Hoja de trabajo No.3

Sbastien Escobar

August 17, 2018

Informatica 1

Ejercicio No.1

Utilizando la siguiente definicion

$$n \oplus m := \begin{cases} m & \text{si } n = o \\ n & \text{si } m = o \\ s(i \oplus m) & \text{si } n = s(i) \end{cases}$$

Se toma como posibilidad la suma de los numeros naturales unarios siendo estos tres $[s(s(s(0)))]$ y cuatro $[s(s(s(s(0))))$.

Tomamos la definicion anterior y sustituimos n por tres y m por cuatro

Tomando en cuenta nuestro caso base donde n=0

Resulta que $[s(s(s(0)))] + 0 = [s(s(s(0)))]$
Y que $0 + [s(s(s(s(0))))] = [s(s(s(s(0))))]$

Ya que nuestra definicion implica que si n=s(i) donde s(i) es un numero natural unario.

Proseguimos a la sustitucion de nuestros numeros, aplicando la tercera regla

Donde $[s(s(s(0)))] + [s(s(s(s(0))))]$

Dando asi,
s(s(s(s(s(s(s(0)))))))

Ejercicio No.2

Definicion inductiva de la multiplicacion

Apoyandonos en la definicion inductiva de la suma, podemos aplicar el siguiente modelo base para nuestra demostracion.

A ($\otimes$) B = AB

Siendo A un numero natural unario Que puede expresarse como el siguiente

S(0), expresando 1

Por otro lado un segundo numero natural unario B, expresado como S(S(0)) = 2, para este caso particular

Antes de seguir, definimos la multiplicacion, como la suma de A, B veces.

Lo cual con nuestra demostracion quedaria como:

Siendo A = S(0)

El cual no puede expresarse como la suma de sus componentes ya que el se conforma a si mismo

Y, B = S(S(0))

Logrando expresarse como la suma de sus componentes como:

B = S(S(0)) = S(0) + S(0)

—

Ahora nuestra expresion se veria de la siguiente manera

$$S(0)\ (\otimes)\ S(0) + S(0)$$

Aplicando nuestra definicion intuitiva de la multiplicacion, podemos decir que A se multiplica por la composicion de B, que en este caso es $S(0) + S(0)$, dando como resultado:

$$S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0)$$

Si razonamos efectivamente podemos pensar que la expresion $S(0) \otimes S(0)$. (Para efectos practicos lo haremos con manzanas)

Segun nuestra definicion, se escucharia como una vez una manza. Lo que seria una manza. Expresado en nuestro caso como $S(0)$

Dejando asi nuestra expresion como: Una vez una manzana, mas, una vez una manzana

Si aplicamos nuestra definicion de suma, quedaria como $S(0) + S(0) = S(S(0))$ Resultando asi 2.

Ejercicio No.3

Ya que tenemos nuestra definicion de multiplicacion es momento de ver si es correcta:

Primer caso, $S(S(S(0))) \otimes 0$
Tomando nuestra definicion se escucharia como, 0 veces $S(S(S(0)))$

Ya que 0 no puede descomponerse se queda como si mismo, segun nuestro axioma

Para $S(S(S(0)))$, podemos descomponerlo en, $S(0) + S(0) + S(0)$

$$S(0) \otimes 0 + S(0) \otimes 0 + S(0) \otimes 0$$

Si definimos $S(0) \otimes 0$, como 0 veces el sucesor de 0,

Quedaria como $0 + 0 + 0 = 0$

—

Para nuestro segundo caso, $S(S(S(0))) \otimes S(0)$ Empezamos haciendo una distribucion de $S(S(S(0)))$ en:

$$(S(0) + S(0) + S(0)) \otimes S(0)$$

Ahora multiplicamos cada uno de los terminos del lado derecho por el del lado izquierdo, lo que quedaria como

$$S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0)$$

Segun nuestra definicion, lo anterior se podria escuchar como una vez uno. Lo que daria uno

Para lo cual: $S(0) + S(0) + S(0)$ Por definicion de la suma esto es igual a $S(S(S(0)))$

—

El tercer caso dispone $S(S(S(0))) \otimes S(S(0))$ Empezamos por desgolsar cada uno de los terminos

$$S(S(S(0))) = S(0) + S(0) + S(0)$$
$$S(S(0)) = S(0) + S(0)$$

—

Lo que, quedaria como:
$(S(0) + S(0) + S(0)) \otimes (S(0) + S(0))$

— Por definicion de la multiplicacion, lo anterior se escucharia como 2 veces 3

En lenguaje de numeros naturales unarios
Y aplicando nuestra def de multiplicacion esto se veria como

$$S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0) + S(0) \otimes S(0)$$

—

Ejercicio No.4

Demostraremos utilizando induccion lo siguiente

Primer caso, a + S(S(0))

Tomando la definicion conocida de la suma
Y aplicando su tercer concepto siendo este

$$\text{s(i}\oplus m\text{)si } n = s(i)$$

Basandonos en esta definicion podemos representar nuestro problema como:

a + S(0) + S(0)
S(a) + S(0)
S(S(a))

—

Segundo caso, a ⊗ b = b ⊗ a

Demostramos la primera parte por nuestra definicion de multiplicaicon
Lo cual se escucharia como b veces a

Debido a que lo anterior no se puede desglosar en sus componentes

Lo anterior se ve como: a ⊗ b = ab

Si ahora aplicamos la segunda parte, se escucharia como a veces b

Por ser una variable no se puede descomponer por lo cual se veria como

b ⊗ a = ba
Al igualar los terminos de cada lado de nuestra exprecion queda como:
ab = ba,
A ⊗ B = B ⊗ A

—

Tercer caso

$n \otimes (m \otimes l) = (n \otimes m) \otimes l$

Caso base: $l = o$

$n \otimes (m \otimes o) = n \otimes m = (n\otimes) \otimes o$

Seguimos con el

Caso inductivo: $l = s(i)$

Hipotesis inductiva: Asumimos que $m \otimes (n \otimes i) = (m \otimes n) \otimes i$

Sabemos que $n \otimes (m \otimes s(i)) = n \otimes s(m \otimes i) = s(n \otimes (m \otimes i))$

Sabemos que $s(n \otimes (m \otimes i)) = s((n \otimes m) \otimes i)$ por la hipotesis inductiva

Concluimos que $s((n\otimes m)\otimes i) = (n\otimes m)\otimes s(i)$