Las Distribuciones Gama y Exponencial

Pablo L. De Nápoli

25 de abril de 2023

Resumen

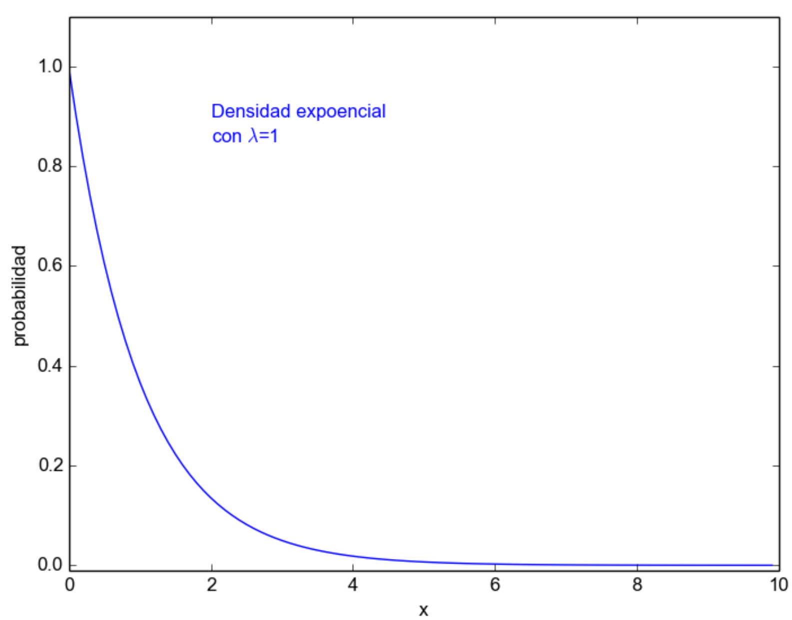
Este es un apunte teórico que resume algunas de las propiedades de las distribuciones exponencial y gama que fuimos viendo en las clases teóricas.

1. La distribución exponencial

Definición 1.1 *Se dice que la variable aleatoria tiene distribución exponencial* $Exp(\lambda)$ *(donde* $\lambda > 0$*) cuando su densidad de probabilidad es*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x) \tag{1}$$

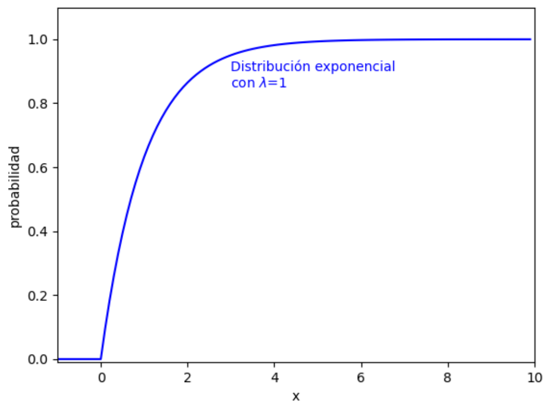
La dibujamos con $\lambda = 1$:



Su función de distribución acumulada es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La dibujamos con $\lambda = 1$:



2. La Función Gama

Definición 2.1 *Definimos la función gama de Euler por*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \ (\alpha > 0) \tag{2}$$

2.1. Análisis de la convergencia de la integral que define la función gama

Para analizar la convergencia de la integral, la partimos en el 1

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx$$

Cuando $x \leq 1$, acotamos usando $e^{-x} \leq 1$,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \lim_{r \to 0} \int_r^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} \text{ si } \alpha > 0$$

(esta integral es impropia cuando $\alpha < 1$ pero converge).

Por otra parte para $x \geq 0$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$ vale la acotación,

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \geq \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{k!}{x^k}$$

Luego si $0 < \alpha < k$ tenemos

$$\int_1^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \leq \int_1^\infty x^{\alpha-1}\, \frac{k!}{x^k}\, dx = k! \int_1^\infty x^{\alpha-k-1} = \frac{k!}{k-\alpha}$$

Como para cada $\alpha > 0$ podemos elegir un k de modo que $\alpha < k$, deducimos que la integral converge para todo $\alpha > 0$.

Incluso sería posible considerar valores complejos de α, siempre que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, pero para los fines de esta materia nos bastará considerar valores reales de α.

2.2. Propiedades de la función gama

Proposición 2.2 *La función gamma tiene las siguientes propiedades:*

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
3. $\Gamma(k) = (k-1)!$ *(En consecuencia, la función gama puede pensarse como una generalización del factorial a valores no enteros de la variable).*
4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Prueba:

La propiedad 1) es inmediata de la definición:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x}\, dx = \lim_{R\to+\infty} 1 - e^{-R} = 1$$

La propiedad 2) se prueba integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \int_r^R x^\alpha\, e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \int_r^R x^\alpha\, (-e^{-x})'\, dx \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} - x^\alpha e^{-x}\Big|_0^R + \int_r^R (x^\alpha)'\; e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} -R^\alpha e^{-R} + r^\alpha e^{-r} + \int_r^R \alpha x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \\
&= \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

La propiedad 3) $\Gamma(k) = (k-1)!$ se deduce entonces de las propiedades 1) y 2) por inducción

Si $k = 1$ ya vimos que vale. El paso inductivo es:

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$$

La propiedad 4) sale con un cambio de variable: $x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}, dx = 2ydy$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, dx \;= \int_0^\infty \frac{1}{y}\, e^{-y^2}\, 2\, ydy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

□

3. Las distribuciones gama

La función gama nos será útil para definir una familia de distribuciones de probabilidad[1]:

Definición 3.1 *Decimos que X se distribuye según la distribución gama $\Gamma(\alpha, \lambda)$ (siendo $\alpha, \lambda > 0$) si su función de densidad de probabilidad es:*

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x) \tag{3}$$

Cuando $\alpha = 1$ se reduce a la distribución exponencial Exp(λ).

