Funciones racionales e irracionales

Sitio:	[Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida]	Imprimido por:	Sebastian Puche
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° G	Día:	sábado, 7 de septiembre de 2024, 20:07
Libro:	Funciones racionales e irracionales		

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección estudiaremos los siguientes contenidos:

- Relación con el problema 1: La excursión del hotel
- Función inversamente proporcional
- Asíntotas verticales y horizontales
- Función homográfica
- Funciones irracionales

Te invitamos a navegar por la tabla de contenidos a la derecha para profundizar en estas temáticas.

2. Relación con el problema 1

Relación con el problema 1: La excursión del hotel

En el problema 1, La excursión del hotel, apareció la siguiente fórmula:

$$y = \frac{72000}{x}, \quad con\ x \neq 0$$

ya que para calcular el dinero que cada persona debía pagar para hacer la excursión, al total se lo debía dividir por la cantidad de personas que asistieran. Así, por ejemplo, si a la excursión iban 8 personas, el cálculo quedaba:

$$y = \frac{72000}{8} = 9000$$

lo cual implica que cada persona iba a pagar $\$9000$ y de esa manera se cubre todo el alquiler del colectivo ($\$9000 \cdot 8 = \$72000$).

¿Por qué se aclara que la variable x tiene que ser distinta de cero?

Por dos motivos:

1. No tendría sentido para el problema calcular cuánto dinero debía pagar cada persona si a la excursión no iba nadie.
2. La fórmula tiene una división (escrita como fracción) y en matemática, la división por cero no está definida.

¿Qué tipo de función es?

Ahora bien, si comparamos la fórmula del problema con las explicadas en las semanas anteriores, ¿es una función polinómica? Observá que tenemos una fracción donde la variable x está en el denominador, por lo cual no corresponde a una función polinómica, porque $\frac{72000}{x}$ no es un polinomio. Este tipo de funciones se llaman "funciones racionales " y son las que trabajaremos en esta sección, junto con las "irracionales ".

¿Te acordás del problema 1? ***Hacé clic en el botón para releerlo.***

3. Funciones racionales

La palabra "racional" no es nueva. Ya hablamos en el recorrido 1 de los números racionales, los cuales son aquellos que se pueden expresar mediante una fracción.

Entonces, una noción intuitiva de función racional es aquella que en su fórmula tienen una fracción.

Las funciones racionales tienen la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, siendo $Q(x)$ distinto del polinomio nulo. Estas funciones, al igual que las polinómicas, son funciones algebraicas.

Son ejemplos de funciones racionales las siguientes:

$$f(x) = \frac{-5}{x}, \qquad g(x) = \frac{5x+2}{x-3}, \qquad y = \frac{x^2+x+1}{x^3+10}$$

En cambio, no es una función racional la siguiente:

$$h(x) = \frac{7x-8}{0}$$

ya que dijimos que en el denominador no puede estar el polinomio nulo, lo cual haría que la división no se pueda calcular.

Algunas observaciones

- En este curso vamos a trabajar con funciones racionales donde $P(x)$ y $Q(x)$ no tengan factores en común, es decir, ya va a estar en forma irreducible la expresión fraccionaria.
- A pesar de que las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto diferentes al de las gráficas de funciones polinómicas.

3.1. Evaluación de una función racional

Ya explicamos anteriormente que evaluar una función en cierto valor es calcular cuánto vale la función para dicho valor. Veamos ahora cómo hacemos este proceso para las funciones racionales.

Ejemplo 1. Evaluar la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$.

Para evaluar la función en esos valores de x, tenemos que reemplazar la variable x por dichos números y realizar los cálculos que quedan planteados:

- Si $x_1 = -2$, entonces $f(-2) = \frac{2}{-2} = -1$, lo cual implica que -1 es la imagen de -2 mediante la función f.
- Si $x_2 = 4$, entonces $f(4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, lo cual implica que $\frac{1}{2}$ es la imagen de 4 mediante la función f.

Ejemplo 2. Evaluar la función $g(x) = \frac{5x-4}{-2x+6}$ en $x_1 = 2$ y $x_2 = 0,25$.

- Si $x_1 = 2$, entonces $g(2) = \frac{5 \cdot 2 - 4}{-2 \cdot 2 + 6} = \frac{6}{2} = 3$, lo cual implica que 3 es la imagen de 2 mediante la función g.
- Si $x_2 = 0,25$, entonces $g(0,25) = \frac{5 \cdot 0{,}25 - 4}{-2 \cdot 0{,}25 + 6} = \frac{-2{,}75}{5{,}5} = -0,5$; lo cual implica que $-0,5$ es la imagen de $0,25$ mediante la función g.

¿Qué hubiera sucedido si en la función f, la variable x tomaba el valor 0?

$$f(0) = \frac{2}{0} \rightarrow \text{no tiene solución}$$

Por lo tanto, se debe aclarar que $x \neq 0$. Con esto, estamos diciendo que la variable x puede ser cualquier número real excepto el número 0.

¿Qué hubiera sucedido si en la función g, la variable x tomaba el valor 3?

$$g(3) = \frac{5 \cdot 3 - 4}{-2 \cdot 3 + 6} = \frac{11}{0} \rightarrow \text{no tiene solución}$$

Por lo tanto, se debe aclarar que $x \neq 3$. Con esto, estamos diciendo que la variable x puede ser cualquier número real excepto el número 3.

Lo que estamos haciendo acá es establecer el dominio de la función racional.

3.2. Dominio de las funciones racionales

La función racional $f(x)$ de nuestra definición es un cociente entre dos funciones polinómicas con dominio real. Sin embargo, la división por cero no está definida, entonces debemos asegurarnos de que el polinomio denominador no sea cero. En símbolos: $Q(x) \neq 0$.

Es por esto que el dominio de la función racional f va a conformarse por todos los números reales excepto los que anulen el polinomio que está en el denominador. En símbolos escribimos:

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

siendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces del polinomio $Q(x)$.

