

## Modelo Analítico Heli\_2DoF - Euler Lagrange

### Grupo B

D.Castro   E.Elizondo   S.Gamboa

Instituto Tecnológico de Costa Rica  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
Laboratorio de Control Automático

24 de agosto de 2021

# Contenidos

- 1 **Introducción**
  - Resumen
  - Objetivos Generales
  - Objetivos Específicos
- 2 **Análisis del Helicóptero 2DoF**
  - Planta Heli2DoF
  - Análisis Lagrangiano del modelo
  - Modelado de Espacio de Estados
  - Respuesta al escalón
  - Respuesta al impulso
- 3 **Conclusiones**
  - Conclusiones
  - Recomendaciones
- 4 **Bibliografía**
  - Bibliografía

# Resumen

El Heli2DoF consiste de un sistema con dos grados de libertad, en el que la acción en un eje también afecta al otro eje. Se realizó el análisis y se obtuvo el modelo matemático para el sistema obteniendo un MIMO (Multiple input, multiple output)

# Objetivos Generales

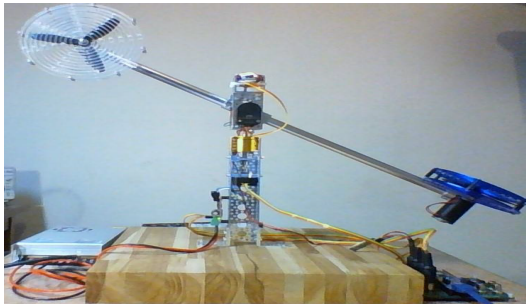
- Obtener el modelo de la planta por el método analítico

## Objetivos Específicos

- Conocer el modelo analítico de la planta.
- Inferir su comportamiento de: estabilidad, linealidad, respuesta natural.
- Orientar en la obtención de un control adecuado para la planta.

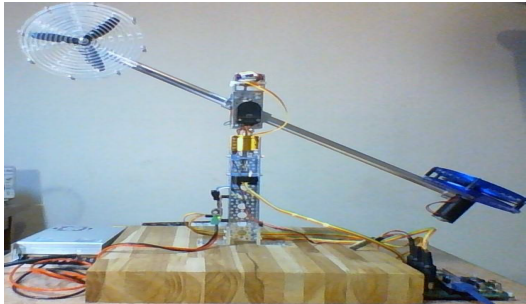
# Planta Heli2DoF

La planta Heli2DoF consiste de un helicóptero aferrado al suelo, que tiene dos grados de libertad: el Pitch, que depende del ángulo respecto a la horizontal; y el Jaw, que depende del ángulo de giro del eje vertical.



## Planta Heli2DoF continuación

En estado de reposo el Heli2DoF vuelve a la posición que se muestra en la imagen. Es decir, el Pitch se encuentra en un equilibrio inestable.







## Análisis Lagrangiano del modelo

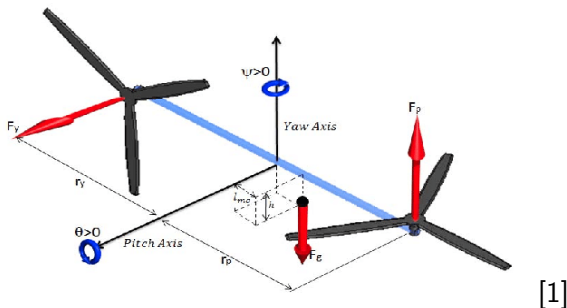
- Definimos  $L = T - V$  como la **función lagrangiana**
- Análisis de la energía cinética total:

$$T = T_{r,p} + T_{r,y} + T_t \quad (1)$$

- Y en cuanto a la energía potencial tenemos:

$$P = m_{heli} \cdot g \cdot Z_{mc} \quad (2)$$

# Análisis Lagrangiano del modelo



- Consideramos la posición del centro de masa:

$$\begin{cases} X_{mc} = \cos(\Psi(t)) (l_{mc} \cos(\theta(t)) + h \sin(\theta(t))) \\ Y_{mc} = -\sin(\Psi(t)) (l_{mc} \cos(\theta(t)) + h \sin(\theta(t))) \\ Z_{mc} = l_{mc} \sin(\theta(t)) - h \cos(\theta(t)) \end{cases} \quad [1] \quad (3)$$

