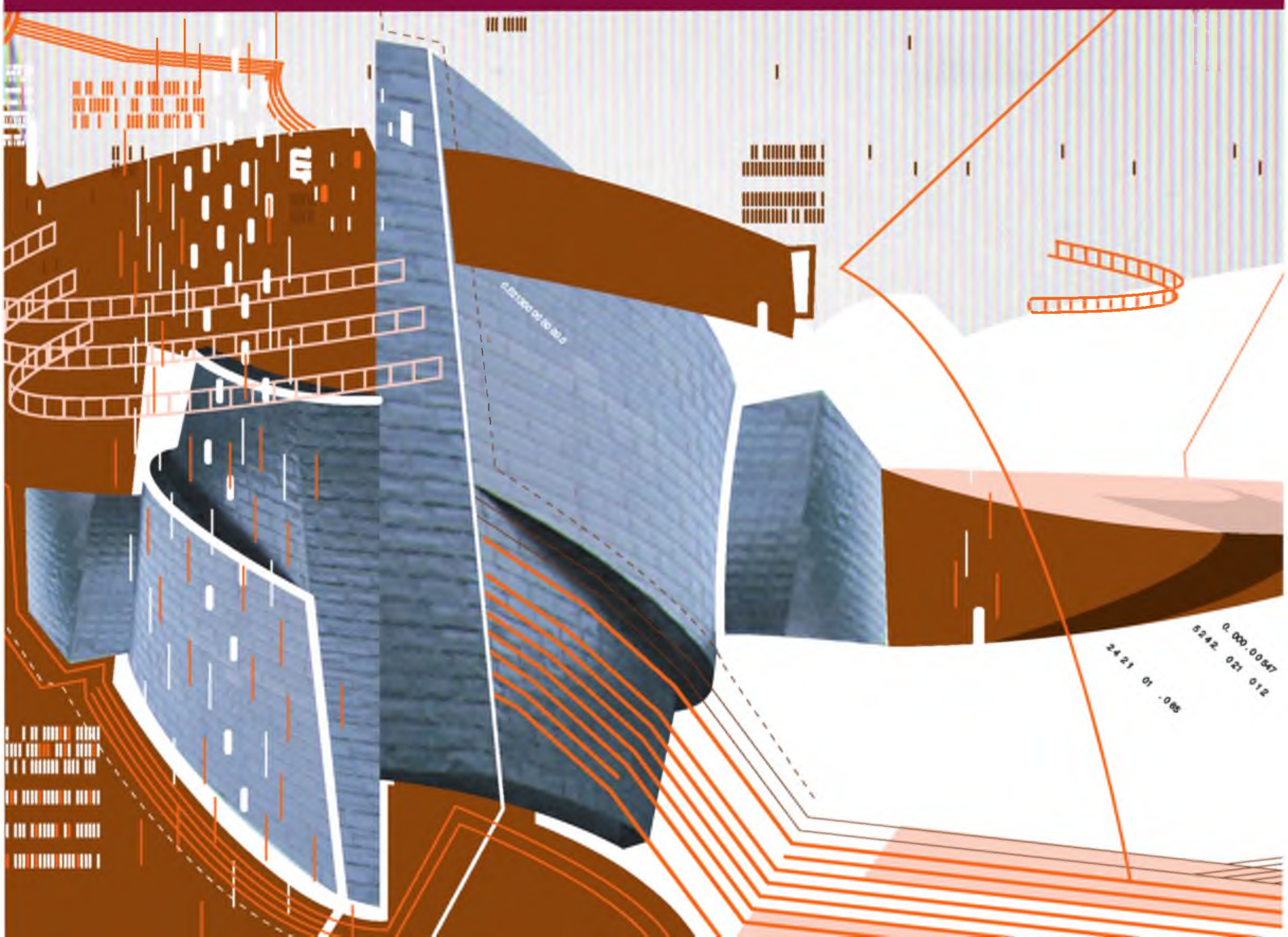
longseller | EDUCACIÓN

Matemática

6

Análisis 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok



longseller | EDUCACIÓN

Matemática

6

Análisis 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

Dirección editorial
Verónica Parada

Dirección pedagógica
Rosa Rottemberg

Dirección de arte
Paula Lanzillotti

Edición
Mariela Miguiarra

Colaboración en la edición
María Teresa Diñeiro

Supervisión gráfica
GrupoDiseño

Diseño gráfico
Natalia Fernández

Corrección
Inés Gugliotella

Diseño de signos tipográficos matemáticos
Natalia Fernández

Ilustración de tapa e interiores
Doma

Ilustraciones
Doma
Jorge Martínez

Gráficos
Gabriela Feldman
Natalia Fernández

Fotocromía
Longseller S.A.

Las autoras agradecen a la profesora Patricia Sadovsky por sus enseñanzas y su apoyo incondicional.

Casa matriz: Av. San Juan 777
(C1147AAF)
Ciudad de Buenos Aires, Argentina
Teléfono y fax: (5411) 5031-5400
E-mail: educacion@longseller.com.ar
www.longseller.com.ar
ISBN Obra Completa: 987-9481-66-6
Queda hecho el depósito que dispone la ley 11.723.

Libro de edición argentina.

515
ALT

Altman, Silvia
Matemática 6: análisis 2 / Silvia Altman, Claudia Comparatore y Liliana Kurzrok.- 1ª ed.- Buenos Aires : Longseller, 2001.
112 p. ; 28x20cm.- (Libros temáticos)

