Funciones polinómicas

Sitio:	[Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida]	Imprimido por:	Sebastian Puche
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° G	Día:	sábado, 31 de agosto de 2024, 21:50
Libro:	Funciones polinómicas		

Tabla de contenidos

1. Funciones polinómicas

Como habrás visto en el **problema 2: "Otra función para el conserje"** , nos introduciremos en el estudio de unas funciones muy particulares: las **funciones polinómicas**.

Funciones polinómicas y su representación

Se dice que una función f es polinómica si la regla de asignación es de la forma:

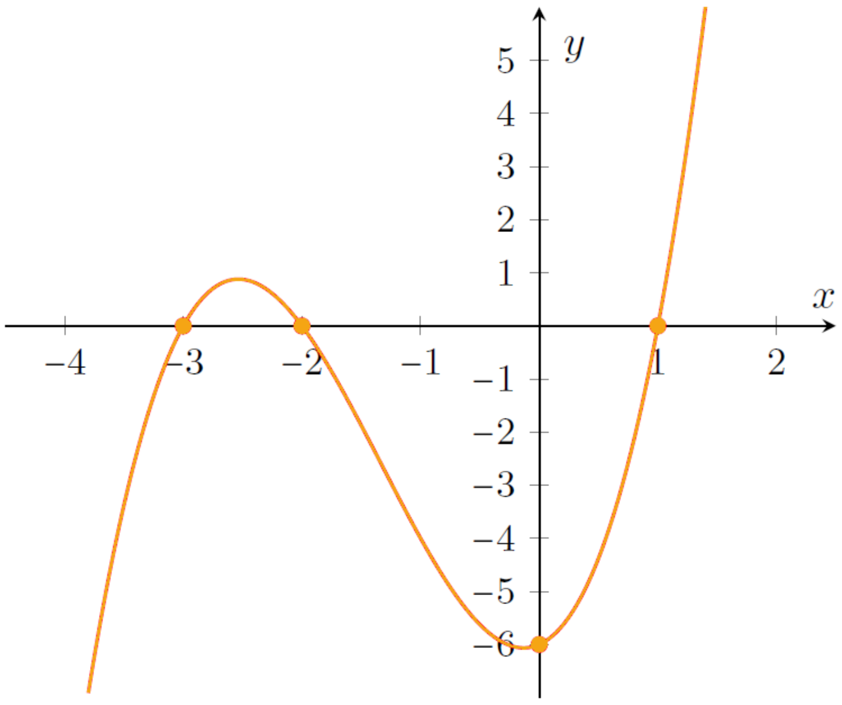
$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

Es decir, si la expresión que la define es un polinomio, como los que estudiamos en la unidad 2.

En particular, el dominio de las funciones polinómicas es siempre el conjunto de los reales (las operaciones involucradas en la estructura polinómica no tienen restricciones). Es decir, si f es una función polinómica, entonces:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}.$$

Su gráfica depende, en buena medida, del grado del polinomio que define la expresión de la función. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ tiene por gráfica la que se ve a continuación.



Puntos “notables” del gráfico

Los puntos marcados en naranja son, en algún sentido, puntos notables pues ayudan a construir la representación gráfica de la función polinómica. Observemos que tres de ellos, los de coordenadas:

$$(-3, 0); (-2, 0); (1, 0)$$

corresponden a las raíces del polinomio $x^3 + 4x^2 + x - 6$ pues al ser evaluado en $x = -3, x = -2$ y en $x = 1$, en todos los casos, el resultado es 0 .

¿Cómo obtener las raíces? Pues, con las estrategias de factorización estudiadas la escuela, o bien, usando algún software de apoyo como GeoGebra (disponible haciendo clic aquí) o la calculadora científica (disponible haciendo clic aquí) que vimos en el capítulo anterior.

Esto coincide, además, con los ceros o raíces de la función: es decir, aquellos puntos de coordenadas $(x, 0)$ o, equivalentemente, los puntos con abscisas x tales que $f(x) = 0$. El punto de coordenadas:

$$(0, -6)$$

es también un punto notable y recibe el nombre de ordenada al origen . La ordenada al origen, siempre que exista, es el punto cuya abscisa es $x = 0$ y su ordenada es $f(0)$. Es decir, el punto de coordenadas $(0, f(0))$.

1.1. ¿Cómo construir gráficos

¿Cómo construir gráficos?

Ahora bien, imaginemos que en la función polinómica del ejemplo pudimos encontrar esos puntos notables: las tres raíces y la ordenada al origen, entonces, ¿cómo producir el gráfico anterior solo a partir de ellas? Bueno, la estrategia podria ser cómo la que sigue, valiéndonos de la **continuidad de la recta real**.

Recordemos que el dominio de $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ es $\mathbb{R}$. Como las raíces de la función son $x = -3, x = -2$ y $x = 1$ pues son las raíces del polinomio asociado, éstas dividen a la recta real del dominio en 4 secciones o intervalos:

$$(-\infty, -3); (-3, -2); (-2, 1); (1, \infty).$$

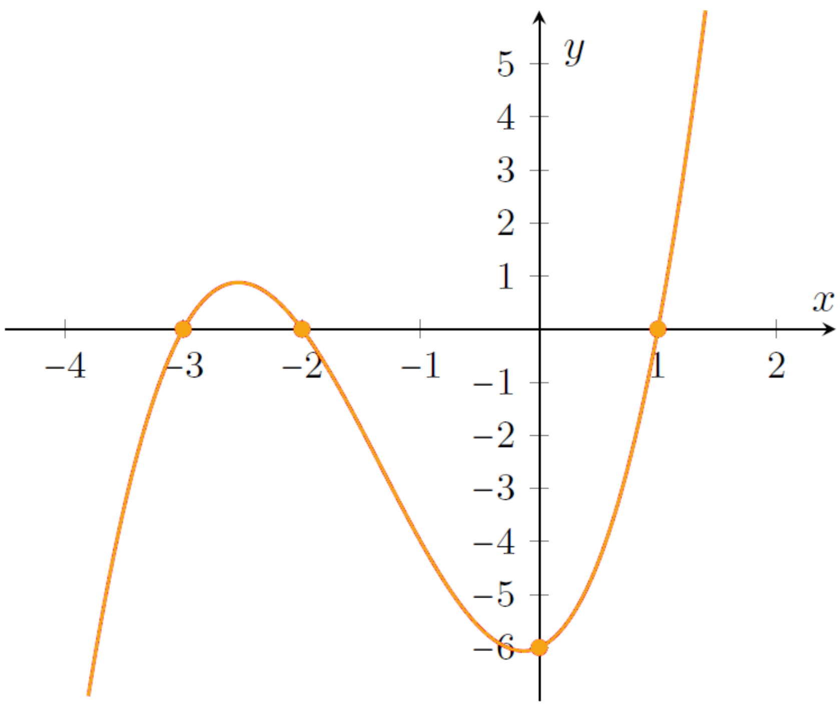
Por razones de continuidad que escapan los objetivos teóricos de este curso, se sabe que para todo x interior a cada uno de esos intervalos, el signo de $f(x)$ es único: o bien es positivo, o bien es negativo. Entonces, basta con tomar un candidato x de cada uno de esos intervalos, ver su signo, y concluir acerca del signo de $f(x)$ en cada intervalo.

Intervalo del dominio	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
Candidato x de cada intervalo	-4	-2.5	0	2
$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$	$f(-4) = -10$	$f(-2.5) = \frac{7}{8}$	$f(0) = -6$	$f(2) = 20$
Signo de $f(x)$ en ese intervalo	$-$	$+$	$-$	$+$

La tabla anterior nos da una idea del comportamiento de la gráfica de f : sabemos que se encuentra sobre el eje x en los intervalos $(-3, -2)$ y $(1, +\infty)$ (pues $f(x) > 0$ para los x allí), y que está por debajo de dicho eje cuando x pertenece a alguno de los dos intervalos restantes $(-\infty, -3)$ o $(-2, 1)$. También sabemos, porque calculamos las raíces de f, que la gráfica pasa por lo puntos $(-3, 0)$, $(-2, 0)$ y $(1, 0)$.

Toda esta información, más algún punto adicional que podemos marcar, nos da una idea de cómo será el gráfico de f. En este caso, este punto adicional es $(0, -6)$.

Uniendo estos 4 puntos mediante una curva continua que esté por encima y por debajo del eje x en los intervalos indicados, se obtiene un bosquejo aproximado de la gráfica de f, como veíamos arriba.

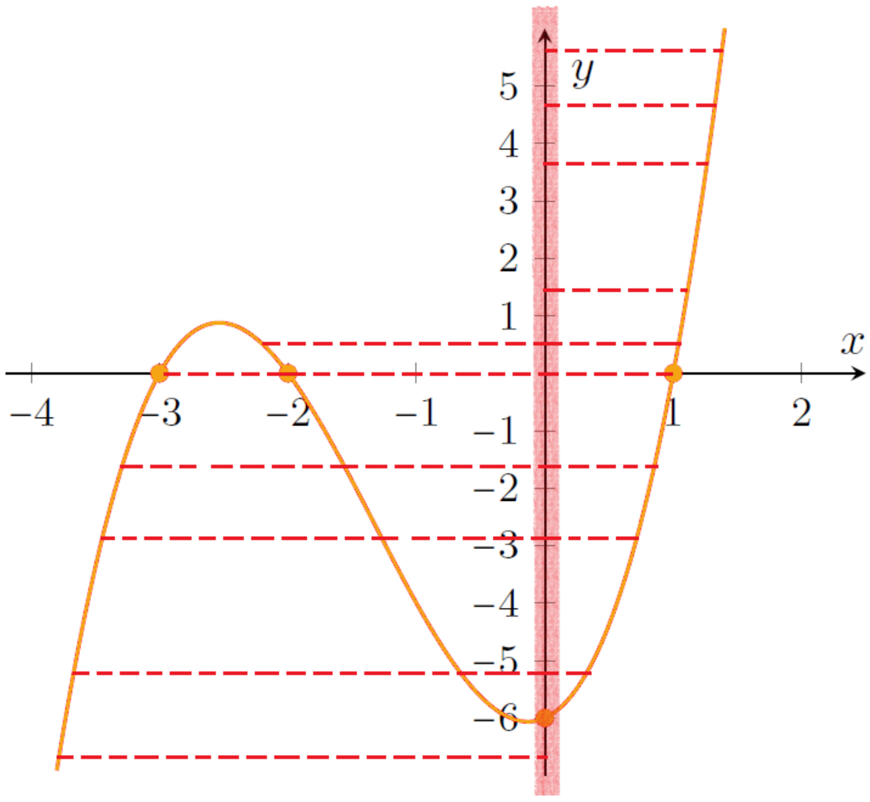


Este procedimiento no vale para cualquier tipo de función, pero sí para las funciones polinómicas. De todos modos, buscar raíces y ordenada al origen suele ser una estrategia útil en muchos otros casos, aunque suele no ser suficiente.

Del gráfico podemos obtener información acerca de la imagen de la función. Los posibles valores que toma $y = f(x)$ para cualquier x del $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ los vemos “proyectados” en el eje vertical o eje y.

Si bien la representación es aproximada, vemos que siempre es posible encontrar uno o más x que den lugar a un valor de y. Esto es lo que se ve en la imagen que sigue a través de unas rectas punteadas en color rojo. Sombreado en rojo, también, se observa la imagen y.

Desde luego, un gráfico proveerá siempre una visualización aproximada de la gráfica y, además, en una cierta “ventana”. Es decir, la gráfica de una función cuyo dominio es el conjunto de los reales, será una curva infinita (sin principio ni fin) pero en cualquier representación, solo se verá una porción de ella.