## Análisis Lagrangiano del modelo

- Procedemos al desarrollo de las energías cinéticas:

$$T_{rp} = \frac{1}{2} \cdot J_{eqp} \cdot \omega_{\theta}^2 \implies \frac{1}{2} \cdot J_{eqp} \cdot \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

$$T_{ry} = \frac{1}{2} \cdot J_{eqy} \cdot \omega_{\psi}^2 \implies \frac{1}{2} \cdot J_{eqy} \cdot \dot{\psi}^2 \quad (5)$$

$$T_{tras} = \frac{1}{2} \cdot m_{heli} \cdot V^2 \implies \frac{1}{2} \cdot m_{heli} \cdot (\dot{X}_{mc}^2 + \dot{Y}_{mc}^2 + \dot{Z}_{mc}^2) \quad (6)$$

$$T_{total} = \frac{1}{2} \left[ J_{eqy} \cdot \dot{\psi}^2 + J_{eqp} \cdot \dot{\theta}^2 + m_{heli} \cdot (\dot{X}_{mc}^2 + \dot{Y}_{mc}^2 + \dot{Z}_{mc}^2) \right] \quad (7)$$

## Análisis Lagrangiano del modelo

- Procedemos a insertar la energía cinética total y la energía potencial en la función de Lagrange:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} \left[ \dot{J}_{eqy} \cdot \dot{\psi}^2 + \dot{J}_{eqp} \cdot \dot{\theta}^2 + m_{heli} \cdot (\dot{X}_{mc}^2 + \dot{Y}_{mc}^2 + \dot{Z}_{mc}^2) \right] - m_{heli} \cdot g \cdot Z_{mc} \quad (8)$$

## Análisis Lagrangiano del modelo

Desarrollando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = Q_2 \quad (10)$$

• Donde:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \tau_{pp} + \tau_{py} - B_p \cdot \dot{\theta} = (K_{pp} \cdot V_{mp} + F_{cpp}) + (K_{py} \cdot V_{my} + F_{cpy}) - B_p \cdot \dot{\theta} \\ Q_2 &= \tau_{yp} + \tau_{yy} - B_y \cdot \dot{\psi} = (K_{yp} \cdot V_{mp} + F_{cyp}) \cos \theta + (K_{yy} \cdot V_{my} + F_{cyy}) \cos \theta \\ &\quad - B_y \cdot \dot{\psi} \quad (11) \end{aligned}$$

El torque generado por el motor del Pitch para mover el viento (rojo en la imagen), también produce un torque opuesto sobre la planta, similar al torque verde mostrado en la imagen.



Es por esto que el Yaw se ve afectado y requiere una fuerza opuesta (amarillo) para contrarrestar el desplazamiento producido. De la misma manera existe una influencia producida en el Pitch, causada por el motor que controla el Yaw.



# Análisis Lagrangiano del modelo

$$\begin{aligned}
 (J_{eqp} + M_{Heli}(l_{mc}^2 + h^2))\ddot{\theta} + M_{Heli} \left[ \frac{\sin 2\theta \cdot (l_{mc}^2 - h^2)}{2} - l_{mc}h \cos 2\theta \right] \cdot \dot{\psi}^2 \\
 + M_{Heli}g(l_{mc} \sin \theta + h \cos \theta) + B_p \cdot \dot{\theta} = \\
 (K_{pp}V_{mp} + F_{cpp}) + (K_{py}V_{my} + F_{cpy}) \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (J_{eqy} + M_{Heli}[\cos^2 \theta (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc}h \sin(2\theta) + h^2])\ddot{\psi} \\
 + M_{Heli} [\sin(2\theta)(h^2 - l_{mc}^2) - 2l_{mc}h \cos(2\theta)] \dot{\theta}\dot{\psi} + B_y\dot{\psi} \\
 = (K_{yy}V_{mp} + F_{cyp}) \cos \theta \\
 + (K_{yy}V_{my} + F_{cyy}) \cos \theta \quad (13)
 \end{aligned}$$



