Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad
Primer Cuatrimestre de 2025
Segundo parcial
Tema 1

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Nombre y Apellido	Libreta	Orden	Nota Final

En todos los casos marque **la o las** opciones correctas. Para cada ejercicio, si tiene n opciones correctas, cada respuesta correcta marcada suma $1/n$ y cada respuesta incorrecta marcada resta $1/n$. Sin embargo, ningún ejercicio podrá restar puntaje (es decir, si el puntaje obtenido en un ejercicio es negativo, simplemente suma 0). Se aprueba sumando 6 puntos o más.

Ejercicio 1. Considerar el siguiente código P y marcar todas las opciones correctas:

$$\begin{array}{l} Z_1 := X_2 \\ \boldsymbol{WHILE}\ Z_1 \neq 0\ \boldsymbol{do}\ \{Z_2++\} \end{array}$$

A. P es un programa en $\mathcal{S}++$.
B. P es un *pseudo-programa*.
C. $\Psi_P^{(1)}$ es una función total.
D. $\Psi_P^{(2)}$ es una función total.

Ejercicio 2. Definimos el tamaño de un programa como la cantidad de instrucciones que tiene (donde si hay un *While* cuenta como 1 uno más el tamaño del cuerpo del ciclo). Marcar la o las opciones verdaderas:

A. Dado $n \geq 1$, existen finitos programas en $\mathcal{S}++$ de tamaño n.
B. Dado $n \geq 1$, existen infinitos programas en $\mathcal{S}++$ de tamaño n.
C. Dado $n \geq 1$, existen finitas funciones computadas por programas de tamaño n.
D. Dado $n \geq 1$, existen infinitas funciones computadas por programas de tamaño n.
E. Dada una función f parcial computable, existen infinitos programas que la computan.
F. Existe una función f parcial computable tal que solo hay finitos programas que la computan.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ una función total, y sea para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $g_n(x) = f(x, n)$. Marcar la o las afirmaciones que resulten verdaderas:

A. Si f es computable, entonces la función $h(x) = f(x, x)$ también lo es.
B. Si la función $h(x) = f(x, x)$ es computable, entonces f también lo es.
C. Si g_n resulta computable para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f es computable.
D. Si f es computable, entonces g_n es computable para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Dada la siguiente función, marcar la o las afirmaciones correctas:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A. g es total computable.
B. g es parcial computable.
C. Si $HALT$ fuera computable, entonces g también lo sería.
D. La función $g'(x, y) = \begin{cases} \Phi_x^{(1)}(y) + 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = y \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$ es parcial computable.

Ejercicio 5. Sea $p : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicado total computable y sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(x) \text{ y } y > 10 \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

marcar todas las respuestas correctas:

A. f es parcial computable.
B. f es total computable.
C. La función $g(y) = (\exists x)(f(x,y) = 1)$ es parcial computable (donde g devuelve 1 si existe tal x, y se indefine si no).
D. La función $h(u) = f(l(u), r(u))$ es parcial computable, donde l y r son las funciones observadoras de tuplas vistas en la práctica.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función total computable. Decidir cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

A. Si g es una función total pero no computable, entonces $f \circ g$ tampoco es computable.
B. Si g es una función total pero no computable, entonces $g \circ f$ tampoco es computable.
C. Si g es parcial computable, entonces $g \circ f$ es parcial computable.
D. La función $g(n,x) = f^n(x) = f \circ f \circ ... \circ f(x)$ es total computable, donde f^n es el resultado de componer f consigo misma n veces.

Ejercicio 7. Dada la siguiente función, marcar la o las afirmaciones correctas:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Dom\ \Phi_x^{(1)} \cap Im\ \Phi_x^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A. g es total computable.
B. g es parcial computable.
C. La función $g_1(x,y) = \begin{cases} \uparrow & \text{si } y \in Dom\ \Phi_x^{(1)} \cap Im\ \Phi_x^{(1)} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$ es parcial computable.
D. La función $g_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Dom\ \Phi_x^{(1)} \cap Im\ \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$ es parcial computable.

Ejercicio 8. Sea $p : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ un predicado, y sea f la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(x) \text{ ó } HALT(x,x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Marcar la o las opciones correctas:

A. f no es computable para ningún predicado p.
B. Existe un predicado p computable tal que f es computable.
C. Existe un predicado p computable tal que f no es computable.
D. f es parcial computable para todo predicado p.
E. Si p no es computable, f tampoco lo es.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función total, decidir cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

A. Si existe una constante c tal que $f(n) < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es computable.
B. Si existe una función g total computable tal que $f(n) < g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es computable.
C. Si para toda función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total computable vale que $f(n) \geq g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f no es computable.
D. Si la Imagen de f es infinita, entonces f es computable.

Ejercicio 10. Decidir cuál o cuál de las siguientes funciones son parcial computables:

A. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x+1) = 2x \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si existe un t tal que } \Phi_x^{(1)}(x) \text{ termina en t pasos o menos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

C. $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si x+y} \in Im\ \Phi_y^{(1)} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \text{ termina en x pasos o menos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

E. $f(x) = \begin{cases} y & \text{si } (\exists w,y,z)\ (\Phi_x^{(1)}(w) \downarrow \wedge\ \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \wedge\ \Phi_x^{(1)}(z) \downarrow) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$