Probabilidad Condicional, Independencia, Bayes y Probabilidad Total

Probabilidad Condicional

Sean A y B eventos tales que $P(B) > 0$, la probabilidad del evento A condicional a la ocurrencia del evento B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejercicio 1: En un proceso de fabricación, las piezas pueden presentar imperfecciones visibles (F) , pueden ser funcionalmente defectuosas (D) o puedes presentar ambos tipos de defectos. Se tomo una muestra de 400 piezas con los siguientes resultados:

		Imperfecciones visibles		
		Si (F)	No (F^c)	Total
Defectuosas	Si (D)	10	18	28
	No (D^c)	30	342	372
	Total	40	360	400

Si elegimos una pieza al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que presente imperfecciones visibles?

b) dado que la pieza presenta imperfecciones visibles, ¿cuál es la probabilidad que de sea funcionalmente defectuosa?

c) y no presenta imperfecciones visibles, ¿cuál es la probabilidad de que sea funcionalmente defectuosa?

Ejercicio 2: Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras.

a) Si se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que: salga blanca en la primera ?

b) Si se extraen dos bolitas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que salga blanca en la segunda extracción?

Regla del producto

Sean A y B eventos tales que $P(B) > 0$, entonces

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Ejercicio 3: Continuando con el ejercicio de las bolitas, si se extraen dos bolitas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas bolitas sean blancas?

Independencia estadística

Decimos que dos sucesos A y B son **independientes** si

$$P(A|B) = P(A)$$

También se puede ver que si son independientes,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ejercicio 4: En el ejercicio de las piezas defectuosas, ¿son independientes los dos tipos de defectos?

Ejercicio 5: Volviendo al ejercicio de las bolitas, si realizamos 2 extracciones sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bolita blanca en la segunda extracción?

Teorema de probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ sucesos mutuamente excluyentes donde $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = S$. Entonces, para cualquier suceso B de S,

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots P(B|A_k) \cdot P(A_k)$$

Ejercicio 6: Sabiendo que obtuvimos una bolita negra en la última extracción, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido blanca en la primera extracción?

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_k$ sucesos mutuamente excluyentes donde $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = S$. Entonces, para cualquier suceso B de S y para cualquier j de 1 a k

$$\begin{aligned} P(A_j|B) &= \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots P(B|A_k) \cdot P(A_k)} \end{aligned}$$

Ejercicio 7: Tres máquinas de cierta planta de ensamble, B_1, B_2 y B_3, montan 30 %, 45 % y 25 % de los productos, respectivamente. Se sabe por experiencia que 2 %, 3 % y 2 % de los productos ensamblados por cada máquina, respectivamente, tienen defectos.

Supongamos que se selecciona de forma aleatoria un producto terminado. ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso? Y si el producto elegido está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido ensamblado con la máquina B_3?

Ejercicio de yapa : Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y una segunda bolsa contiene 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda bolsa.

¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?