$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$

En este caso, vemos que es posible que varios valores de x den lugar a un mismo valor de y: esto se observa con las líneas punteadas rojas que intersecan a la curva naranja en más de un punto. Sin embargo, en una función no podría ocurrir que un mismo valor de x diera lugar a dos imágenes y diferentes: recordemos que la definición de función exige que la imagen de un x del dominio a través de f exista y sea única.

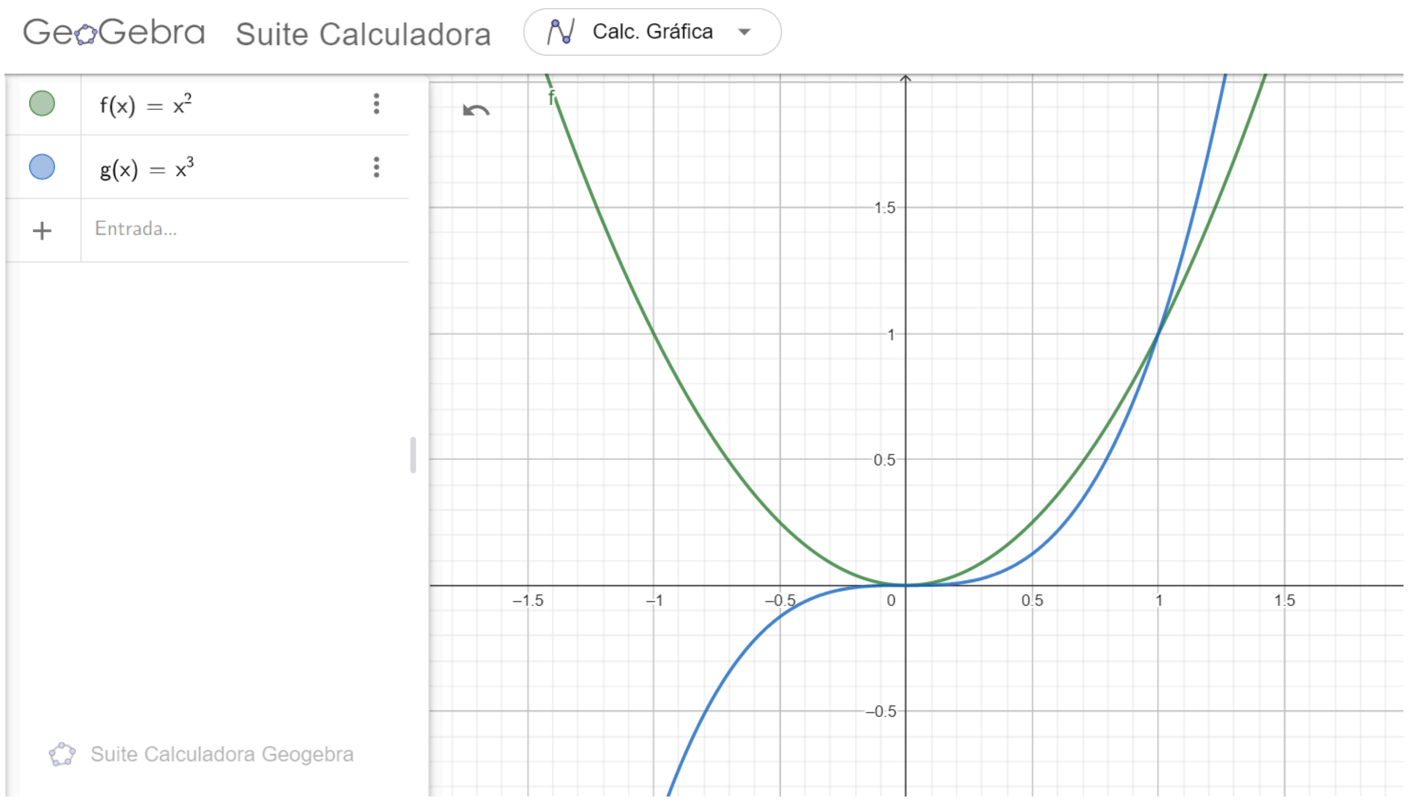
1.2. Relación con el problema 2

Relación con el problema 2 "Otra función para el conserje"

Como vimos, el conserje decide reasignar otra vez nuevas habitaciones, pero siguiendo otro sistema propone usar la función:

$g(x) = x^3$ e n lugar de $f(x) = x^2$.

Antes de seguir, representemos gráficamente ambas funciones para ver qué información nos provee su gráfico. Podés hacerlo usando GeoGebra (accedé haciendo clic aquí) y obtener una representación como esta, o similar.