Algunas observaciones

- El dominio se escribe como una diferencia de conjuntos, tal como lo vimos en el recorrido 1, lo cual implica que al conjunto de los números reales le sacamos el conjunto de los números reales que son raíces del polinomio denominador.
- Recordá que los valores de x que hacen cero un polinomio se llaman raíces del polinomio.

Ejemplo

Determinar el dominio de las funciones $f(x) = \frac{2}{5x}, \quad g(x) = \frac{5x-2}{-2x+6}, \quad h(x) = \frac{x+14}{x^2+x-6}$.

En algunos casos es simple darnos cuenta de qué valor o valores anulan el denominador. Sin embargo, en aquellos casos que esto no nos resulte sencillo, podemos tomar el denominador, igualarlo a cero y encontrar el o los valores de x que satisfacen esa ecuación.

- En la función f planteamos:

$$5x = 0$$
$$x = \frac{0}{5}$$
$$x = 0$$

Esto indica que si x vale 0, el denominador se anula. Por lo tanto, $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$.

- En la función g planteamos:

$$-2x + 6 = 0$$
$$-2x = 0 - 6$$
$$x = \frac{-6}{-2}$$
$$x = 3$$

Esto indica que si x vale 3, el denominador se anula. Por lo tanto, $Dom\ g = \mathbb{R} - \{3\}$.

- En la función h planteamos:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Esta ecuación cuadrática no se pude resolver haciendo el despeje que se aplica en las ecuaciones lineales. Se utiliza la fórmula resolvente aprendida la semana anterior o el software de la calculadora científica. En cualquiera de los dos casos, los valores que anulan el denominador son:

$$x_1 = -3 \quad \text{y} \quad x_2 = 2$$

Esto indica que si la x vale -3 o 2, el denominador se anula. Por lo tanto, $Dom\ h = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Observación

Existen funciones racionales cuyo dominio son todos los números reales, ya que el polinomio que está en el denominador no tiene raíces reales. Por ejemplo:

$$i(x) = \frac{7}{x^2+1}$$

Puede verse que no importa qué valor real le asignemos a la variable x, nunca va a dar como resultado cero, ya que para lograrlo, x^2 debería ser igual a -1 y eso en los números reales no es posible, ya que todo número real elevado a un exponente par es siempre positivo. Por lo tanto, $Dom\ i = \mathbb{R}$.

4. Función inversamente proporcional

Definición

Dos variables (una independiente x y otra dependiente y) son inversamente proporcionales, si el producto de los valores respectivos de cada una de ellas es una constante k, siendo $k \in \mathbb{R}-\lbrace{0}\rbrace$. En símbolos:

$$x \cdot y=k$$

Esta relación de proporcionalidad inversa se puede representar mediante una función de la forma:

$$y= \frac{k}{x} \quad \text{o bien,} \quad f(x)= \frac{k}{x}$$

Esta es una función racional en la que $P(x)=k$ y $Q(x)=x$.

¿Recordás la fórmula de la función de nuestro problema 1, La excursión del hotel?

La misma era:

$$y= \frac{72000}{x}$$

Observá que es un ejemplo de función inversamente proporcional, donde $k=72000$.

¿Te acordás del problema 1? *Hacé clic en el botón releerlo.*

¿Cuál es el dominio de esta función?

Tomando las explicaciones anteriores, es sencillo ver que el dominio de esta función es:

$$Dom~f=\mathbb{R}- \lbrace{0}\rbrace$$

4.1. Tabla y gráfica

Vamos a tomar como ejemplo la función $g(x)= \frac{2}{x}$ y vamos a analizar algunos aspectos:

- **Dominio:**

$$Dom~g= \mathbb{R}- \lbrace{0}\rbrace.$$

Esto gráficamente implica que para el valor de $x=0$ no va a haber ningún punto en el plano cartesiano.

- **Raíces:** las raíces son los valores en donde la función vale 0, es decir, $g(x)=0$. Procederemos a calcularlas:

$$\frac{2}{x}=0$$

$$2=0 \cdot x$$

$2=0$ → ¡Absurdo!

Por lo tanto, $g(x)$ no tiene raíces reales. ¿Qué significa esto gráficamente? Que la curva no va a intersecar el eje x.

- **Ordenada al origen:** es el valor que toma la función cuando x vale 0. Pero dijimos que ese valor no forma parte del dominio de la función. Por lo tanto, la función no tiene ordenada al origen y, en consecuencia, no interseca al eje y.

- **Imagen:** Como la función no tiene raíces, entonces ella resulta siempre distinta de cero. Por lo tanto:

$$Im~g= \mathbb{R}- \lbrace{0}\rbrace$$

¿Cómo podemos graficar la función?

