Derivada

Sitio:	Agencia de Aprendizaje a lo largo de la Vida	Imprimido por:	Sebastian Puche
Curso:	Elementos de Analisis Matematico 1° G	Día:	martes, 24 de septiembre de 2024, 00:44
Libro:	Derivada		

Tabla de contenidos

1. Introducción

En esta sección vamos a introducirnos en el tema **derivada.**

Te invitamos recorrer el índice de la derecha, el cual contiene lo siguiente:

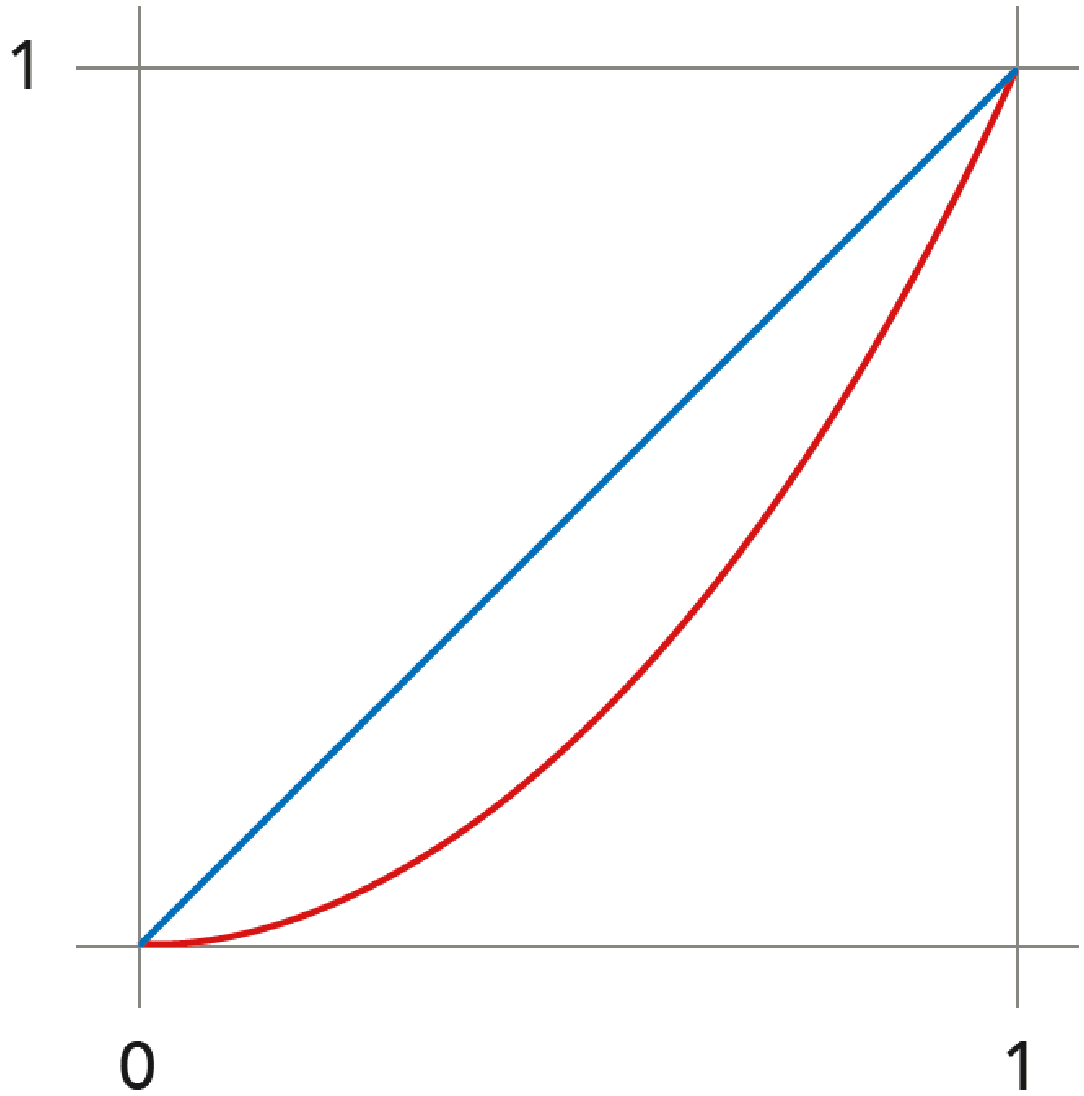
- Derivada
- Reglas elementales de derivación
- Uso de software para el cálculo de derivada
- Mejor aproximación lineal: recta tangente
- Relación de la derivada con el crecimiento de una función

2. Derivada: Relación con el problema 1

Relación con el problema La mejor inversión

Como viste en el problema, esta semana nos introducimos en el estudio del comportamiento de las funciones. Describir su cambio será algo que ocupe a un nuevo constructo: la **derivada**. Pero antes de comenzar, desarrollemos un poco el ejemplo del problema de inicio y tratemos de dar respuesta a todas sus preguntas y ¡a las que no nos animamos a hacer!

Recordemos que imaginamos que nos ofrecen un negocio en el que invertimos una cantidad de dinero y, a lo largo del tiempo, obtenemos un retorno dado por alguna de estas dos curvas.



Supongamos que el eje horizontal está dado por el tiempo x en meses y el vertical, por unidades monetarias y (pesos, dólares, euros, ¡lo que prefieras!). De ese modo, al cabo de un mes, recibirías una unidad monetaria de retorno por la inversión en cualquiera de las dadas por esas curvas.

Una primera inspección te dirá que es más conveniente la curva azul porque, en todo ese intervalo, siempre es mayor que la curva roja, ¿no? Es decir, para cualquier cantidad de tiempo x entre 0 y 1 mes, el retorno y es siempre mayor en la curva azul.

Ahora bien, ¿es la curva azul la mejor opción para este negocio? En ocasiones, interesa ver más allá de lo que notamos en la primera inspección ya que, si bien es cierto que la curva azul en ese intervalo es mayor, su crecimiento parece ser menos veloz que el de la curva roja. Por ahora, quedémonos con estos términos de manera coloquial, usando solo el sentido común. Ya los definiremos apropiadamente más adelante.

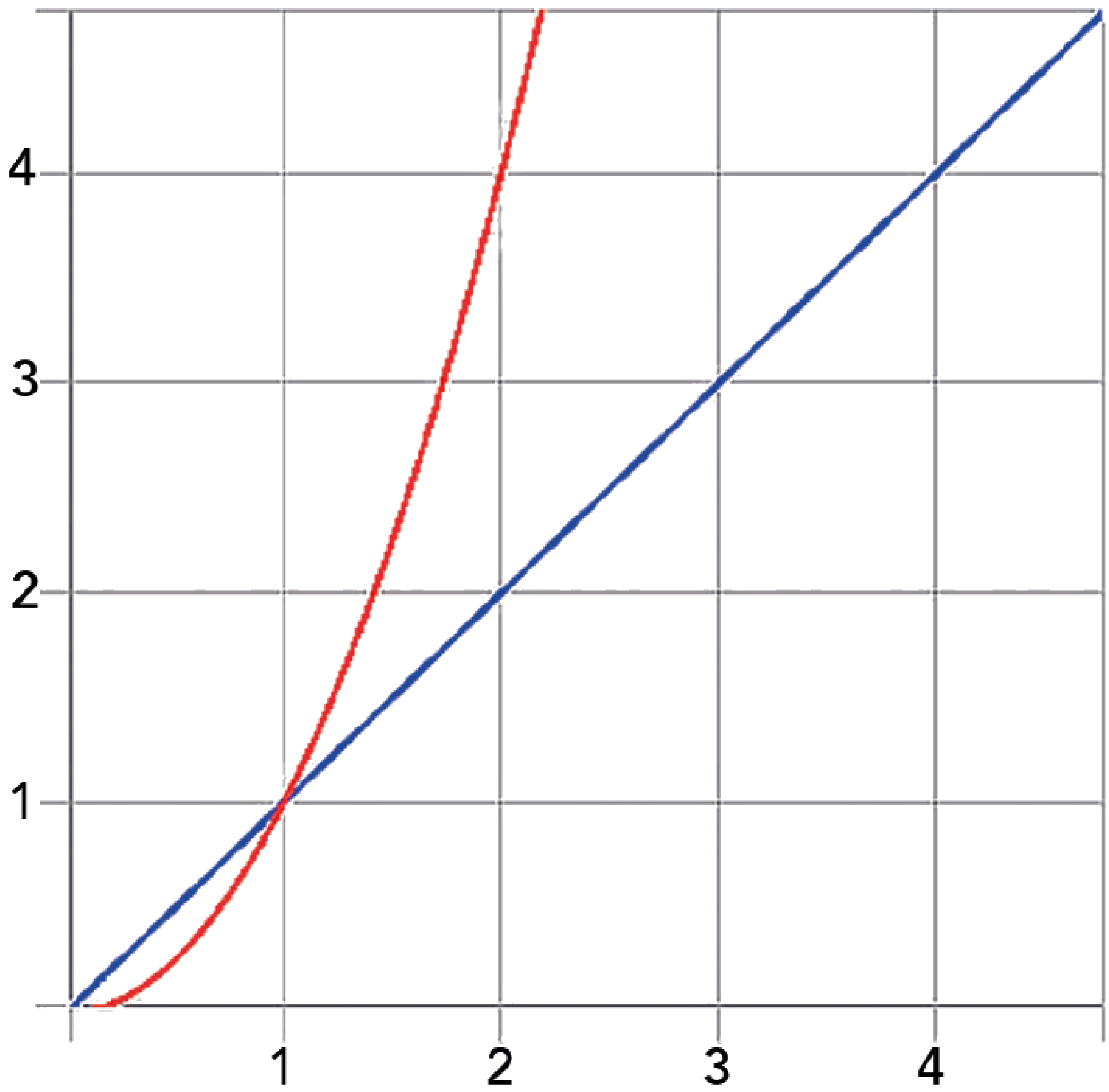
¿Y por qué nos puede interesar esa velocidad de crecimiento si ya sabemos que la curva azul es siempre mayor en esa región del gráfico?

Bueno, puede ser de interés ya que si una de las curvas crece más rápido que la otra, es esperable que en algún momento ¡la supere! De hecho, imaginemos cómo continuarían las dos. Es decir, imaginemos qué sucedería para el mes 2.

¿Seguirá siendo la curva azul la mejor opción de inversión?

Viendo la forma en que crece la curva roja, parece ser que tan pronto supere el punto $(1, 1)$ la roja será mayor que la azul y, por ende, se convertirá en la mejor opción de inversión, ya que generará mayor retorno en menos tiempo. ¡Pero esto es contrafáctico! NO podemos saberlo ni garantizarlo, necesitamos dar algunas precisiones más antes de seguir.