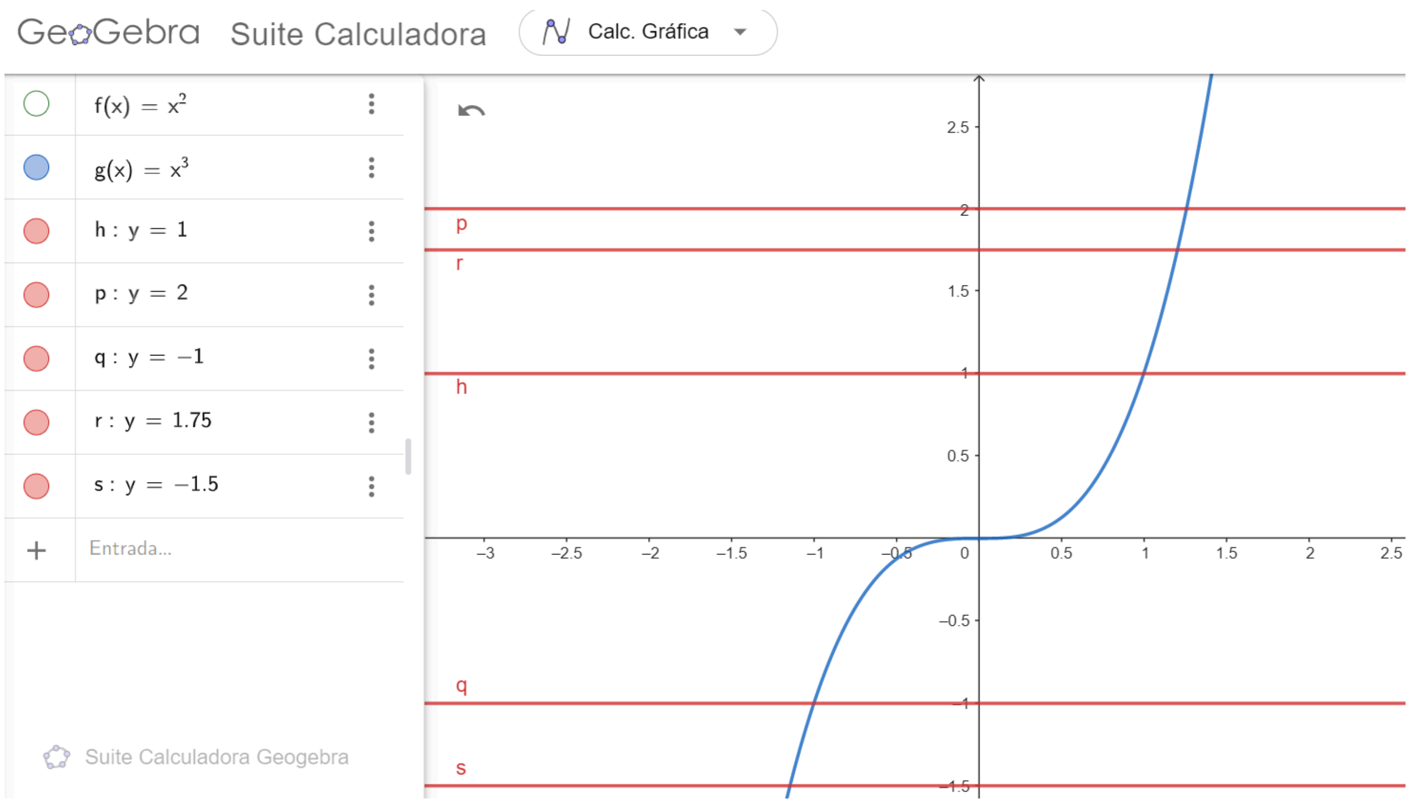


¿Qué observamos de diferente en la función representada en azul respecto de la verde?

A diferencia de la función f, la función g tiene imagen en todos los reales: notemos que parte de su gráfica se extiende "hacia abajo", respecto del eje vertical, lo que sugiere que adopta valores negativos, tanto como queramos. Eso no ocurre con la función f que, como ya sabíamos, tenía imagen en $[0, +\infty)$.

Por lo tanto, con esta nueva asignación, ¡ya no quedan habitaciones libres! Como la imagen de g es el conjunto de todos los reales, todas las habitaciones reasignadas a través de g quedarán ocupadas.

Pero seguirá habiendo huéspedes que no se muevan de habitación: basta con ver que el 0, que tiene imagen en 0 a través de g, no se moverá de habitación. Lo mismo ocurre con el 1. Y a diferencia, de la función f, ya no hay huéspedes que compartan habitación: pues no hay una misma imagen que sea compartida por dos preimágenes distintas, como ocurría antes. Esto es más delicado de probar, pero puede verse gráficamente: al trazar "rectas horizontales", el gráfico de g es intersecado siempre una y solo una vez. Puede verse fácilmente en GeoGebra: las rectas rojas siempre cortan al gráfico azul en un único punto cada una. Esto quiere decir que cada imagen $g(x)$ tiene una y solo una preimagen x asociada.


GeoGebra Suite Calculadora
Calc. Gráfica
f(x) = x²
g(x) = x³
h : y = 1
p : y = 2
q : y = −1
r : y = 1.75
s : y = −1.5
Entrada...
Suite Calculadora Geogebra
p
r
h
q
s

2. Función lineal

Función lineal

La función lineal es un caso particular de la función polinómica pues su regla está dada por la expresión:

$$f(x) = ax + b$$

con a y b constantes reales y a no nulo o, equivalentemente, por un polinomio de grado 1.

De las operaciones involucradas en su expresión (suma y producto), es fácil ver que:

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}; \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Su gráfica también es una curva notable: es una recta.

Ejemplo

Veamos algunos ejemplos. Consideremos las funciones dadas por las fórmulas:

$$y = 2x - 1, y = 2, y = -x + 1.$$

Notemos dos cosas antes de empezar.

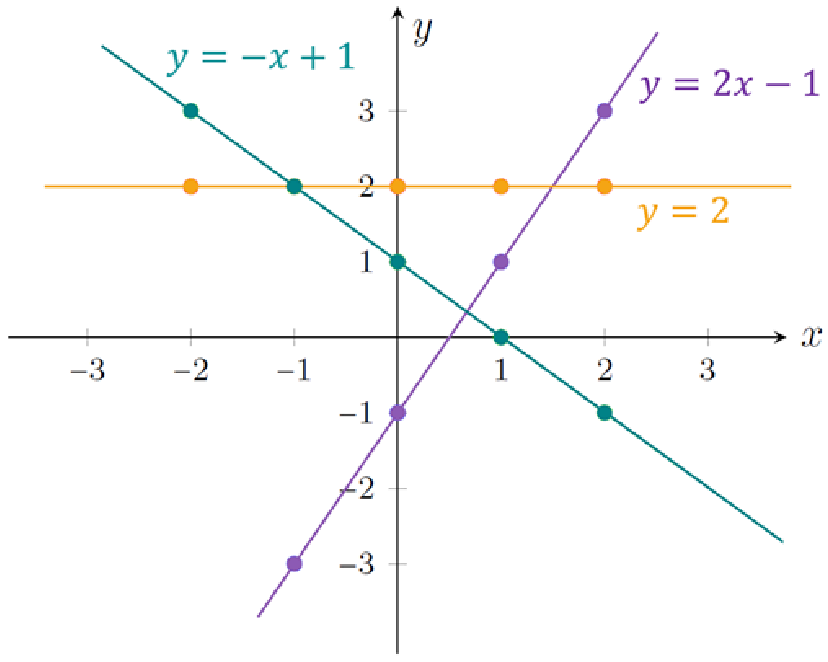
En primer lugar, como estudiaremos las funciones y sus gráficas en un mismo sistema de representación, hemos evitado la notación $f(x), g(x)$ o$h(x)$ -que sería la usual para identificar las reglas de asignaciones de esas tres funciones- y la hemos sustituido directamente por y. Esto se debe a que representaremos las tres gráficas en un mismo sistema de coordenadas (x, y).