ISBN 987-550-044-5

I. Comparatore, Claudia II. Kurzrok, Liliana III. Título- 1. Análisis Matemático

longseller | EDUCACIÓN

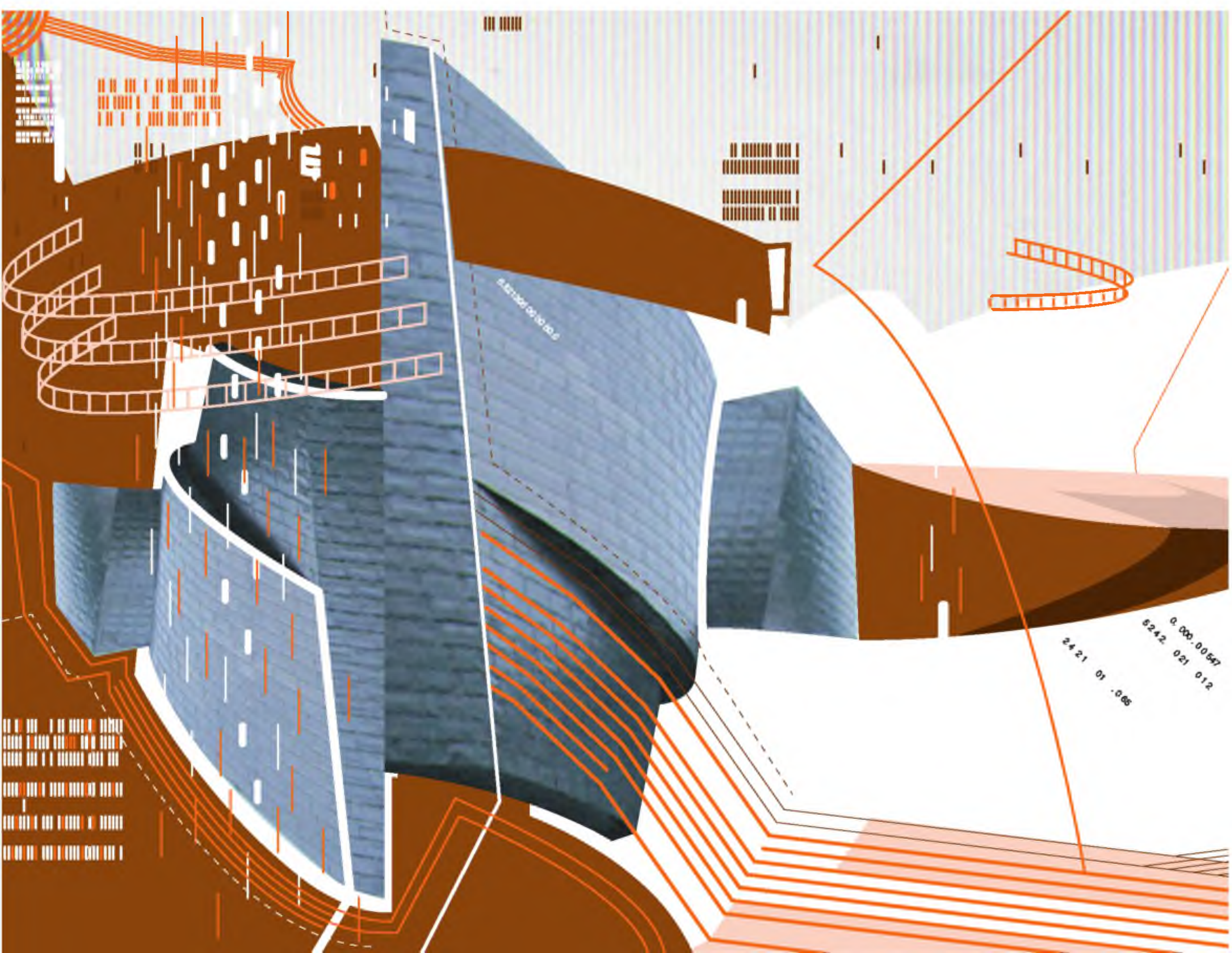
Matemática

Análisis 2

Silvia V. Altman
Profesora de Matemática y Astronomía, INSP "Joaquín V. González". Ganadora del subsidio para profesores de colegios secundarios, Fundación Antorchas (1994). Docente en escuelas medias.

Claudia R. Comparatore
Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de Buenos Aires. Ganadora del subsidio para profesores de colegios secundarios, Fundación Antorchas (1994). Docente en escuelas medias y en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA.

Liliana E. Kurzrok
Licenciada en Matemática, Universidad Nacional de Buenos Aires. Profesora de Matemática, ORT Formación docente para profesionales. Becaria de Investigación, CONICET, UBA. Docente en escuelas medias y en la Facultad de Ciencias Exactas, UBA.



Cómo leer este libro

Problemas

Al comenzar cada capítulo, y para introducir los contenidos, se presentan uno o más problemas para resolver y discutir en grupos, que se identifican con el ícono ○.

Posible resolución

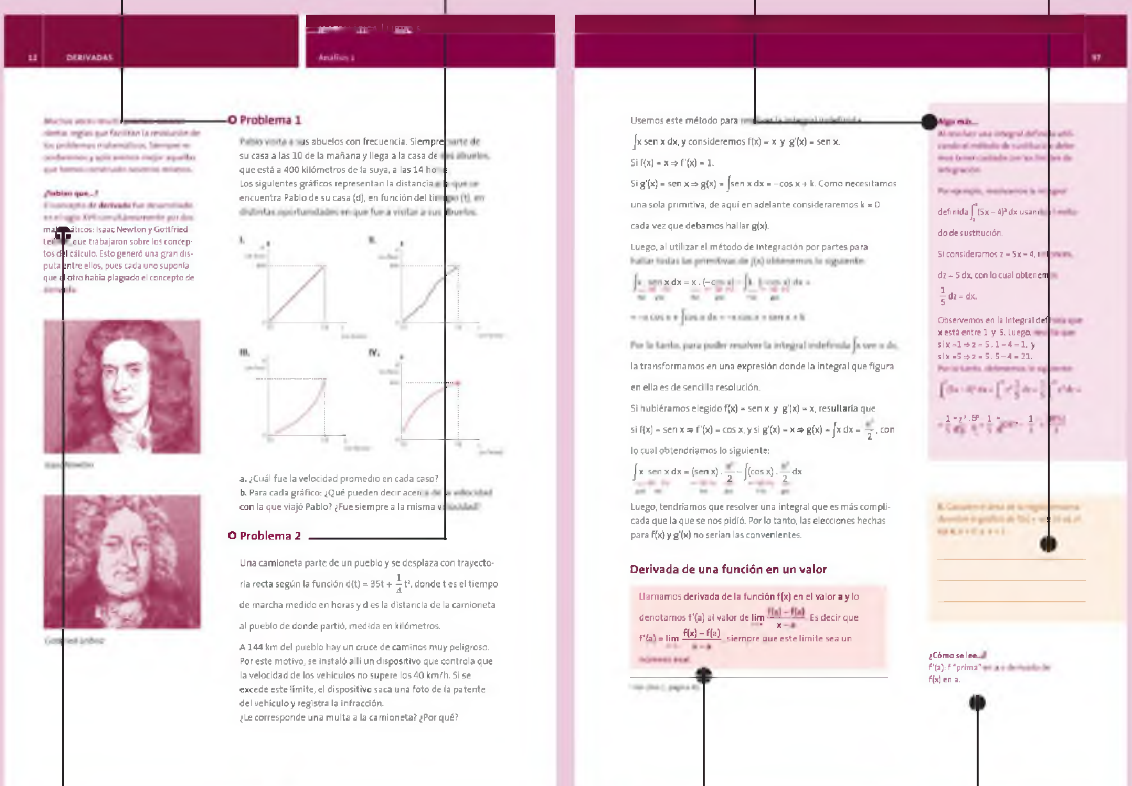
Se presenta un posible camino para resolver cada uno de los problemas propuestos, que permite confrontar diferentes procedimientos y verificar las soluciones obtenidas. Se identifica con el ícono ●.

