Conceptos iniciales sobre funciones

Sitio:	Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida	Imprimido por:	Sebastian Puche
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° G	Día:	sábado, 24 de agosto de 2024, 17:18
Libro:	Conceptos iniciales sobre funciones		

Tabla de contenidos

1. Introducción

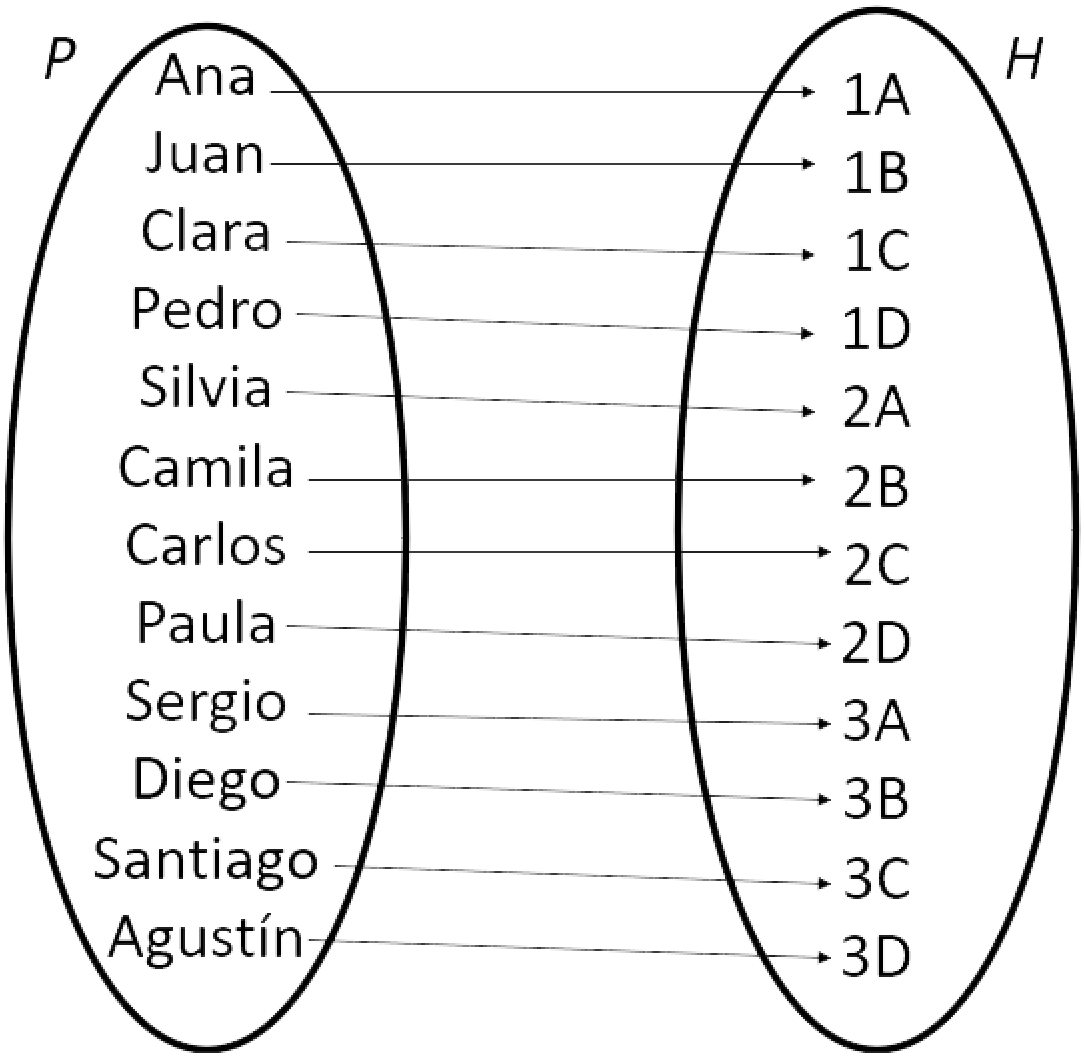
En esta sección vamos a comenzar a estudiar los primeros saberes en relación al concepto de función, los cuales son:

- Definición de función.
- Dominio, codominio e imagen.
- Diferentes formas de representar una función.

2. Relación con el problema 2

Relación con el problema 2: "Ubicando huéspedes"

En el problema 2, el hecho de asignarle a cada persona una habitación, podemos pensarlo como una relación, en donde el conjunto de partida son las personas (P) y el conjunto de llegada son las habitaciones (H). Esto se representa mediante el siguiente diagrama sagital:



Si observan con atención, de cada elemento del conjunto de partida sale una única flecha hacia algún elemento del conjunto de llegada. Cuando esto sucede, se dice que la relación es una función. ¿Te resulta familiar este concepto? Le dedicamos todo un bloque en el curso de preingreso.

¿Te acordás del problema 2? ***Hacé clic en el botón para releerlo.***

3. Concepto de función

Una **función** es una relación entre dos conjuntos, en donde a todos y cada uno de los elementos del conjunto de partida A, se le hace corresponder un único elemento del conjunto de llegada B.

Esto significa que, dado un elemento $x \in A$, le corresponde un único elemento que pertenece al conjunto B, al cual denotaremos por y o $f(x)$. Escribimos:

$$f : A \to B$$
$$x \to f(x)$$

Lo anterior se lee "f es una función de A en B". En el renglón de abajo se indica qué valor de B se le asigna a cada $x \in A$, y $f(x)$ se lee "f de x".

Por lo tanto, para construir una función se necesita:

- Un conjunto de elementos de partida.
- Un conjunto de elementos de llegada.
- Una ley de correspondencia que relaciona el conjunto de partida con el de llegada.

