Matrices

Sitio:	[Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida]	Imprimido por:	Sebastian Puche
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° G	Día:	sábado, 19 de octubre de 2024, 19:00
Libro:	Matrices		

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección vamos a introducirnos en el tema **matrices**.

Te invitamos recorrer el índice de la derecha, el cual contiene lo siguiente:

- Definición de matrices
- Matrices especiales
- Operaciones con matrices
- Relación con el problema de esta semana
- Determinante
- Matriz inversa
- Ecuaciones matriciales

2. Definición de matrices

Los arreglos de números como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

reciben el nombre de matrices.

Más formalmente, dado un conjunto X, se denomina matriz de n filas y m columnas a un conjunto de $n \times m$ elementos de X, dispuestos en un arreglo rectangular de n filas y m columnas.

Las características de los elementos del conjunto X dependerán, en cada caso, de la naturaleza del problema que se esté estudiando. Así, X puede ser un conjunto de funciones, de palabras de un alfabeto, de números, entre otras posibilidades.

En este curso, sin embargo, los elementos del conjunto X serán siempre números reales y denotaremos el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ (n filas y m columnas) por $M_{n \times m}$. En general, para representar una matriz A de orden $n \times m$ se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

También se escribe $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m)$ para indicar que A es la matriz de orden $n \times m$ que tiene elementos a_{ij}.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con la misma letra minúscula acompañada de dos subíndices que indican su posición en la matriz; el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna. Es decir, el elemento a_{ij} es aquel que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz A.

Por ejemplo, si denotamos por M a la matriz inicial,

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 5 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces, el orden de M es 2×3 (2 filas y 3 columnas) y sus elementos son:

$$m_{11} = 8$$

$$m_{12} = -1$$

$$m_{13} = 0$$

$$m_{21} = 5$$

$$m_{22} = 0.5 \text{ y}$$

$$m_{23} = 3.$$

Igualdad de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, de orden $n \times m$, son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$. Es decir, dos matrices son iguales si los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices coinciden.

Veamos, en lo que sigue, algunos tipos de matrices que, por sus características, reciben nombres especiales.

3. Matrices especiales

Matriz cuadrada

Una **matriz** se dice cuadrada si tiene igual número n de filas que de columnas $(n = m)$. En ese caso, también se dice que la matriz es de orden n. Por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

es cuadrada de orden 3.

Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n por M_n. Así, en el ejemplo anterior, $A \in M_3$. Los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada son aquellos que están situados en la diagonal que va desde la esquina superior izquierda hasta la inferior derecha.

En otras palabras, la diagonal principal de una matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ está compuesta por los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. En el ejemplo anterior la diagonal principal está compuesta por los elementos:

- $a_{11} = 1$,
- $a_{22} = -3$ y
- $a_{33} = 1$.

Se conoce como traza de una matriz cuadrada a la suma de todos los elementos de su diagonal, es decir,

$$\text{Traza(A)} = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

En la matriz del ejemplo, su traza es igual a -1 pues:

$$\text{Traza(A)} = 1 + (-3) + 1 = -1.$$

Matriz nula

Una **matriz es nula** si todos sus elementos son iguales a cero.

En el siguiente ejemplo se muestra la matriz nula de orden 3×2 .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz nula, respecto a la adición y multiplicación de matrices, juega un papel similar al número cero respecto a la adición y multiplicación de números reales.

Matriz diagonal

Una **matriz cuadrada** , $A = \left(a_{ij}\right)$, es diagonal si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero.

Por ejemplo, la siguiente matriz es diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matriz identidad

La **matriz identidad** es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos iguales a 1.

A continuación, mostramos la matriz unidad de orden 2.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que la matriz unidad, respecto a la multiplicación de matrices, juega un papel similar al número 1 respecto a la multiplicación de números reales.

Matriz triangular

Una matriz se dice **triangular** si es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo (o por encima) de la diagonal principal son iguales a cero.

Por ejemplo, la siguiente matriz es triangular:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de matriz también se conoce como matriz escalonada. En algunos casos se hace la distinción entre las matrices triangulares superiores o inferiores en dependencia de los elementos nulos de la matriz; los que están por debajo o por encima de la diagonal principal. Más adelante veremos que las matrices triangulares juegan un papel fundamental en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Matriz traspuesta

Una **matriz traspuesta** es la que permuta los elementos de la posición ij con los de la ji. Es decir, si la matriz A es es de $n \times m$ y sus elementos son a_{ij}, es decir, $A = (a_{ij})$, los de su traspuesta, que se nota por A^T serán los a_{ji}; es decir, $A^T = (a_{ji})$ y tendrá dimensión $m \times n$.

Por ejemplo, dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

su traspuesta será

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 6 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Después de estudiar las operaciones con matrices en el próximo capítulo, veremos algunos tipos importantes de matrices más, como es el caso de las simétricas y las ortogonales, entre otras.

4. Operaciones con matrices

Veamos, en lo que sigue, algunas operaciones que podemos definir en el espacio de las matrices, y las propiedades que se cumplen al operar en este campo.