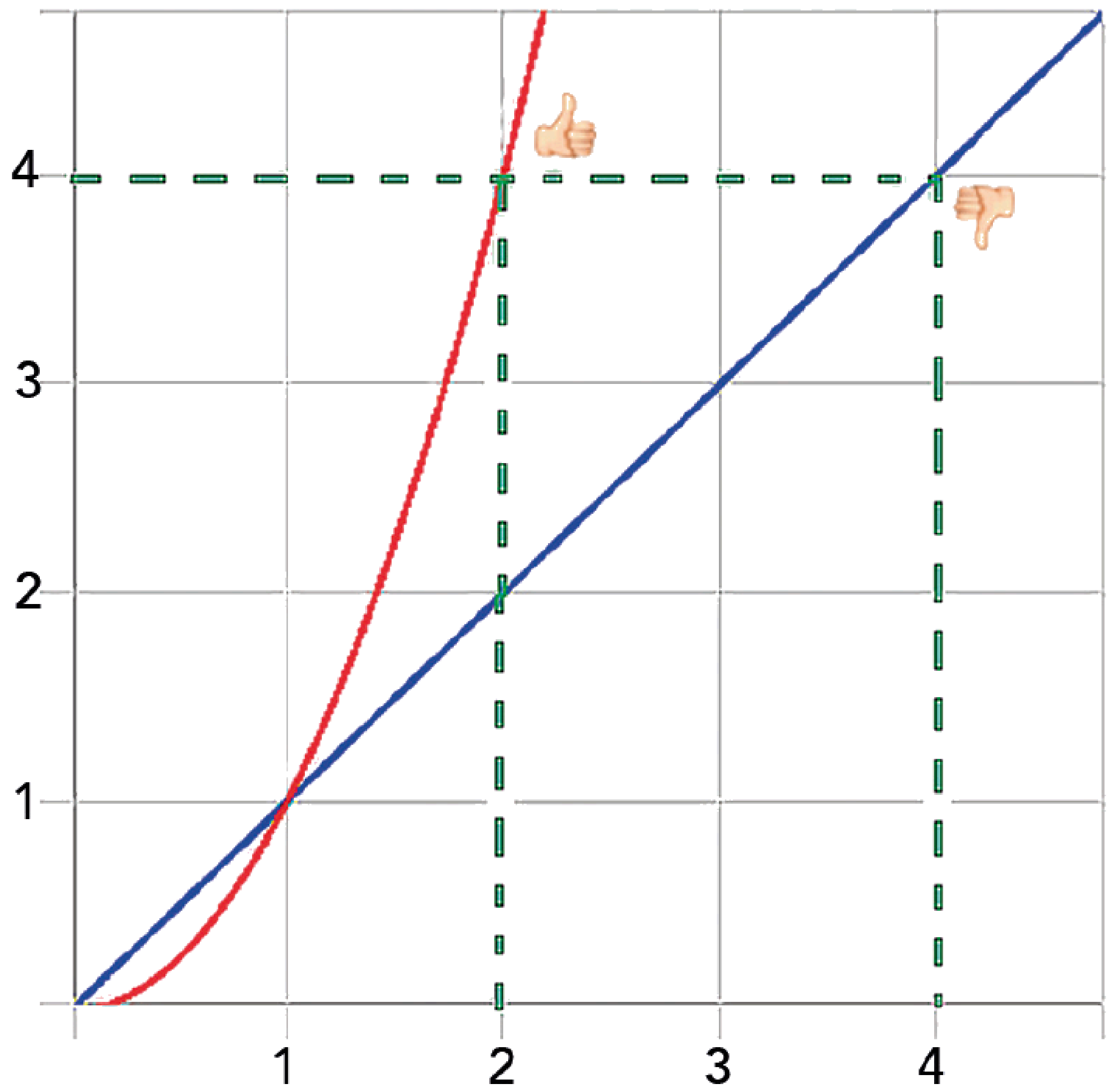
Veamos cómo efectivamente sigue el comportamiento de ambas curvas si la inversión azul está dada por $f(x) = x$ y la roja por $g(x) = x^2$.



¿Qué opinás ahora que tenemos más información? ¿Seguirías invirtiendo en la curva azul o preferirías la roja?

Imaginemos, para hacer las cosas más sencillas, que una vez que se optó por una inversión, ya no se puede cambiar a otra. En este escenario, es más conveniente elegir la curva roja, aunque durante el primer mes su retorno sea menor, ya que su crecimiento es más veloz, y eso augura mayor retorno en menos tiempo.

Por ejemplo, para obtener un retorno de 4 unidades monetarias, en la curva roja lo conseguimos en el mes 2, mientras que en la azul recién lo logramos en el mes 4.


4
3
2
1
1
2
3
4

2.1. Velocidad de crecimiento y tasa de cambio instantánea

En el apartado anterior nos preguntamos ¿cómo medir esto que hemos llamado "velocidad de crecimiento"? De algún modo la velocidad de crecimiento medirá cuánto cambia la variable dependiente (el retorno de dinero, en este caso) en relación con algún cambio en la variable independiente (el tiempo, en esta situación).

Por ejemplo, al pasar del mes 1 al 2 , la curva roja se ha incrementado en 3 unidades, mientras que la azul solo se ha incrementado en 1. Es decir, la tasa de cambio es $3:1$, en un caso, y $1:1$, en el otro. Esto, de algún modo, está dando cuenta de cómo cambia la roja en relación con la azul. Antes de continuar con el ejemplo, veamos algunos términos más formales, así aunamos notación y fijamos algunas de las ideas que hemos expuesto.

Supongamos que dada una función $y=f(x)$ y un punto $M=(x,y)$ nos interesa estudiar cómo es el crecimiento de y para un incremento dado en un entorno x. Por conveniencia, llamemos a ese incremento Δx.

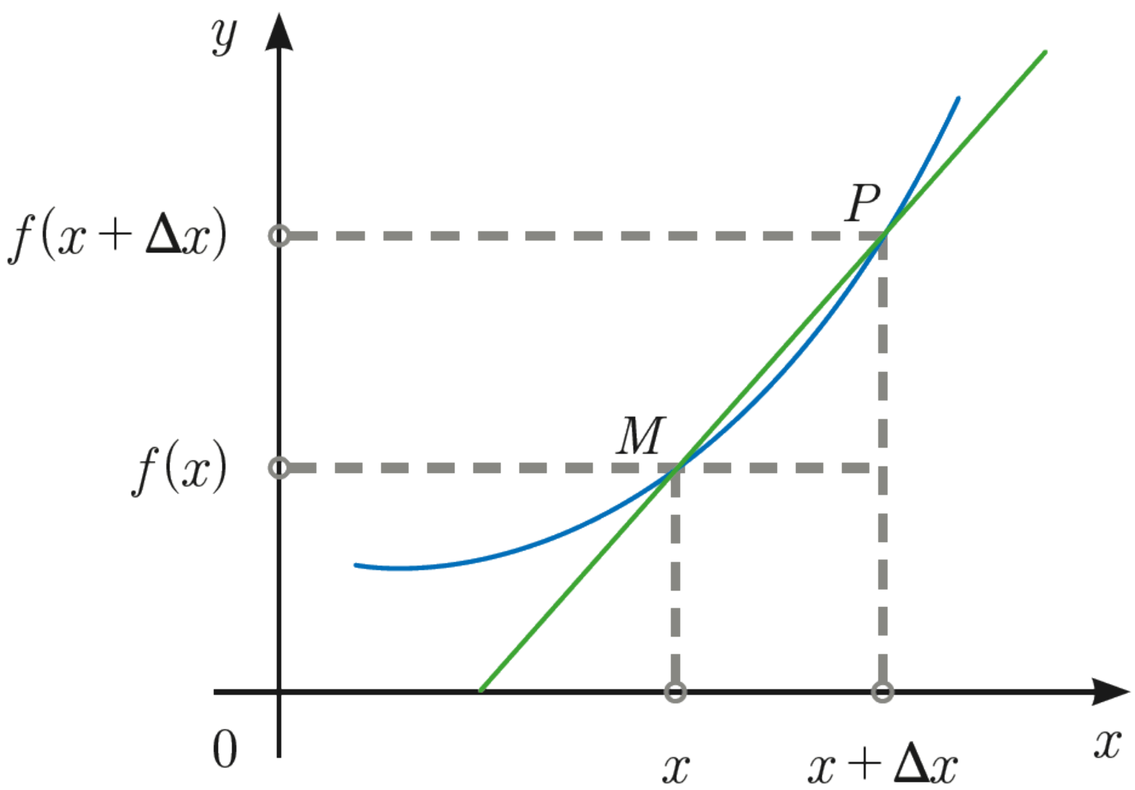
Lo que de algún modo queremos ver es cómo cambia y dado un incremento en la variable independiente, es decir, qué sucede con y cuando se pasa de x a $x+\Delta x$. Llamemos Δy a ese incremento $f(x+\Delta x)-f(x)$

Es decir, dado un punto M, queremos ver qué sucede con el crecimiento de la función al pasar a un punto $P=(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

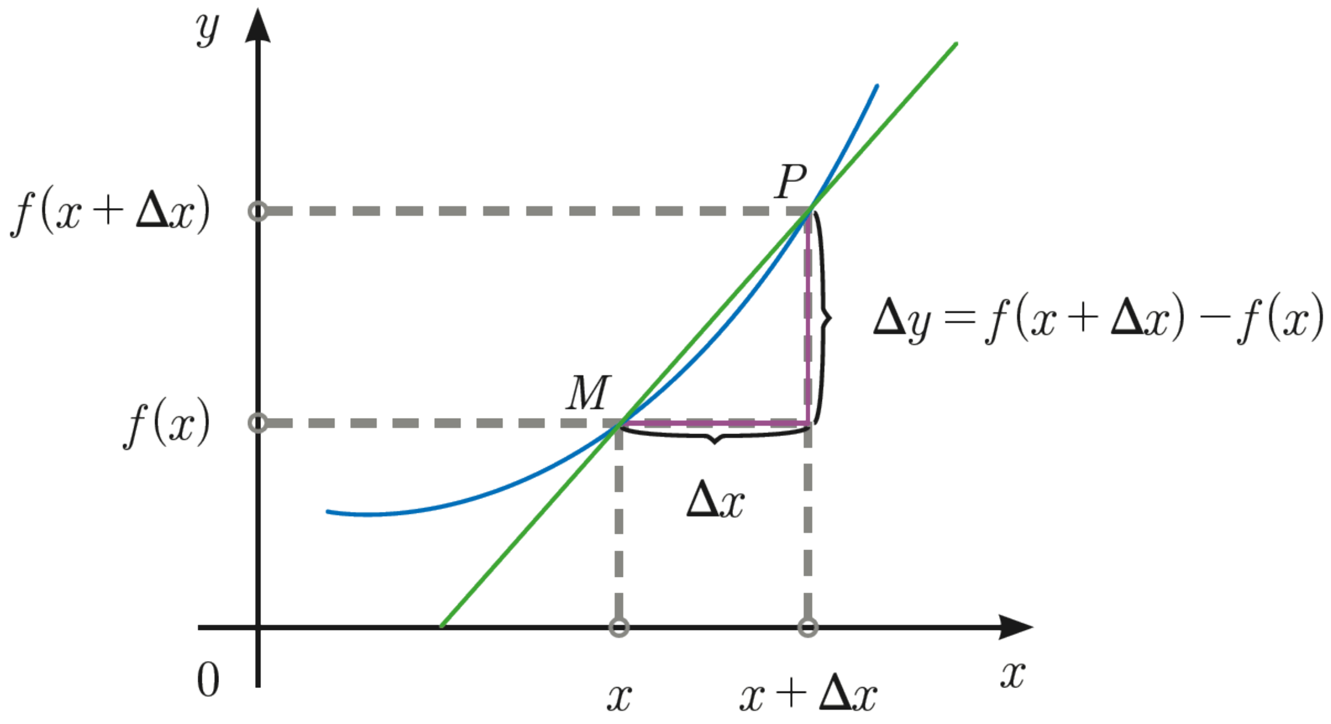
Ahora bien, como lo que nos interesa es la relación entre estos incrementos, es más conveniente calcular la tasa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Veamos el siguiente gráfico.



