Ejercicio 2

Sean c una constante, f un símbolo de función de aridad 1 y S y B , dos símbolos de predicado binarios. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son fórmulas?

- | | |
|--|--|
| I. $S(c, X)$ | VII. $(S(X, Y) \Rightarrow S(Y, f(f(X))))$ |
| II. $B(c, f(c))$ | VIII. $B(X, Y) \Rightarrow f(X)$ |
| III. $f(c)$ | IX. $S(X, f(Y)) \wedge B(X, Y)$ |
| IV. $B(B(c, X), Y)$ | X. $\forall X. B(X, f(X))$ |
| V. $S(B(c), Z)$ | XI. $\exists X. B(Y, X(c))$ |
| VI. $(B(X, Y) \Rightarrow (\exists Z. S(Z, Y)))$ | |

Ejercicio 3

Sea $\sigma = \exists X. P(Y, Z) \wedge \forall Y. \neg Q(Y, X) \vee P(Y, Z)$

- I. Identificar todas las variables libres y ligadas.
- II. Calcular $\sigma\{X := W\}$, $\sigma\{Y := W\}$, $\sigma\{Y := f(X)\}$ y $\sigma\{Z := g(Y, Z)\}$.

Ejercicio 4

Dada $\sigma = \neg \forall X. (\exists Y. P(X, Y, Z)) \wedge \forall Z. P(X, Y, Z)$

- I. Identificar todas las variables libres y ligadas.
- II. Calcular $\sigma\{X := t\}$, $\sigma\{Y := t\}$ y $\sigma\{Z := t\}$ con $t = g(f(g(Y, Y)), Y)$.
- III. Calcular $\sigma\{X := t, Y := t, Z := t\}$ con $t = g(f(g(Y, Y)), Y)$.
- IV. Calcular $\sigma(\{X := t\} \circ \{Y := t\} \circ \{Z := t\})$ con $t = g(f(g(Y, Y)), Y)$.

UNIFICACIÓN

Ejercicio 5 ★

Unir con flechas las expresiones que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* (“most general unifier”). Asumir que *a* es una constante, *X*, *Y*, *Z* son variables, *f* y *g* son símbolos de función, y *P* y *Q* predicados.

$P(f(X))$	$P(a)$	$P(Y)$	$Q(X, f(Y))$	$Q(X, f(Z))$	$Q(X, f(a))$	X	$f(X)$
$P(X)$	$P(f(a))$	$P(g(Z))$	$Q(f(Y), X)$	$Q(f(Y), f(X))$	$Q(f(Y), Y)$	$f(f(c))$	$f(g(Y))$

Ejercicio 6 ★

Determinar, para cada uno de los siguientes pares de términos de primer orden, si son unificables o no. En cada caso justificar su respuesta exhibiendo una secuencia exitosa o fallida (según el caso) del algoritmo de Martelli-Montanari. Asimismo, en caso de que los términos sean unificables indicar el *mgu* (“most general unifier”). Notación: *X*, *Y*, *Z* variables; *a*, *b*, *c* constantes; *f*, *g* símbolos de función.

- I. $f(X, X, Y)$ y $f(a, b, Z)$
- II. Y y $f(X)$
- III. $f(g(c, Y), X)$ y $f(Z, g(Z, a))$
- IV. $f(a)$ y $g(Y)$
- V. $f(X)$ y X
- VI. $g(X, Y)$ y $g(f(Y), f(X))$

Ejercicio 7

Preguntas para pensar.

- I. La relación entre términos *unifica con*, ¿es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?
- II. ¿Existe algún término *t* tal que todo término *s* unifique con él?
- III. ¿Cómo aplicaría el algoritmo de unificación al problema de determinar si, dado un conjunto finito de términos, existe un unificador común a todos?

Ejercicio 8 ★

Sean las constantes *Nat* y *Bool* y la función binaria \rightarrow (representada como un operador infijo), determinar el resultado de aplicar el algoritmo MGU (“most general unifier”) sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

- | | |
|--|--|
| I. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Bool}\}$ | V. MGU $\{\mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3\}$ |
| II. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_3\}$ | VI. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Bool}, \mathbf{T}_1 \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3\}$ |
| III. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_2\}$ | VII. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{Nat} \rightarrow \mathbf{Bool}, \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_1\}$ |
| IV. MGU $\{(\mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1) \rightarrow \mathbf{Bool} \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_3\}$ | VIII. MGU $\{\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_2 \doteq \mathbf{T}_3 \rightarrow \mathbf{T}_4, \mathbf{T}_3 \doteq \mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1\}$ |