Suma de matrices

Sean $A, B \in M_{n \times m}$. La matriz $C=\left(c_{i j}\right) \in M_{n \times m}$ es la suma de las matrices $A=\left(a_{i j}\right)$ y $B=\left(b_{i j}\right)$, y se denota $C=A+B$, si sus elementos cumplen:

$$ c_{i j}=a_{i j}+b_{i j} $$

para todo $i=1,2, \ldots, n$ y $j=1,2, \ldots, m$.

Ejemplo

Consideremos las siguientes matrices:

$$ A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{array}\right), \quad M=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{array}\right). $$

Las matrices A y B son de orden 3×2, mientras la matriz M es cuadrada de orden 3. Por lo tanto, no podemos calcular la suma de A y M y tampoco la suma de B y M, en cambio, sí podemos sumar A y B ya que tienen el mismo orden. Esto es,

$$ A+B=\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2+4 & 4+4 \\ (-1)+2 & 3+4 \\ 0+(-1) & 2+0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 6 & 8 \\ 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{array}\right). $$

Propiedades de la suma de matrices

Es fácil deducir las siguientes propiedades de la suma de matrices de orden $n \times m$. En lo que sigue, consideremos matrices $A, B, C \in M_{n \times m}$.

- Conmutativa: $A+B=B+A$.
- Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$.
- Elemento neutro (la matriz nula): existe $O \in M_{n \times m}$ tal que $A+O=O+A=A$.
- Elemento inverso (la matriz opuesta): existe $(-A) \in M_{n \times m}$ tal que $A+(-A)=(-A)+A=O$.

Producto de una matriz por un número

Se denomina producto de una matriz $A=\left(a_{i j}\right) \in M_{n \times m}$ por un número λ a una matriz $B=\left(b_{i j}\right) \in M_{n \times m}$ cuyos elementos son de la forma:

$$ b_{i j}=\lambda a_{i j}, $$

para todo $i=1,2, \ldots, n$ y $j=1,2, \ldots, m$.

Es decir, la matriz producto, B, es la que se obtiene multiplicando el número λ por cada uno de los elementos de A. De aquí en adelante consideraremos que λ es un número real.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc}2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0\end{array}\right)$ y el número $\lambda=-5$. Entonces, el producto de A por λ es:

$$\lambda \cdot A=(-5)\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} -10 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & -20 \\ -25 & -35 & 0 \end{array}\right).$$

Propiedades del producto de una matriz por un número

El producto de una matriz por un número cumple las siguientes propiedades, siendo $A, B \in M_{n \times m}$ y $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$:

- Distributiva mixta del producto respecto a la suma de matrices: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
- Distributiva mixta del producto respecto a la suma de números reales: $(\lambda+\delta) A=\lambda A+\delta A$.
- Asociativa mixta: $(\lambda \cdot \delta) A=\lambda(\delta A)$.

Todas estas propiedades para la suma de matrices como para el producto de matrices por un número, dotan a este nuevo espacio (el de las matrices) de una estructura ideal en el Álgebra: el espacio vectorial.

Producto de matrices

Se denomina matriz producto de la matriz $A=\left(a_{i j}\right) \in M_{n \times m}$ por la matriz $B=\left(b_{j k}\right) \in M_{m \times p}$ a una matriz $C=\left(c_{i k}\right) \in M_{n \times p}$ cuyos elementos son de la forma:

$$c_{i k}=a_{i 1} b_{1 k}+a_{i 2} b_{2 k}+\cdots+a_{i m} b_{m k k}=\sum_{i=1}^m a_{i j} b_{i k}.$$

Es decir, los elementos que ocupan la posición $i k$ en la matriz producto, se obtienen sumando los productos que resultan de multiplicar los elementos de la fila i en la primera matriz por los elementos de la columna k de la segunda matriz.

Observemos en detalle cómo se obtiene el elemento c_{23} en el siguiente ejemplo:

$$A \cdot B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{lll} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} -7 & 2 & 14 \\ 0 & 4 & 7 \\ -8 & 0 & 12 \end{array}\right)=C$$

La fila 2 de A, con elementos ($(2,-1)$), se multiplica -elemento a elemento- por la columna 3 de B, con elementos $(5,3)$, y la suma de esos productos conforman el elemento que ocupa la posición 23 de la matriz C. Es decir,

$$c_{23}=\sum_{j=1}^2 a_{2 j} b_{13}=a_{21} b_{13}+a_{22} b_{23}=2 \cdot 5+(-1) \cdot 3=10-3=7.$$

De esto se desprende que dos matrices se pueden multiplicar sólo cuando el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. En ese caso se dice que las matrices son conformables. Caso contrario, el producto no está definido. Esta es una primer diferencia notable respecto de la operación con números reales: no siempre será posible multiplicar dos matrices.