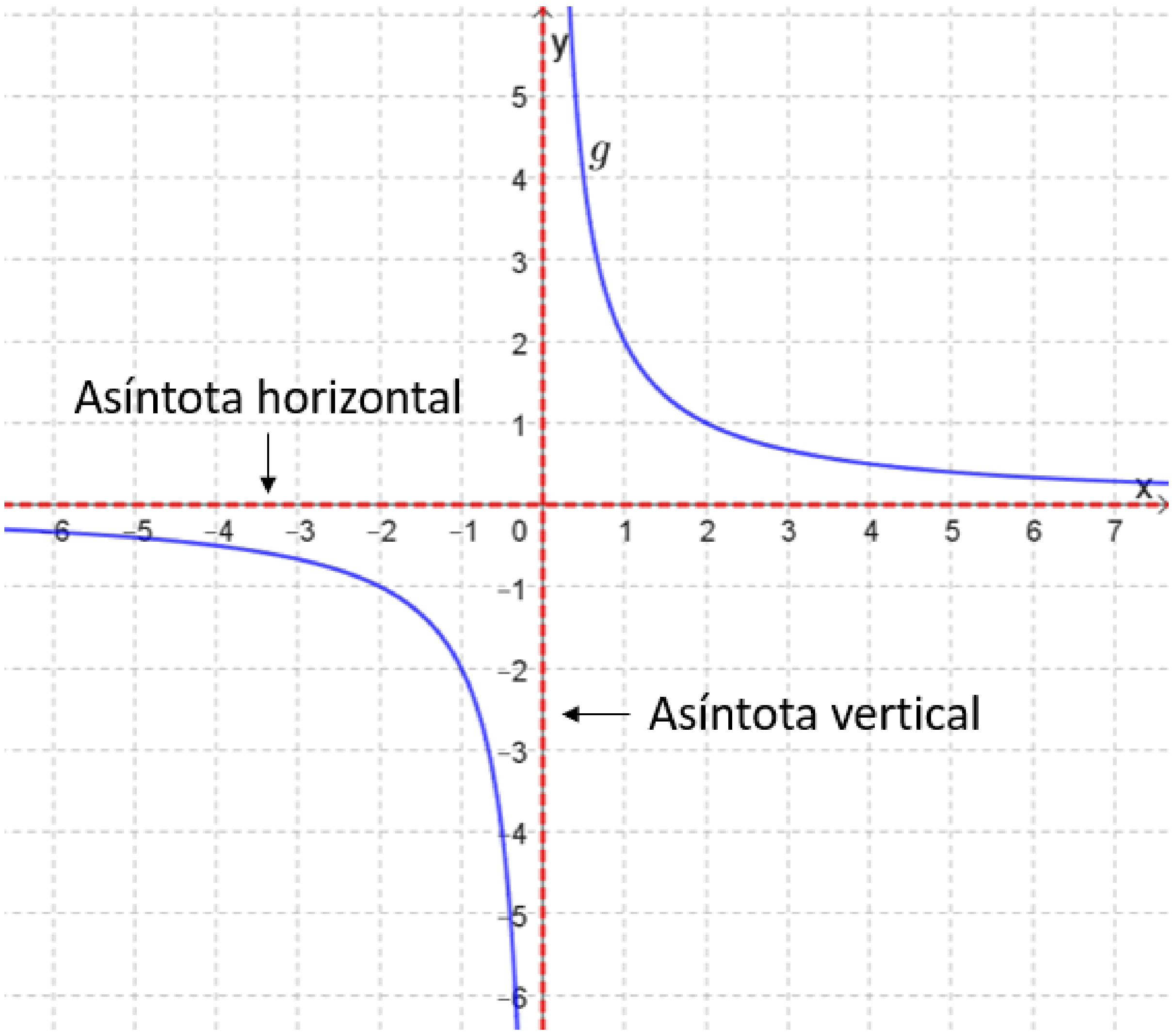
Podemos ayudarnos construyendo una tabla de valores:

x	$f(x)=\frac{2}{x}$
-1000	-0,002
-100	-0,02
-10	-0,2
-5	-0,4
-1	-2
-0,5	-4
-0,25	-8
-0,005	-400
0,005	400
0,25	8
0,5	4
1	2
5	0,4
10	0,2
100	0,02
1000	0,002

Podemos observar que a medida que le asignamos a la variable x valores positivos cada vez más grandes, la función toma valores positivos cada vez más pequeños, es decir, "tiende" a cero por encima del eje x. Ahora, si le asignamos a x valores negativos cada vez más pequeños (por ejemplo, $-10, -100, -1000$), la función toma valores negativos y se acerca a cero, pero por debajo del eje x.

Entonces, podemos decir que, a medida que los valores de la variable x “tienden” a inifnito, la función “tiende” a cero. Cuando se da esta situación, decimos que la función tiene una asíntota horizontal en $y=0$.

Por otro lado, cuando le asignamos a la variable valores próximos a cero por derecha (por ejemplo: $0,5;~0,25;~0,005$), la función toma valores cada vez más grandes, es decir, la función “tiende” a infinito. En cambio, cuando nos acercamos a cero por izquierda (por ejemplo: $-0,5;~-0,25;~-0,005$), la función toma valores cada vez más pequeños, por lo que la función “tiende” a infinito negativo. Entonces, podemos decir que si la variable x “tiende” a cero, la función “tiende” a infinito. Cuando se da esta situación, la función tiene una asíntota vertical en $x=0$. Si graficamos la función, obtenemos:



La gráfica de una función inversamente proporcional es una curva llamada hipérbola.

Te invitamos a hacer uso del software (hacé clic aquí para acceder) y analizar las gráficas de las siguientes funciones inversamente proporcionales:

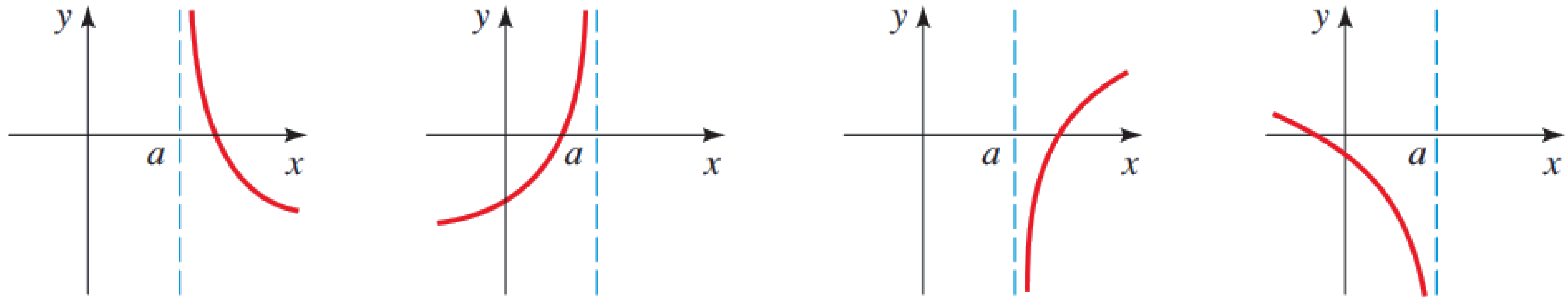
$$h(x)= \frac{-7}{x}, \qquad i(x)= \frac{7}{x}$$

¿Observás alguna diferencia?