Algo más…

Se presentan comentarios y aclaraciones sobre los temas desarrollados.

Actividades

Se proponen actividades que sirven para verificar la comprensión de los contenidos abordados y la aplicación de éstos en distintas situaciones.



¿Sabían que…?

Se presentan biografías, reseñas históricas y datos de interés, que enriquecen los contenidos.

Textos recuadrados

Aquí se incluyen definiciones para que puedan ser localizadas rápidamente cuando se necesita consultarlas.

¿Cómo se lee…?

Se ofrece el significado de los símbolos utilizados en la página.

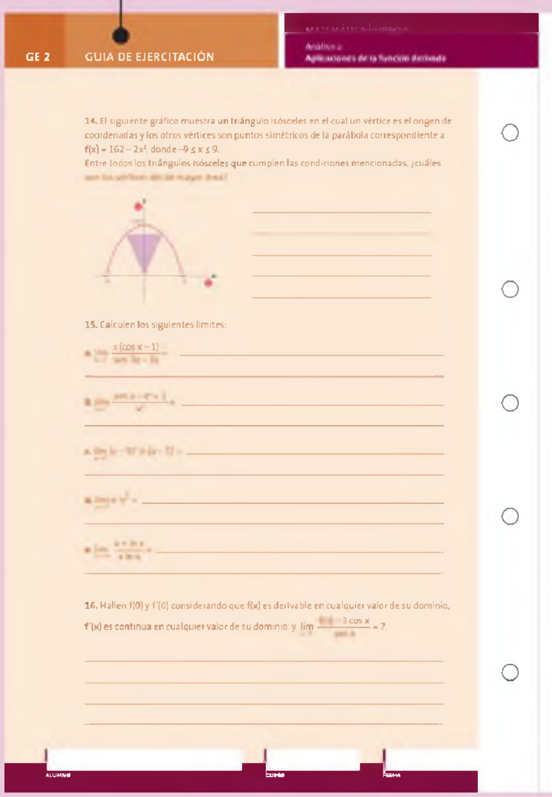
Guía de ejercitación

Incluye actividades orientadas a poner en juego todos los conceptos y procedimientos desarrollados a lo largo del capítulo.

Guía de autoevaluación

Contiene actividades que pueden ser resueltas al finalizar el capítulo para autoevaluar lo aprendido.

Se incluyen las respuestas al final del libro.


GE 2 GUIA DE EJERCITACIÓN

Análisis 2

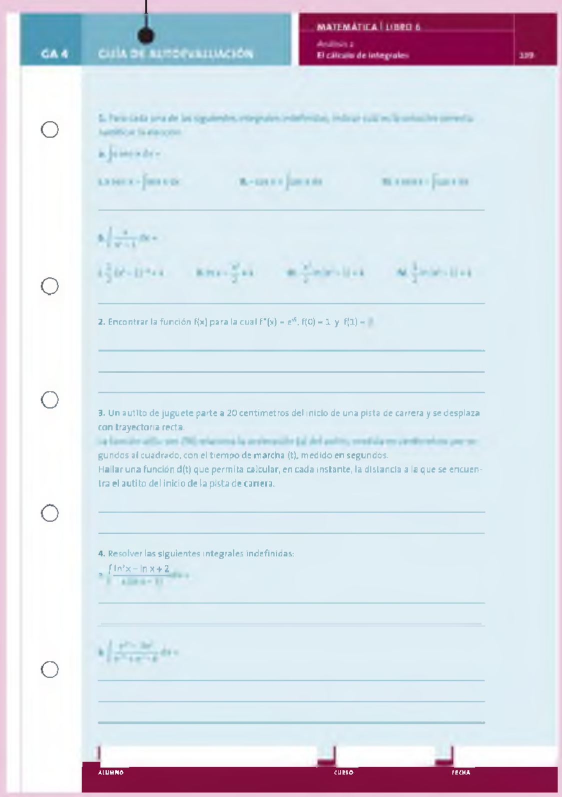
Aplicaciones de la función derivada

14. El siguiente gráfico muestra un triángulo isósceles en el cual un vértice es el origen de coordenadas y los otros vértices son puntos simétricos de la parábola correspondiente a $f(x) = 162 - 2x^2$, donde $-9 \leq x \leq 9$.
Entre todos los triángulos isósceles que cumplen las condiciones mencionadas, ¿cuáles

15. Calculen los siguientes límites:

16. Hallen f(0) y f'(0) considerando que f(x) es derivable en cualquier valor de su dominio, f'(x) es continua en cualquier valor de su dominio y