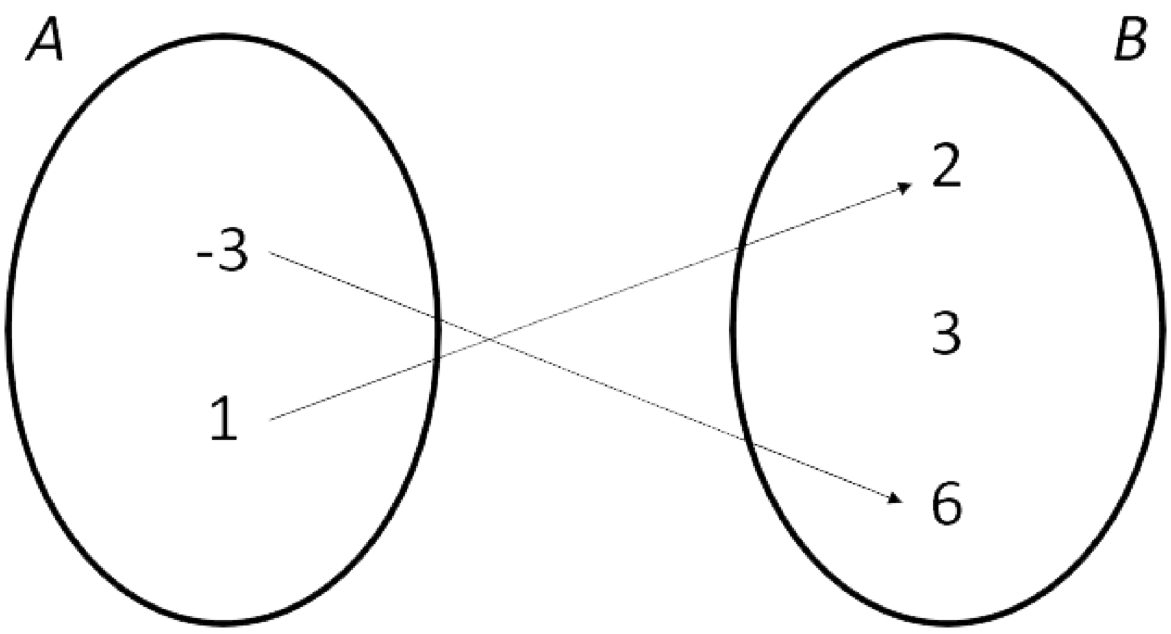
A las funciones se las suelen indicar con letras minúsculas: $f, g, h, \ldots$

Ejemplo:

Si retomamos la última relación trabajadas en el apunte anterior, la cual era:

Dados los conjuntos $A = \{-3, 1\}$ y $B = \{2, 3, 6\}$, encontrar todos los pares ordenados (x, y) que satisfagan la relación R definida de A en B como: $R = \{(x, y) \in A \times B : x + y = 3\}$.

Habíamos obtenido que $R = \{(-3, 6), (1, 2)\}$, la cuál sí es una función, ya que para cada elemento del conjunto de partida, existe un único elemento en el conjunto de llegada. Mediante un diagrama sagital esto se ve fácilmente:



Si bien el elemento 3 del conjunto de llegada quedó sin ser relacionado, no importa, ya que la condición de que todos los elementos deben estar relacionados es en el conjunto de partida.

Volviendo a nuestro problema 2 "Ubicando huéspedes":

La relación entre las personas y las habitaciones es una función, ya que para cada persona existe una única habitación. Por eso se dice que se cumplen las condiciones de existencia y de unicidad. Las preguntas del final tenían como objetivo analizar estas condiciones.

¿Qué debería haber sucedido para que nuestra relación no sea una función?

- Ser más de 12 huéspedes, porque quedarían personas sin habitación y no se cumpliría la existencia.
- Haber asignado más de una habitación a la misma persona, de esa manera no se cumpliría la unicidad.

Noten que si hubiera ingresado una menor cantidad de huéspedes, de todas maneras seguiría siendo una función, porque si bien quedarían elementos del conjunto de llegada sin tener ninguna flecha, aquí pueden sobrar, donde no pueden quedar sin ninguna relación es en el conjunto de partida.

¿Te acordás del problema 2? ***Hacé clic en el botón para releerlo.***

3.1. Una relación que no es función

En este punto esperamos que comprendan que toda función es necesariamente una relación, pero no toda relación es una función.

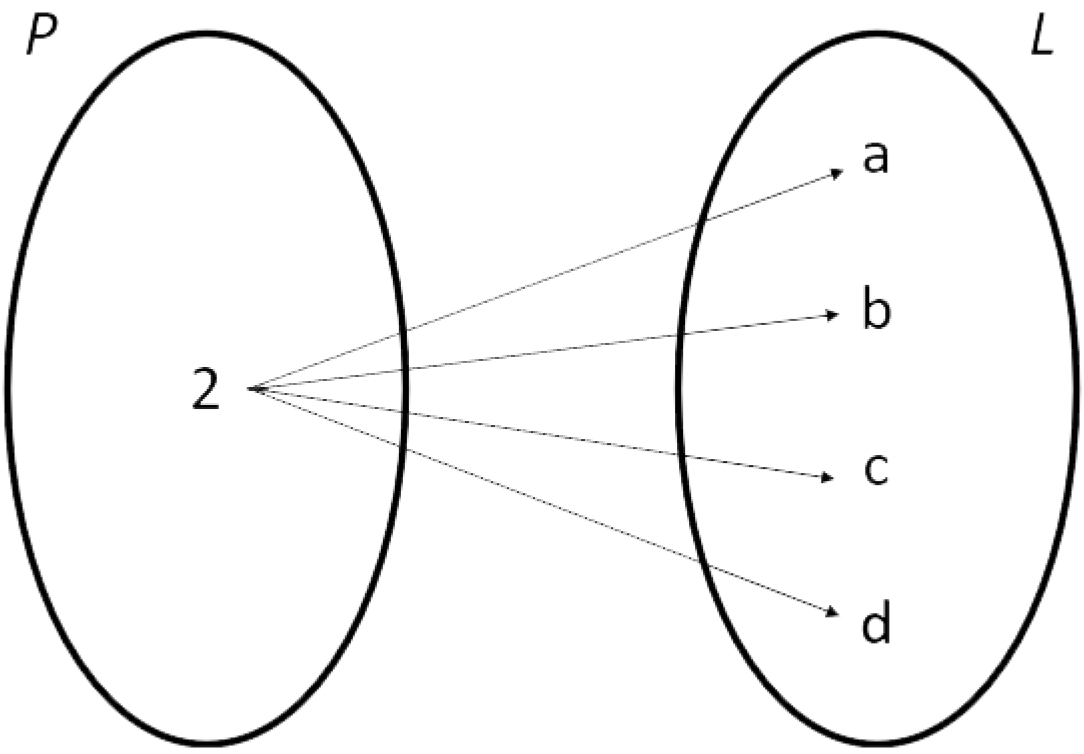
Para entender mejor esto último, retomemos la relación generada con el problema 1 "Organizando las habitaciones del hotel", la cuál era:

$$R_1 : \{habitaciones\ de\ piso\ par\}$$

Los elementos de la relación R eran:

$$R_1 = \{(2, a), (2, b), (2, c), (2, d)\}$$

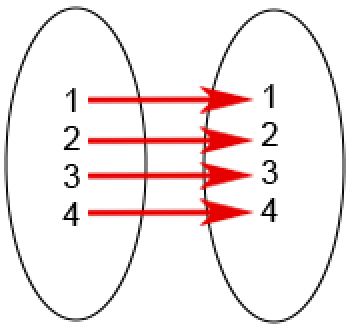
Si graficamos esta relación mediante un diagrama sagital nos queda:



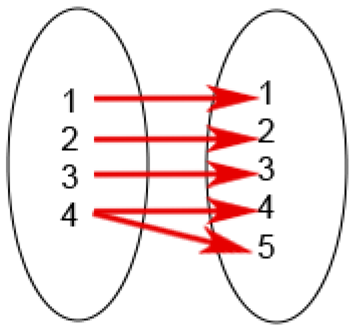
Por lo tanto, vemos que esta relación no es una función, ya que no se cumple la condición de unicidad, porque al elemento 2 del conjunto de partida, le corresponde cuatro elementos del conjunto de llegada, y debería ser uno solo.

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón para releerlo.*

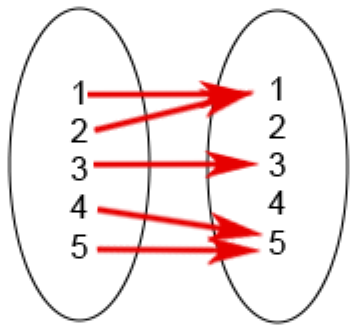
A continuación, se muestran diferentes relaciones mediante diagramas sagitales. Vamos a analizar si cumplen las condiciones para que sean consideradas funciones o no:



No es una función, ya que el elemento 5 no está relacionado con ninguno del conjunto de llegada. Por lo tanto, no se cumple la condición de **existencia**.



No es una función, ya que el elemento 4 del conjunto de partida está relacionado con dos elementos del conjunto de llegada. Por lo tanto, no se cumple la condición de **unicidad**.



Es una función, ya que no importa si a dos elementos del conjunto de partida les corresponde el mismo elemento en el conjunto de llegada, siempre y cuando se cumplan las condiciones de **existencia y unicidad**.

3.2. Otras relaciones que son funciones

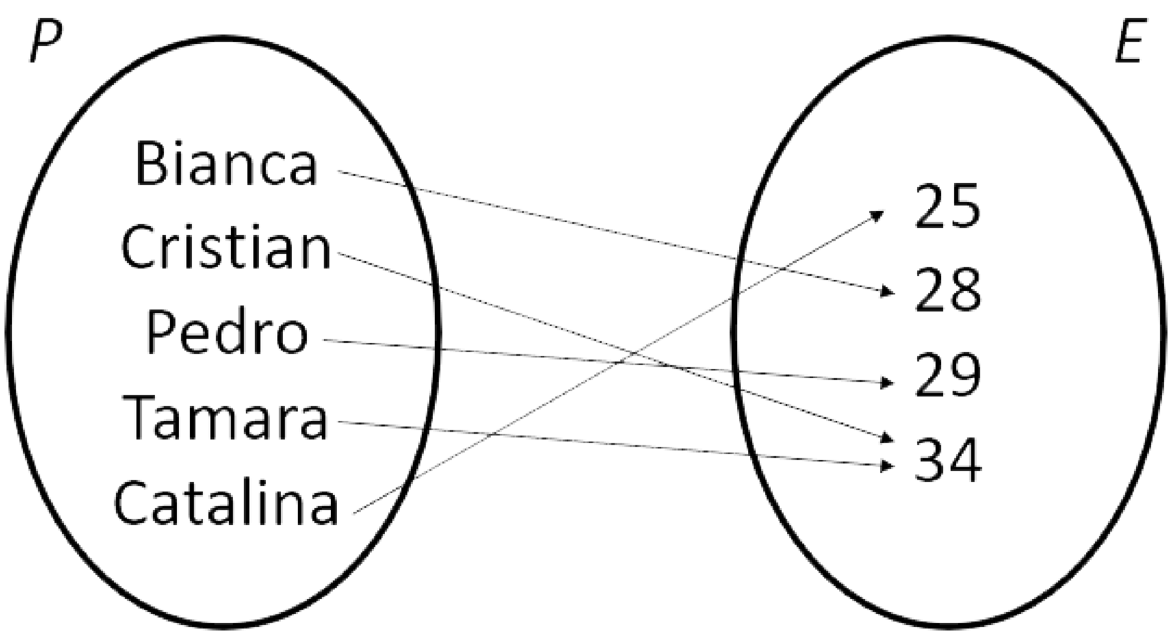
Vamos a ver ahora dos ejemplos más de relaciones que son funciones, es decir, que cumplen con las condiciones de unicidad y existencia:

Ejemplo 1:

Cuando un nuevo huésped ingresa al hotel, el conserje debe pedirle una serie de datos y uno de ellos es la edad. En lo que va del día, han ingresado cinco personas y las respuestas a esta pregunta fueron las siguientes:

La relación entre cada huésped y su edad, **¿es una función?** Veamos primero la relación mediante un diagrama sagital y luego, analizaremos si se cumplen las condiciones de unicidad y existencia.