¡Exacto! Cuando la k es negativa, la hipérbola ocupa el segundo y cuarto cuadrante. Mientras que cuando es positiva, ocupa el primer y tercer cuadrante.

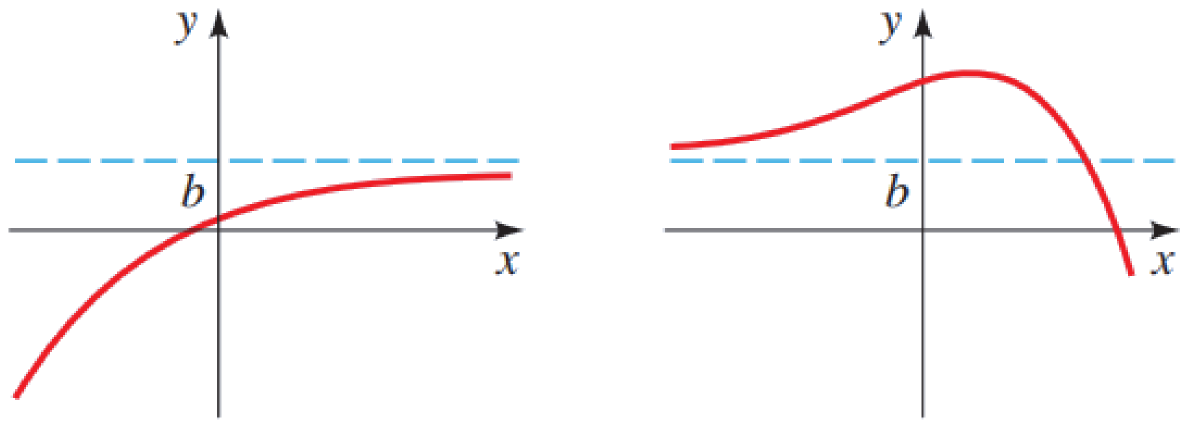
5. Asíntotas verticales y horizontales

- La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la función $y=f(x)$, si y se aproxima a $\pm \infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.



$y \to \infty$ cuando $x \to a^+$ $y \to \infty$ cuando $x \to a^-$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

- La recta $y=b$ es una asíntota horizontal de la función $y=f(x)$, si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm \infty$.



$y \to b$ cuando $x \to \infty$ $y \to b$ cuando $x \to -\infty$

Observaciones

- a^+ se lee "por la derecha de a", y a^- se lee "por la izquierda de a".
- La flecha ($\rightarrow$) se lee "tiende a". Por ejemplo, x tiende al infinito positivo ($x \rightarrow \infty$).

5.1. Asíntotas en la función racional

Asíntota vertical

La asíntota vertical está en el valor que no pertenece al dominio de la función. De todas maneras, debemos analizar que el o los valores que no pertenecen al dominio no anulen al numerador de la función.

Asíntota horizontal

Para hallarla, debemos tener en cuenta el grado del polinomio numerador $P(x)$ y el grado del polinomio denominador $Q(x)$.

De este modo, la asíntota horizontal resulta:

- Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, entonces la asíntota horizontal es siempre $y=0$.
- Si el grado de $P(x)$ es igual que el grado de $Q(x)$, entonces la asíntota horizontal es $y=\frac{coeficiente~principal~de~P(x)}{coeficiente~principal~de~Q(x)}$.
- Si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$, la función no tiene asíntota horizontal.

Vamos a aceptar estas conclusiones, porque su demostración excede a este curso.

Recordá que el grado de un polinomio es el mayor exponente que tiene la variable. Mientras que el coeficiente principal es el número que acompaña a la variable que tiene el mayor exponente.

Por ejemplo, dado $P(x)=7x^3-8x^2+5x-10$, el grado es 3 y el coeficiente principal es 7.

Ejemplo

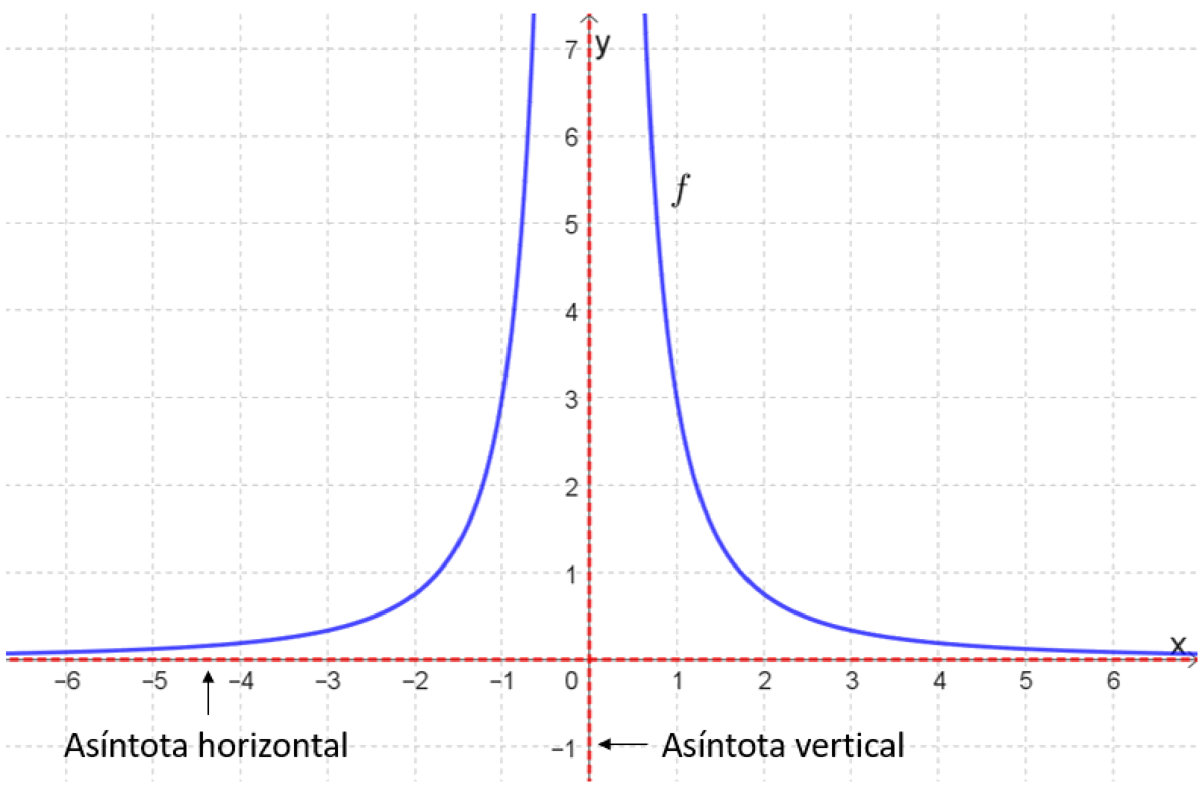
Determinar las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones racionales:

$$f(x)= \frac{3}{x^2}, \qquad g(x)= \frac{3x+5}{x-2}$$

Primero vamos a arrancar con la función $f(x)= \frac{3}{x^2}$:

- Asíntota vertical: el valor que anula el denominador es el cero. Además, éste no anula el numerador. Por lo tanto, la asíntota vertical es $x=0$.
- Asíntota horizontal: como el grado del polinomio numerador (0) es menor que el del polinomio denominador (2), la asíntota horizontal es $y=0$.

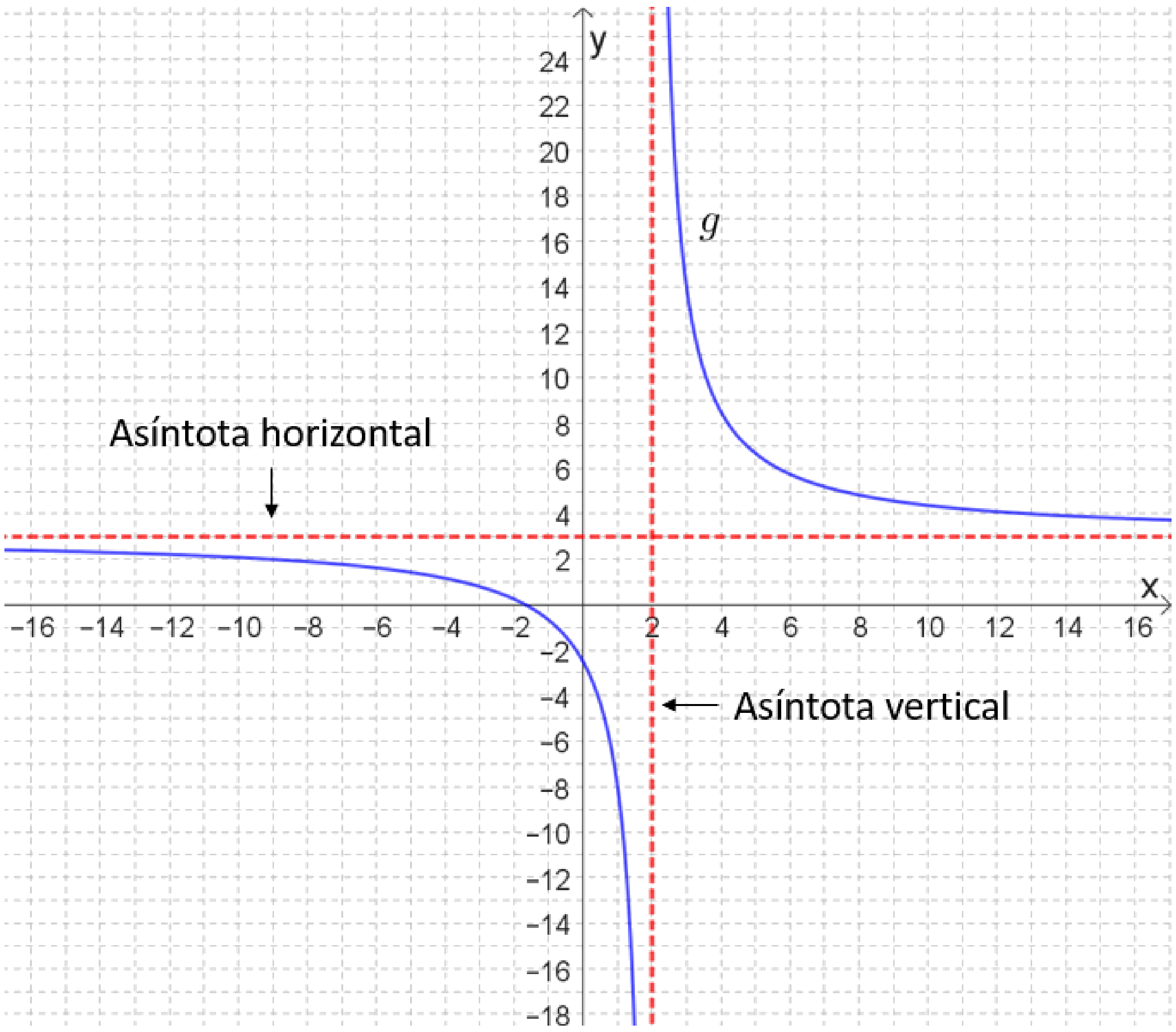
Gráficamente se ven ambas asíntotas:



Para la función $g(x)= \frac{3x+5}{x-2}$ nos queda:

- Asíntota vertical: el valor que anula el denominador es el dos. Además, éste no anula el numerador. Por lo tanto, la asíntota vertical es $x=2$.
- Asíntota horizontal: como el grado del polinomio numerador es igual al del polinomio denominador (ambos valen uno), la asíntota horizontal se calcula haciendo la división entre el coeficiente principal del polinomio numerador y el del denominador: $y= \frac{3}{1} \rightarrow y=3$.