Ejemplo

En el siguiente ejemplo podemos ver, además, cuál es el orden de la matriz producto.

$$\begin{gathered} A=\left(\begin{array}{llll} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)_{3 \times 4}, \quad B=\left(\begin{array}{ll} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{array}\right)_{4 \times 2}, \\ A \cdot B=\left(\begin{array}{llll} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)_{3 \times 4}\left(\begin{array}{ll} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{array}\right)_{4 \times 2}=\left(\begin{array}{cc} 19 & 23 \\ 7 & 10 \\ 19 & 13 \end{array}\right)_{3 \times 2}. \end{gathered}$$

En el ejemplo, ¿es posible hacer el producto de B por A? No, no es posible porque las matrices no son conformables: B tiene 2 columnas y A tiene 3 filas, no coinciden. Luego, en general, no vale la propiedad conmutativa para el producto de matrices. Es decir, en general, no es cierto que $A \cdot B$ sea igual a $B \cdot A$.

Hay casos, como veremos en el siguiente ejemplo, en los que se pueden calcular ambos productos aunque se obtienen resultados diferentes.

Ejemplo

Consideremos las siguientes matrices:

$$A=\left(\begin{array}{lll} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{ll} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, por un lado,

$$A \cdot B=\left(\begin{array}{lll} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ll} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 9 & 17 \\ 11 & 8 \end{array}\right)$$

y por otro lado,

$$B \cdot A=\left(\begin{array}{ll} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{lll} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 11 \\ 12 & 9 & 6 \end{array}\right).$$

En efecto, ambos productos están definidos, pero no conducen al mismo resultado cuando se cambia el orden de los factores. Veamos que propiedades sí se cumplen para esta operación.

Propiedades del producto de matrices

Para matrices cualesquiera $A, B, C: A \in M_{n \times m}, B \in M_{m \times k}, C \in M_{k \times p}$, valen las siguientes propiedades respecto del producto:

- Asociativa: $A\cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C$.
- Elemento neutro (matriz identidad): existe I tal que $A \cdot I=I \cdot A=A$.
- Distributiva (mixta): $A\cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$.

4.1. Ejemplos de operaciones con matrices

Ejemplo 1

Considerá las matrices:

$$ A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right). $$

Calculá $2A - B$, $A^T \cdot B$ y $C\cdot B$. Verificá los calculos utilizando algún software (emulador de calculadora científica, GeoGebra o, si ya sos usuario, algún lenguaje de tu gusto).

$$ 2A - B = 2 \left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 5 & 14 \end{array}\right), $$

$$ A^T \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 10 & -12 \\ 12 & -14 \end{array}\right). $$

No es posible efectuar la operación $C\cdot B$ ya que las matrices C y B no son conformables para el producto.

Ejemplo 2

Considerá las matrices:

$$ A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right). $$

Calculá $A + B$, $A\cdot B$ y $C^T \cdot A$. Verificá los calculos utilizando algún software (emulador de calculadora científica, GeoGebra o, si ya sos usuario, algún lenguaje de tu gusto).

$$ A + B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{array}\right), $$

$$ A\cdot B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ -3 & 8 \end{array}\right), $$

$$ C^T \cdot A = \left(\begin{array}{c} 2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 & 8 \end{array}\right). $$

Ejemplo 3

Considerá las matrices $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \ 3 & 4 \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \ 0 & 2 \end{array}\right)$ y verificá que $A\cdot B - B\cdot A$ no es igual a la matriz nula.

¿Por qué ocurre esto?

$$ \begin{aligned} A\cdot B - B\cdot A & = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right) \\ & =\left(\begin{array}{cc} -1 & 4 \\ -3 & 8 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 6 & 8 \end{array}\right) \\ & = \left(\begin{array}{cc} 0 & 6 \\ -9 & 0 \end{array}\right) . \end{aligned} $$

Esto ocurre porque, a diferencia del producto de números reales, el producto entre matrices no es necesariamente conmutativo, por lo tanto, el producto $A\cdot B$ puede no necesariamente ser igual al producto $B\cdot A$. Luego, $A\cdot B-B\cdot A$ no necesariamente será igual a la matriz nula O .

5. Relación con el problema de la semana

Relación con el problema: "Operaciones eficientes"

El problema de esta semana: "Operaciones eficientes", estaba estrechamente vinculado con las operaciones con matrices, aunque no lo supiéramos al inicio. Aquellos que hayan estudiado matrices en alguna etapa de su formación, quizás detectaron el vínculo, aunque no se esperaba que todos lo hicieran. Por ello, en lo que sigue, vamos a tratar de mostrar cómo podría resolverse optimizando el cómputo.

Recordemos los datos del problema.

La información nutricional de los frutos secos se muestra a continuación:

	Almendras	Castañas	Nueces
Proteínas (g/taza)	26.2	21	10.1
Carbohidratos (g/taza)	40.2	44.8	14.3
Grasas (g/taza	71.9	63.5	82.8

donde una taza contiene 250 gramos de producto. La composición de los mix de 2.5 kilogramos del productor se muestra a continuación:

	Mix 1 "Entrenamiento"	Mix 2 "Recreo"	Mix 3 "Energía"
Almendras (tazas)	6	3	3
Castañas (tazas)	3	6	1
Nueces (tazas)	1	1	6

En este problema, podemos pensar que hay dos matrices, por los menos, involucradas:

- una, contiene la información nutricial de cada fruto seco;
- otra, contiene la cantidad de fruto seco que lleva cada mix.

