Hoja 1

Sebastián André, 1028/22

MUY BUEN PARCIAL :)

B) P: Partidos, E: Equipos

* Cada partido tiene a uno de los contrincantes como local.

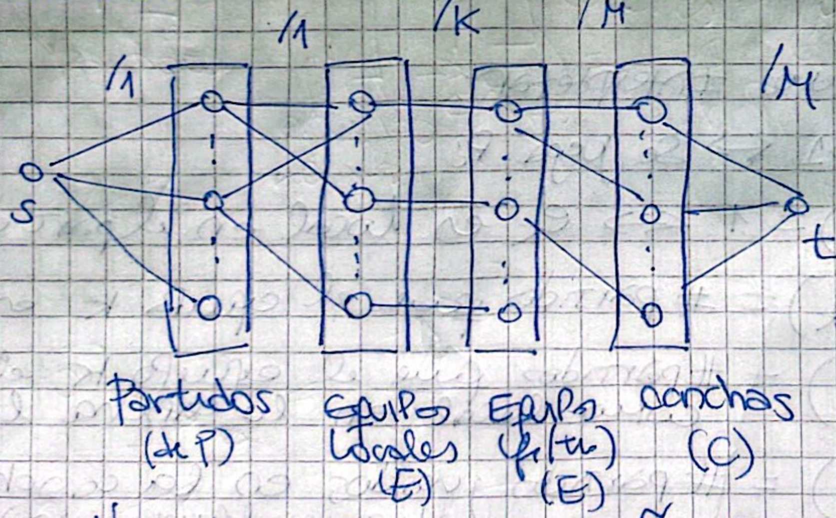
* $\forall e \in E$. L_e := "cjt de canchos que e considera como local"

* Objetivo: Para cada partido $p=(e,e')$, $e,e' \in E$, se elige uno que es local. Para el equipo (l) elegido se elige una cancha perteneciente a L_e.

ADEMÁS: * Ningún equipo es elegido local más de K veces
* En ninguna cancha se disputan más de M partidos

¿Se pueden organizar todos los partidos de P?

(a) Modelo



$N=(V,\tilde{E})$

* Donde $\forall i \in \{1..|P|\}$. $(s \to P_i) \in \tilde{E}$; $P_i=(e,e') \Rightarrow (P_i \to e) \in \tilde{E}$ && $(P_i \to e') \in \tilde{E}$; $(e_i \to \tilde{e}_i)$ $\forall i \in \{1...\#\text{equipos}\}$; $(\tilde{e}_i \to C_k) \in \tilde{E} \leftrightarrow \text{cancha}_k \in L_{\text{equipo}_i}$. $\forall i \in \{1..|\text{canchas}|\}$... ...$(C_i \to t) \in \tilde{E}$.

explicación modelo:

* La idea es que $f((s \to P_i)) = 1$ indica que se juega el partido P_i. Luego, $f((P_i \to e_k)) = 1$ expresa que el partido P_i tiene al equipo e_k como local ($P_i = (e_k, e_r)$).

* La "copia" (equipo → equipo_k) sirve para limitar la #partidos que un equipo puede ser local. Es por eso que $c((e_i \to \tilde{e}_i)) = k$ ($\Rightarrow f((e_i \to \tilde{e}_i)) \leq k$)

restricción capacidad

* Los equipos ~~[illegible]~~ están conectados con todas las canchas que consideran como local. porque si son locales se asigna alguna de ellas. Además, $c((\tilde{e}_k \to c_e)) = M$ porque no pueden jugarse M partidos en una cancha (por el mismo motivo $c((c_e \to t)) = M$.

(b) Entonces podemos interpretar:

- $f(s \to P_i) = 1 \Leftrightarrow$ se juega P_i
- $f(P_i \to e_k) = 1 \Leftrightarrow e_k$ es local en el partido P_i
- $f(e_k \to \tilde{e}_k) =$ #partidos que el equipo k es local
- $f(\tilde{e}_k \to c_e) =$ #partidos que el equipo k elige/juega como local en la cancha ℓ.
- $f(c_\ell \to t) =$ #partidos jugados en la cancha ℓ. (por cualquier equipo)

* Es por esto que las restricciones son:

MUY PROLIJO

- $c((s \to P_i)) = 1$ (solo se juega 1 vez)
- $c((P_i \to e_k)) = 1$ (solo hay 1 local por partido)
- $c((e_j \to \tilde{e}_j)) = k$ (un equipo solo puede ser local k veces)
- $c((\tilde{e}_j \to c_e)) = M$ (una cancha solo se usa hasta M veces)
- $c((c_\ell \to t)) = M$ ("IDEM")

(c) Correctitud:

En particular, me interesa ver que:

LEMA 1: [∃ un flujo máximo f con valor P $\iff$ ∃ una asignación posible para todos los partidos] ✓

Para esto, primero voy a probar el sig. lema (general).