Gráficamente se ven ambas asíntotas:



6. Función homográfica

Definición

Una función racional se denomina homográfica si es el cociente entre dos polinomios de grado uno que no comparten raíces.

Por ejemplo, $f(x)= \frac{5x+15}{4x-8}$ es una función racional homográfica, ya que ambos polinomios son de grado uno.

¿Qué elementos analizaremos para graficar una función homográfica?

En este curso, estudiamos las funciones homográficas analizando e identificando su dominio, las raíces y ordenada al origen, de poseer, las asíntotas verticales y horizontales, imagen, conjunto de positividad y negatividad, acompañando el análisis con su representación gráfica.

Ejemplo

Realicemos el estudio de la función racional homográfica:

$$f(x)= \frac{5x+15}{4x-8}.$$

¿Qué podemos analizar?

- **Dominio**

$$4x-8=0$$

$$4x=0+8$$

$$x= \frac{8}{4}$$

$$x=2$$

$$Dom~f= \mathbb{R}- \lbrace{2}\rbrace$$

- **Ordenada al origen**

$$f(0)= \frac{5 \cdot 0 +15}{4 \cdot 0 -8}= \frac{15}{-8}=-1,875$$

Por lo tanto, la gráfica pasa por el punto $(0; -\frac{15}{8})$, es decir, interseca al eje y en el valor $-1,875$.

- **Raíz**

$\frac{5x+15}{4x-8}=0$ → para que la fracción de cero, el numerador debe dar cero.

$$5x+15=0$$

$$5x=0-15$$

$$x= -\frac{15}{5}$$

$$x=- 3$$

Por lo tanto, la gráfica pasa por el punto $(-3;0)$, es decir, interseca el eje x en el valor -3.

- **Asíntota vertical**

Como $x=2$ no pertenece al dominio y no anula al numerador de la función, es una asíntota vertical.

$$AV:~x=2$$

- **Asíntota horizontal**

Para hallar esta asíntota, dado que el polinomio numerador y denominador tienen igual grado, dividimos los coeficientes principales como lo hemos definido antes. En este caso nos queda:

$$AH:~y= \frac{5}{4}$$

- **Conjuntos de positividad y negatividad**

Teniendo en cuenta el dominio de la función $Dom~f= \mathbb{R}- \lbrace{2}\rbrace$ y la raíz $x=- 3$, establecemos los intervalos de análisis. Luego, elegimos un valor cualquiera de x que pertenezca a cada intervalo para evaluar la función en ese valor y establecer el signo.

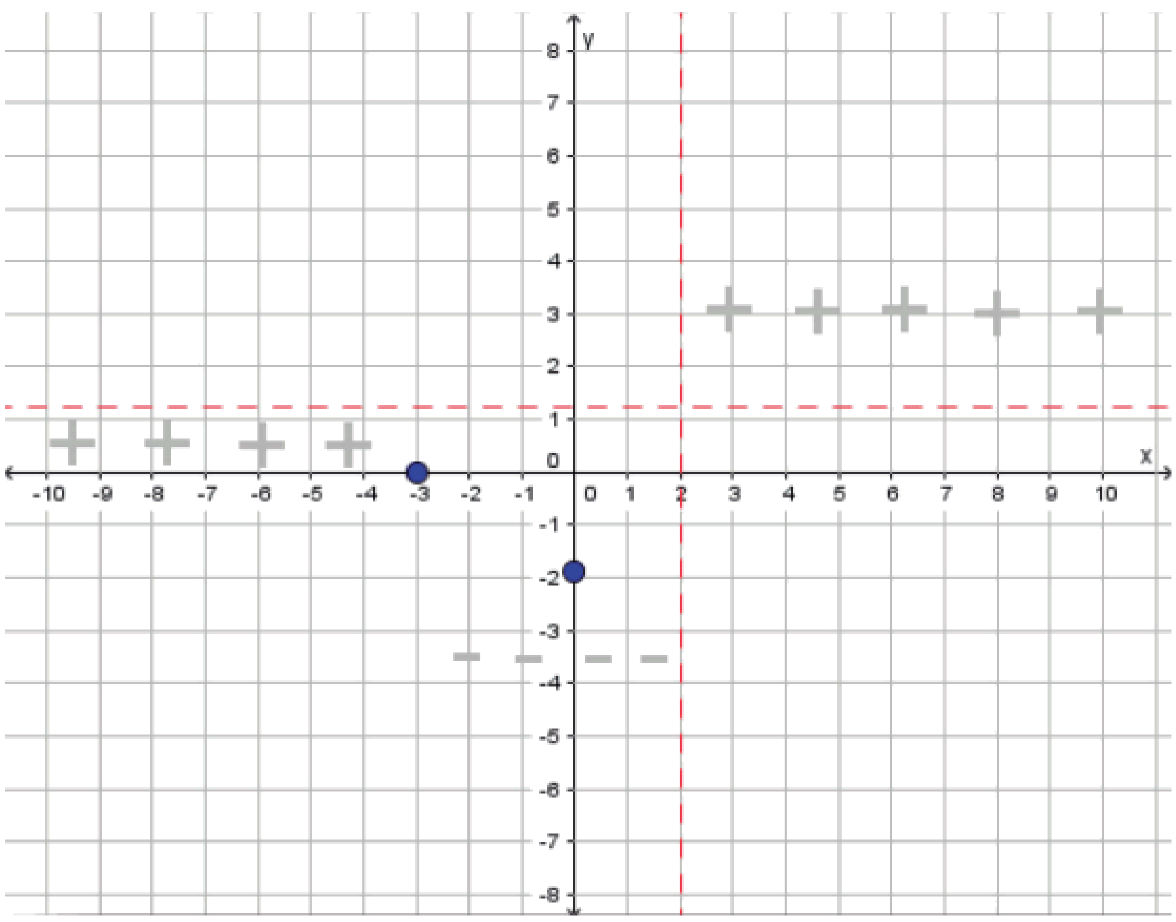
Intervalos	$(-\infty;-3)$	$(-3;,2)$	$(2;\infty)$
x	-5	-1	5
$f(x)$	$f(-5)=\dfrac{5}{14}$	$f(-1)=-\dfrac{5}{6}$	$f(5)=\dfrac{10}{3}$
Signos	Positivo	Negativo	Positivo