Llamemos N a la matriz que contiene la información nutricial de cada fruto seco y C a la que contiene la cantidad de fruto seco que lleva cada mix. Es muy importante que ambas matrices refieren a la información del problema en la misma unidad de referencia: gramos y tazas. Si este no fuera el caso, habría que hacer la conversión pertinente.

$$\begin{aligned} N & = \left(\begin{array}{cccl} \text{Almendras} & \text{Castañas} & \text{Nueces} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 26.2 & 21 & 10.1 & \leftarrow \text{Proteínas}\\ 40.2 & 44.8 & 14.3 & \leftarrow \text{Carbohidratos}\\ 71.9 & 63.5 & 82.2 & \leftarrow \text{Grasas} \end{array}\right) \\ \\ C & =\left(\begin{array}{cccl} \text{Mix 1} & \text{Mix 2} & \text{Mix 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 3 & 3 & \leftarrow \text{Almendras}\\ 3 & 6 & 1 & \leftarrow \text{Castañas}\\ 1 & 1 & 6 & \leftarrow \text{Nueces} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Notemos lo que representan las filas y las filas y las columnas; la disposición no es aleatoria. Lo que queremos es, precisamente, usar la combinación de frutos secos dada por la matriz C con el valor nutricional de cada uno dado en la matriz N, para obtener el valor nutricional de cada mix.

Observemos que eso es posible con el producto de N y C, en ese orden, pues, por la definición del producto de matrices, estaríamos multiplicando y sumando los elementos de cada fila de N (las proteínas de cada fruto seco, para la fila 1, por ejemplo) con las respectivas tazas que se usan de cada fruto seco para armar cada mix (el mix 1, para la columna 1) y eso es precisamente lo que buscamos.

$$\begin{aligned} N\cdot C & = \left(\begin{array}{cccl} \text{Almendras} & \text{Castañas} & \text{Nueces} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 26.2 & 21 & 10.1 & \leftarrow \text{Proteínas}\\ 40.2 & 44.8 & 14.3 & \leftarrow \text{Carbohidratos}\\ 71.9 & 63.5 & 82.2 & \leftarrow \text{Grasas} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccl} \text{Mix 1} & \text{Mix 2} & \text{Mix 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 3 & 3 & \leftarrow \text{Almendras}\\ 3 & 6 & 1 & \leftarrow \text{Castañas}\\ 1 & 1 & 6 & \leftarrow \text{Nueces} \end{array}\right)\\\\ & = \left(\begin{array}{cccl} \text{Mix 1} & \text{Mix 2} & \text{Mix 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 230.3 & 214.7 & 160.2 & \leftarrow \text{Proteínas}\\ 389.9 & 403.7 & 251.2 & \leftarrow \text{Carbohidratos}\\ 704.7 & 679.5 & 776 & \leftarrow \text{Grasas} \end{array}\right)\\\\ & = \left(\begin{array}{ccc} 230.3 & 214.7 & 160.2\\ 389.9 & 403.7 & 251.2 \\ 704.7 & 679.5 & 776 \end{array}\right). \end{aligned}$$

La matriz obtenida contiene el valor nutricional de cada mix (columnas: mix 1, 2 y 3) por cada uno de las categorías de interés (filas: proteínas, carbohidratos y grasas). Esos valores, naturalmente, están dados en gramos, ya que la matriz N tenía información de dada en gramos por tazas, y la matriz C, tazas.

No debemos olvidar que las proporciones de cada mix estaban dados en términos de 10 tazas, pues el embolse inicial que hacía el productor era de 2.5 kilogramos (10 tazas de 250 gramos cada una).

Si quisiéramos información nutricional para empaques de menor peso, bastaría con multiplicar esa matriz por la constante adecuada. Por ejemplo, si empaca los mix en paquetes de 50 gramos, habrá que multiplicar la matriz anterior por el factor $1/50$, pues es posible armar 50 bolsas de 50 gramos cada una con el paquete de 2.5 kilogramos. Es decir:

$$\begin{aligned} N\cdot C \cdot \frac{1}{50}& = \left(\begin{array}{ccc} 230.3 & 214.7 & 160.2\\ 389.9 & 403.7 & 251.2 \\ 704.7 & 679.5 & 776 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{50}\\ &=\left(\begin{array}{ccc} 4.606 & 4.294 & 3.204\\ 7.798 & 8.074 & 5.024 \\ 14.094 & 13.59 & 15.52 \end{array}\right). \end{aligned}$$

De esta forma, puede verse fácilmente que, para un empaque de 50 gramos:

- el mix 1 aporta 4.606 gramos de proteínas, 7.798 gramos de carbohidratos y 14.904 gramos de grasas;
- el mix 2 aporta 4.294 gramos de proteínas, 8.074 gramos de carbohidratos y 13.59 gramos de grasas;
- el mix 3 aporta 3.204 gramos de proteínas, 5.024 gramos de carbohidratos y 15.52 gramos de grasas.