LEMA 2: [∃ un flujo máximo f con valor φ $\iff$ ∃ una asignación posible para φ partidos de P.]

IDA

$\Rightarrow$) ∃ un flujo máx f, $v(f) = \varphi$ $\longrightarrow$ ∃ una asignación posible para φ partidos de P. ✓

Suponemos que el flujo existe y queremos obtener los partidos jugados.

Luego, $v(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{|P|} f(s \to P_i) - \sum_{w \in N(s)} f(w \to s)$ ...

... por nuestro modelado no hay aristas ...

... $(w \to s) \in \tilde{E}$!! Entonces, $v(f) = \sum_{i=1}^{|P|} f(s \to P_i) = \varphi$. ✓

Entonces, como $c((s \to P_i)) = 1 \longrightarrow$ hay φ aristas saturadas $(s \to P_i)$ $(i \in \{1 .. |P|\})$. ✓

Como el flujo es válido, hay conservación de flujo y existen φ aristas $(P_i \to e_t)$ saturadas que se interpretan como que P_i tiene a e_t como local. (todos esos casos). ✓ ESA ES LA ASIGNACIÓN

Además, se cumple que $\sum f((P_i \to e_t)) = f(e_t \to \tilde{e}_t)$ (conservación)

y cada nodo $\tilde{e}_t$ "desemboca" sus partidos en canchas en las cuales es local (si es local $e \to$ se juega en $c \in L_e$). ... (sigue) ✓

finalmente, NO se juegan más de M partidos en una cancha ya que $f((c_\ell \to t)) \leq c((c_\ell \to t)) = M$

Me faltó aclarar que un equipo no es local más de K veces porque $f((e_i \to \tilde{e}_i)) \leq c((e_i \to \tilde{e}_i)) = K$

SE COMPLEMENTA CON EL 6)

$\Leftarrow$) Vuelta

$\exists$ una asignación posible de φ partidos de P $\longrightarrow$ $\exists$ un flujo máx f de valor $v(f) = \varphi$.

* Ahora suponemos que se pueden jugar φ partidos (con todas sus restricciones) y queremos ver que existe es el flujo válido y de $v(f) = \varphi$.

* Defino:

$f(e) :=$
- 1 — si $e = (s \to p_i)$ y se juega el partido i de P.
- 1 — si $e = (p_i, e_j)$ y el partido i que se juega tiene a e_j como local.
- #partidos e_k local jugados — si $e = (e_k \to \tilde{e}_k)$
- #partidos que e_k jugó como local en cancha c_ℓ — si $e = (e_k \to c_\ell)$
- #partidos jugados en la cancha ℓ — si $e = (c_\ell \to t)$

$\varphi \vee \varphi$. $f : E \to \mathbb{R}$ es un flujo válido y de $v(f) = \varphi$

Hoja (3)

Sebastián Andri 10/08/22

$f: E \to \mathbb{R}$ flujo válido $\iff$ cumple Restricción Capacidad && conserva el flujo

(i) restricción capacidad: $\forall e \in \tilde{E}.\ f(e) \le c(e)$

- Para los casos $(s \to P_i)$ && $(P_i \to e_j)$ es trivial ya que $f((s \to P_i)) \in \{0,1\}$, $f((P_i \to e_j)) \in \{0,1\}$ y $c(e) = 1$ (en ambos tipos de $e \in \tilde{E}$)

- Cuando $e = (e_j \to \tilde{e}_j)$, se cumple porque como mucho se juegan K partidos que tienen a e_j de local.

$$f((e_j \to \tilde{e}_j)) = \#\text{Partidos}\ \star\ \text{local} \underset{\uparrow \text{ asignación válida}}{\le} K \overset{def}{=} c((e_j \to \tilde{e}_j))$$

- Cuando $e = (\tilde{e}_j \to c_\ell)$ vale porque la cantidad de partidos que e_j juegue de local en c_ℓ es menor a M (total partidos jugados en c_ℓ).

