1. **Distribución Poisson**.

   Condiciones para un proceso de Poisson:

   Supongamos que se observa la ocurrencia de un evento a lo largo del tiempo y que existe una cantidad positiva θ tal que:

   a) La probabilidad de que ocurra exactamente un evento en un intervalo pequeño de longitud Δt es aproximadamente igual $\theta\Delta t$:

   $$P(\text{ocurra un evento en } \Delta T) = \theta\Delta t + o(\Delta t)$$

   b) La probabilidad de que ocurra más de un evento en un intervalo pequeño de longitud Δt, es despreciable cuando se lo compara con la probabilidad de un evento:

   $$P(\text{ocurra más de un evento en } \Delta T) = o(\Delta t)$$

   c) El número de eventos que ocurren en intervalos disjuntos son independientes.

   Entonces el número de ocurrencias del evento en un período de longitud t tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = \theta t$,

   $$X \sim P(\lambda) \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

   $$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

   a) Una máquina que envasa comprimidos en un laboratorio farmacéutico tiene en promedio 1,5 fallas por día. Hallar la probabilidad de que en una semana de trabajo tenga menos de 6 fallas.

   b) En un estudio ecológico realizado en un lago, se encontró que había, en promedio, 2 microorganismos por cm3. Si se toman muestras de 3 cm3, hallar la probabilidad de encontrar 9 o más microorganismos.

2. **Distribución Exponencial**: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si su función de densidad está dada por

   $$f_X(x) = \lambda e^{\lambda x}\, \mathbb{I}_{(0,\infty)}^{(x)}$$

   $$E(X) = 1/\lambda \qquad Var(X) = 1/\lambda^2$$

   Supongamos que el número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo de duración t tiene una distribución de Poisson con parámetro αt, donde α es le número esperado de eventos que ocurren en una unidad de tiempo. Supongamos también que los números de ocurrencias en intervalos no superpuestos son independientes uno de otro. Entonces la *la distribución del tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos eventos sucesivos* es exponencial con parámetro α.

a) Suponga que se reciben llamadas durante las 24 hs en una línea de Atención al Cliente de acuerdo con un proceso de Poisson, a razón de α = 0,5 llamadas por día. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran más de dos días entre llamadas?

b) Suponga que un sistema contiene cierto componente cuyo tiempo de operación antes de fallara, en años está dado por la variable T. La variable T se modela mediante la distribución exponencial con tiempo medio de operación antes de fallar de 5 años. Si se instalan 5 componentes en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al final de 8 años, al menos 2 funcionen?.

Propiedad de falta de memoria

c) Supongamos que la duración de un componente está distribuida exponencialmente con parámetro λ. Después de poner en funcionamiento el componente, se deja que pase un período de t_0 horaws, y luedo se ve si el componente sigue trabajando. ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos t horas más?.

3. **Distribución Gamma**: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ si su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \, \mathbb{I}_{(0,\infty)}^{(x)}$$

$$E(X) = \alpha/\lambda \qquad Var(X) = \alpha/\lambda^2$$

Nota 1: La distribución exponencial es un caso especial de la distribución gamma:

$$\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$$

.

Nota 2: El tiempo (espacio) que transcurre hasta que ocurre un número específico de eventos de Poisson es una variable aleatoria con distribución Gamma. El número específico de eventos es el prámetro α.

d) Supongamos que las llamadas que llegan a un conmutador particular sigue un proceso de Poisson con un promedio de 5 llamadas entrantes por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que transcurra a lo sumo un minuto para que entren 2 llamadas al conmutador?