¿Por qué llamamos de "operaciones eficientes" al problema de esta semana?

Porque ahora que planteamos la estructura de la solución en este ejemplo imaginario, ¡podemos tratar cualquier otro problema análogo a este, pero que involucre más (muchos más) elementos! Es decir, extender la solución a casos más generales es prácticamente algo sin costo adicional.

Por ejemplo,

- si N representa a una matriz que contiene la información nutricional (por filas) de una lista de ingredientes (por columnas),
- si C representa a una matriz que contiene la proporción de cada ingrediente (por filas) que llevan ciertas preparaciones (por columnas),
- entonces $N\cdot C$ es la matriz que contiene la información nutricional de cada ingrediente (por filas) de cada una de las preparaciones (por columnas).

Si C no tuviera la proporción (como ocurrió en nuestro ejemplo), habría que corregir esa última cuenta con una constante adecuada (como hicimos en nuestro ejemplo).

El punto más importante es, precisamente, ¡que nuestro problema puede tener la dimensión que quiera! Total, ya sabemos cuál es su solución. Y lo más tedioso, que será el cómputo, lo hará un dispositivo adecuado.
Esto aplica, de hecho, a problemas más generales que no traten únicamente contextos alimenticios como este. Por ejemplo, puede consultarse en la web de qué se trata la matriz insumo-producto de un país y completar su lectura una vez terminados los contenidos de esta semana (ecuaciones matriciales).

Por último, para responder la pregunta relacionada con el pan dulce, podemos usar lo que sabemos de vectores. Recordemos que la cantidad de cada mix que lleva una receta grande de pan dulce es 100 gramos del mix 1, 300 del mix 2 y 200 del mix 3. Llamemos g al vector dado por las grasas que aporta cada mix por cada 50 gramos

$$g=(14.094,13.59,15.52),$$

que no es otra cosa más que la tercera fila de la matriz que armamos para responder lo anterior.

Armemos un vector con las cantidades de esos paquetes de 50 gramos que deberíamos usar para el pan dulce.

Llamemos p al vector de estas cantidades:

$$p=(2, 6, 4),$$

y notemos que esas son sus componentes pues se necesitan 2 paquetes del mix 1, 6 del mix 3 y 4 del mix 2 para el pan dulce, pues cada uno de esos paquetes es de 50 gramos.

Entonces, la cantidad total de grasas que aportarán estos frutos secos al pan dulce estará dada por el producto escalar de esos vectores

$$p\cdot g = (2,6,4) \cdot (14.094,13.59,15.52) = 171.808.$$

Es decir, 171.808 gramos de grasas. Esto, de nuevo, puede ser generalizado para casos de dimensión mayor.

6. Determinante

El **determinante** es una función que asocia a cada matriz cuadrada A de dimensión $n\times n$ (también llamada de orden n) un número real, denotado por $\operatorname{det}A$ o $|A|$, y suele ser útil para analizar algunas propiedades y características de la matriz.

El cálculo del determinante es una operación algebraica importante en la teoría de matrices y se utiliza en diversos campos de las matemáticas, la física, la ingeniería y la computación, entre otros.

Cálculo del determinante

Existen varias formas de calcular el determinante de una matriz y su definición no es trivial. Trataremos aquí los casos más elementales para matrices de orden 1, 2 o 3 y usaremos software para computar numéricamente cualquier determinante de orden superior.

El caso de matrices de orden inferior (orden 1,203) es muy simple y su determinante se calcula con sencillas reglas conocidas. Dichas reglas son también deducibles del teorema de Laplace.

Una matriz de orden uno $A=\left(a_{11}\right)$ tiene como determinante al valor del único elemento de la matriz

$$\operatorname{det} A=\operatorname{det}\left(a_{11}\right)=a_{11}$$

El determinante de una matriz de orden 2:

$$A=\left(\begin{array}{ll} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$$

se calcula de la siguiente forma:

$$\operatorname{det} A =\left|\begin{array}{ll} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right|=a_{11} a_{22}-a_{12} a_{21} .$$

El determinante de una matriz de orden 3:

$$A=\left(\begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

se calcula de la siguiente forma (típicamente conocida como “regla de Sarrus”),

$$\operatorname{det} A=\left|\begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|=\left(a_{11} a_{22} a_{33}+a_{12} a_{23} a_{31}+a_{13} a_{21} a_{32}\right)-\left(a_{31} a_{22} a_{13}+a_{32} a_{23} a_{11}+a_{33} a_{21} a_{12}\right).$$

Para tener en cuenta

La definición más general de determinantes implica el trabajo con una función multilineal alternada, que escapa el objetivo de este curso y puede profundizarse si es de interés.

Más info...

