Suma de variables aleatorias independientes- Aplicación a las distribuciones gama.

Pablo L. De Nápoli

13 de mayo de 2023

Resumen

Este es un apunte teórico que resume algunas de las propiedades de las distribuciones exponencial y gama que fuimos viendo en las clases teóricas.

1. Cambios de variable en 2 dimensiones

La fórmula que vimos antes para cambios de variable en una dimensión se generaliza a vectores aleatorios.

Proposición 1.1 *Supongamos que (X, Y) es una vector aletorio n-dimensional que se distribuye según la densidad de probabilidad $f_{(X,Y)}(x, y)$ con soporte en una región $\mathcal{R}_1$ (un abierto) de $\mathbb{R}^2$ y supongamos que $\varphi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ es una función de clase C^1 es una función biyectiva de clase C^1 con inversa que $\varphi^{-1} : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_1$ también de clase C^{-1}, donde $\mathcal{R}_2$ es otro abierto de $\mathbb{R}^2$ entonces, si consideramos el vector aleatorio $(U, V) = \varphi(X, T)$, este se distribuye en $\mathcal{R}_2$ según la densidad de probabilidad*

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y}(\varphi^{-1}(u, v))J(u, v) \tag{1}$$

siendo

$$J(u, v) = |det(D\varphi^{-1})(y)|$$

el Jacobiano de φ^{-1}.

Nota: El teorema se generaliza sin dificultad a cualquier número de dimensiones.

Prueba: Sea $D \subset \mathcal{R}_2$ un abierto cualquiera, entonces si $D^* = \varphi^{-1}(D)$

$$P\{(U, V) \in D\} = P\{(X, Y) \in \varphi^{-1}(D^*)\} = \int\int_{D^*} f(x, y)dx\, dy$$

En esta integral, hagamos el cambio de variable $(x, y) = \varphi^{-1}(u, v)$, Entonces, según el teorema de cambio de variable

$$P\{(U, V) \in D\} = \int\int_{D} f_{(X,Y}(\varphi^{-1}(u, v))J(u, v)\, dx\, dy$$

Como esto vale para todo $D \subset \mathcal{R}_2$, concluimos que (U, V) se distribuye en V según la densidad de probabilidad (1) . $\square$

2. Suma de variables aleatorias independientes

Definición 2.1 *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Definimos su* **convolución** *$f * g$ de la siguiente manera:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

Algunas Observaciones sobre la convolución:

1. La convolución es conmutativa:

$$f * g = g * f$$

   También es posible probar que es asociativa:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

2. Si f y g son densidades de probabilidad, entonces $f * g$ también lo es.

3. Si f y g están soportadas en la semirrecta $[0, +\infty)$ (es decir: $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$), entonces:

$$(f * g)(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

3. Suma de variables independientes con distribución gama

Lema 3.1 *Si $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ y son independientes, entonces $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.*

Prueba: Según el corolario **??**, $X + Y \sim f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda}$. Hemos de calcular esta convolución:

$$\begin{aligned}
(f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda})(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\, (x-t)^{\alpha_1 - 1}\, e^{-\lambda(x-t)} \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\, t^{\alpha_2 - 1}\, e^{-\alpha t}\, dt \\
&= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\int_0^x (x-t)^{\alpha_1-1} t^{\alpha_2-1} dt \right) e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

En esta integral hacemos el cambio de variable $u = t/x$ $(0 \leq x \leq 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda})(x) &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1))\Gamma(\alpha_2)} \left(\int_0^1 (x - xu)^{\alpha_1-1}\, (xu)^{\alpha_2-1}\, x\, du \right) e^{-\lambda x} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \left(\int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1}\, u^{\alpha_2-1}\, du \right) e^{-\lambda x} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\, B(\alpha_1, \alpha_2)\, x^{\alpha_1+\alpha_2-1}\, e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Notamos que esta es salvo la constante, la densidad gama $f_{\alpha_1+\alpha_2,\lambda}$, pero como la convolución de dos densidades de probabilidad es una densidad de probabilidad, y hay una única constante que hace que la integral sobre $(0,+\infty)$ dé 1 deducimos que:

$$f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda} = f_{\alpha_1,\alpha_2,\lambda} \tag{2}$$

Como subproducto de la demostración obtenemos que:

$$\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\, B(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

o sea

$$B(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

□

Como aplicación podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.2 *Supongamos que X e Y son variables aleatorias independientes, que se distribuyen en $\mathbb{R}$ según las densidades $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, entonces $X+Y$ se distribuye según la densidad dada por la convolución $f * g(x)$.*

Prueba: Como X e Y son independientes,

$$(X,Y) \sim f(x)g(y)$$

Hacemos el cambio de variable lineal $(U,V) = \varphi(X,Y) = (X+Y,Y)$. Entonces $(X,Y) = \varphi^{-1}(U,V) = (U-V,V)$. Como φ es una transformación lineal, su diferencial coincide con ella misma. Para calcular el determinante de φ observamos que su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, el determinante de φ es 1. Por el teorema anterior, tenemos que (U,V) que:

$$(U,V) \sim f(u-v)g(v) \text{ (densidad conjunta)}$$

Para recuperar la densidad de U (densidad marginal) debemos integrar en la variable v:

$$U \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(u-v)g(v)\, dv$$

□

4. Las densidades χ^2

En esta sección veremos algunas densidades que resultan especialmente útiles en estadística.