ALUMNO CURSO FECHA


GA 4 GUÍA DE AUTOEVALUACIÓN

MATEMÁTICA | LIBRO 6

Análisis 2

El cálculo de integrales

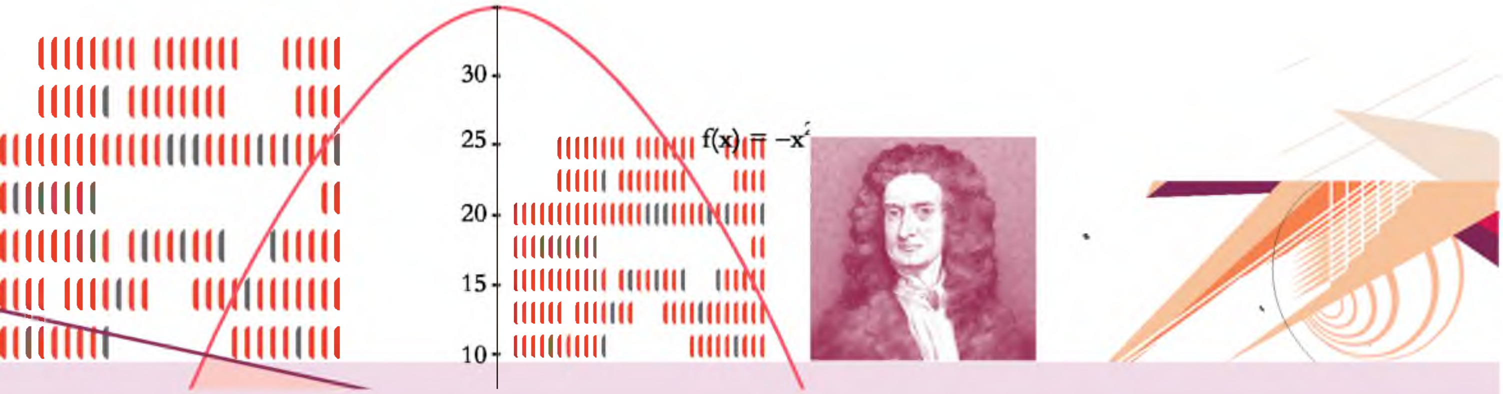
2. Encontrar la función f(x) para la cual f"(x) = ..., f(0) = 1 y f(1) = ...

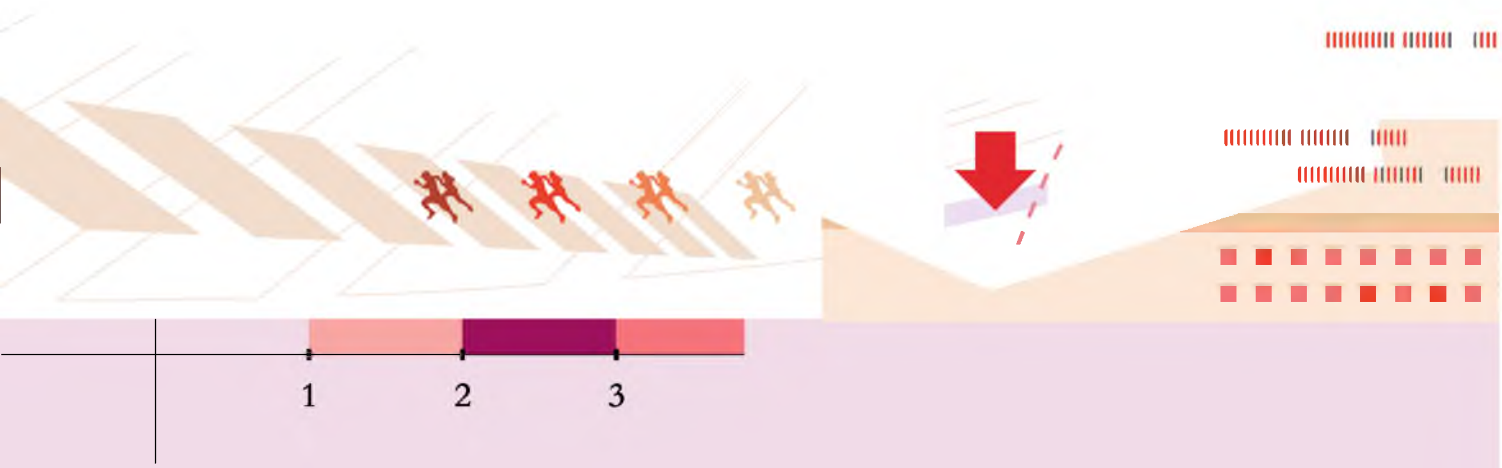
3. Un autito de juguete parte a 20 centímetros del inicio de una pista de carrera y se desplaza con trayectoria recta.
... gundos al cuadrado, con el tiempo de marcha (t), medido en segundos.
Hallar una función d(t) que permita calcular, en cada instante, la distancia a la que se encuentra el autito del inicio de la pista de carrera.

4. Resolver las siguientes integrales indefinidas:

ALUMNO CURSO FECHA

Índice




1
2
3

1 Derivadas

El concepto de derivada resulta muy útil en diferentes ciencias, como la economía y la física, entre otras, pues permite estudiar la forma y la rapidez con que se producen los cambios.

Muchas veces resulta práctico conocer ciertas reglas que facilitan la resolución de los problemas matemáticos. Siempre recordaremos y aplicaremos mejor aquellas que hemos construido nosotros mismos.

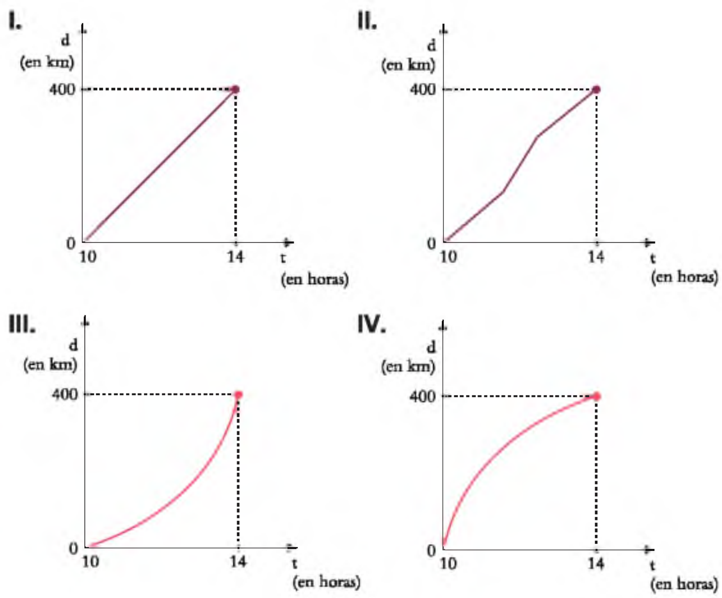
¿Sabían que...?
El concepto de **derivada** fue desarrollado en el siglo XVII simultáneamente por dos matemáticos: Isaac Newton y Gottfried Leibniz, que trabajaron sobre los conceptos del cálculo. Esto generó una gran disputa entre ellos, pues cada uno suponía que el otro había plagiado el concepto de derivada.