Otra forma usual de cómputo es a través de la eliminación gaussiana, que se basa en transformar la matriz a su forma escalonada para obtener el determinante de forma más sencilla. También existe el método de los menores complementarios, que consiste en obtener los determinantes de las submatrices de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ de la matriz original y utilizarlos para calcular el determinante de la matriz completa.

Más info...

6.1. Ejemplos de cálculos determinantes

Calculemos el siguiente determinante de una matriz de orden 2:

$$\left|\begin{array}{ll} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{array}\right|=2 \cdot 6-1 \cdot 4=12-4=8.$$

Calculemos el siguiente determinante de una matriz de orden 3:

$$\begin{aligned} \left|\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right| & = [(-2) \cdot 4 \cdot(-6)+1 \cdot 5 \cdot 2+3 \cdot(-3) \cdot(-4)] - [3 \cdot 4 \cdot 2+(-2) \cdot 5 \cdot(-4)+1 \cdot(-3) \cdot(-6)] \\ & =(48+10+36)-(24+40+18) \\ & =12 \end{aligned}$$

Calculemos el siguiente determinante de una matriz de orden 3, donde sus elementos están relacionados con una cantidad $x\in \mathbb{R}$ indeterminada:

$$\begin{aligned} \left|\begin{array}{ccc} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{array}\right|& =[(1-x)^3+0+0]-[0+(1-x)+(1-x)]\\ & =(1-x)^3-2(1-x)\\ & =(1-x)[(1-x)^2-2] \\ & =(1-x)(1-2 x+x^2-2) \\ & =(1-x)(x^2-2 x-1)\\ & =-x^3+3 x^2-x-1. \end{aligned}$$

Naturalmente, este determinante depende del valor de x, que determinan los elementos de las filas y columnas de la matriz. Por ejemplo, puede fácilmente verificarse que si $x=1$, el determinante de la matriz será 0. O bien, verificar que si $x=0$, el determinante de la matriz será -1.

Para tener en cuenta

Hay unas matrices en la que el cálculo del determinante es trivial: las matrices triangulares: si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\operatorname{det}(A)=a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{n n}=\prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Teniendo en cuenta que la matriz identidad es triangular, se deduce que:

$$\operatorname{det}(I)=1.$$

6.2. Propiedades y aplicaciones determinantes

Los determinantes cumplen varias propiedades que están relacionadas con ciertas características de las matrices.

Enunciamos coloquialmente algunas de las propiedades más importantes:

- El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz transpuesta.
- El determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes.
- Si una matriz tiene una fila (o columna) nula, entonces su determinante es cero.
- Si se intercambian dos filas (o dos columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo.
- Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un número \(\lambda\), entonces el determinante se multiplica por \(\lambda\).
- Si se suma a una fila (o a una columna) un múltiplo de otra fila (o columna), entonces el determinante no cambia.

Aplicaciones del determinante

El estudio del determinante es algo que escapa el objetivo del curso, tanto en extensión como en profundidad. Sin embargo, podemos señalar que suele utilizarse en

- la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer,
- el cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada,
- la resolución de problemas de geometría analítica, como el cálculo de áreas y volúmenes,
- la resolución de problemas en la física, como la determinación de la estabilidad de un sistema físico, entre otros.

Sobre los dos primeros trabajaremos en los próximos capítulos y cerraremos este recorrido. Sobre los últimos no nos extenderemos, pero sí vale la pena mencionar su importancia en contextos aun más modernos y relevantes.

Por ejemplo:

- En gráficos 3D y procesamiento de imágenes, el determinante se utiliza para calcular vectores normales, que son importantes en la iluminación y en la detección de colisiones.
- En criptografía, los determinantes se utilizan en la encriptación y desencriptación de mensajes.
- En inteligencia artificial y aprendizaje automático, los determinantes se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales y encontrar soluciones óptimas en algoritmos de optimización.
- En programación de juegos, los determinantes se utilizan en la detección de colisiones entre objetos.
- En análisis de datos, los determinantes se utilizan para determinar si una matriz es singular y para encontrar los autovectores, que son importantes en el problema de la reducción de dimensión.

7. Matriz inversa

La **matriz inversa** de una matriz cuadrada es una matriz cuadrada que solemos notar como A^{-1} y que cumple la propiedad de que $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que A. En este sentido es que se llama inversa, pues resulta inversa para el producto, dado que al mutiplicar ambas matrices se recupera la matriz identidad, que es el elemento neutro de esta operación en este espacio.

La matriz inversa solo existe para matrices cuadradas no singulares, que son aquellas que tienen determinante distinto de cero. Es decir, si el determinante de una matriz cuadrada es igual a 0, no existirá tal matriz A^{-1} de modo que $A^{-1} \cdot A=A \cdot A^{-1}=I$.

Cálculo de la matriz inversa

Existen varios métodos para calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada A. Uno de ellos es mediante la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A,$$

donde $|A|$ es el determinante de A y $\operatorname{adj}A$ es la matriz adjunta de A, que se obtiene al cambiar los elementos de la diagonal principal de la matriz de cofactores de A por sus opuestos y transponerla.