En segundo lugar, la función dada por $y = 2$ no es una función lineal pues lo sería con $a = 0$, caso que hemos excluido de la definición. Sin embargo, será interesante revisar este ejemplo para ver cómo sería el comportamiento de funciones de la forma $y = b$.

Comenzamos armando una tabla de valores para cada una de las funciones.

x	$y = 2x - 1$	$y = 2$	$y = -x + 1$
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$	2	$-(-2) + 1 = 3$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$	2	$-(-1) + 1 = 2$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$	2	$-0 + 1 = 1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$	2	$-1 + 1 = 0$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	2	$-2 + 1 = -1$

En la figura siguiente representamos algunos de los puntos obtenidos (con el color indicado en cada tabla), y los unimos mediante una línea para ver el aspecto de la gráfica de cada función. Como se ve, la estructura subyacente a la gráfica en todos los casos parece ser la de una recta.



2.1. Gráfico de función lineal

Gráfico de la función lineal

Como vimos, entonces, la gráfica de una función lineal es siempre una recta. Como una recta queda completamente determinada al trazar dos puntos que pertenezcan a ella, dada una función afín será suficiente con conocer la imagen de dos valores para obtener su gráfica. Por simplicidad se suele tomar $x = 0$ como uno de esos valores, lo que produce el punto de coordenadas

$$P = (0, b)$$

y corresponde al punto sobre el eje y por el que pasa la recta. Otro punto que podemos marcar, si $a \neq 0$, es la intersección de la recta con el eje x, es decir, la raíz de la función. Notar que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

En otras palabras, la gráfica interseca al eje horizontal cuando $x = -\frac{b}{a}$, que es la única raíz de f. Entonces, otro punto que pertenece a la recta es el de coordenadas

$$Q = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$

Si $a = 0$ entonces la función tiene la forma $y = b$y, en tal caso, el gráfico es una recta horizontal trazada a la altura b del eje y. Entonces, esta recta no interseca al eje x (es decir, la función no tiene raíces), salvo la gráfica de la función $y = 0$ que coincide con el eje horizontal.

Conclusión: para representar gráficamente una función lineal, ubicamos los puntos P y Q, o cualesquiera otros dos de la forma $(x, f(x))$, en un sistema de ejes cartesianos, y luego trazamos la recta que pasa por ellos.

3. Función cuadrática

Función cuadrática

Nos ocuparemos ahora de analizar las funciones polinómicas de grado 2, es decir, las funciones de la forma:

$$f(x)=a x^2+b x+c$$

siendo a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Una función de este tipo es llamada función cuadrática.

Por ser una función polinómica, su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Su gráfica también es una curva notable: la parábola .

Los siguientes son ejemplos de funciones cuadráticas.

$$y=3 x^2-5 x+4 ; \quad y=-\frac{1}{4} x^2+5 x ; \quad y=x^2-6 ; \quad y=-4 x^2 ; \quad y=\pi x+5-4 x^2$$

Gráfico de la función cuadrática

Ya vimos que una estrategia para esbozar la gráfica es la de armar una tabla de valores adecuada. Más aún, hemos visto que, en el caso de las polinómicas, una estrategia útil era la de buscar las raíces o ceros de la función y confeccionar una tabla para estudiar su signo; además de algún otro punto notable como la ordenada al origen. Sin embargo, también vimos que ninguna de estas estrategias es útil siempre, es decir, para cualquier función cuadrática (o polinómica, en general).

Recordemos que las funciones cuadráticas tendrán raíces en los puntos de abscisas:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4 a c}}{2 a} ; x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4 a c}}{2 a}$$

pues ello resulta de hallar los x en reales que cumplen $f(x)=0$, y esto es equivalente a resolver la ecuación cuadrática $a x^2+b x+c=0$ cuya solución está determinada, cuando existe, por la famosa “fórmula resolvente”.

Es decir, para empezar a intentar esbozar un gráfico podríamos considerar las raíces y la ordenada al origen. Por ejemplo, queremos graficar la función $y=f(x)$ dada por:

$$y=-3 x^2-12 x-8 .$$

Las raíces están dadas por:

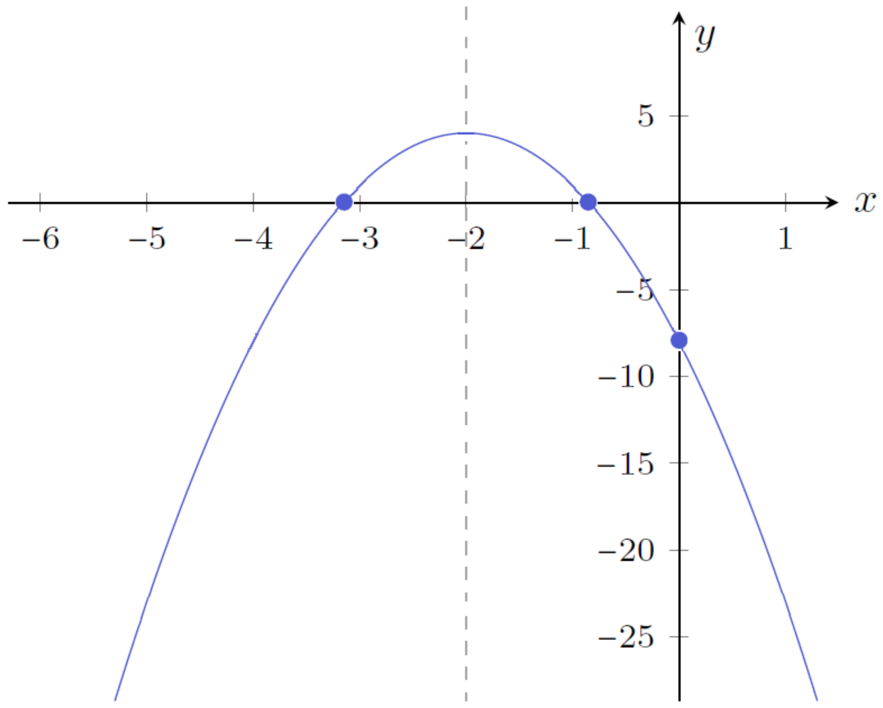
$$x_1=\frac{12-\sqrt{(-12)^2-4(-3)(-8)}}{2(-3)}=\frac{12-\sqrt{48}}{-6}=\frac{-6+2 \sqrt{3}}{3} \approx-0.8453$$

$$x_2=\frac{12+\sqrt{(-12)^2-4(-3)(-8)}}{2(-3)}=\frac{12+\sqrt{48}}{-6}=\frac{-6-2 \sqrt{3}}{3} \approx-3.1547$$

Lo que da lugar a los puntos de coordenadas $\left(\frac{-6+2 \sqrt{3}}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{-6-2 \sqrt{3}}{3}, 0\right)$. Y la ordenada al origen es $y=-8$ lo que da lugar al punto de coordenadas $(0,-8)$.

Hacer un gráfico únicamente con esos tres puntos es muy difícil, pues habría muchas formas de unirlos y no necesariamente esas formas darían lugar a la verdadera representación de la función: la parábola.

Sin embargo, conociendo un poco acerca de la forma de esta curva (como vimos en el gráfico de \(y=x^2\) o quizás por lo que ya conocen de su formación escolar) podríamos suponer representar esos puntos y unirlos con una curva como esta.



Eje de simetría y vértice

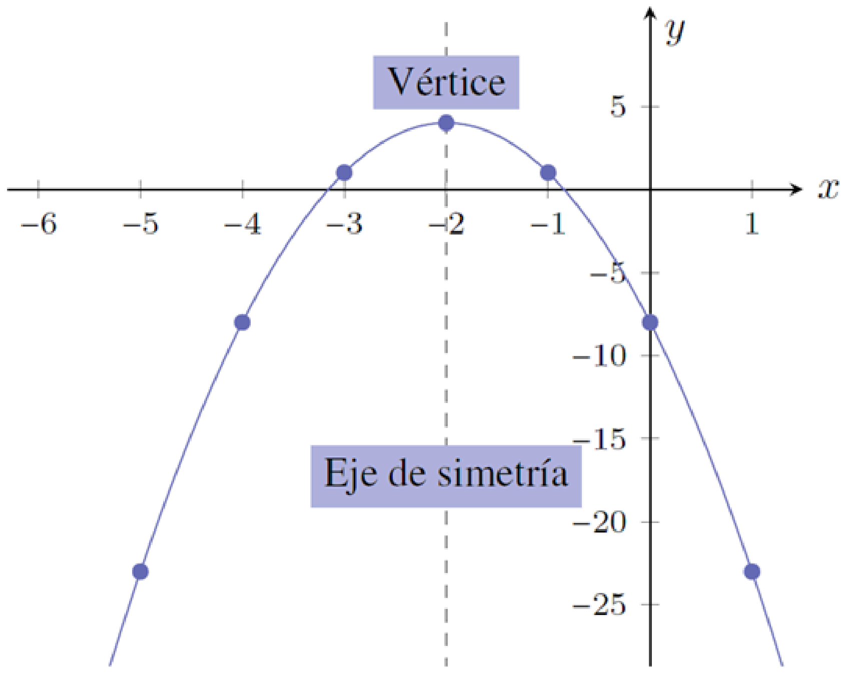
En el gráfico anterior, la línea punteada gris da cuenta del eje de simetría: la parábola es simétrica respecto de un eje vertical que se ubica en el punto medio entre las raíces. Además, dicho eje de simetría permite identificar al máximo (o mínimo) de la curva, que recibe el nombre de vértice.

Una alternativa para dar una representación más precisa, por ejemplo, podría ser la de armar una tabla de valores adecuada. Es decir, que tome valores de \(x\) en la región o "ventana" aproximada para la que estamos estudiando la gráfica.

Por ejemplo:

x	$y = -3x^2 - 12x - 8$
-5	$-3 \cdot (-5)^2 - 12 \cdot (-5) - 8 = -23$
-4	$-3 \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) - 8 = -8$
-3	$-3 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 8 = 1$
-2	$-3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 8 = 4$
-1	$-3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 8 = 1$
0	$-3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 - 8 = -8$
1	$-3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 8 = -23$
2	$-3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 8 = -44$

Con los puntos de esta tabla, se puede ver con más precisión lo que intuíamos antes. En color, están identificados el vértice y el eje de simetría.



Notar que no es necesario que ambos ejes utilicen la misma unidad de medida. Si bien es recomendable tener la misma unidad, en ocasiones conviene cambiarlo para obtener una “ventana” de representación adecuada.

Conclusión: elementos notables de la parábola

Entonces, en líneas generales, los siguientes elementos notables resultan de gran utilidad (además de una adecuada tabla de valores y del conocimiento sobre la forma general de una parábola) para graficar una función cuadrática de la forma

$$f(x)=a x^2+b x+c$$.