DEDUCCIÓN NATURAL

Ejercicio 9 ★

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas, **sin usar principios de razonamiento clásicos**, salvo que se indique lo contrario:

- I. Intercambio (\forall): $\forall X.\forall Y.P(X, Y) \iff \forall Y.\forall X.P(X, Y)$.
- II. Intercambio (\exists): $\exists X.\exists Y.P(X, Y) \iff \exists Y.\exists X.P(X, Y)$.
- III. Intercambio (\exists/\forall): $\exists X.\forall Y.P(X, Y) \implies \forall Y.\exists X.P(X, Y)$.
- IV. Universal implica existencial: $\forall X.P(X) \implies \exists X.P(X)$.
- V. Diagonal (\forall): $\forall X.\forall Y.P(X, Y) \implies \forall X.P(X, X)$.
- VI. Diagonal (\exists): $\exists X.P(X, X) \implies \exists X.\exists Y.P(X, Y)$.
- VII. de Morgan (I): $\neg\exists X.P(X) \iff \forall X.\neg P(X)$.
- VIII. de Morgan (II): $\neg\forall X.P(X) \iff \exists X.\neg P(X)$.
Para la dirección \Rightarrow es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- IX. Universal/conjunción: $\forall X.(P(X) \wedge Q(X)) \iff (\forall X.P(X) \wedge \forall X.Q(X))$.
- X. Universal/disjunción: $\forall X.(P(X) \vee \sigma) \iff (\forall X.P(X)) \vee \sigma$, asumiendo que $X \notin \text{fv}(\sigma)$.
Para la dirección \Rightarrow es necesario usar principios de razonamiento clásicos.
- XI. Existencial/disjunción: $\exists X.(P(X) \vee Q(X)) \iff (\exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X))$.
- XII. Existencial/conjunción: $\exists X.(P(X) \wedge \sigma) \iff (\exists X.P(X) \wedge \sigma)$, asumiendo que $X \notin \text{fv}(\sigma)$.
- XIII. Principio del bebedor: $\exists X.(P(X) \implies \forall X.P(X))$.
En este ítem es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

Ejercicio 10 ★

Demostrar en deducción natural: $(\forall X.\forall Y.R(X, f(Y))) \Rightarrow (\forall X.R(X, f(f(X))))$.

Ejercicio 11

Una fórmula σ está en *forma normal negada* (f.n.n.) si se puede producir con la siguiente gramática:

$$\sigma ::= P(t_1, \dots, t_n) \mid \neg P(t_1, \dots, t_n) \mid \sigma \wedge \sigma \mid \sigma \vee \sigma \mid \forall X.\sigma \mid \exists X.\sigma$$

Es decir, una fórmula está en f.n.n. si no tiene ocurrencias del conectivo de la implicación (\Rightarrow) y todas las ocurrencias del conectivo de la negación (\neg) acompañan a fórmulas atómicas (es decir, la negación sólo puede encontrarse en las “hojas” de la fórmula). Demostrar que toda fórmula σ es equivalente a una fórmula en forma normal negada. Es decir, para cada fórmula σ existe una fórmula σ' en f.n.n. tal que $\vdash \sigma \iff \sigma'$.

Ejercicio 12

Una fórmula σ está en *forma normal prenexa* (f.n.p.) si es de la forma $Q_1X_1 \dots Q_nX_n \cdot \tau$ donde cada Q_i es un cuantificador (\forall o \exists) y τ es una fórmula en forma normal negada sin ocurrencias de cuantificadores. Demostrar que toda fórmula σ es equivalente a una fórmula en forma normal prenexa. Es decir, para cada fórmula σ existe una fórmula σ' en f.n.p. tal que $\vdash \sigma \iff \sigma'$.

SEMÁNTICA

Ejercicio 13 ★

Sea \mathcal{L} el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, conectivos y cuantificadores) la constante a_1 , el símbolo de función f de aridad 2 y el símbolo de predicado P de aridad 2. Sea σ la fórmula

$$\forall X_1. \forall X_2. (P(f(X_1, X_2), a_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$$

Definamos una interpretación I para \mathcal{L} como sigue. D_I es \mathbb{Z} , \bar{a}_1 es 0, $\bar{f}(X, Y)$ es $X - Y$, $\bar{P}(X, Y)$ es $X < Y$. Escribir la interpretación de σ en castellano. ¿El enunciado es verdadero o falso? Hallar una interpretación de σ en la cual el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.