Sea $X \sim N(0,1)$ una variable aleatoria con distribución normal estándar. En una clase anterior vimos que $Y = X^2$ se distribuye según la densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right]$$

o sea

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2} \quad (y > 0)$$

Esta densidad se conoce como la densidad χ^2 ("ji-cuadrado"] con un grado de libertad [abreviada χ_1^2]. Utilizando que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, vemos que coincide con la densidad $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Sean ahora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, y consideremos la variable aleatoria

$$Z_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

¿cuál es la distribución de Z_n ? Por lo anterior cada una de las X_i se distribuye según la densidad $\chi_1^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, y la densidad de Z será (por la independencia) la convolución de la densidad $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ n veces con sigo misma, que por el lema 3.1 da la densidad $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Es decir, que la densidad de Z_n será

$$f_{Z_n}(z) = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2} \quad (x > 0) \tag{3}$$

Esta densidad se conoce como densidad χ^2 con n grados de libertad [abreviada χ_n^2]. Las fórmulas (**??**) y (**??**) nos dicen que si $Z \sim \chi_n^2$, entonces

$$E[Z_n] = n, \quad \mathrm{Var}[Z_n] = 2n$$

5. Tiempos de espera y procesos de Poisson

Supongamos que tenemos un servidor que recibe peticiones siguiendo un proceso con falta de memoria.

Llamemos T_i al tiempo en que se recibe la i-ésima peticiciòn, de modo que:

$$T_1 < T_2 < \ldots < T_n$$

(Podemos suponer para simplificar que no hay dos desintegraciones simultáneas, ya que la probabilidad de que ello ocurra es despreciable). Notemos que:

$$T_n = T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \ldots + (T_n - T_{n-1})$$

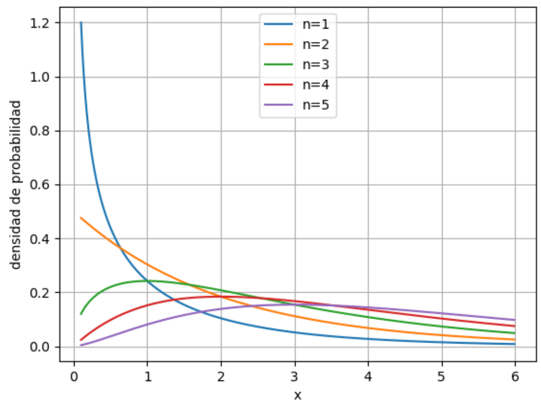

Figura 1: Gráfico de la densidad χ_n^2

Las variables $T_k - T_{k-1}$ representan el tiempo entre la $(k-1)$-ésima petición y la k-ésima petición. Por la propiedad de falta de memoria), $T_k - T_{k-1}$ tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ (donde $\lambda > 0$ es una constante).

Si suponemos que las peticiones llegan en forma independiente, las $T_{k+1} - T_k$ serán variables aleatorias independientes. Entonces la variable T_n será dada por una suma de n variables aleatorias independientes, todas con distribución exponencial de parámetro λ.

Como $\text{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$, deducimos que T_n tiene distribución $\Gamma(n, \lambda)$, es decir que se distribuye según la densidad $g_n(t)$ dada por:

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Llamemos $D(t)$ al número de peticiones en el intervalo $[0, t]$. Entonces

$$D(t_0) = n \text{ si y sólo si } T_n \leq t_0 < T_{n+1}$$

Deducimos que:

$$\{D(t_0) = n\} = \{T_n \leq t_0\} - \{T_{n+1} \leq t_0\}$$

En consecuencia,

$$P\{D(t_0) = n\} = P\{T_n \leq t_0\} - P\{T_{n+1} \leq t_0\} = \int_0^{t_0} g_n(t)\, dt - \int_0^{t_0} g_{n+1}(t)\, dt$$

Integrando por partes, tenemos que:

$$\int_0^{t_0} g_{n+1}(t)\, dt = \int_0^{t_0} \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\, t^n e^{-\lambda t}\, dt$$

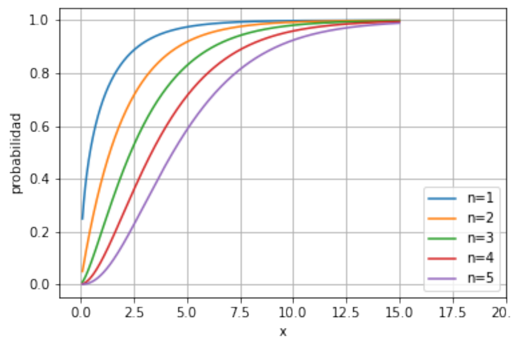

Figura 2: Gráfico de la distribución acumulada de una χ^2_n

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \left[t^n \left. \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)} \right|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} n\, t^{n-1}\, \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)}\, dt \right]$$

$$= \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\, t_0^n \frac{e^{-\lambda t_0}}{(-\lambda)} - 0 - \int_0^{t_0} \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\, n\, t^{n-1}\, \frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)}\, dt$$

$$= -\frac{\lambda^n}{n!}\, t_0^n\, e^{-\lambda t_0} + \int_0^{t_0} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= -\frac{\lambda^n}{n!}\, t_0^n\, e^{-\lambda t_0} + \int_0^{t_0} g_n(t)\, dt$$

En definitiva concluimos que la distribución del número de peticiones en el intervalo $[0, t]$ viene dada por una distribución de Poisson (proceso de Poisson):

$$P\{D(t_0) = n\} = \frac{(\lambda t_0)^n}{n!}\, e^{-\lambda t_0}$$