- **Raíces:** puntos de coordenadas $\left(x_1, 0\right)$ y $\left(x_2, 0\right)$ dadas por $x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4 a c}}{2 a}$.
- **Ordenada al origen:** punto de coordenadas $(0, c)$.
- **Eje de simetría:** recta de ecuación dada por $x_{\text {eje sim }}=-\frac{b}{2 a}$.
- **Vértice:** punto de coordenadas $\left(x_v, y_v\right)=\left(-\frac{b}{2 a}, f\left(-\frac{b}{2 a}\right)\right) \operatorname{con} f\left(-\frac{b}{2 a}\right)=c-\frac{b^2}{4 a}$.
- **Tipo de curvatura:** Si $a>0$, el vértice es mínimo, se dice que es cóncava positiva y la imagen de la función es $\operatorname{Im}(f)=\left[y_v,+\infty\right)$, y si $a<0$, el vértice es máximo, se dice que es cóncava negativa y la imagen de la función es $\operatorname{Im}(f)=\left(-\infty, y_v\right]$.

4. Ejemplos: Grados Celsius vs grados Fahrenheit

Veamos algunos ejemplos de funciones aplicadas a contextos.

Grados Celsius vs grados Fahrenheit

En Argentina se utiliza generalmente la escala de grados Celsius $\left({ }^{\circ} \mathrm{C}\right)$ para medir la temperatura. Sin embargo, en otros paises se utiliza la escala de grados Fahrenheit ($\left.{ }^{\circ} \mathrm{F}\right)$. La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula:

$$f(x)=\frac{9}{5} x+32$$

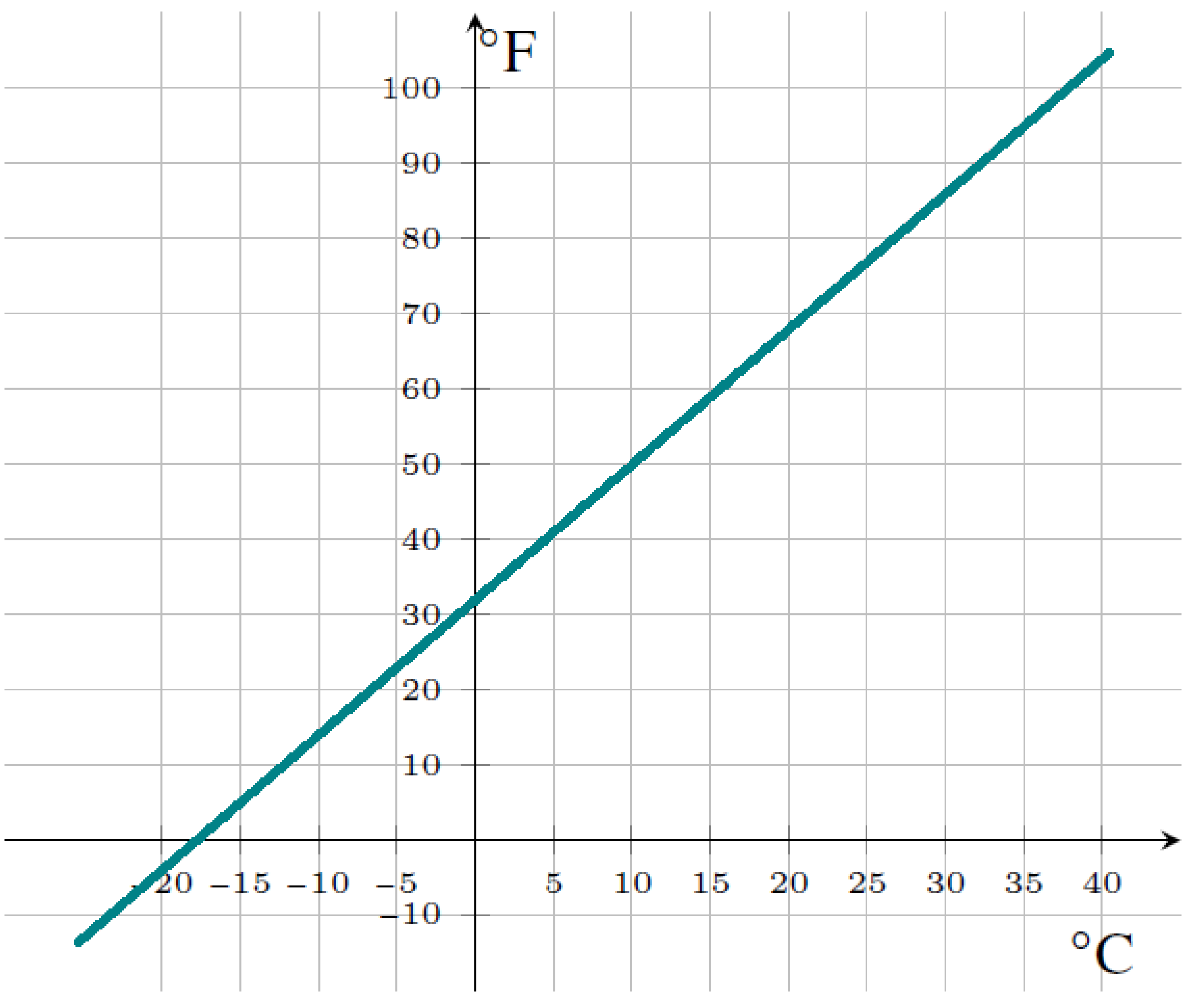
siendo x la temperatura en grados Celsius, y $f(x)$ es la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit. ¿Cuántos grados Fahrenheit son $20^{\circ} \mathrm{C}$? El equivalente es $f(20)=68$. Es decir, $20^{\circ} \mathrm{C}$ equivalen a $68^{\circ} \mathrm{F}$. ¿Cuántos grados Celsius son $50^{\circ} \mathrm{F}$? Debemos hallar x tal que $f(x)=50$. Resolvemos la ecuación:

$$50=\frac{9}{5} x+32 \Leftrightarrow 18=\frac{9}{5} x \Leftrightarrow 18 \cdot \frac{5}{9}=x \Leftrightarrow 10=x$$