Isaac Newton

Gottfried Leibniz

Problema 1

Pablo visita a sus abuelos con frecuencia. Siempre parte de su casa a las 10 de la mañana y llega a la casa de sus abuelos, que está a 400 kilómetros de la suya, a las 14 horas.
Los siguientes gráficos representan la distancia a la que se encuentra Pablo de su casa (d), en función del tiempo (t), en distintas oportunidades en que fue a visitar a sus abuelos.



a. ¿Cuál fue la velocidad promedio en cada caso?
b. Para cada gráfico: ¿Qué pueden decir acerca de la velocidad con la que viajó Pablo? ¿Fue siempre a la misma velocidad?

Problema 2

Una camioneta parte de un pueblo y se desplaza con trayectoria recta según la función $d(t) = 35t + \frac{1}{4}t^2$, donde **t** es el tiempo de marcha medido en horas y **d** es la distancia de la camioneta al pueblo de donde partió, medida en kilómetros.

A 144 km del pueblo hay un cruce de caminos muy peligroso. Por este motivo, se instaló allí un dispositivo que controla que la velocidad de los vehículos no supere los 40 km/h. Si se excede este límite, el dispositivo saca una foto de la patente del vehículo y registra la infracción.
¿Le corresponde una multa a la camioneta? ¿Por qué?

Problema 1

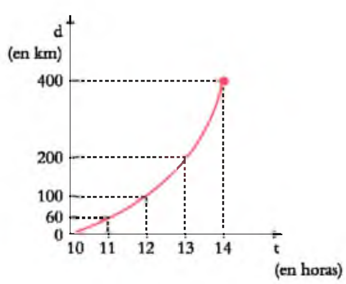
a. Como en todos los casos Pablo viajó 400 kilómetros en 4 horas, entonces, en todo el viaje su velocidad promedio fue de $\frac{400}{4}$ km/h, o sea, de 100 km/h. A la velocidad promedio se la llama **velocidad media**.

Velocidad media

Si la función d(t) determina la distancia de un móvil a un cierto lugar en función del tiempo **t**, llamamos **velocidad media** del móvil en el intervalo de tiempo **a; b** al cociente entre d(b) – d(a) y b – a. Simbólicamente escribimos:

$$Vm_{a;\,b} = \frac{d(b) - d(a)}{b - a}$$

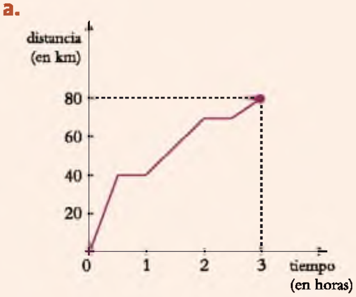
b. En el gráfico **I.** la función que relaciona la distancia a la que se encuentra Pablo de su casa con el tiempo está representada por una recta. Entonces, para intervalos de tiempo iguales, Pablo recorrió distancias iguales. Por lo tanto, Pablo viajó siempre a la misma velocidad.
El gráfico **II.** presenta segmentos de recta. Para cada uno de ellos, podemos hacer un análisis similar al realizado para el gráfico **I.** Por lo tanto, Pablo viajó a diferentes velocidades en los tres tramos, siendo la velocidad constante en cada uno de ellos.
Como el gráfico **III.** no corresponde a una función lineal, consideremos en él la distancia recorrida por Pablo en cada intervalo de una hora.



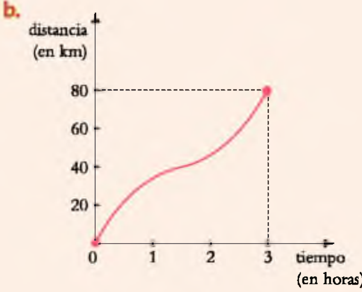
En el gráfico anterior, podemos observar que en cada intervalo de una hora Pablo recorrió diferentes distancias. Por lo tanto, la velocidad a la que viajó no se mantuvo constante. Lo mismo sucede para el gráfico **IV.**

1. Daniel suele ir a la casa de unos amigos que viven a 80 kilómetros de la suya. Los siguientes gráficos representan la distancia a la que se encuentra Daniel de su casa, en función del tiempo, en distintas ocasiones en que visitó a sus amigos.
Para cada gráfico, analicen si Daniel realizó el viaje a velocidad constante. Justifiquen sus respuestas.

a.



b.



2. Calculen la velocidad media de todo el viaje para cada uno de los gráficos de la actividad 1.

3. Un automóvil hizo un viaje en cuatro etapas. En la primera, recorrió 100 km en una hora y media. En la segunda etapa, 150 km en 2 horas. En la tercera, recorrió 200 km en 1 hora 40 minutos, y en la cuarta etapa, hizo 70 km en tres cuartos de hora. ¿Cuál fue su velocidad media durante todo el viaje? ¿Y durante los primeros dos tramos?

____

____

____

____

4. Consideren la función $d(t) = 2t^2 + 14t$, que relaciona la distancia en kilómetros a un cierto lugar de un móvil (d) con el tiempo de marcha (t) medido en horas, y hallen las siguientes velocidades medias:

a. $Vm_{1;\,2} =$ ____________________

b. $Vm_{1;\,1,5} =$ ____________________

c. $Vm_{1;\,1,3} =$ ____________________

d. $Vm_{1;\,1,2} =$ ____________________

e. $Vm_{1;\,1,15} =$ ____________________

f. $Vm_{1;\,b} =$ ________________ (con b > 1)

Problema 2

Para responder a la pregunta, necesitamos conocer la velocidad de la camioneta en el instante en que pasó por el lugar donde está el dispositivo. Para ello, primero debemos calcular en qué momento la camioneta se encontraba a 144 km del pueblo desde el que partió. Es decir, tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$144 = 35t + \frac{1}{4}t^2$, o sea, $0 = \frac{1}{4}t^2 + 35t - 144$

Al aplicar la fórmula resolvente, obtenemos que $t = 4$ o $t = -144$. Pero como **t** debe ser positivo, solamente consideramos $t = 4$. Luego, para determinar cuál era la velocidad de la camioneta a las 4 horas de viaje, debemos hallar qué marcaba el velocímetro de la camioneta en ese momento. Para ello, calculamos las velocidades medias en intervalos de tiempo que incluyan a 4 y que sean cada vez más pequeños. Por ejemplo, resulta que

$$Vm_{4;\,5} = \frac{181,25 - 144}{5 - 4} = 37,25,\ Vm_{4;\,4,5} = \frac{162,5625 - 144}{4,5 - 4} = 37,125,$$

$$Vm_{4;\,4,1} = \frac{147,7025 - 144}{4,1 - 4} = 37,025.$$ Luego, en el intervalo de tiempo **4; b**, con b > 4, la velocidad media es

$$Vm_{4;\,b} = \frac{d(b) - d(4)}{b - 4} = \frac{35b + \frac{1}{4}b^2 - 144}{b - 4}$$