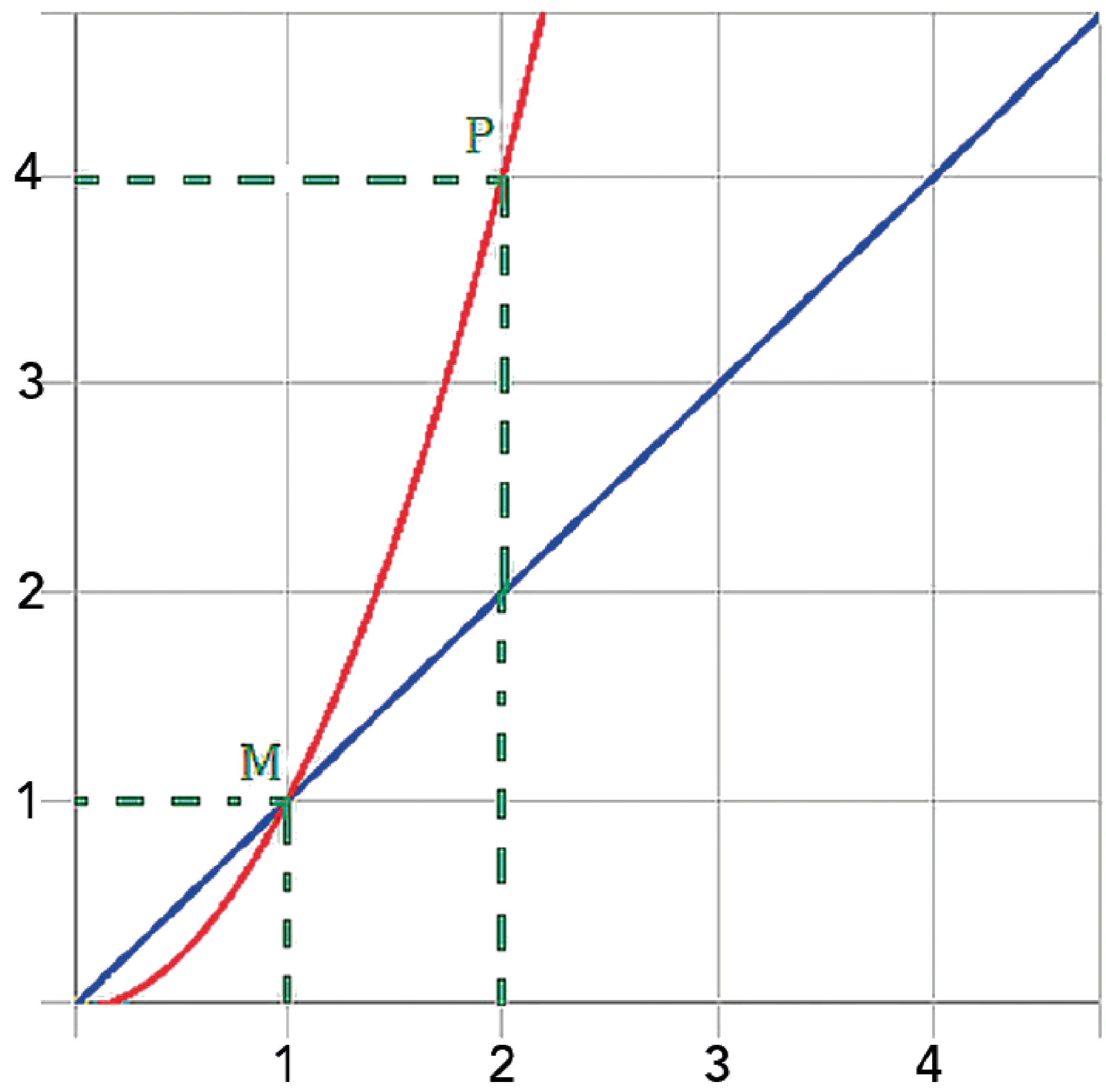
La curva azul representa la función $y=f(x)$, mientras que la recta verde es la que une los puntos M y su incrementado P. A esa recta se la denomina recta secante a la curva, pues la interseca en dos puntos. Notemos que los incrementos de las variables están dados por los catetos del triángulo rectángulo violeta.



De este modo, es fácil ver que la pendiente de la recta secante es justamente el cociente entre estos dos, es decir, es la tasa de crecimiento que nos propusimos estudiar:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

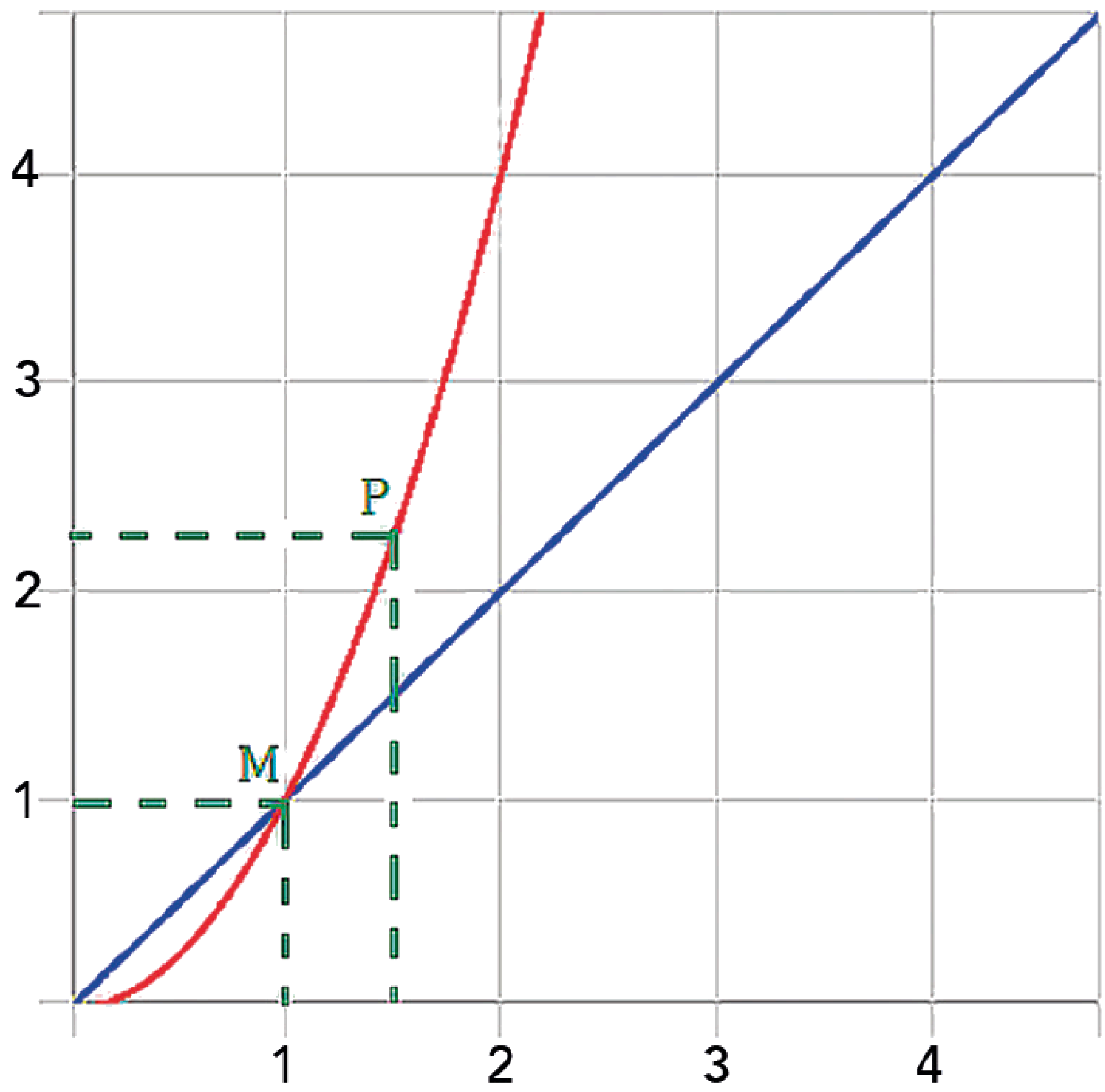
No obstante, la anterior representa de algún modo la tasa de crecimiento medio y no la puntual o instantánea. ¿Qué diferencia hay entre una y otra? Volvamos al ejemplo de la inversión para ilustrarlo. Analicemos solo lo que sucede con la curva roja. Supongamos que queremos ver el crecimiento entre el mes 1 y el 2 . Es decir, pasar de un punto $M = (1, 1)$ al punto $P = (2, 4)$.