Es decir, $50^{\circ} \mathrm{F}$ equivalen a $10^{\circ} \mathrm{C}$ ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa? Podemos dar una respuesta aproximada a partir del gráfico. Quien puede y quiere, también puede hallar los valores de x tales que $f(x)<0$. Es decir, resolver la inecuación:

$$\frac{9}{5} x+32<0 \Leftrightarrow \frac{9}{5} x<-32 \Leftrightarrow x<-32 \cdot \frac{5}{9} \approx-17.78$$

Luego, para temperaturas aproximadamente inferiores a $-17.78^{\circ} \mathrm{C}$ se obtienen temperaturas negativas expresadas en ${ }^{\circ} F$.



4.1. Movimiento rectilíneo uniforme

Movimiento rectilíneo uniforme

Se llama movimiento rectilíneo uniforme (MRU) al que desarrolla un objeto que describe una trayectoria recta respecto a un observador, con velocidad constante (esto significa aceleración nula).

En un movimiento rectilíneo uniforme, la posición s del objeto en cada instante t se puede determinar por la fórmula:

$$s(t)=v t+s_0$$

siendo s_0 la posición inicial del objeto y v la velocidad. La gráfica de la posición en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la velocidad, y su ordenada al origen es la posición inicial.

Supongamos que un auto parte desde un punto sobre una autopista recta y conduce por ella a una velocidad constante de $83 \mathrm{~km} / \mathrm{h}$. Queremos escribir la fórmula que exprese la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas, luego de la partida). Si tomamos como punto de referencia al lugar donde partió, es decir, colocamos allí el “kilómetro cero”, entonces la fórmula anterior tendrá $s_0=0$ y la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas) está dada por:

$$s(t)=83 t$$

También podríamos calcular a qué distancia del punto de partida se encontrará luego de dos horas de recorrido. La distancia que habrá recorrido luego de 2 horas es $s(2)=166 \mathrm{~km}$. Por ejemplo, luego de una hora y media habrá recorrido $s(1.5)=124.5 \mathrm{~km}$. También podríamos hallar el tiempo transcurrido entre su partida y el instante en el que lleva recorridos $198 \mathrm{~km}$. Es decir, buscamos t tal que $s(t)=198$. Debemos resolver la ecuación:

$$198=83 t$$

lo que equivale a $t \approx 2.3855 \mathrm{~h}$. Entonces, pasaron aproximadamente 2.39 horas desde su partida hasta recorrer $198 \mathrm{~km}$. Hay que recordar que $2.39 \mathrm{~h}$ no es lo mismo que 2 horas y 39 minutos.

Veremos algo de esto un poco más adelante.

4.2. Buscar un máximo

Buscar un máximo

Supongamos que el beneficio (en miles de dólares) de una empresa aumenta cuando invierte en publicidad en redes sociales hasta un cierto límite, según la fórmula:

$$P(x)=5000+1000 x-5 x^2$$

donde x es la cantidad (en miles de pesos) que la compañía gasta en publicidad. Queremos hallar la cantidad que la empresa debe gastar en publicidad para maximizar sus ganancias.

De la ecuación que describe a este modelo, sabemos que representación gráfica es una parábola cóncava negativa y vértice $(100,55000)$ pues

$$\begin{gathered} x_v=-\frac{b}{2 a}=-\frac{1000}{2 \cdot(-5)}=100 \\ y_v=c-\frac{b^2}{4 a}=5000-\frac{(1000)^2}{4(-5)}=55000 . \end{gathered}$$

Entonces, este es un punto máximo de la curva, lo que significa que el beneficio máximo se obtendrá al gastar 100 mil pesos en publicidad (recordemos que tanto x como $P(x)$ representan montos en miles de pesos), obteniendo una ganancia igual a 55 000 miles de pesos, que es lo mismo que 5.5 millones de pesos.

¿En qué "ventana" de visualización sería razonable representar esta curva?

Intentalo y cualquier duda, preguntá en el foro (hacé clic aquí para acceder). Usá el foro del recorrido para compartir el gráfico de la función $P(x)$ y tus dudas.

4.3. Buscar un mínimo

Buscar un mínimo

En un cierto rango de temperatura, la cantidad de bacterias en un alimento crece a medida que la temperatura aumenta. Supongamos que el número de bacterias en un alimento refrigerado viene dado por:

$$N(t)=20 t^2-20 t+120$$

donde t es la temperatura del alimento en grados Celsius. Supongamos que queremos saber a qué temperatura el número de bacterias es mínimo (suponemos que es mínimo porque creemos que la cantidad de bacterias aumenta a medida que la temperatura aumenta, pero podría no ser el caso). De la ecuación que describe a este modelo, sabemos que representación gráfica es una parábola cóncava positiva y vértice $(0.5,115)$ pues

$$\begin{gathered} x_v=-\frac{b}{2 a}=-\frac{-20}{2 \cdot 20}=\frac{1}{2} \\ y_v=c-\frac{b^2}{4 a}=120-\frac{(-20)^2}{4 \cdot(20)}=115 . \end{gathered}$$

Entonces este es un punto mínimo de la curva, lo que significa que la mínima cantidad de bacterias se tendrá a una temperatura de $0.5^{\circ} \mathrm{C}$ y esa cantidad mínima de bacterias será 115.

¿En qué "ventana" de visualización sería razonable representar esta curva?

¿Convendría utilizar la misma unidad de medida en ambos ejes?

Usá el foro (hacé clic aquí para acceder) (del recorrido para compartir el gráfico de la función $N(t)$ y tus dudas.