Hoja de trabajo No.2

Sébastien Escobar

August 2, 2018

Ejercicio No.1

Demostración de:

$$\forall\ n.\ n^3 \geq n^2$$

donde $n \in \mathbb{N}$

Por metodo inductivo

Se demuestra como primer punto que:
(El número 1) siendo esté el primer natural cumple con la propiedad P1.

Partiendo de la suposición:
(Hipótesis de Inducción) donde un numero natural k cumple con la propiedad: P(k)

Procedemos a demostrar que, el número k+1 cumple con la propiedad: P(k+1).
Con lo cual validamos la implicación P(k)=P

Demostración

Reescribamos

$$n^3 \geq n^2$$

Se puede tomar un caso base,
donde todo n es = 0.
Para lo cual se demuestra que:

$$0^3 \geq 0^2$$

lo que es igual a

$$0 \geq 0$$

Debido a que el caso base no nos lleva a una solución óptima, procedemos a analizar cada uno de los terminos de la desigualdad y comenzamos a descomponerlo en sus factores.

Utilizando la propiedad P(k) escribimos los terminos como:

$$(n+1) * (n+1)^2 = n^3$$

$$(n+1)^2 = n^2$$

Luego por la propiedad de división, pasamos a dividir el factor comun a ambos lados de la desigualdad.
Con lo que quedaria como:

$$[(n+1) * (n+1)^2 \geq (n+1)^2]/(n+1)^2$$

Aplicando la regla correctamente llegamos a que:

$$(n+1) \geq 1$$

Siendo esta una desigualdad podemos restar de ambos lados el 1

$$n+1-1 \geq 1-1$$

Llegando así por metodo inductivo a

$$n \geq 0$$

Ejercicio No.2

Demostrar utilizando inducción la desigualdad de Bernoulli:

$$\forall\ n.\ (1+x)^n \geq nx$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$ y $x \geq -1$

Por metodo inductivo

Debido a que ya se demostro la propiedad P(k) ahora puede utilizarse, pero antes de ello se utiliza el caso base. Donde n = 0.

$$(1+x)^0 \geq (0)x$$

Y esto es igual a:

$$1 \geq 0$$

Lo anterior nos demuestra que el caso es cierto aunque no se halla demostrado, por lo que proseguimos a hacer la demostración.

Sea P(k) nuestra propiedad principal, tomando la desigualdad y aplicando la propiedad esta queda como:

$$(1+x)^{(n+1)} \geq ((n+1)*x)+1$$

Por propiedades de exponente, descomponemos

$$(1+x)^{(n+1)}$$

en

$$(1+x)(1+x)^n.$$

Mientras que por el otro lado, simplificamos

$$((n+1)*x)+1$$

en

$$(nx+x)+1.$$

Ya simplificada la desigualdad, desarrollamos el polinomio quedando como:

$$1+x^n+x^{n+1}+x \geq nx+x+1$$

Eliminamos terminos semejantes, por la propiedad de resta:

$$x^{n+1}+x^n \geq nx$$

Sustituimos por el caso base n=0. Donde

$$x^{(0)+1}+x^{(0)} \geq (0)x$$

Al sustituir quedamos con..

$$x+1 \geq 0$$

Restamos el 1 de ambos lados de la desigualdad.
Quedando así con:

$$x \geq -1$$