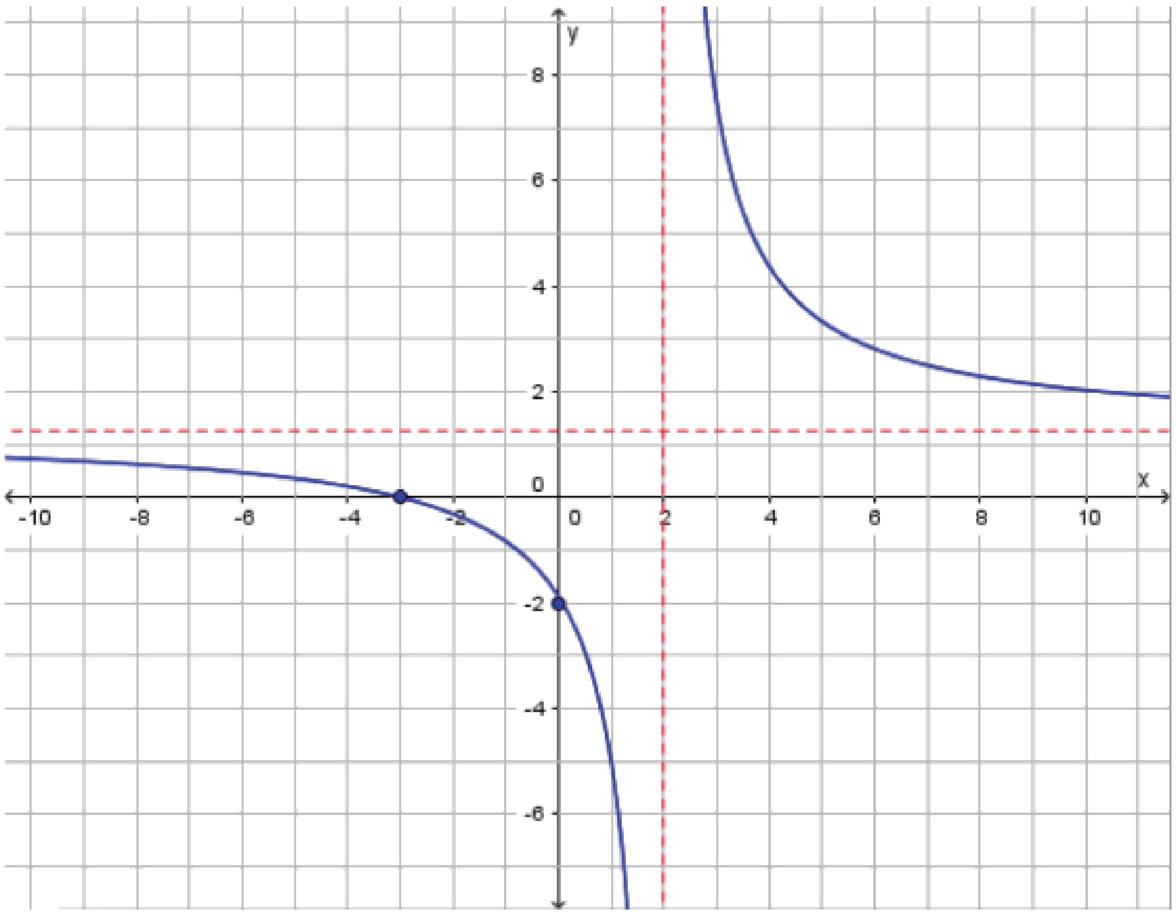
Ahora, podemos determinar los conjuntos:

$$C^+=(- \infty;-3)\cup(2;+ \infty)$$

$$C^-=(-3;2)$$

Marquemos en el plano cartesiano lo que hemos hallado, luego graficamos la función de forma aproximada:





A partir del gráfico podemos determinar la imagen de la función:

$$Im~f= \mathbb{R}- \lbrace{ \frac{5}{4}}\rbrace.$$

7. Funciones irracionales

Recordemos...

Antes de definir este tipo de función, vamos a recordar algunas ideas:

1. La palabra "irracional" debería resultarte familiar. En el recorrido 1 abordamos los números irracionales, los cuales son aquellos que no pueden expresarse como una fracción, es decir, no son racionales. Existen muchas raíces que representan números irracionales, como por ejemplo, $\sqrt[]{2},~ \sqrt[3]{5}$, etc., ya que si hacemos el cálculo obtenemos un número con infinitas cifras decimales no periódicas.

2. La operación radicación no se puede calcular en el conjunto de los números reales cuando el índice es par y el radicando es negativo. Por ejemplo, $\sqrt[]{-4}$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.

¡Ahora sí estamos mejor preparados para definir qué son las funciones irracionales!

Funciones irracionales

Las funciones irracionales son aquellas que en su fórmula presentan un radical, es decir, son de la forma:

$$f(x)= \sqrt[n]{g(x)}$$

donde n es un número natural mayor que 2 y $g(x)$ es una función polinómica o una función racional. Sin embargo, aquí solo trabajaremos con las primeras.

Son ejemplos de funciones irracionales las siguientes:

$$f(x)= \sqrt[]{4x-3},~~~~~g(x)= \sqrt[3]{x^2-5x+1},~~~~~h(x)= \sqrt[4]{ -\frac{1}{5}x-2 },~~~~~i(x)= \sqrt[5]{x+8}$$

Dominio de una función irracional

- Si el índice n es impar, el radical está definido para todos los números reales, es decir, siempre se podrá calcular.
- Si el índice n es par, el radical está definido para $g(x) \geq0$, es decir, le pedimos que la función polinómica sea positiva o cero.