El conjunto de partida son las personas y lo llamaremos P. Mientras que el conjunto de llegada es la edad y lo llamaremos E.



Si llamamos R a la relación planteada, entonces sus elementos son:

$$R = \{(Bianca, 28), (Cristian, 34), (Pedro, 29), (Tamara, 34), (Catalina, 25)\}$$

Es posible ver que para cada elemento del conjunto de partida, existe un único elemento en el conjunto de llegada. Por lo tanto, como se cumplen las condiciones de unicidad y existencia, la relación planteada es una función.

Observen que el hecho de que dos personas tengan la misma edad, no hace que se incumpla la definición de función, ya que la unicidad se sigue cumpliendo.

Ejemplo 2:

Este segundo ejemplo va a ser similar a una de las relaciones trabajadas antes.

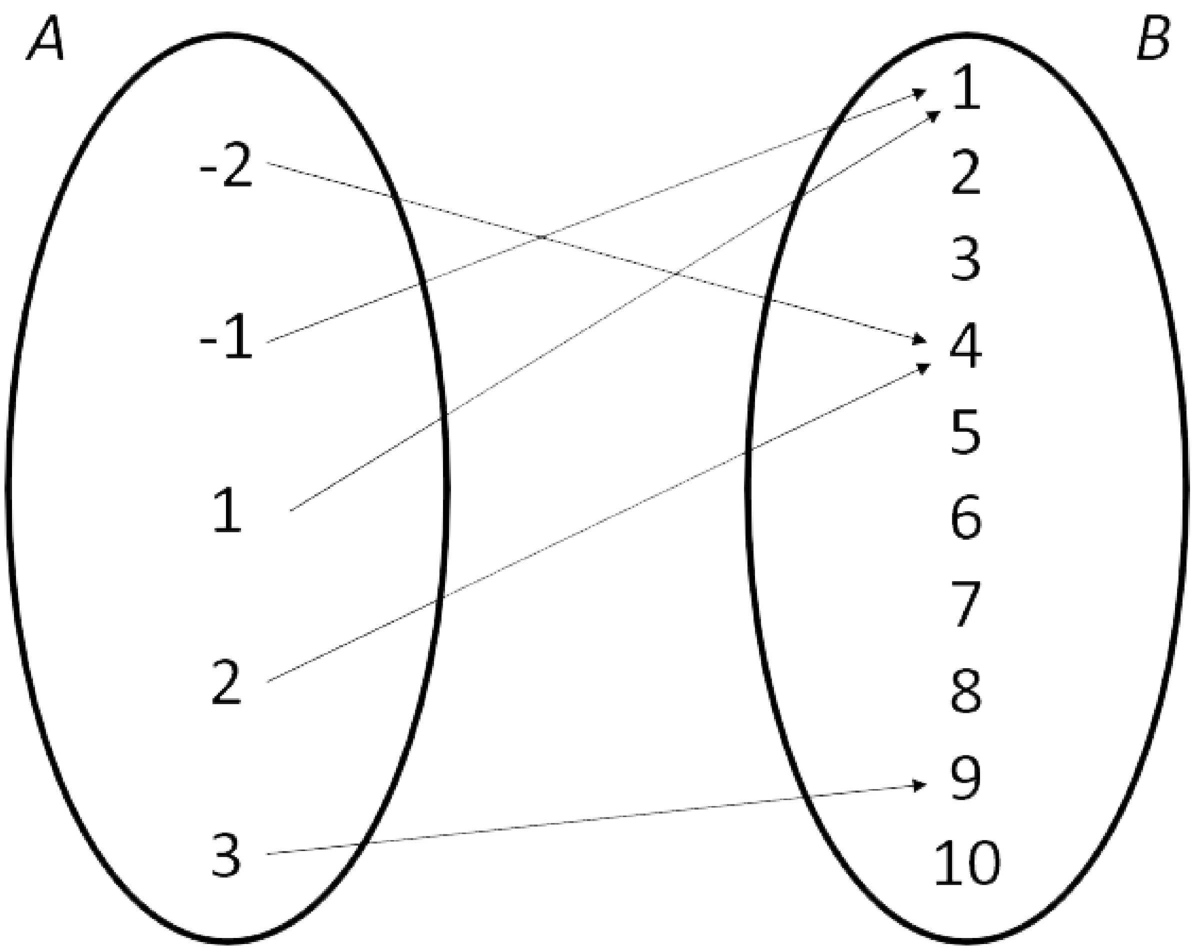
Dados los conjuntos $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ y $B = \{y \in \mathrm{N} : y \leq 10\}$, encontrar todos los pares ordenados (x, y) que satisfagan la relación R definida de A en B como: $R = \{(x, y) \in A \times B : x^2 = y\}$.

Para encontrar el conjunto R, debemos buscar aquellos elementos de A cuyo cuadrado sea igual a algún elemento de B.