Como se ve, el incremento de y es 3 cuando el incremento de x es 1. Es decir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+1)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{2-1} = 3.$$

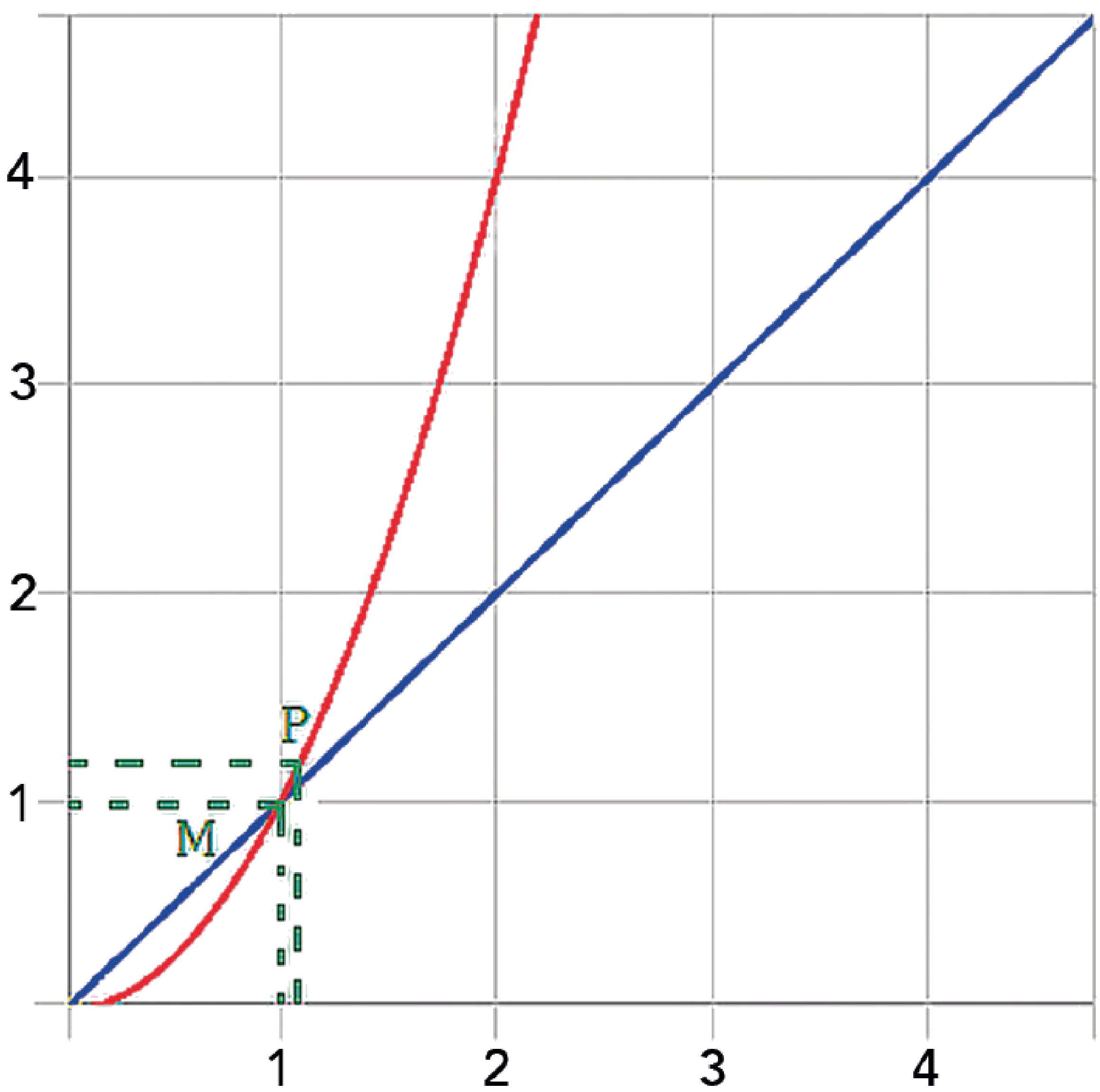
Entonces, cuando se está en el mes 1, en promedio, por cada incremento de 1 mes, se tienen 3 unidades monetarias más. No obstante, ¿qué sucede si tomáramos un intervalo más pequeño? Por ejemplo, $0,5$.



Como se ve, la tasa de incremento ahora es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+0,5)-f(1)}{1,5-1} = \frac{2,25-1}{1,5-1} = 2,5.$$

¿Y si tomáramos un incremento todavía menor? Por ejemplo, $0,1$.



Como se ve, la tasa de incremento ahora es:

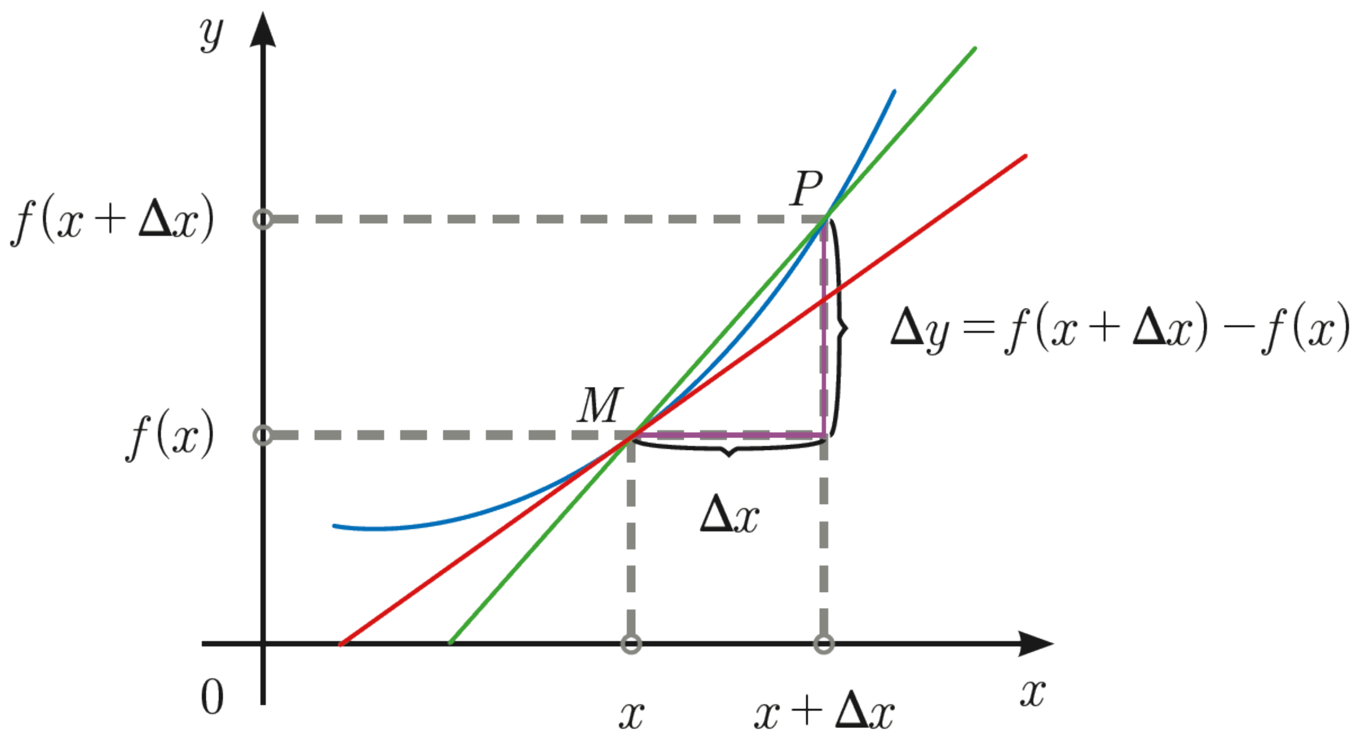
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+0,1) - f(1)}{1,1-1} = \frac{1,21-1}{1,1-1} = 2,1$$

Es decir, a medida que el incremento es menor, la tasa parece hacerse cada vez más próxima a 2.

El límite para incrementos infinitesimales es lo que, justamente, da una idea de la velocidad instantánea de cambio de esa curva en un entorno del 1.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2$$

Volviendo a nuestra explicación teórica, la velocidad instantánea de crecimiento de la función es, justamente, el límite de la velocidad media de crecimiento para incrementos pequeños. En términos geométricos, la pendiente de la recta secante es, en el límite de los incrementos, tan pequeños como se quiera, la pendiente de la recta tangente en el punto. Esto se ve en el gráfico en la recta roja.



Definimos, así, a la **derivada de una función en un punto**.

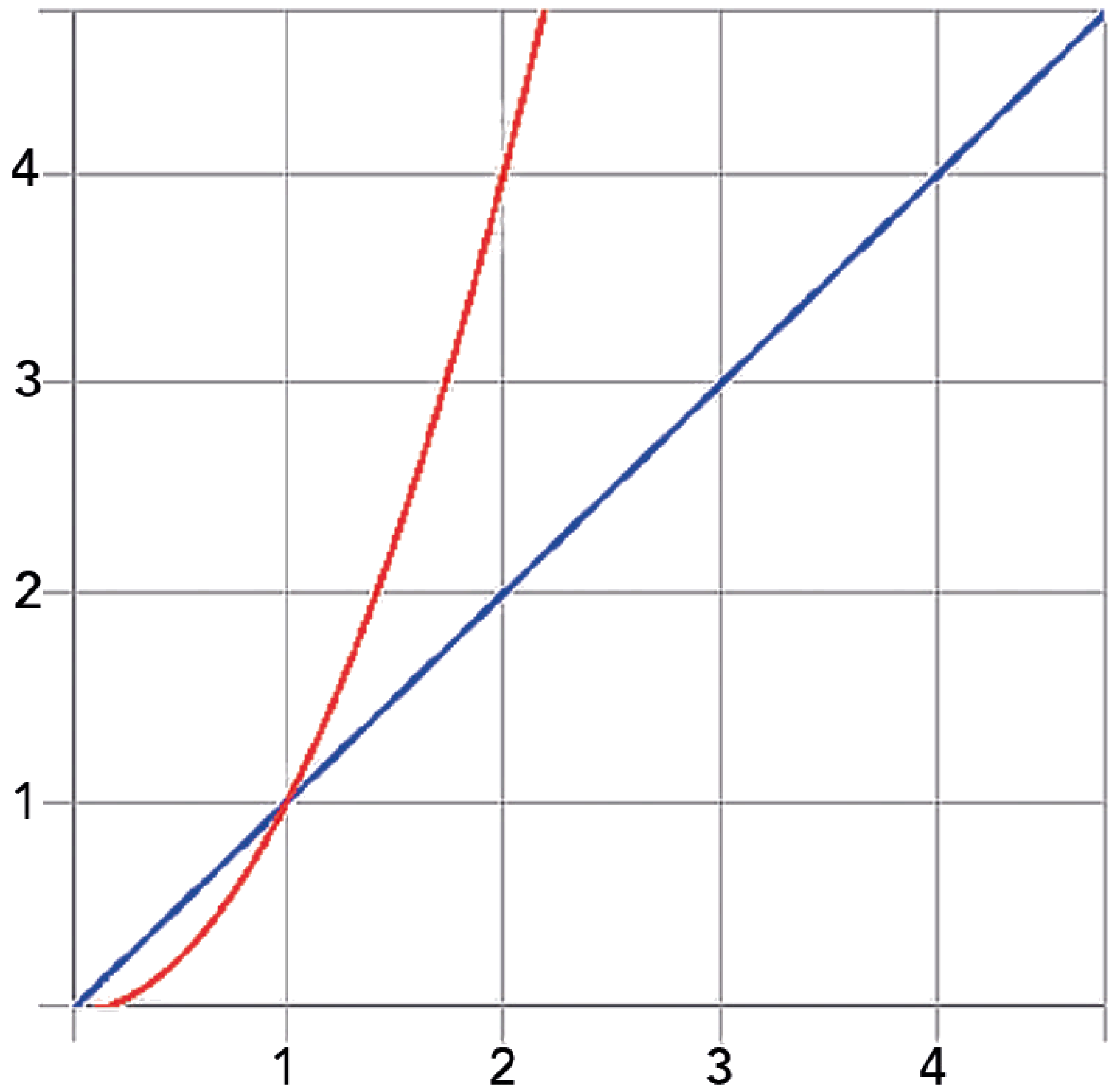
2.2. Derivada puntual

Sea $y = f(x)$ y x un punto interior de su dominio, se define la derivada de la función y en el punto x como el límite, siempre que exista, del cociente de los incrementos Δy y Δx cuando Δx tiende a 0.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La notación de la derivada de f en un punto x es $f'(x)$.