Ya hablamos previamente de la matriz de cofactores pero no la hemos definido, porque su estudio escapa el objetivo de esta sucinta introducción.

Sin embargo, usaremos otra estrategia para el cálculo de la matriz inversa, conocida como método de eliminación gaussiana. Este método se basa en transformar la matriz A a su forma escalonada reducida, es decir, a convirtiéndola en una matriz triangular usando diferentes operaciones entre filas y columnas; y usando todo ello para lograr obtener la matriz identidad.

Eliminación gaussiana

Llamaremos operaciones elementales por fila (o columna) sobre una matriz a las siguientes operaciones:

- Multiplicar una fila por un número distinto de 0.
- Sumar (o restar) a una fila, el múltiplo de otra fila.
- Permutar dos filas, es decir, intercambiar el orden de dos filas.

Ocurre que si una matriz es inversible, es decir, su determinante es distinto de 0, entonces podemos realizar un número finito de operaciones elementales fila para transformar la matriz en la matriz identidad .

De forma resumida, los pasos del método de eliminación gaussiana son:

- Escribimos una “matriz de dos bloques” que contiene a la matriz A en un lado y a la matriz identidad en el otro: $(A|I)$. Por ejemplo,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Si la matriz A es $\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$, lo anterior queda:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Hecho esto, realizamos operaciones elementales fila para transformar la matriz A en la identidad. En simultáneo, esas propiedades elementales, también son aplicadas a la matriz identidad, que se irá transformando sin una relación aparente.

En el ejemplo, es suficiente con transformar la fila 1 de A (que notaremos F_1) restándole su fila 2 (que notaremos F_2), pues se obtiene el bloque $(1 \quad 0)$ que se necesita.

$$F_1 \text{"nueva"= }F_1-F_2 \rightarrow (1 \quad 1) - (0 \quad 1) = (1 \quad 0).$$

La fila 2 permanece igual ya que es el bloque $(0 \quad 1)$ necesario. Es decir:

$$\left(\begin{array}{rcc|cc} F_1-F_2 \rightarrow & 1 & 0 & 1 & -1 \\ F_2 \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

- Se repite el proceso tantas veces como haga falta hasta que el bloque de la izquierda, donde estaba la matriz A se haya convertido en la matriz I. En simultáneo, la matriz I que estaba en el bloque de la derecha se habrá transformado en una nueva matriz B, que será, precisamente, la inversa de A. Es decir, $B=A^{-1}$.

En el ejemplo, la transformación fue conseguida:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right),$$

por lo tanto, la matriz $B=\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$ es A^{-1}. Se puede verificar que al multiplicar esa matriz con A (a derecha o a izquierda) se recupera la matriz identidad.

7.1. Ejemplos de matriz inversa

Si la matriz A es $\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{array}\right)$, antes de buscar la matriz inversa verificamos que su determinante no sea nulo. Como efectivamente no lo es, operamos a través de la eliminación gaussiana.

$$ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Suele convenir comenzar la triangulación desde la última fila. En este caso, queremos que el 4 de la posición a_{22} sea 0. Para ello, basta con hacer F_2-2F_1, es decir:

$$ \left(\begin{array}{rcc|cc} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ F_2-2F_1 \rightarrow &0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right). $$

A continuación, podemos transformar los elementos diagonales haciendo la multiplicación de las respectivas filas que los contienen por constantes adecuadas. Por ejemplo,

$$ \left(\begin{array}{rcc|cc} F_1\cdot 1/2 \rightarrow & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ F_1\cdot (-1) \rightarrow &0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right). $$

En efecto, conseguimos recuperar la identidad en el bloque izquierdo, por lo tanto, el bloque derecho contendrá la matriz inversa de A. Es decir,

$$ A^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{array}\right). $$

Se deja como ejercicio verificar que se trata de la inversa.

A continuación ejemplificamos el caso del cálculo de una inversa de orden 3 solo a título informativo, pues no es de interés intrínseco su cómputo sino que, para el desarrollo de esta materia, usaremos dispositivos de cómputo como calculadora científica, software (GeoGebra, WolframAlpha, entre otros) o el lenguaje de programación que usen (si es que usan, no es excluyente) para delegar esta operación.

Consideremos la matriz A es $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$ y emprendamos la búsqueda de su inversa. Previamente, no olviden verificar que sea inversible, es decir, que su determinante no sea nulo. Como efectivamente no lo es, operamos a través de la eliminación gaussiana.

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). $$

Comencemos por transformar la última fila.

$$ \left(\begin{array}{rccc|ccc} &1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ &0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ F_3-4F_1 \rightarrow &0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right), $$ $$ \left(\begin{array}{rccc|ccc} &1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ &0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ F_3 \cdot(-1) \rightarrow &0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right). $$

Luego, la segunda.

$$ \left(\begin{array}{rccc|ccc} &1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ F_3 \cdot 1/2 \rightarrow &0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ &0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right). $$

Por último, la primera, idealmente, operando con la tercera para no perder los ceros que se hayan conseguido en pasos previos.

$$ \left(\begin{array}{rccc|ccc} F_1 -F_3 \rightarrow &1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1\\ &0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ &0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right). $$

Finalmente, se concluye que:

$$ A^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 1\\ 0 & 1/2 & 0\\ 4 & 0 & -1 \end{array}\right). $$

Se deja como ejercicio verificar que se trata de la inversa.