Como queremos determinar la velocidad sólo en 4, hallamos el límite de la velocidad media entre 4 y **b** cuando **b** tiende a 4 por derecha.

$$\lim_{b \to 4^+} \frac{35b + \frac{1}{4}b^2 - 144}{b - 4} = \lim_{b \to 4^+} \frac{\frac{1}{4}\cancel{(b - 4)}(b + 144)}{\cancel{b - 4}} = 37$$

Si hubiésemos calculado la velocidad medida en el intervalo de tiempo **4; b**, con b < 4, resultaría que

$$Vm_{4;\,b} = \frac{d(4) - d(b)}{4 - b} = \frac{-[-d(4) + d(b)]}{-(-4 + b)} = \frac{d(b) - d(4)}{b - 4}$$ y, entonces,

obtendríamos el mismo valor que en el caso de b > 4.

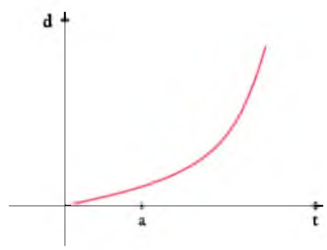
Por lo tanto, cuando la camioneta estaba a 144 kilómetros del pueblo, a las 4 horas de salir, su velocidad era de 37 km/h. Entonces, no le corresponde una multa, pues no superó los 40 km/h. La velocidad de 37 km/h es la **velocidad instantánea** de la camioneta en t = 4.

Velocidad instantánea

Llamamos **velocidad instantánea en el momento a** y lo denotamos **Vi(a)** al valor del límite de la velocidad media en el intervalo de tiempo **a; b** cuando **b** tiende a **a**. Simbólicamente escribimos **Vi(a)** $= \lim\limits_{b \to a} \dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$.

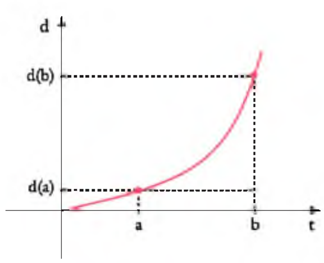
Problema 3

El siguiente gráfico representa la distancia (d) de un auto, que transita por una ruta recta, a la ciudad desde donde salió, en función del tiempo (t).
Hallen la velocidad instantánea del auto en el momento **a**.



Problema 3

En este problema, debemos utilizar un razonamiento similar al empleado en el problema 2. La diferencia con ese problema es que en el problema 3 no conocemos la fórmula de la función que vincula la distancia a la ciudad al tiempo, sino el gráfico de esa función.
Sabemos que la velocidad media en un intervalo de tiempo es el cociente entre la variación entre las distancias al punto de partida y la variación del tiempo empleado. Pero ¿cómo interpretamos ese cociente en el gráfico anterior?
Consideremos en dicho gráfico un intervalo de tiempo **a; b** cualquiera.



Entonces, la velocidad media del auto en el intervalo de tiempo **a; b** es $Vm_{a;b} = \dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$.

5. La distancia al suelo de un proyectil que fue lanzado verticalmente está dada por la función $a(t) = -5t^2 + 100t$, donde t es el tiempo medido en segundos y **a** es la altura que alcanza el proyectil, medida en metros.
Calculen la velocidad del proyectil cuando está por primera vez a 375 metros de altura.

____

____

____

____

____

____

____

____

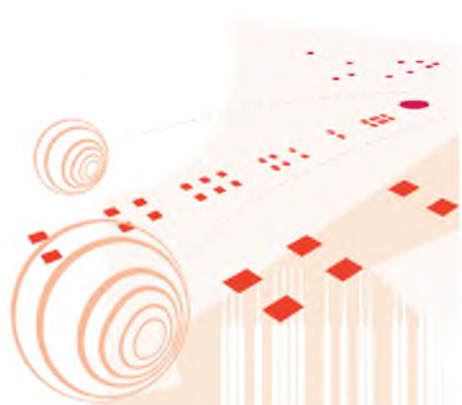
6. A partir de la función $d(t) = -t^2 + 20t$, que vincula la distancia en kilómetros de un móvil a un punto determinado (d) al tiempo de marcha (t) expresado en horas, obtengan las siguientes velocidades:

a. $Vm_{1;3}$ = ______________________

b. Vi (1) = ______________________

c. Vi (3) = ______________________

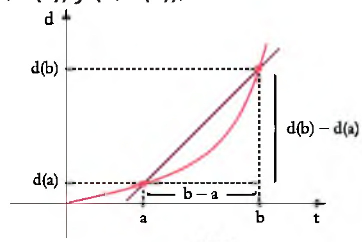
d. Vi (1,5) = ______________________



¿Sabían que...?
Gottfried Leibniz nació el 1 de julio de 1646, en Leipzig, Alemania.
Su padre, que era profesor de Filosofía, falleció cuando él tenía seis años y fue criado por su madre.
A los catorce años, ingresó en la Universidad de Leipzig. Aunque en nuestra época esto nos resulte muy extraño, en aquel momento no era el único alumno de esa edad que asistía a la universidad.
En la Universidad de Leipzig, estudió Filosofía y Matemática, y se graduó en leyes. Como en esta casa de estudios le fue negada la posibilidad de doctorarse en Derecho, lo hizo en la Universidad de Altdorf, en 1667.
Leibniz se interesó también en estudiar otros campos de las ciencias y, en 1671, publicó un libro de física.
En 1672, viajó a París. Allí profundizó sus estudios de Matemática y física y desarrolló el cálculo diferencial e integral.
Newton le escribió una carta en la cual le comentaba algunos de sus resultados, pero no le describía sus métodos. A partir de aquí, Leibniz tomó conciencia de que debía publicar sus descubrimientos. En octubre de 1676, Newton le escribió una segunda carta en la cual, con diplomacia, daba a entender que suponía que Leibniz le había copiado sus conceptos.
En 1736, Newton publicó su libro y fue entonces cuando empezó la disputa entre ellos sobre quién había sido el creador de los nuevos conceptos del cálculo.