Volvamos al ejemplo de la inversión. Supongamos que las curvas roja y azul están dadas por las funciones $y = g(x) = x^2$ e $y = f(x) = x$



Como hemos visto en apartado inicial sobre derivada:

$$g'(1) = 2$$

¿Qué sucede con la velocidad de crecimiento de f? Es decir, con $f'(x)$.

Volvamos al ejemplo gráfico.

Si se incrementa 1 unidad respecto del 1, la tasa de crecimiento es 1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+1) - f(1)}{2-1} = \frac{2-1}{2-1} = 1$$

Si se incrementan 0,5 unidades respecto del 1, la tasa de crecimiento también es 1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+0,5) - f(1)}{1,5-1} = \frac{1,5-1}{1,5-1} = 1$$

Y esto sucede para cualquier incremento que tomemos. La tasa permanece constante. Esta es, justamente, una característica de las funciones lineales: su derivada en cualquier punto es constante.

Dicho esto, entonces:

$$f'(1) = 1$$

Por este motivo, lo que notábamos al comienzo cuando presentamos el ejemplo de la inversión, es consistente con esta definición. Como la derivada de la función roja en el mes 1 es mayor que la de la curva azul, entonces conviene invertir en la curva roja.

$$g'(1) = 2 > f'(1) = 1$$

Esta semana trabajaremos con las derivadas, su cálculo y las aplicaciones que estas posibilitan.

2.3. Función derivada

Para continuar el estudio de las derivadas, necesitaremos extender la noción de derivada en un punto a la de función derivada.

Sea f definida en todo punto de un intervalo (a, b), y sea f derivable en todo punto del intervalo, es decir, existe f' para cualquier $x \in (a, b)$. Entonces, queda definida una función de variable real en real, tal que: $f' : x \to f'(x)$ y la llamamos función derivada de f.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$ con dominio real. Hallemos su función derivada.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \\
f'(x) &= 2x
\end{aligned}
$$

Luego, su función derivada es $f'(x) = 2x$. De esta forma, con la función derivada, podemos estudiar las derivadas puntuales de $f(x) = x^2$ en cualquier x interior a su dominio.

Efectivamente, podemos comprobar lo que vimos en la introducción: la derivada puntual de:

$$f(x) = x^2 \text{ en } x = 1 \text{ es } f'(1) = 2.$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si quisiéramos estudiar derivadas puntuales o funciones derivadas de otras funciones dadas por expresiones más complicadas? Deberíamos estudiar estos límites y ver si podemos calcularlos ya que es fácil notar que la definición de derivada da lugar siempre a un límite indeterminado: estamos evaluando, en el límite, el cociente de dos cantidades que se van a 0, es decir, cantidades infinitesimales.

Salvar esas indeterminaciones y calcular esos límites sabemos que puede ser pesado.

Afortunadamente, ¡podemos deducir algunas derivadas elementales más algunas reglas de derivación que nos ahorrarán esta tarea!

Derivadas de funciones elementales

Así como lo hicimos para la función del ejemplo anterior, es posible probar que las funciones derivadas de las siguientes funciones elementales son las que se observan en este cuadro.

Función elemental	Su derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, n \neq 1$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

Así, por ejemplo, la derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$ y la derivada de $g(x) = \frac{1}{5}$ es $g'(x) = 0$, lo cual es razonable porque al tratarse de una función constante en todo su dominio, su tasa de cambio es nula.

Ahora bien, ¿qué ocurriría si quisiéramos estudiar la derivada de $h(x) = x^3 + x^2 + 5$? Esta función $h(x)$ no es una función elemental, no está en la tabla, pero sí podemos ver que es suma de funciones elementales que sí están en la tabla y sabemos derivar:

$h_1(x) = x^3$, cuya derivada sería $h_1'(x) = 3x^2$

$h_2(x) = x^2$, cuya derivada sería $h_2'(x) = 2x$

$h_3(x) = 5$, cuya derivada sería $h_3'(x) = 0$

Pero, ¿qué ocurre con $h'(x)$? ¿Será la suma de las derivadas de las funciones elementales? ¡Sí, en efecto lo es! Puede probarse que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas, lo que nos conduciría a:

$$h'(x) = 3x^2 + 2x + 0.$$

3. Reglas elementales de derivación

Las siguientes reglas pueden probarse y valen para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ derivables en x. Omitiremos su demostración pero pueden consultarse en cualquier bibliografía de referencia.

- **Derivada de una suma/resta de funciones:** $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- **Derivada del producto de funciones:** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Derivada del cociente de funciones:** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$, siempre que $g(x) \neq 0$.
- **Derivada del producto de una función por una constante:** $(kf(x))' = kf'(x)$ siendo k una constante real.

Estas reglas, junto con la tabla de derivadas elementales, hacen posible obtener las expresiones de las funciones derivadas de muchas funciones de interés, como las que estudiamos en el recorrido anterior.

Ejemplo: cálculo de derivadas

1. **Hallar la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x^5}$, para todo $x \neq 0$.**

Para derivar esta función, analicemos si es posible expresarla como una función elemental de las que ya estudiamos sus derivadas. Para ello, pasamos la potencia al numerador, cambiándole el signo al exponente:

$$f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

Ahora sí, es una función elemental y su derivada es

$$f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$$

que, también es lo mismo que

$$f'(x) = -\frac{5}{x^6}$$

2. **Hallar la derivada de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^5}$, para todo $x \neq 0$.**

La operación principal en la expresión de la función f es el cociente entre $x+1$ y x^5. En este caso, conviente que busquemos la función derivada usando la regla del cociente:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^5}\right)' = \frac{(x+1)' \cdot x^5 - (x+1) \cdot (x^5)'}{(x^5)^2}$$

¡Ya tenemos prácticamente lista la función derivada! Necesitamos, sin embargo, derivar aquellas expresiones que quedaron con esta notación $'$.

Para derivar $(x+1)$, notemos que podemos usar las derivadas elementales y la regla de la derivada de una suma de funciones:

$$(x+1)' = x' + 1' = 1 + 0 = 1$$

mientras que para derivar x^5 podemos implemente usar lo que estudiamos en las derivadas elementales:

$$(x^5)' = 5x^4.$$

Finalmente:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x^5}\right)' = \frac{1 \cdot x^5 - (x+1) \cdot (5x^4)}{(x^5)^2} = \frac{x^5 - (x+1) \cdot (5x^4)}{x^{10}}.$$

La expresión anterior podría, de hecho, simplificarse un poco:

$$f'(x) = \frac{x^5 - 5x^5 - 5x^4}{x^{10}} = \frac{-4x^5 - 5x^4}{x^{10}} = \frac{x^4(-4x-5)}{x^{10}} = \frac{-4x-5}{x^6}.$$

La decisión de si conviene simplificar, o no, suele depender del contexto en el que estemos buscando estas funciones derivadas. Por ejemplo, si solo las estamos buscando para practicar el cálculo de derivadas, simplificar podría no ser necesario; pero si las estamos buscando porque luego operaremos, simplificar y llegar a una expresión más reducida suele ser deseable.

Por otro lado, también podríamos haber derivado diferente si hubiéramos notado que:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^5} = \frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} = x^{-4} + x^{-5}$$

pues:

$$f'(x) = (x^{-4})' + (x^{-5})' = -4x^{-5} - 5x^{-6}.$$

Esta función derivada es la misma que hallamos antes, lógicamente, pues:

$$f'(x) = -4x^{-5} - 5x^{-6} = -\frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6} = \frac{-4x-5}{x^6}.$$

De nuevo, la elección de expresar a una función o a su derivada de una u otra forma, depende del contexto y de cuán familiarizados o cómodos estemos con estas transformaciones. No existe una forma o camino que sea mejor que el otro de forma absoluta, sino que es relativo a lo que sabemos y/o podemos hacer.

Al terminar el libro, te invitamos a que revises la colección de videos sugeridos sobre el cálculo de derivadas.

3. Hallar la función derivada de $f(x) = (5x^2 - 3) \cdot (x^2 + x + 4)$.

Conociendo ya las reglas de derivación y la tabla de derivadas de funciones elementales:

$$f'(x) = 10x\left(x^2 + x + 4\right) + \left(5x^2 - 3\right)(2x + 1) = 20x^3 + 15x^2 + 34x - 3.$$

4. Uso de software para el cálculo de derivadas

Podés usar software para obtener derivadas puntuales y/o funciones derivadas. Para las derivadas puntuales, podés usar GeoGebra (hacé clic aquí) o el emulador de calculadora científica (hacé clic aquí), ambos ya estudiados en los recorridos anteriores.

Para obtener funciones derivadas, en cambio, se necesita software que procese simbólicamente esas expresiones. GeoGebra es capaz de hacerlo, pero existen otros softwares que también operan simbólicamente. Symbolab y WolframAlpha son dos software reconocidos y confiables para dicho tratamiento.

Te invitamos a que verifiques las funciones derivadas que hallamos en los ejemplos anteriores usando cualquiera de ellos.

Symbolab Para acceder a la calculadora de derivadas en Symbolab hacé clic aquí.

WolframAlpha Para acceder a la calculadora de derivadas en WolframAlpha hacé clic aquí.

5. Mejor aproximación lineal: recta tangente

Ya hemos visto que las funciones son un herramienta muy útil en matemática y en otras disciplinas, porque permiten modelar problemas y situaciones, así como la variación conjunta entre cantidades variables.

Sin embargo, en problemas reales, las expresiones que definen a esas funciones pueden ser muy complicadas y difíciles de tratar.