- $$f((\tilde{e}_j \to c_\ell)) = \#\text{partidos } e_j \text{ local cancha } \ell \underset{\uparrow \text{ asignación válida}}{\le} M \overset{def}{=} c((e_j \to \tilde{e}_j))$$

- Finalmente, si $e = (c_\ell \to t)$ se cumple que:

$$f((c_\ell \to t)) = \#\text{Partidos en cancha } \ell \underset{\uparrow \ \exists \text{ asignación válida}}{\le} M = c((c_\ell \to t))$$

(ii) conservación de flujo: $\forall v \in V \setminus \{s,t\}.\ \sum_{w \in N^+(v)} f(v \to w) = \sum_{w \in N^-(v)} f(w \to v)$

Lo vemos para cada "capa"/columna:

* PARTIDOS $s \xrightarrow{1/1} P_i \xrightarrow{1/1} e_k$, $P_i \to e_\ell$

. Si el partido no se juega $\to$ no hay flujo

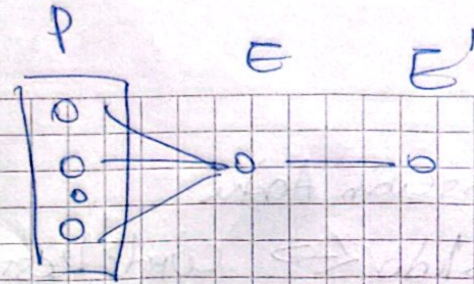
. Si se juega, lo hace solo eligiendo un local $\Rightarrow f(s \to P_i) = f(P_i \to e_k)$ para un e_k de $P_i = (e_k, e_\ell)$.

(Para el otro, $f(P_i \to e_\ell) = 0$.)

entonces

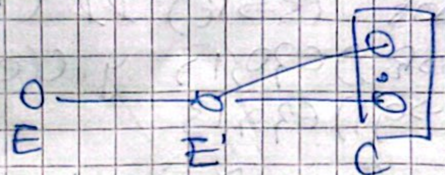
$$f(s \to P_i) = \sum_{r \in \{k, \ell\}} f(P_i \to e_r) \text{ si } P_i = (e_k, e_\ell).$$

* equipos :



$$\sum_{i=1}^{|P|} f(P_i \to e_r) = \#\text{partidos jugados por } e_r \overset{\text{def}}{=} f(e_r \to \tilde{e}_r)$$

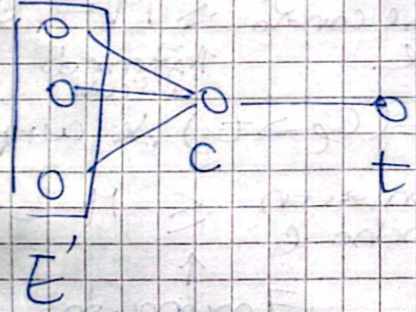
* equipos (II) :



$$f(E \to E') \overset{\text{def}}{=} \#\text{partidos } E \text{ como local} = \sum_{L=1}^{|C|} f(e \to c_L)$$

todos los partidos q' juega E como local es en una cancha de L_E.
($\exists$ asignación válida)
todo partido con E de local se juega en una $c \in C_E$!

* canchas :



$$\sum_{J=1}^{|E'|} f(e_J \to c) = \#\text{partidos jugados (por equipos) en cancha } c \overset{\text{def}}{=} f(c \to t)$$

(Me falta ver que $v(f) = \varphi$)

Luego vale el Lema (2). QED.

A partir de él vemos que vale el Lema 1, pues es un caso particular cuando $\varphi = |P|$ y es máximo ya que todas las aristas $(s \to P_i)$ están saturadas.

Sebastián Andrés | Hoja 4 | 10/28/22

Finalmente, la complejidad está dada por:

$\#nodos = |P| + 2|E| + |C| + 2 \in O(P+E+C)$

$\#aristas = |P| + 2|P| + |E| + |E||C| + |C|$

$\in O(P + E + \underbrace{EC}_{C \geq 1}) \in O(P + EC)$

flujo Máx $:= P$ (todos los ($s \to P_i$) saturados) ($E \in O(EC)$)

Complejidad EK|FF:

$O(\min\{M \cdot F_{max}, N \cdot M^2\}) \mid N = \#nodos, M = \#aristas$

$O(\min\{(P+EC) \cdot P, (P+E+C) \cdot (P+EC)^2\})$

$\therefore$

MUY BUENA OBSERVACIÓN!

* ~~Depende de P, E, C cuál es conveniente pero~~ ~~en los casos típicos~~ Es mejor la cota $O(P^2 + ECP)$

* Obs: * $P \in O(E^2)$. * típicamente $C \in O(E)$ ↑↑↑

Si $C \in O(E) \to$

$O(\min\{(P+E^2)P, (P+E) \cdot (P+E^2)^2\}) \in O((P+E^2)P)$

(*) Vemos que $v(f) = \varphi$... Sabemos por premisa que se juegan φ partidos de P. Luego, por la construcción de nuestro modelo,

$\#\{i \in \{1..|P|\} . f(s \to P_i) = 1\} = \varphi$.

como $f(s \to P_i) \in \{0,1\} \to$ ... no hay.

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{|P|} f(s \to P_i) = \varphi \quad \left(v(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{|P|} f(s \to P_i) - \sum f(v \to s) = \varphi - 0 = \varphi\right)$

valor de flujo f.