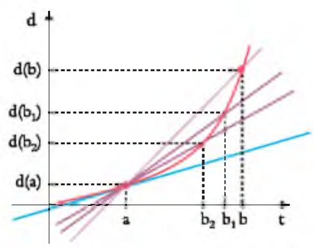
¿Cómo se lee...?
f'(a): f "prima" en a o derivada de f(x) en **a**.

Si en el último gráfico trazamos la recta determinada por los puntos (a; d(a)) y (b; d(b)), obtenemos el siguiente gráfico:



Por lo tanto, la expresión $\dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos (a; d(a)) y (b; d(b)).[1]

Luego, para hallar la velocidad instantánea en **a**, debemos calcular el valor del límite de $\dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$ cuando **b** tiende a **a**. Para ello, dibujemos las distintas rectas que pasan por (a; f(a)) y que quedan determinadas para diferentes valores de **b** a medida que **b** se aproxima cada vez más a **a**.



En el límite, obtenemos una recta que pasa por el punto (a; d(a)) y cuya pendiente es el valor del límite de $\dfrac{d(b) - d(a)}{b - a}$ cuando **b** tiende a **a**. Esta recta recibe el nombre de **recta tangente** al gráfico de la función en el punto (a; d(**a**)).

La pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto (a; d(a)) se llama **derivada de la función en el valor a**.

Derivada de una función en un valor

Llamamos **derivada de la función f(x) en el valor a** y lo denotamos **f'(a)** al valor de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Es decir que $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, siempre que este límite sea un número real.

[1] Ver Libro 1, página 41.

Si consideramos $x - a = h$, obtenemos que $x = a + h$, con lo cual cuando **x** tiende a **a**, entonces, **h** tiende a 0. Luego, resulta que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1) \Rightarrow f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

La expresión $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se llama **cociente incremental**.

Para calcular la derivada de una función en un valor es, a veces, más práctico usar la expresión **(2)** que la **(1)**.

Recta tangente al gráfico de una función en un punto

Llamamos **recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (a; f(a))** a la recta que pasa por ese punto y cuya pendiente es f'(a).

Problema 4

Encuentren la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^2 + 3x$ en $a = 7$, o sea, en el punto de abscisa 7.

Problema 4

Para hallar la ecuación de una recta, necesitamos, por ejemplo, la pendiente de dicha recta y uno de sus puntos.
Si $a = 7$, entonces, $f(a) = f(7) = 7^2 + 3 \cdot 7 = 70$. Luego, la recta que buscamos pasa por el punto (7; 70).
Como la pendiente de la recta tangente es la derivada de f(x) en $a = 7$, debemos obtener el valor del límite del cociente incremental cuando **h** tiende a cero, con lo cual en primer lugar tenemos que hallar f(a+h), o sea, f(7+h). Para ello, reemplazamos en f(x) a **x** por 7 + h.

Como $f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow f(7+h) = (7+h)^2 + 3(7+h)$. Luego, resulta

que $f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(7+h)^2 + 3(7+h)] - 70}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{49 + 14h + h^2 + 21 + 3h - 70}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{17h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(17 + h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0}(17 + h) = 17$$

Entonces, la pendiente de la recta tangente es 17.

¿Sabían que...?
Isaac Newton nació el 4 de enero de 1643 en Inglaterra. Su padre, que era granjero, falleció unos meses antes de su nacimiento.
En 1661, Newton ingresó en el Trinity College de Cambridge. Se interesó por la Matemática cuando al intentar leer un libro de astronomía no entendió los conceptos matemáticos que incluía.
En 1665, se cerró la Universidad de Cambridge durante una epidemia.
Éste fue el período en el que Newton desarrolló sus avances en Matemática, óptica, física y astronomía.
Cuando en 1667 se reabrió la universidad, Newton obtuvo su primer cargo. Trabajó allí hasta 1696, cuando se mudó a Londres. En esta ciudad tuvo diferentes cargos; por ejemplo, el de presidente de la Royal Society, para el cual fue reelegido desde 1699 hasta su muerte.
En 1671, escribió *De Methodis Serierum et Fluxionum*, donde desarrolló el concepto de fluxión (derivada), que se publicó en 1736.
Falleció en Londres en 1727.

Recordemos que...

- $(a+b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$

Si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, obtenemos lo siguiente:
$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$
Luego, sumamos y resulta que
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

7. Calculen la derivada de estas funciones en el valor de a indicado.

a. $f(x) = 3x + 2$ en $a = 2$

b. $g(x) = 2x^3$ en $a = 1$

c. $h(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$

8. Escriban la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = 4x^2 + 3$ en $a = 5$.

9. Completen las siguientes afirmaciones para que resulten verdaderas. Justifiquen sus respuestas.

a. Si la recta tangente al gráfico de $g(x) = x^2 + 3x + 2$ en el punto $(a; g(a))$ es paralela al eje **y**, entonces, es a = _____

b. Si la recta tangente al gráfico de $h(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto $(a; h(a))$, con $a < 0$, es perpendicular a la recta $y = 9x + 3$, entonces, es a = _____

Por lo tanto, debemos encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 17 y pasa por el punto (7; 70). Recordemos que la ecuación de una recta con pendiente **m** y ordenada al origen **b** es $y = mx + b$. Luego, si $y = mx + b \Rightarrow 70 = 17 \cdot 7 + b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = -49$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es $y = 17x - 49$.

Función derivable en un valor

Una función **f(x) es derivable en un valor a** si $f'(a)$ es un número real.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es derivable en $a = 3$, pues

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = 6,$$ con lo cual $f'(3)$ es un número real.

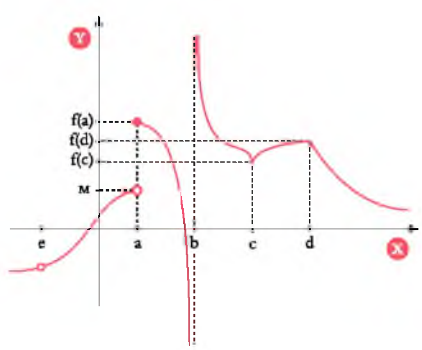
En cambio, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $a = 0$, porque

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h},$$ y como

$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$ y $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$, entonces, $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe y, en consecuencia, $f'(0)$ no existe.

Problema 5

El siguiente gráfico corresponde a la función f(x). A partir de él, determinen si existe la derivada de f(x) en los valores **a**, **b**, **c**, **d** y **e**.