Ejemplo

Vamos a determinar el dominio de las cuatro funciones definidas anteriormente.

Tanto para la función g como para la función i, su dominio son todos los números reales, ya que sus índices son impares (3 y 5, respectivamente). Por lo tanto, tenemos:

$$Dom~g=\mathbb{R},~~~~~Dom~i=\mathbb{R}$$

Ahora bien, esto no ocurre para las funciones f y h, ya que sus índices son pares (2 y 4, respectivamente). Por lo tanto, debemos hacer los siguientes planteos, comenzando con la función f:

$$4x-3 \geq0$$

$$4x \geq 0+3$$

$$x \geq \frac{3}{4}$$

¿Esto qué significa?

Significa que para que la función se pueda calcular, la variable x debe ser mayor o igual que $\frac{3}{4}$, y el dominio nos queda:

$$Dom~f=[{ \frac{3}{4};+ \infty })$$

Realizamos un proceso similar para la función h:

$$-\frac{1}{5}x-2 \geq0$$

$$-\frac{1}{5}x \geq0+2$$

$$x \leq2:(-{ \frac{1}{5} })$$

$$x \leq-10$$

$$Dom~g=(- \infty;-10]$$

Recordá que cuando se multiplica o divide por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

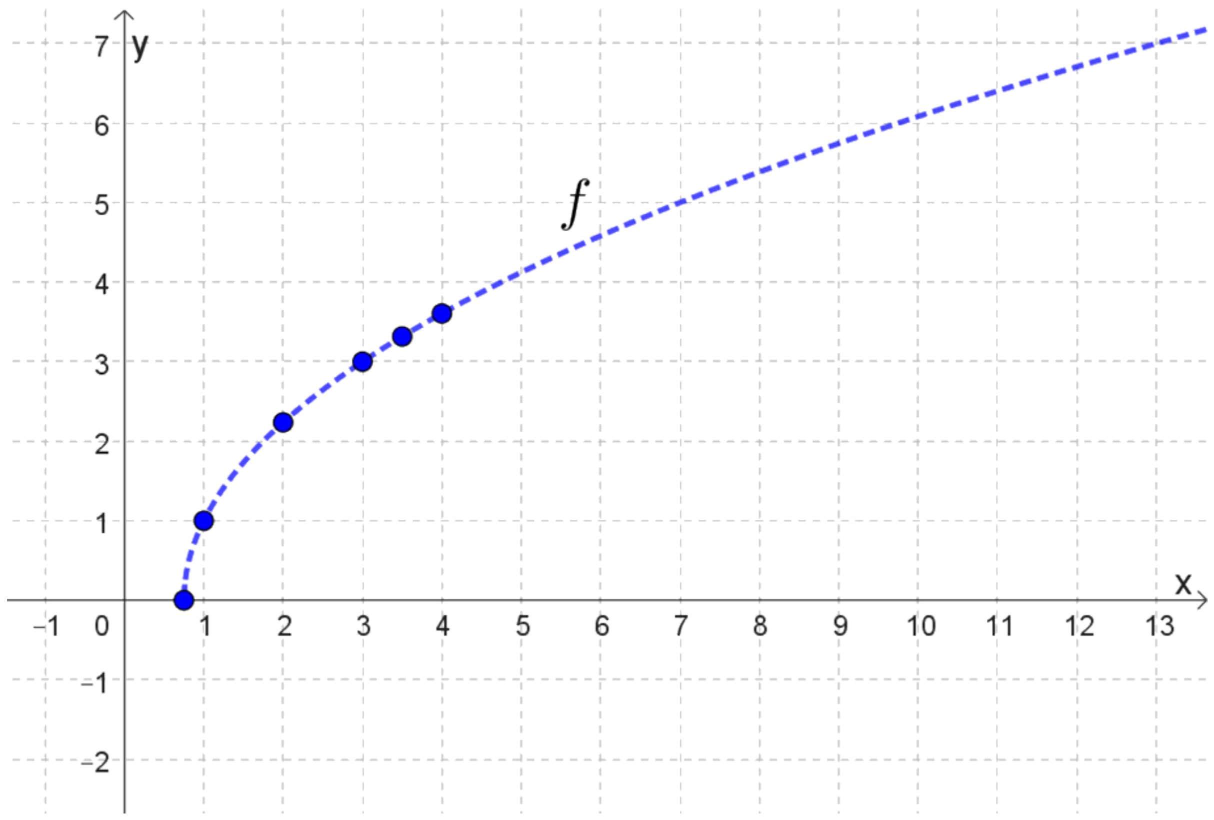
7.1. Tabla y gráfica

Vamos a realizar una tabla de valores para la función $f(x)= \sqrt[]{4x-3}$ y esbozar su gráfica.

Para darle valores a x vamos a tener en cuenta su dominio, el cual calculamos antes y es $Dom~f=[{ \frac{3}{4};+ \infty })$. Esto nos dice que debemos tomar valores mayores o iguales a $\frac{3}{4}$, porque de lo contrario no podremos realizar la operación. Una posible tabla de valores es la siguiente:

x	$f(x)$
3/4	0
1	1
2	2,236
3	3
3,5	3,317
4	3,606

Marcamos los puntos en el gráfico (de forma aproximada si es necesario) y los unimos para obtener su gráfica:



Mediante la gráfica, se ven claramente los siguientes elementos:

$Dom~f=[{ \frac{3}{4};+ \infty })$.

$Im~f=[0;+ \infty)$.

Raíz: $x= \frac{3}{4}$

No tiene ordenada al origen.

Es creciente.

De manera similar se pueden obtener las demás funciones irracionales, o también podés hacerlo mediante el software proporcionado antes.