Vamos a proceder a realizar los siguientes cálculos:

- Si $x = -2$: $(-2)^2 = 4 \rightarrow$ este valor está en el conjunto de llegada.
- Si $x = -1$: $(-1)^2 = 1 \rightarrow$ este valor está en el conjunto de llegada.
- Si $x = 1$: $1^2 = 1 \rightarrow$ este valor está en el conjunto de llegada.
- Si $x = 2$: $2^2 = 4 \rightarrow$ este valor está en el conjunto de llegada.
- Si $x = 3$: $3^2 = 9 \rightarrow$ este valor está en el conjunto de llegada.

Las relaciones entre los elementos de cada conjunto se muestran en el siguiente diagrama sagital:



$$R = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

¿Se cumplen las condiciones de existencia y de unicidad? Veamos...

- ¿Todos los elementos del conjunto de partida fueron relacionados con al menos un elemento del conjunto de llegada? Sí. Por lo tanto, se cumple la existencia.
- ¿Esa relación es única? Sí. Por ende, se cumple la unicidad.

En conclusión, esta relación es una función, porque se cumplen las condiciones de existencia y unicidad.

¿Qué hubiera sucedido si en el conjunto de partida estaba el elemento 0? ¿Seguiría siendo una función?

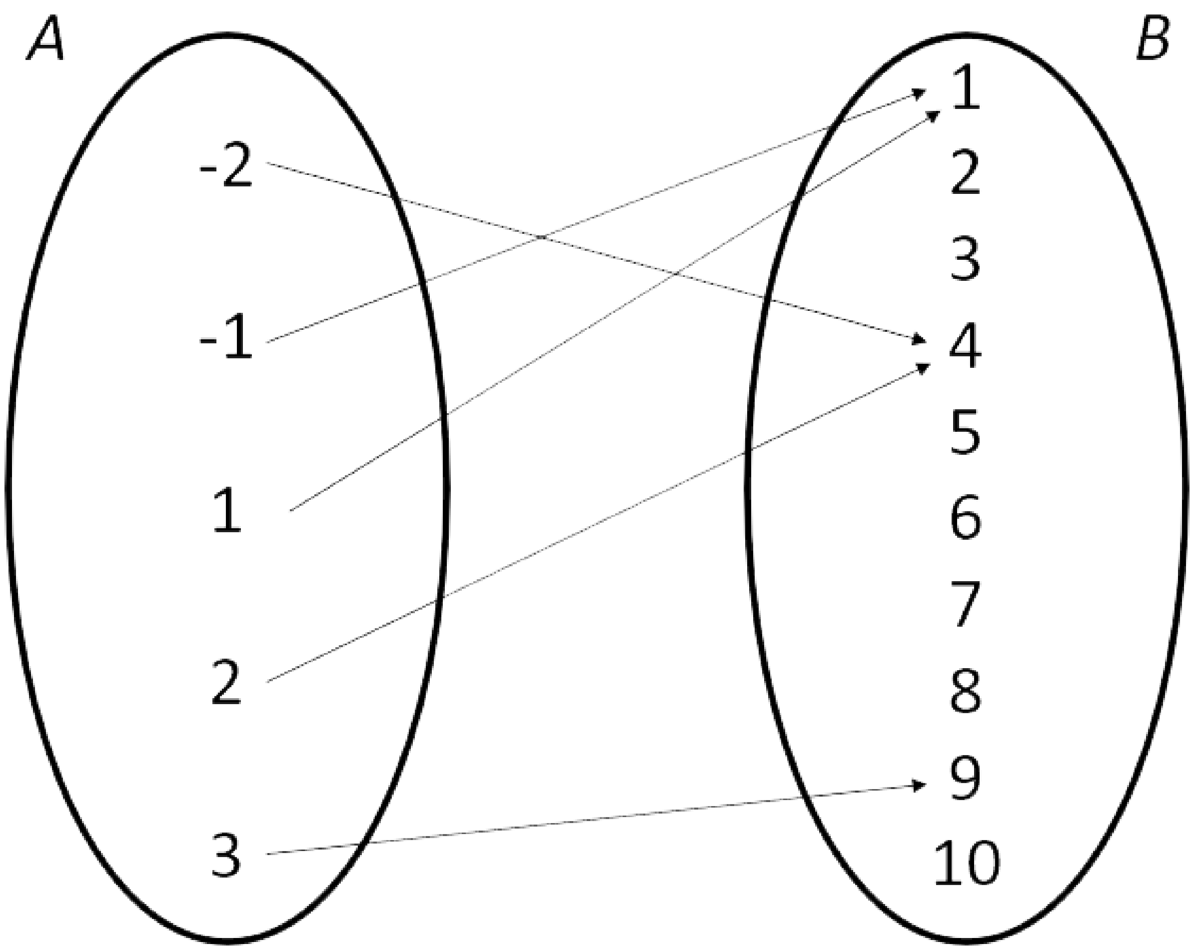
La respuesta es no, ya que $0^2 = 0$ y ese elemento no está en el conjunto de llegada, por ende no se cumpliría la existencia.

4. Dominio, codominio e imagen

A continuación, definimos tres conjuntos claves en el concepto de función:

- Dominio: es el conjunto de partida. Se escribe: $Dom~f$.
- Codominio: es el conjunto de llegada.
- Imagen o rango: es el conjunto formado por todos los elementos del codominio que fueron relacionados con algún elemento del dominio. Se escribe: $Im~f$.