7.2. Propiedades y aplicaciones de matriz inversa

La matriz inversa cumple varias propiedades.

Algunas de las más importantes son:

- La matriz inversa de una matriz que admite inversa (inversible) es única.
- Si A y B son matrices inversibles del mismo orden, entonces $A\cdot B$ también es invertible y $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.
- Si A es una matriz inversible, entonces su transpuesta también es inversible y $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.
- Si A es una matriz inversible y λ es un número no nulo, entonces la matriz λA también es inversible y $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Aplicaciones de la matriz inversa

La matriz inversa tiene diversas aplicaciones en la matemática y otras disciplinas. Algunas de las aplicaciones más destacadas son:

- la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la fórmula $X=A^{-1}B$, donde X es el vector de incógnitas y B es el vector de términos independientes,
- el cálculo de la matriz adjunta de una matriz cuadrada mediante la fórmula $\operatorname{adj}(A)=(|A|A^{-1})^T$,
- la resolución de problemas de geometría analítica, como la transformación de coordenadas,
- la resolución de problemas en la física, como la determinación de las propiedades de un material, entre otras.

Estudiaremos aquí y en lo que sigue el primero de esos puntos, esto es, la resolución de ecuaciones lineales dadas por ecuaciones matriciales.

8. Ecuaciones matriciales

Las ecuaciones matriciales están relacionadas directamente con los sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos en el próximo y último recorrido.

La forma general de una ecuación matricial es $A\cdot X = B$, donde A es una matriz conocida de tamaño $n \times m$, X es la matriz de variables desconocidas de tamaño $m \times 1$, y B es una matriz conocida de tamaño $n \times 1$. La ecuación matricial se puede reescribir como un conjunto de ecuaciones lineales, donde cada fila de $A\cdot X$ se corresponde con una fila de B, y da lugar a un sistema de n ecuaciones con m incógnitas.

Posiblemente, en tu paso por la educación secundaria hayas estudiado diferentes métodos para resolver estos sistemas que, además, solían ser de no más de 2 o 3 ecuaciones y/o incógnitas. Lo que aquí estudiaremos será un enfoque general para resolver ecuaciones matriciales, en casos muy puntuales, pero que permitirán resolver sistemas de tamaño mayor al que seguramente estudiaste, y que nos proporcionará un método de resolución bastante general.

Para resolver una ecuación matricial de la forma $A\cdot X = B$ se deben seguir los mismos principios que se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuando la variable es real, es decir, $ax=b$. En este sentido, la solución, si existe, se obtiene al encontrar la matriz X que satisface la ecuación matricial. La solución de una ecuación matricial puede ser única o no existir, dependiendo de la matriz A y de la matriz B. Consideraremos aquí únicamente los casos en que tal solución exista y sea única. Para que ello ocurra, requeriremos dos condiciones para la matriz A:

- que sea cuadrada, de orden n,
- que sea inversible.

Así, una forma de resolver la ecuación matricial $A\cdot X = B$ será mediante la inversa de la matriz A. Si la matriz A es inversible, entonces se puede multiplicar a ambos lados de la ecuación matricial por A^{-1} para obtener:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}\cdot B,$$

y usando las propiedades estudiadas y teniendo cuidado recordando que el producto de matrices no es necesariamente conmutativo, llegamos a:

$$I\cdot X = A^{-1}\cdot B,$$

que es igual a:

$$X = A^{-1}\cdot B,$$

lo que resuelve la ecuación matricial.

8.1. Ejemplos de ecuaciones matriciales

Supongamos que se tiene la ecuación matricial $A\cdot X = B$ con las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad X=\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right).$$

La solución de la ecuación está dada por $X = A^{-1}\cdot B$, y como la matriz A es la misma a la que buscamos su inversa en el apartado anterior, tenemos que:

$$X=\left(\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 1\\ 0 & 1/2 & 0\\ 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1\\ -5 \end{array}\right).$$

Pueden resolverse ecuaciones matriciales con estructuras ligeramente variadas respecto de la general aquí presentada, como por ejemplo:

- $A\cdot X+B=C$ de donde se tiene que $X=A^{-1}\cdot (C-B)$,
- $A\cdot X\cdot B = B\cdot A$ de donde se tiene que $X = A^{-1} \cdot B\cdot A \cdot B^{-1}$,
- $X\cdot A + C = X\cdot B$ de donde se tiene que $X=-C\cdot (A-B)^{-1}$,

siempre que las matrices inversas incolucradas existan y todos las operaciones anteriores sean conformables.

Se invita a verificar que las soluciones mostradas son efectivamente esas, realizando los “despejes” y observando las propiedades de las operaciones involucradas en este espacio (observar, especialmente, la no conmutatividad del producto).