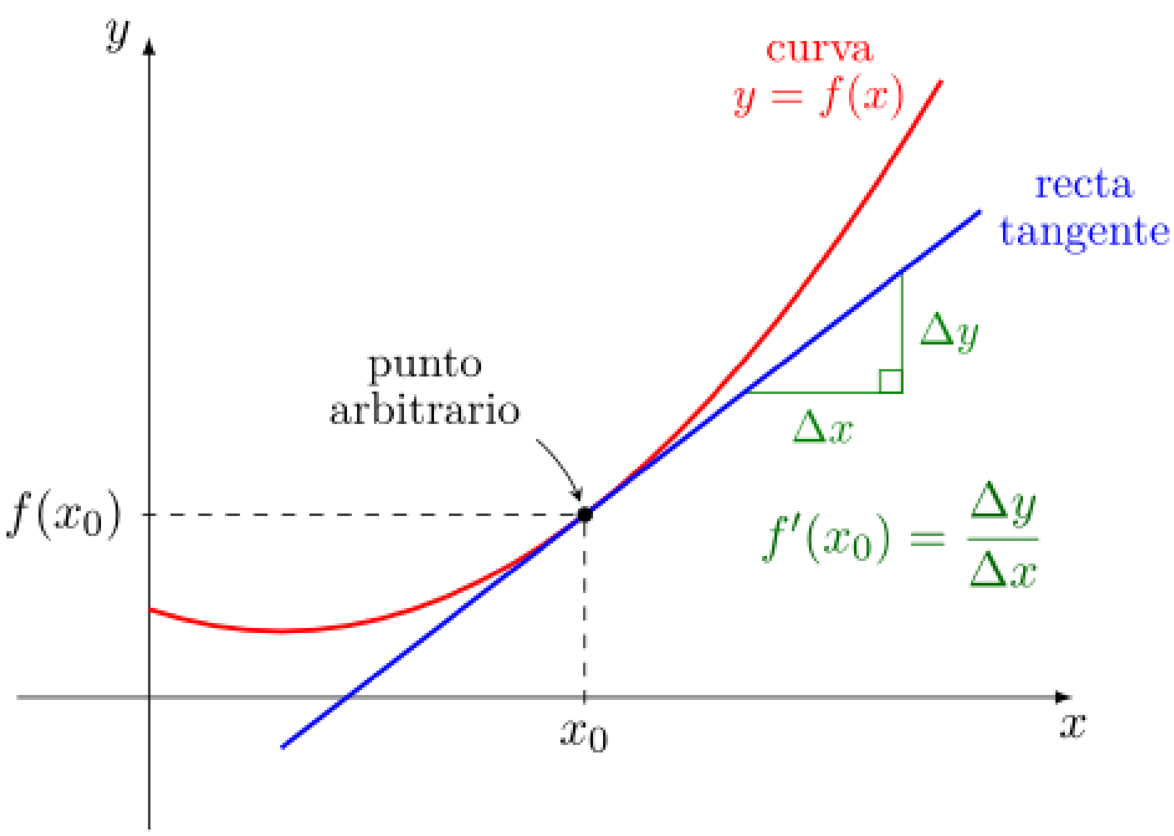
Imaginemos cuán fácil sería todo si pudiéramos aproximar una función cuya expresión fuera esta $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-x-\sqrt{1-x}}\right)$ por otra función que fuera lineal. Claro, una función lineal nunca podrá ser otra cosa que no sea una función lineal… sin embargo, quizás pueda dar una aproximación local de otras funciones más complicadas.

Esto, de hecho, es posible. Diremos que una aproximación lineal es una aproximación de una función cualquiera usando una transformación o función lineal. Más precisamente, dada una función f de variable real que admite derivada, podemos aproximar a f localmente y en un entorno de $x = x_0$ del siguiente modo:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La expresión de la derecha corresponde a una función lineal y es, de hecho, la expresión que adopta la recta tangente a la gráfica de f en $x = x_0$. Su pendiente corresponde con la derivada de la función f en el punto x_0.

Gráficamente, notemos que en cercanías de x_0, la curva roja que corresponde a la función $f(x)$ puede ser aproximada ¡bastante bien, de hecho! por la recta tangente azul.



Ejemplo

La recta tangente, entonces, puede darnos buenas aproximaciones locales de una función no lineal. Imaginemos que queremos hallar una aproximación lineal, razonable, de $\sqrt[3]{25}$.

Para encontrar la aproximación lineal de $\sqrt[3]{25}$, podemos hacer lo siguiente.

- Consideremos la función $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.
- Busquemos su derivada.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Como sabemos, la recta tangente a f en algún x_0 conveniente nos dará una aproximación local de f. Para seguir, necesitamos x_0. ¿Cuál elegir? Debe ser un x_0 que esté lo suficientemente cerca de 25 pues queremos hacer la aproximación de $f(25) = \sqrt[3]{25}$. Además, debería ser tal que pudiéramos computar $f(x_0)$ sin error, ya que es algo que necesitamos para obtener la ecuación de la recta tangente. Convenientemente, podríamos elegir $x_0 = 27$ pues cumple con esas dos condiciones (¡podría ser otro!).

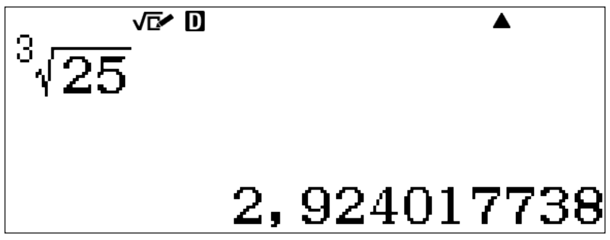
- Buscamos la recta tangente a f en $x_0 = 27$.

$$\text{recta tangente: } y = f(27) + f'(27)(x - 27) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

- Finalmente, aproximamos $f(25) = \sqrt[3]{25}$ usando la recta tangente en $x = 25$:

$$f(25) \approx 3 + \frac{1}{27}(25 - 27) = 3 - \frac{2}{27} = \frac{79}{27}.$$

Concluimos, entonces, que la aproximación lineal de $\sqrt[3]{25}$ es $79/27 \approx 2.925925926$ y es un valor que está razonablemente cerca del valor que puede dar una calculadora $2.924017738\ldots$:

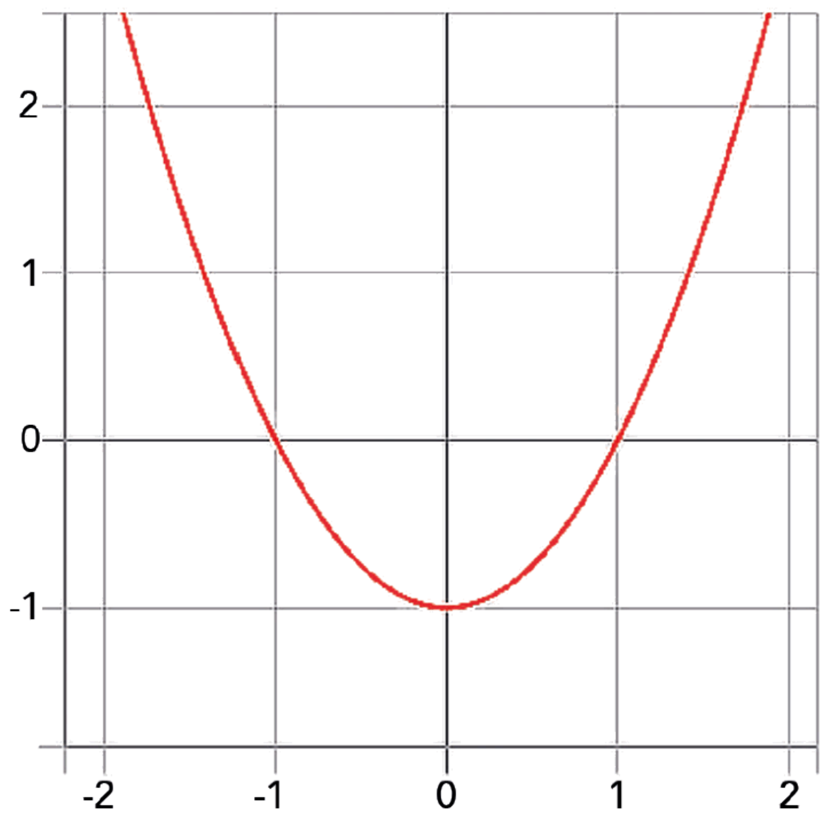


6. Relación de la derivada con el crecimiento de una función

Examinar el comportamiento de una función es una parte central del estudio de la matemática y tiene aplicaciones en muchas áreas disciplinares. Como ya hemos visto en el recorrido anterior, cuando esbozamos una curva colocando simplemente puntos en un registro tabular, por más que la función sea continua y nuestra tabla sea lo suficientemente “densa”, como el registro tabular es siempre discreto y finito, es imposible disponer de información suficiente acerca de la forma de la función.

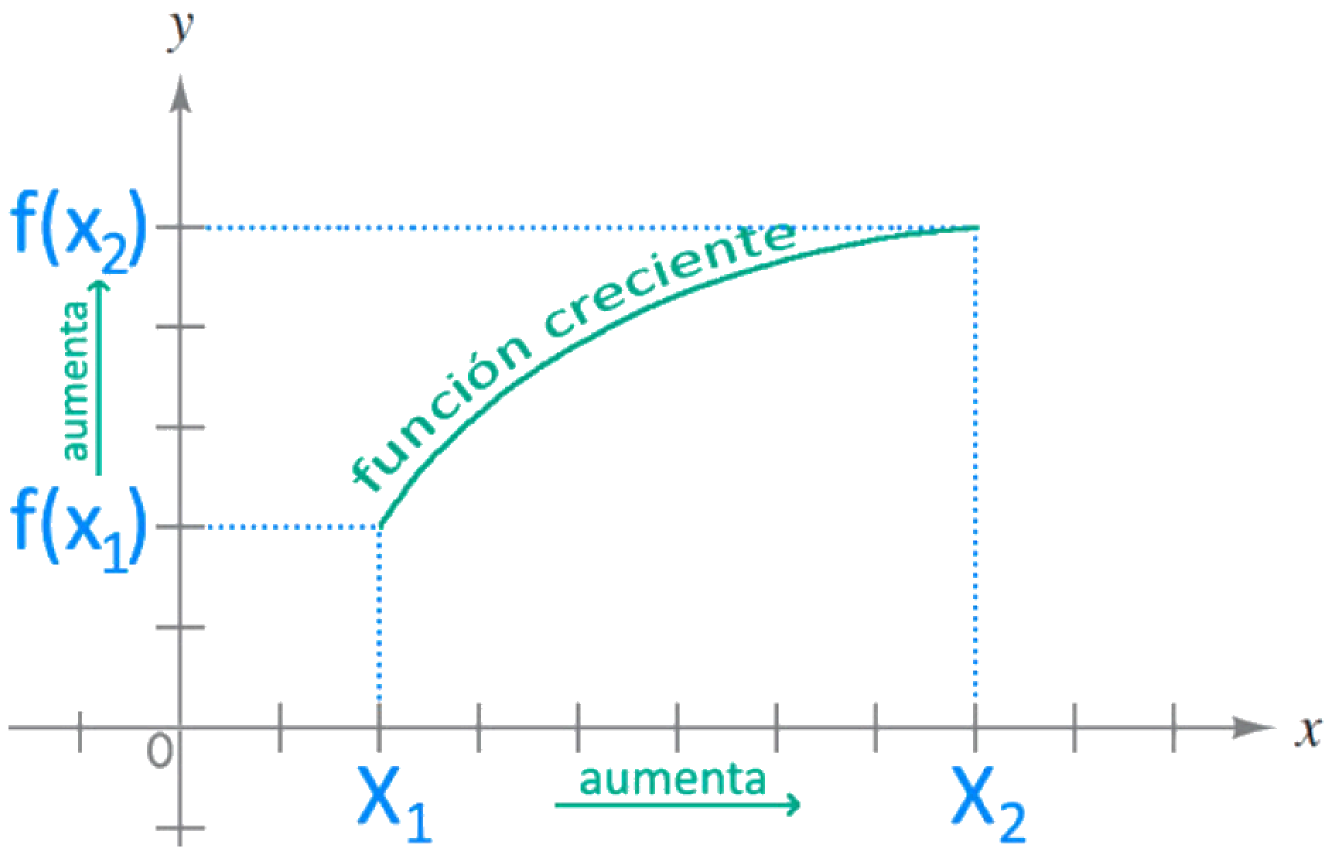
Veamos un ejemplo de una función polinómica como las que podríamos haber estudiado en el recorrido anterior. La función $f(x)=(x+1)^3(x-1)$ sabemos que tiene un gráfico que pasa por los puntos $(-1,0),(0,-1)$ y $(1,0)$.