Si retomamos el diagrama sagital del ejemplo 2 de la sección anterior:

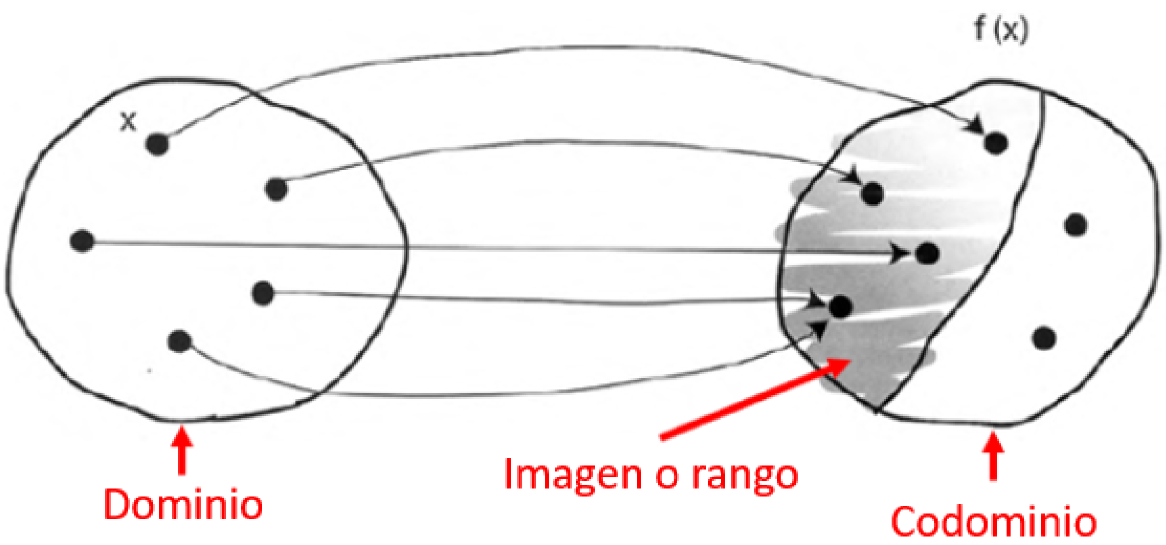


Estos tres conjuntos quedan definidos de la siguiente manera:

$$Dom~f=A \text{ o bien, } Dom~f= \lbrace{-2,-1,1,2,3}\rbrace$$

$$Codominio=B \text{ o bien, } Codominio= \lbrace{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}\rbrace$$

$$Im f= \lbrace{1,4,9}\rbrace$$



Si x es un elemento del dominio relacionado con un elemento y del codominio bajo la función f, se escribe $y=f(x)$ y se lee "f de x", lo cual implica que y es la imagen de x a través de f.

En nuestro ejemplo, $f(-2)=4$ significa que cuando la x vale -2 y se aplica la función f, el valor de y que le corresponde es el 4, es decir, 4 es la imagen de -2. También, vemos que $f(3)=9$, por lo que 9 es la imagen de 3.

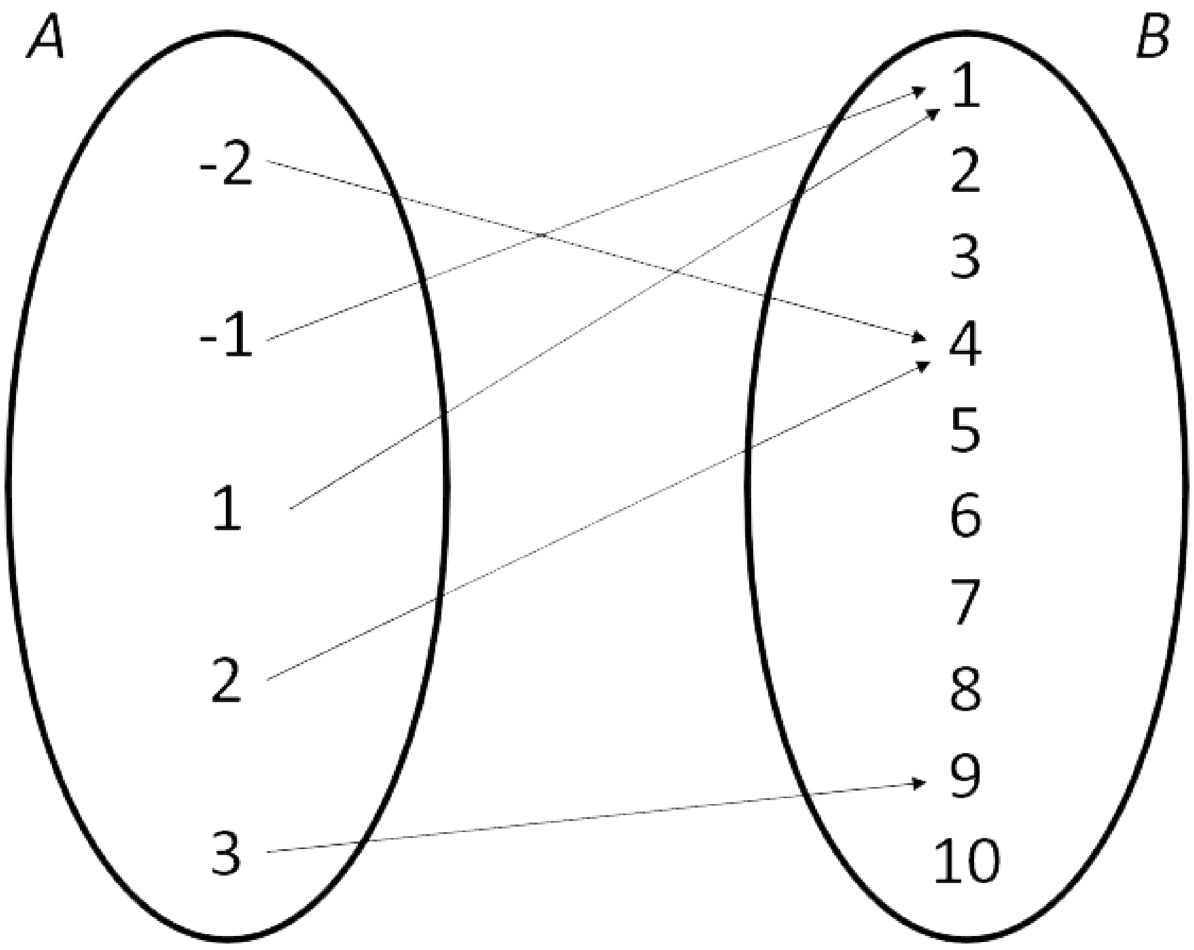
Observación: en la próxima semana trabajarán con funciones cuyo dominio, codominio e imagen son los números reales o un subconjunto de ellos, por lo que serán necesarios los intervalos explicados anteriormente.