Ejercicio 14 ★

Sea N la interpretación aritmética donde $D_I = \mathbb{N}$ y

$$\begin{array}{ll} \bar{c}^0 & \text{es el } 0, \\ \bar{P}^2 & \text{es } =, \\ \bar{f}_1^1 & \text{es la función sucesor,} \\ \bar{f}_2^2 & \text{es } +, \\ \bar{f}_3^2 & \text{es } \times \end{array}$$

Hallar, si es posible, asignaciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes fórmulas.

- I. $P(f_2(X_1, X_1), f_3(f_1(X_1), f_1(X_1)))$
- II. $P(f_2(X_1, c), X_2) \Rightarrow P(f_2(X_1, X_2), X_3)$
- III. $\neg P(f_3(X_1, X_2), f_3(X_2, X_3))$
- IV. $\forall X_1. P(f_3(X_1, X_2), X_3)$
- V. $\forall X_1. (P(f_3(X_1, c), X_1) \Rightarrow P(X_1, X_2))$

Ejercicio 15

Demostrar que ninguna de las siguientes fórmulas es lógicamente válida.

- I. $\forall X_1. \exists X_2. P(X_1, X_2) \Rightarrow \exists X_2. \forall X_1. P(X_1, X_2)$
- II. $\forall X_1. \forall X_2. (P(X_1, X_2) \Rightarrow P(X_2, X_1))$
- III. $\forall X_1. \neg Q(X_1) \Rightarrow Q(c)$
- IV. $(\forall X_1. P(X_1, X_1)) \Rightarrow \exists X_2. \forall X_1. P(X_1, X_2)$

EJERCICIOS EXTRA DE DEDUCCIÓN NATURAL (OPCIONAL)

Ejercicio 16

Dar derivaciones en DN de las siguientes fórmulas.

- I. $(\forall X.P(X)) \Rightarrow P(a)$
- II. $P(a) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- III. $(\forall X.\forall Y.(R(X, Y) \Rightarrow \neg R(Y, X))) \Rightarrow \forall X.\neg R(X, X)$
- IV. $(\forall X.\forall Y.R(X, Y)) \Rightarrow \forall X.R(X, X)$
- V. $(\exists X.P(X)) \Rightarrow (\forall Y.Q(Y)) \Rightarrow \forall X.\forall Y.(P(X) \Rightarrow Q(Y))$
- VI. $(\forall X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \wedge (\exists X.P(X)) \Rightarrow \exists X.Q(X)$
- VII. $(\neg \forall X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow \neg \forall X.P(X)$
- VIII. $(\neg \forall X.P(X)) \Rightarrow \neg \forall X.(P(X) \wedge Q(X))$
- IX. $(\forall X.(P(X) \wedge Q(X))) \Rightarrow \neg \exists X.\neg P(X)$
- X. $(\exists X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \Rightarrow (\forall X.P(X)) \Rightarrow \exists X.Q(X)$
- XI. $(\forall X.(P(X) \Rightarrow Q(X))) \wedge (\neg \exists X.Q(X)) \Rightarrow \forall X.\neg P(X)$
- XII. $(\forall X.(\exists Y.R(Y, X) \Rightarrow P(X))) \Rightarrow (\exists X.\exists Y.R(X, Y)) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- XIII. $(\exists X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow (\forall X.\neg Q(X)) \Rightarrow \exists X.P(X)$
- XIV. $(\neg \forall X.\exists Y.R(X, Y)) \Rightarrow \neg \forall X.R(X, X)$
- XV. $(\neg \exists X.\forall Y.R(Y, X) \Rightarrow \exists X.\exists Y.\neg R(X, Y))$
- XVI. $(\exists X.(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow \exists X.P(X) \vee \exists X.Q(X)$
- XVII. $(\exists X.(P(X) \wedge Q(X))) \Rightarrow \exists X.P(X) \wedge \exists X.Q(X)$
- XVIII. $\neg(\forall X.P(X) \wedge \exists X.\neg P(X))$
- XIX. $(\exists X.(R(X, X) \wedge P(X))) \Rightarrow \neg \forall X.(P(X) \Rightarrow \neg \exists Y.R(X, Y))$
- XX. $(\exists X.P(X) \Rightarrow \forall X.Q(X)) \Rightarrow \forall Y.(P(Y) \Rightarrow Q(Y))$
- XXI. $(\exists X.\neg(P(X) \vee Q(X))) \Rightarrow \neg \forall X.P(X)$
- XXII. $\neg(\forall X.(P(X) \wedge Q(X))) \wedge \forall X.P(X) \Rightarrow \neg \forall X.Q(X)$
- XXIII. $(\forall X.(R(X, X) \Rightarrow Q(X))) \wedge \exists X.\forall Y.R(X, Y) \Rightarrow \exists X.Q(X)$