Observemos que los siguientes gráficos de funciones continuas cumplen con esa condición, pero solo el primero es el de $f(x)$.



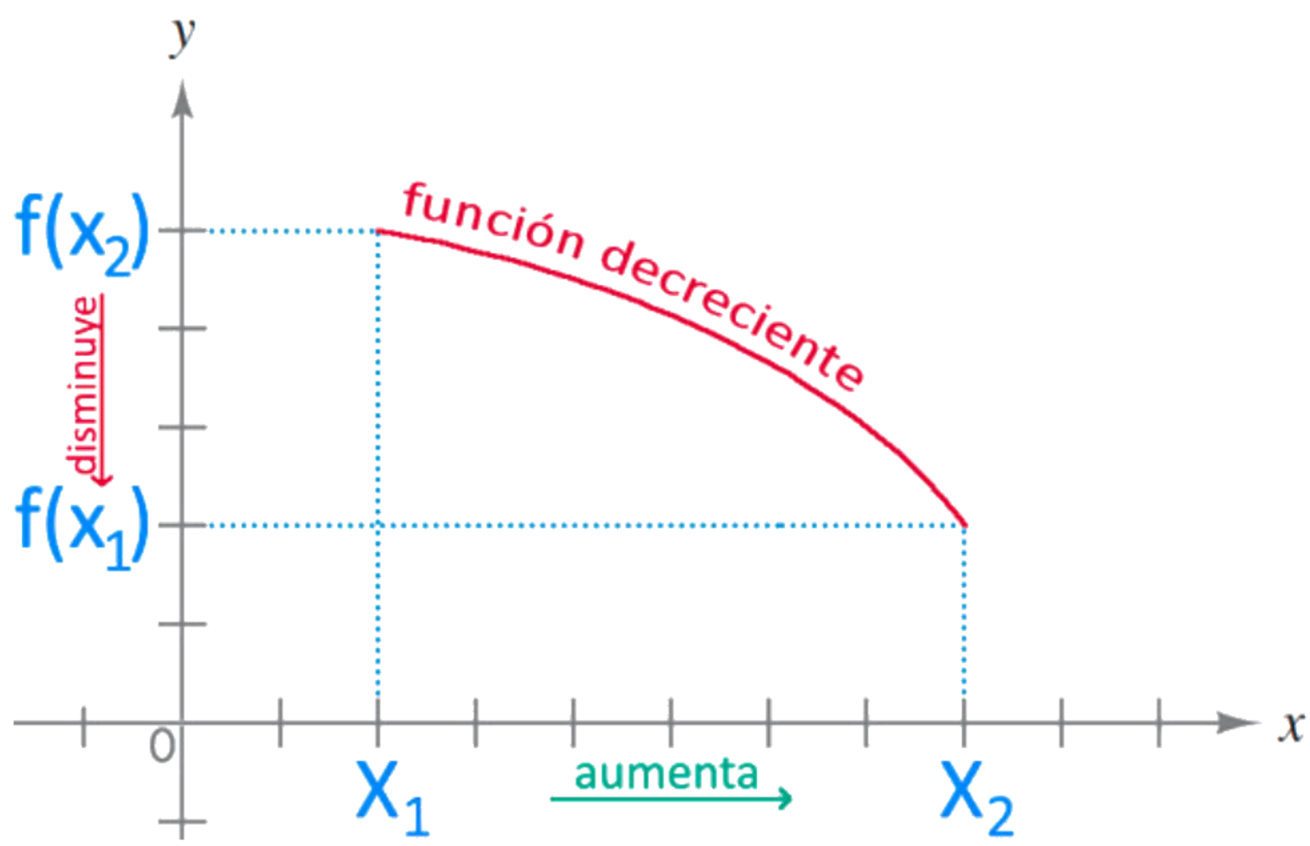
Queremos poder estudiar y caracterizar la forma de una función continua de una manera más precisa que solo a través de algún conjunto de puntos. Veamos cómo la derivada puede aportarnos información sobre la forma.

Para lo que sigue, recordemos que una función es creciente si para $x_2>x_1$, $f(x_2)\geq f(x_1)$.



Es decir, una función creciente es aquella cuyas imágenes aumentan si las preimágenes aumentan.

Análogamente, diremos que es decreciente si para $x_2>x_1$, $f(x_2)\leq f(x_1)$. Es decir, en una función decreciente las imágenes disminuyen si las preimágenes aumentan.



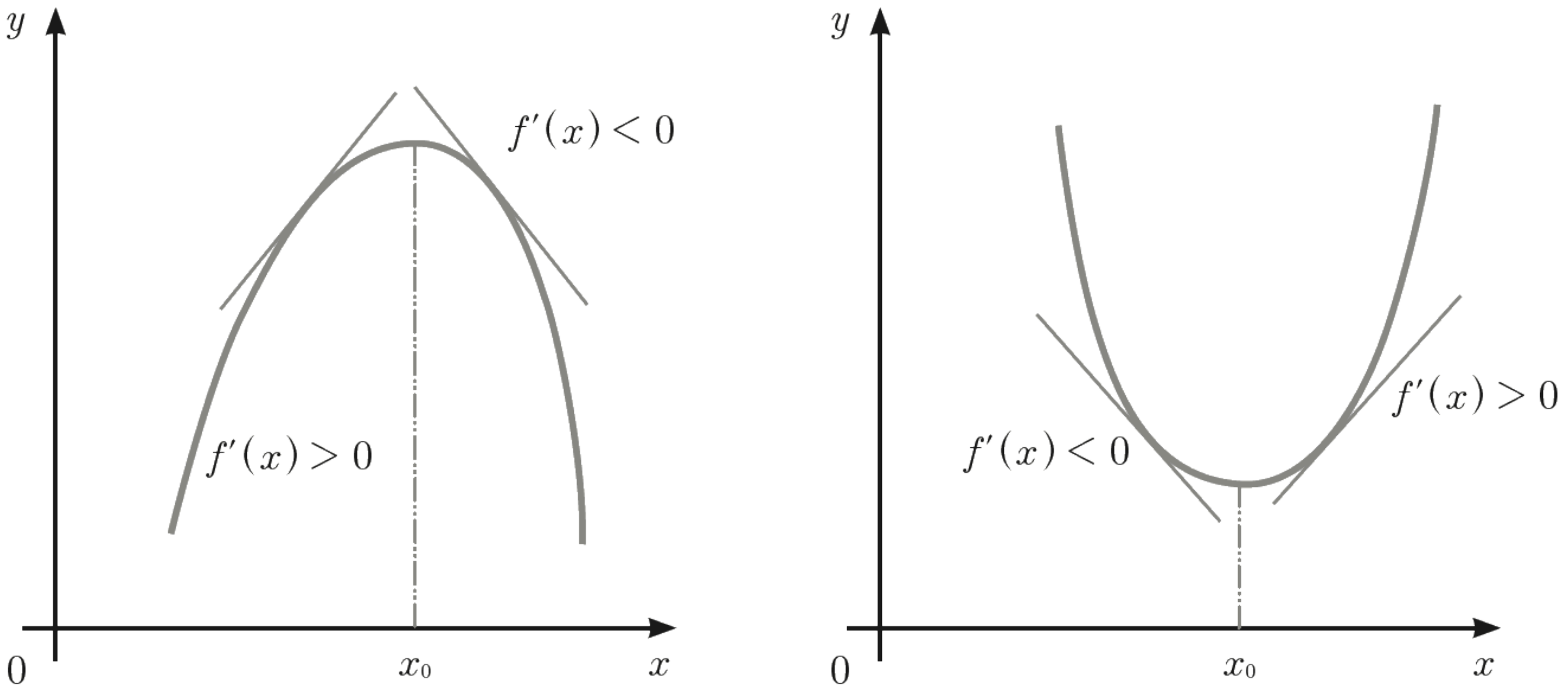
En general, las funciones serán crecientes o decrecientes en ciertas regiones de su dominio, y nos interesará caracterizar ese crecimiento.

El signo de la derivada de una función en un punto, esto es, el signo de la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en un punto x_0, caracteriza el crecimiento de la función $f(x)$ en una vecindad de x_0. Es decir:

- si $f'(x_0)>0$, la curva $y=f(x)$ resulta creciente en una vecindad de x_0,

- si $f'(x_0)<0$, la curva $y=f(x)$ resulta decreciente en una vecindad de x_0.

Esto puede observarse en el gráfico en el que, además, x_0 corresponde a un extremo local de la función.



En el gráfico de la izquierda, x_0 es máximo local de la función f pues, a izquierda de x_0 la función es creciente y, a derecha, decreciente. Como la función f es continua, si a izquierda y a derecha hubo un cambio de crecimiento de f como el descrito, es porque x_0 es un máximo de f.

Análogamente, en el gráfico de la derecha, x_0 es mínimo local de la función f pues, a izquierda de x_0 la función es decreciente y, a derecha, creciente.

De hecho, el conocido **teorema de Fermat** da la condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones continuas:

Sea f una función continua y c un punto de extremo local de f. Entonces, si f es derivable en c, una condición necesaria para que c sea extremo local, es $f^{\prime}(c)=0$.

Ejemplo

El estudio del crecimiento y de los extremos relativos de una función pueden sernos útiles para estudiar la representación gráfica de las funciones.