5. Diferentes representaciones de funciones

Como la función es un tipo particular de relación, las representaciones explicadas anteriormente también se pueden utilizar aquí.

Si tomamos como ejemplo la función anterior, podemos representarla de las siguientes maneras:

- **Diagrama sagital:**



- **Tabla de valores:**

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
1	1
2	4
3	9

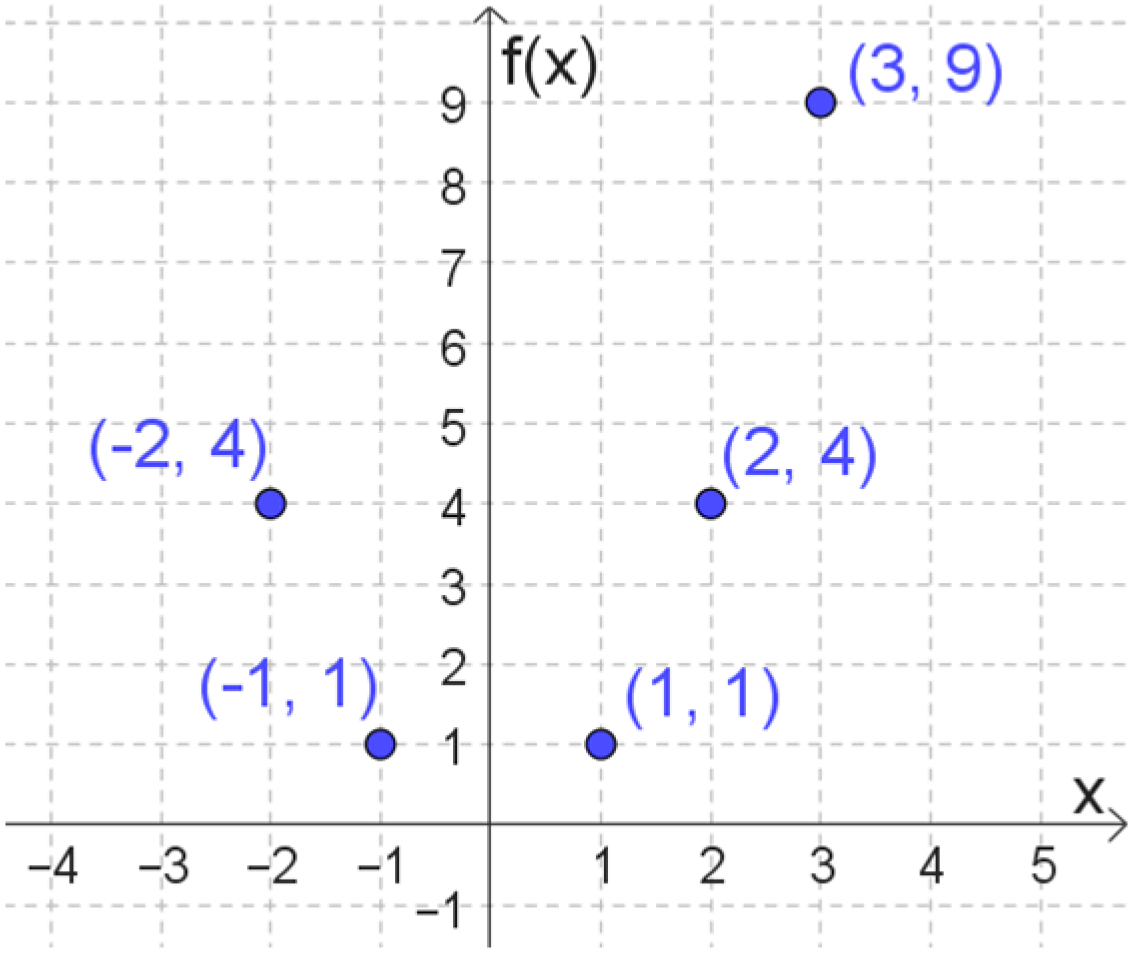
- **Verbalmente:**

Función f que relaciona cada elemento de A con alguno de B y de tal manera que el cuadrado del primero de como resultado el segundo.

- **Simbólicamente:**

$f:A \rightarrow B$ tal que $y = x^2$ o bien, $f:A \rightarrow B$ tal que $f(x) = x^2$

- **Gráficamente:**



Recuerden que colocar \(y \) o \(f(x) \) es similar.

5.1. Un último ejemplo

Se define lo siguiente:

- Conjunto de partida: $A= \lbrace{1, 2, 3}\rbrace$
- Conjunto de llegada: $B= \lbrace{y \in \mathbb {N}: y<7 }\rbrace$
- $f:A \rightarrow B$ tal que $f(x)= \frac{6}{x}$

Vamos a comenzar realizando los cálculos que indica la expresión algebraica:

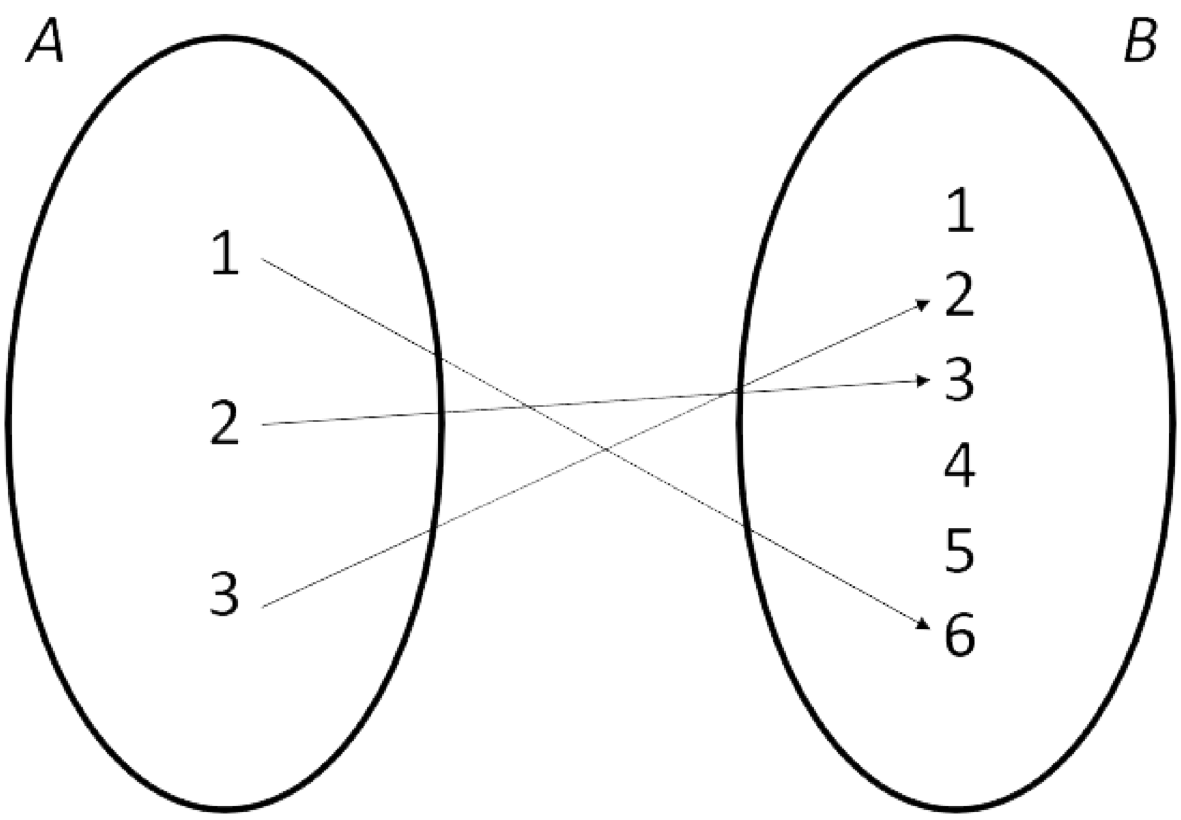
- Si $x=1$: $\frac{6}{1}=6$ → este valor está en el conjunto de llegada.

- Si $x=2$: $\frac{6}{2}=3$ → este valor está en el conjunto de llegada.

- Si $x=3$: $\frac{6}{3}=2$ → este valor está en el conjunto de llegada.

Por lo tanto, podemos plantear las siguientes representaciones de la función f:

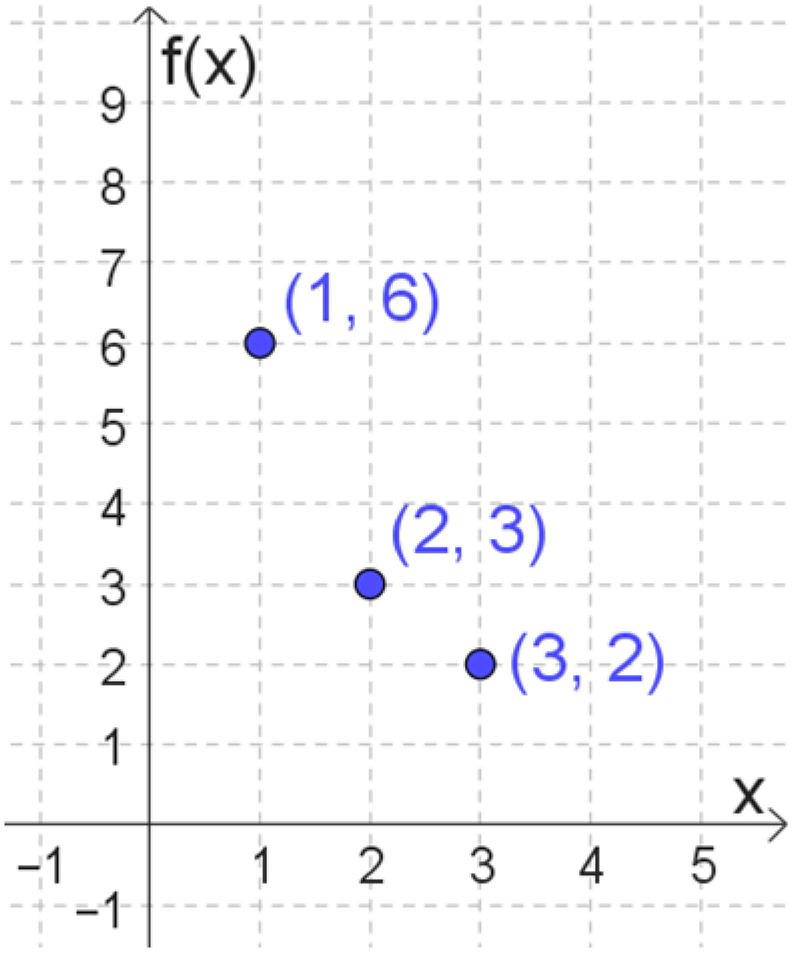
- **Diagrama sagital:**



- **Tabla de valores:**

x	$f(x)$
1	6
2	3
3	2

- **Gráfica:**



Por último, podemos indicar lo siguiente:

- $Dom~f= \lbrace{1,2,3}\rbrace$
- $Codominio= \lbrace{1,2,3,4,5,6}\rbrace$
- $Im~f= \lbrace{2,3,6}\rbrace$

Además, vemos que las condiciones de unicidad y existencia se cumplen.