Observación 3.2 *Haciendo el cambio de variable $y = \lambda x$ en (2), tenemos que*

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} = \int_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-\lambda y}\, dy \tag{4}$$

Se deduce que (3) es efectivamente una densidad de probabilidades. Más aún esta fórmula permite calcular fácilmente los momentos de las distribuciones gama: si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu_k(X) = E(X^k) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+k-1}\, e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\lambda^k} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)}{\lambda^k} \end{aligned}$$

En particular, la esperanza y la variancia de la distribución gama son

$$E(X) = \mu_1(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \tag{5}$$

y

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{6}$$

[1] También tiene importantes aplicaciones en otras ramas de la matemática como la teoría de números, y aparece en numerosas fórmulas como la del volumen de una bola n-dimensional.

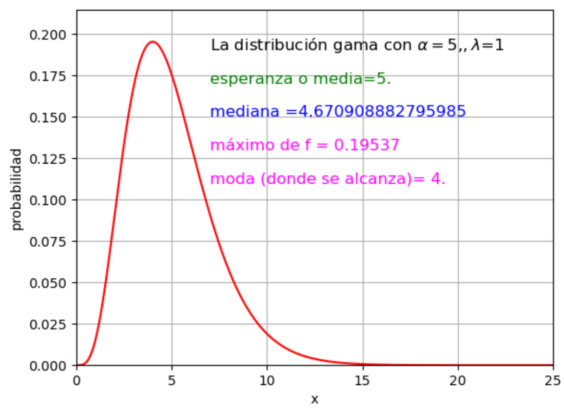


Figura 1: Un ejemplo de una densidad gama y algunos de sus parámetros.

3.0.1. Cálculo de los momentos de las distribuciones gama

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

En particular

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

4. La Distribución Exponencial y la propiedad de Falta de Memoria

La distribución exponencial es un modelo muy útil para distintos procesos: llamadas que llegan a una central telefónica, tiempo de duración de una lámpara, desintegración radiactiva, etc.

Por ejemplo, para fijar ideas, consideremos la desintegración radiactiva de un átomo. La hipótesis fundamental que haremos para describir este fenómeno, es la propiedad de "falta de memoria" que establece que la probabilidad de que un átomo se desintegre en un intervalo de tiempo de longitud Δt sólo depende de la longitud del intervalo y es independiente de la historia anterior del material.

Podemos describir con más precisión esta propiedad de la siguiente manera: Si llamamos T al tiempo en el que el átomo se desintegra, T es una variable aleatoria. La probabilidad condicional de que el átomo se desintegre en el intervalo $(t_0, t_0 + \Delta t]$ sabiendo que no se ha desintegrado aún en tiempo $t = t_0$, es igual a la probabilidad de que se desintegre en el intervalo $(0, \Delta t]$:

$$P\{T > t_0 + \Delta t / T > t_0\} = P\{T > \Delta t\}$$

Por definición de probabilidad condicional, esto significa que:

$$\frac{P\{t < T \leq t + \Delta t\}}{P\{T > t\}} = P\{T > \Delta t\}$$

Llammemos F a la función de distribución de T, y sea $G(t) = 1 - F(t)$. Entonces, esta igualdad establece que:

$$G(t + \Delta t) = G(t)G(\Delta t)$$

Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 4.1 *Sea $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función continua que satisface que:*

$$G(t + s) = G(t)G(s)$$

Entonces: $G(t) = G(0)a^t$, siendo $a = G(1)$.

Volviendo a nuestro problema de la desintegración radiactiva, si ponemos $G(1) = e^{-\lambda}$ (suponiendo $G(0) \neq 0$), y observamos que $G(0) = 1$ pues $T > 0$ (El átomo no se desintegró aún en $t = 0$), obtenemos que:

$$G(t) = e^{-\lambda t}$$

Por consiguiente la función de distribución de T es:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

y derivando vemos que su densidad es

$$f(t) = \lambda \, e^{-\lambda t} \; (t > 0)$$

Decimos que la variable continua T se distribuye según la densidad exponencial de parámetro $\lambda > 0$, $\mathrm{Exp}(\lambda)$, que introdujimos en (1).

Supongamos ahora que tenemos un material radiactivo formado inicialmente por un grán número de átomos N_0, y llamemos $N(t)$ a la cantidad de átomos no desintegrados hasta el instante t. Hagamos la hipótesis de que las desintegraciones de los distintos átomos son independientes. Podemos pensar que son ensayos de Bernoullí, entonces por la ley de los grandes números

$$\frac{N(t)}{N_0} \approx P\{T > t_0\}$$

y deducimos que:

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t} \tag{7}$$

Esta expresión se conoce como la ley de desintegración radiactiva de Rutherford-Soddy (1902). El valor de la constante λ depende de la sustancia.

Se define semivida o período de semi-desintegración $T_{1/2}$ el tiempo en que una muestra de material radiactivo tarda en reducirse a la mitad. De la fórmula (7), se deduce que

$$T_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

Observación 4.2 *Entre las distribuciones discretas, la propiedad de falta de memoria es característica de la distribución geométrica, que puede entonces considerarse como el análogo discreto de la distribución exponencial.*