En el foro de Pensamiento Matemático del recorrido anterior (hacé clic aquí para releerlo), te pedimos que describieras cómo representar gráficamente la función $f(x)=2x^3−3x^2−3x+2$. En el foro de este recorrido (hacé clic aquí para releerlo), te pediremos que describas cómo representar gráficamente esa misma función pero, ahora, haciendo un estudio de su crecimiento y extremos relativos usando lo que aprendimos sobre derivadas.

Para ello, te invitamos a mirar el siguiente ejemplo con la función $f(x)=3x^3-3x$.

Notemos que $f(x)=3x^3-3x$ es una función polinómica y podríamos representarla con lo que estudiamos durante el recorrido anterior. Sin embargo, estudiar su derivada nos permitirá caracterizar su comportamiento de una forma más completa respecto de la forma en lo sabíamos estudiar hasta ahora.

Busquemos $f^{\prime}(x)$:

$$f^{\prime}(x)=(3x^3-3x)^{\prime}=9x^2-3.$$

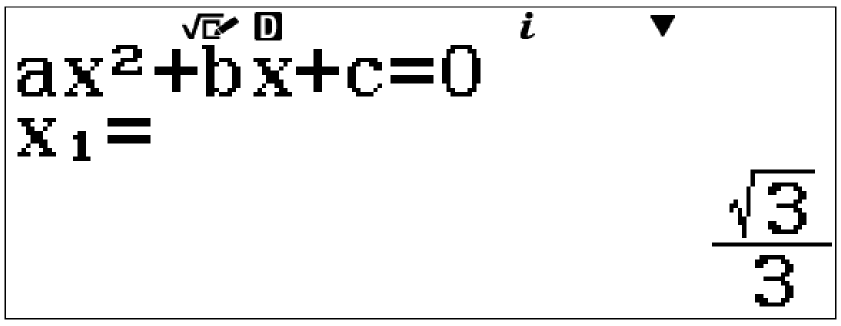
De lo que estudiamos en este recorrido, sabemos que:

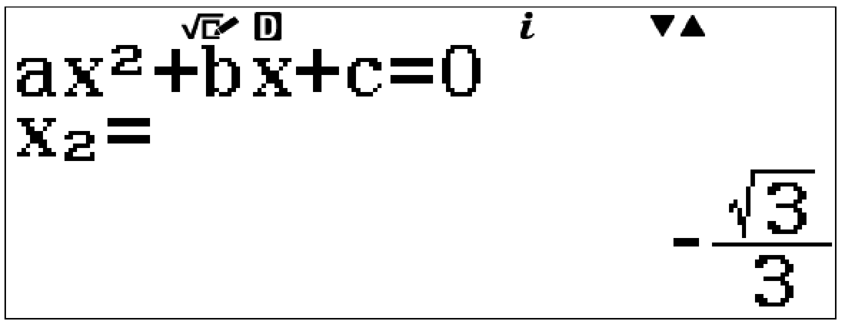
- aquellos \(x\) en donde \(f^{\prime}(x)\) se anule, son candidatos a ser extremos de \(f\) (máximos y/o mínimos),
- las regiones del dominio en las que \(f^{\prime}(x)\) resulte positiva, serán regiones de crecimiento de \(f\), y de decrecimiento para regiones en las que \(f^{\prime}(x)\) resulte negativa.

Busquemos los ceros de \(f^{\prime}(x)\):

\[x \text{ tales que } f^{\prime}(x)=9x^2-3=0 \]

y veamos que eso ocurre en \(x=\sqrt{3}/3\approx 0.5773\) y en \(x=-\sqrt{3}/3 \approx -0.5773\).

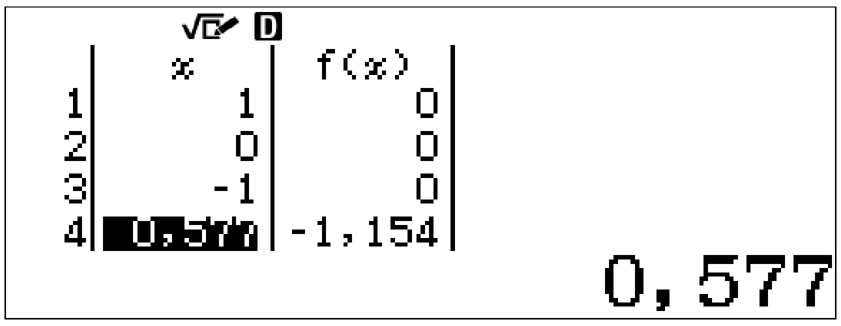


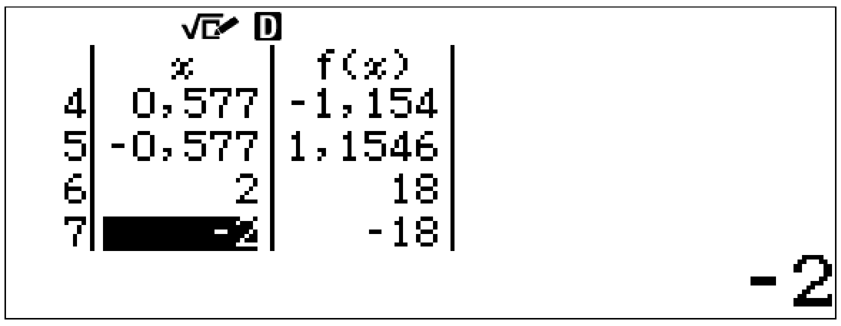


Esos valores son candidatos a ser extremos de la función. Para terminar el análisis, estudiemos el crecimiento a partir del signo de la derivada primera.

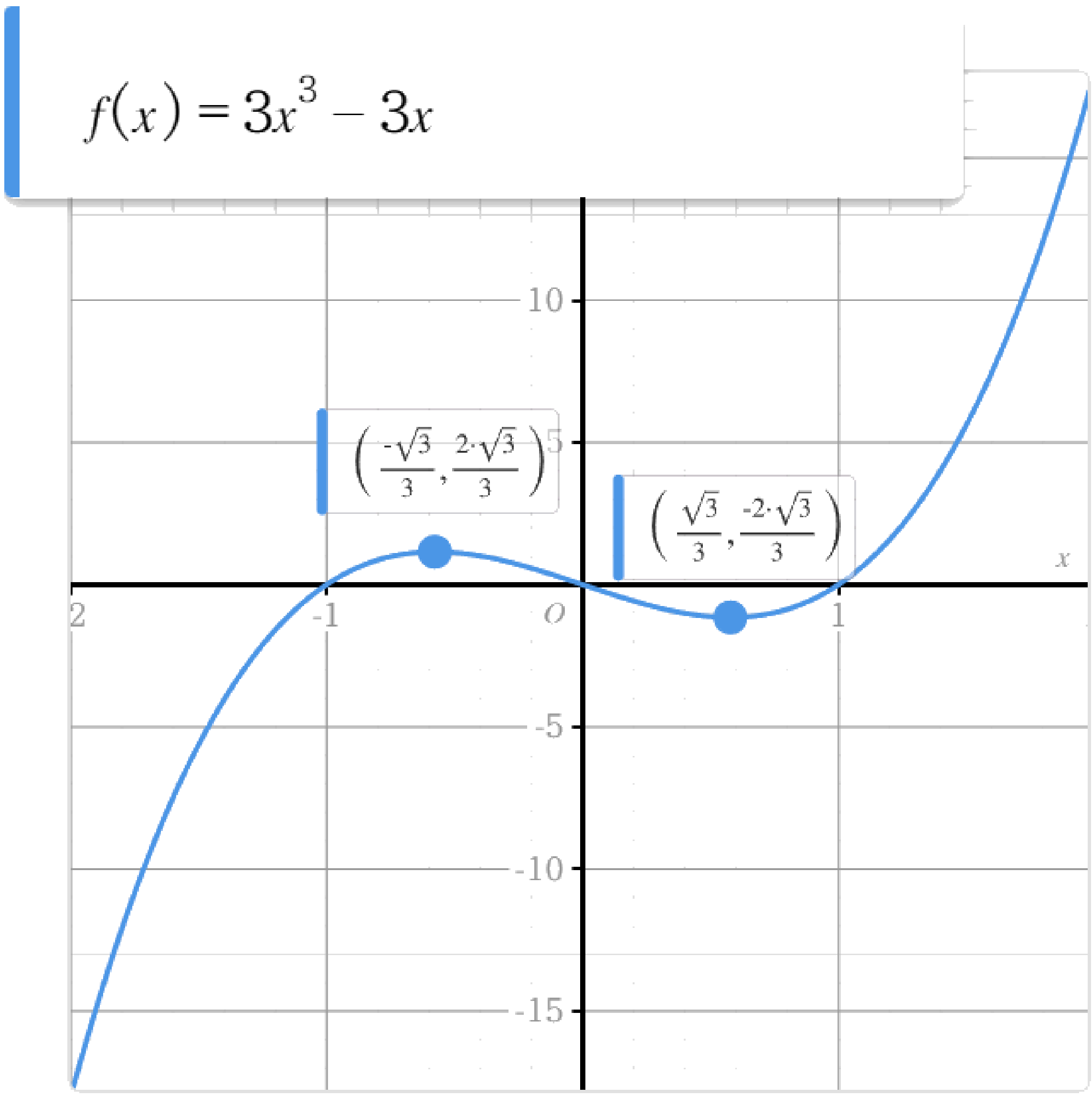
\[\begin{array}{|l|c|c|c|} \hline \text{Candidatos en ...} & (-\infty, -0.5773) & (-0.5773, 0.5773) & (0.5773, +\infty)\\ \hline \text{Signo de } f^{\prime} & f^{\prime}(-1)=9\cdot (-1)^2-3 >0 & f^{\prime}(0)=9\cdot (0)^2-3 <0 & f^{\prime}(1)=9\cdot (1)^2-3 >0\\ \hline \text{Crecimiento de } f & f \text{ crece } & f \text{ decrece } & f \text{ crece }\\ \hline \end{array}\]

Ya tenemos las regiones en las que crece \(f\): \((-\infty, -0.5773); (0.5773, +\infty)\); y en las que decrece: \((-0.5773, 0.5773)\). Además, sabemos que en \(x=\sqrt{3}/3\approx 0.5773\) hay un máximo local y en \(x=-\sqrt{3}/3\approx -0.5773\) hay un mínimo local . Solo con esta información, ya es posible esbozar un gráfico tentativo de \(f\). Más aún, complementando esto con la información adicional que puedan darnos algunos puntos claves de \(f\), tenemos lo necesario para esbozar un gráfico tentativo.





El gráfico puede verse a continuación. Con etiquetas se identifican los extremos hallados. Junto con la forma, pueden apreciarse las regiones de crecimiento y decrecimiento halladas y que quedan determinadas por los extremos.


$f(x) = 3x^3 - 3x$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\cdot\sqrt{3}}{3}\right)$
10
5
-5
-10
-15
2
-1
O
1
x