## Modelado de Espacio de Estados

Debido a que la fricción en los ejes es muy baja se puede considerar:

$$F_{cpp} = F_{cpy} = F_{cyp} = F_{cyy} = 0 \quad (14)$$

## Modelado de Espacio de Estados continuación

Linealizando respecto al punto de equilibrio  $\theta$  y usando variables para simplificar el desarrollo de las ecuaciones se obtiene:

$$\alpha = J_{eqp} + M_{Heli}(l_{mc}^2 + h^2) \quad (15)$$

$$\beta = M_{Heli} \left[ \frac{\sin(2\theta)(l_{mc}^2 - h^2)}{2} - l_{mc}h \cos(2\theta) \right] \quad (16)$$

$$\varphi = M_{Heli}g(-l_{mc} \sin \theta + h \cos \theta) \quad (17)$$

$$\rho = (J_{eqp} + M_{Heli}[\cos^2 \theta (l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc}h \sin(2\theta) + h^2]) \quad (18)$$

## Modelado de Espacio de Estados continuación

Entonces:

$$\alpha\ddot{\theta} + \beta\dot{\psi}^2 + \varphi\theta + B_p\dot{\theta} = K_{pp}V_{mp} + K_{py}V_{my} \quad (19)$$

$$\rho\ddot{\psi} + \beta\dot{\theta}\dot{\psi} + B_y\dot{\psi} = K_{yy}V_{mp}\cos\theta + K_{yy}V_{my}\cos\theta \quad (20)$$

## Modelado de Espacio de Estados continuación

Usando la ecuación que describe un modelo de espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (21)$$

$$y = Cx + Du \quad (22)$$

Y considerando los estados:

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \psi \quad x_3 = \dot{\theta} \quad x_4 = \dot{\psi} \quad (23)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

## Modelado de Espacio de Estados continuación

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{\varphi}{\alpha}x_1 - \frac{B_p}{\alpha}x_3 - \frac{\beta}{\alpha}x_4^2 + \frac{K_{pp}}{\alpha}V_{mp} + \frac{K_{py}}{\alpha}V_{my} \\ \dot{x}_4 = -\frac{\beta}{\rho}x_3x_4 - \frac{B_y}{\rho}x_4 + \frac{K_{yy}\cos\theta}{\rho}V_{mp} + \frac{K_{yy}\cos\theta}{\rho}V_{my} \end{cases} \quad (25)$$

## Modelado de Espacio de Estados continuación

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-\varphi}{\alpha} & 0 & \frac{-B_p}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_y}{\rho} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{\alpha} & \frac{K_{py}}{\alpha} \\ \frac{K_{yp} \cos \theta}{\rho} & \frac{K_{yy} \cos \theta}{\rho} \end{bmatrix} \quad (27)$$

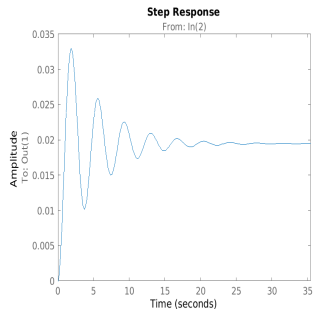
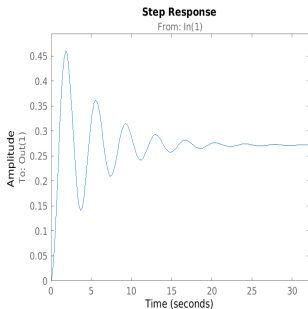
## Modelado de Espacio de Estados continuación

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$D = [0] \quad (29)$$

## Respuesta al escalón

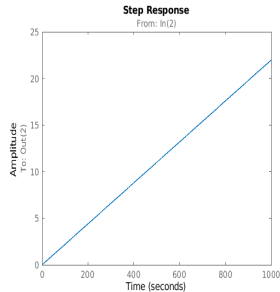
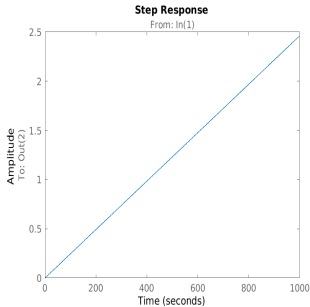
Al simular el Pitch se obtuvo las siguientes gráficas para las dos entradas, ambas en concordancia con lo esperado del sistema, estabilizándose alrededor de un punto mayor a cero.





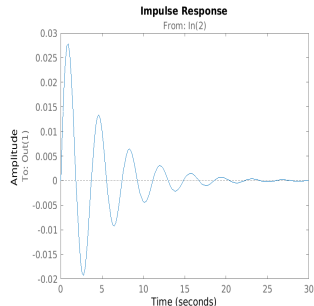
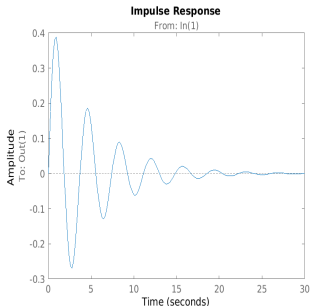
# Respuesta al escalón continuación

En el caso del Yaw se obtienen las siguientes gráficas, que representan un aumento continuo del ángulo alrededor del eje vertical



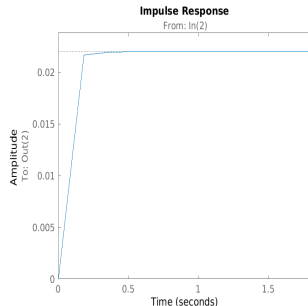
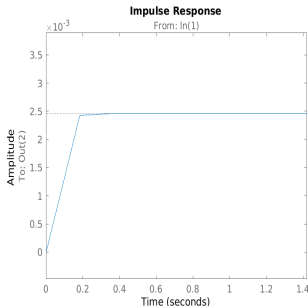
## Respuesta al impulso

El Impulso en el Pitch genera una perturbación en el ángulo horizontal, pero se vuelve a estabilizar a la altura inicial.



## Respuesta al impulso continuación

Con una entrada de impulso se genera una perturbación que mueve el eje del Yaw un ángulo, pero se detiene al eliminar el impulso.



# Conclusiones

Se logró obtener el modelo matemático de la planta utilizando el método analítico, sin embargo pueden existir algunas consideraciones que invaliden el modelo obtenido para algunas situaciones. El modelo de la planta es de primer grado.

## Recomendaciones

En este caso se decidió idealizar el sistema omitiendo la fricción en el pivote. En este caso puede no afectar pero es importante tomarlo en consideración si se realizan cambios en la planta. Ya que el modelo se obtuvo únicamente de forma analítica, se recomienda realizar una comparación con datos obtenidos experimentalmente para verificar la validez de este.

# Bibliografía



D. Rivera. Model and Observer-Based Controller Design for a Quanser Helicopter with two DOF. Universidad Pedagogica Nacional, Colombia, 2012



IVAO - International Virtual Aviation Organisation. Torque and anti-Torque. VID 174413 - Creation. Recuperado de:

[https://mediawiki.ivao.aero/index.php?title=Torque<sub>a</sub>nd<sub>a</sub>nti - trque](https://mediawiki.ivao.aero/index.php?title=Torque_and_anti-torque)