Problema 5

Para hallar f'(a), debemos obtener el valor del límite del cociente incremental (página 17) cuando **h** tiende a cero. Pero en el gráfico observamos que en **a** la función es discontinua. Por lo tanto, debemos considerar los límites laterales del cociente incremental.

Luego, resulta que $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{M-f(a)}{h}$.

Como el numerador del cociente incremental tiende a $M - f(a)$, que es un número distinto de 0, y el denominador tiende a 0, entonces, obtenemos lo siguiente:

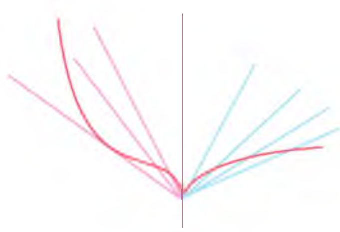
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$$

Por lo tanto, independientemente del resultado del otro límite lateral, podemos afirmar que f'(a) no es un número real, con lo cual f'(a) no existe. Esto ocurre en cualquier discontinuidad de primera especie con salto finito.

Analicemos qué sucede para el valor **b**.

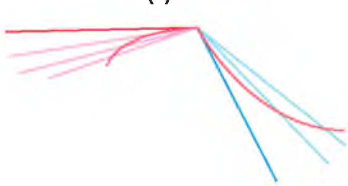
Como la recta **x** = b es asíntota vertical de f(x), entonces, **b** no pertenece al dominio de f(x). Luego, f(b) no existe. Por lo tanto, no es posible calcular la derivada de f(x) en **b**; es decir que f'(b) no existe.

Para determinar si existe la derivada de f(x) en **c**, tracemos por (c; f(c)) las rectas que se aproximan a la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c; f(c)):



Observamos que tanto las rectas de color rosa como las de color celeste se aproximan cada vez más a una recta vertical. Ésta es la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c; f(c)). Pero como las rectas verticales no tienen pendiente, entonces, f'(c) no existe.

Analicemos qué sucede para el valor **d** haciendo un razonamiento similar al realizado para el valor **c**, es decir, tracemos por (d; f(d)) el mismo tipo de rectas que dibujamos para determinar la existencia de f'(c)



Recordemos que...

Una función f(x) es continua en **a** si se cumplen las siguientes condiciones:

I. Existe f(a)

II. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}$

III. $L = f(a)$

Las discontinuidades se clasifican de la siguiente manera:

- Evitable si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tiene distinto valor que f(a).
- Esencial de primera especie con salto finito si los límites laterales $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ tienen valores distintos.
- Esencial de primera especie con salto infinito si por lo menos uno de los límites laterales, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ o ambos, es infinito.
- Esencial de segunda especie si no existe alguno de los límites laterales, o sea, si no existe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ o no existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

10. Analicen si cada una de las siguientes funciones es derivable en el valor de **a** que se indica. Justifiquen sus respuestas.

a. $f(x) = x^3 + 2$ en $a = 1$

____

____

b. $g(x) = \frac{1}{x+1}$ en $a = -1$

____

____

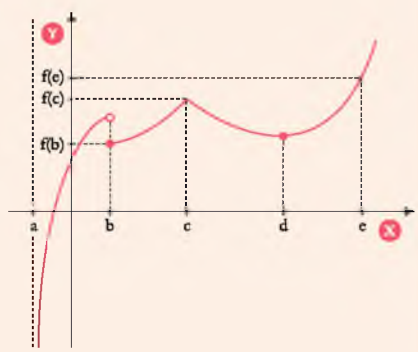
11. Determinen si las funciones que figuran a continuación son derivables en el valor de a indicado. Justifiquen sus respuestas.

a. $f(x) = |x|$ en $a = -2$

b. $f(x) = |x + 2|$ en $a = 5$

c. $f(x) = |x + 2|$ en $a = -3$

12. Observen el siguiente gráfico, correspondiente a f(x), y analicen si existe la derivada de f(x) en los valores **a**, **b**, **c**, d y e.



Al trazar las rectas que pasan por el punto (d; f(d)) y se aproximan a la recta tangente, observamos que por izquierda y por derecha obtenemos dos rectas (una de color rojo y la otra de color azul) que tienen distinta pendiente. Entonces, los límites laterales del cociente incremental cuando **h** tiende a cero son diferentes. Por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando **h** tiende a cero no existe y, en consecuencia, f'(d) no existe.
A los puntos que poseen las características de (c; f(c)) y (d; f(d)) se los llama **puntos angulosos**.
En el caso del valor **e**, no existe f(e), ya que no está definida, con lo cual tampoco existe f'(e).

Conclusión
No existe la derivada de una función en los valores donde la función no es continua, tiene puntos angulosos o la recta tangente es vertical.

Supongamos que una función f(x) es derivable en un valor a. ¿Será continua en dicho valor? Analicemos esta cuestión.

Si f(x) es derivable en a, entonces, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es un número real.

Como **x** tiende a **a**, entonces, $x - a$ tiende a 0. Si $f(x) - f(a)$ no tendiera a 0, el límite sería infinito y la función no sería derivable en **a**. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ es continua en **a**.

Conclusión
Si una función es derivable en un valor a**, entonces, es continua en ese valor. Por lo tanto, si una función no es continua en un valor** a**, entonces, no es derivable en ese valor.**

En cambio, si sabemos que una función es continua en un valor **a**, no podemos afirmar si es o no derivable en dicho valor. Por ejemplo, en la página 18 analizamos la función $f(x) = |x|$, que es continua en cualquier valor de su dominio, o sea, en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en 0 a pesar de que $0 \in \mathbb{R}$.
Hasta aquí, calculamos la derivada de una función en un valor. Es posible, también, hallar la derivada de una función en cada uno de los valores donde dicha función está definida, obteniendo una nueva función que calcula la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función dada en cada uno de sus puntos. Esa nueva función se llama **función derivada**.

Función derivada

Llamamos **función derivada de f(x)**, y lo denotamos **f'(x)**, a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, siempre que este límite exista y no sea infinito. Es decir que **f'(x)** = $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

El dominio de f'(x) está formado por todos los valores del dominio de f(x) para los cuales existe f'(x). Por lo tanto, el dominio de f'(x) está incluido o es igual al dominio de f(x). O sea que **Dom f'** $\subseteq$ **Dom** f.

Problema 6

Para la función f(x), hallen el dominio, la función derivada y el dominio de ésta, en cada uno de los siguientes casos:

a. $f(x) = mx + b$ **b.** $f(x) = x^3$ **c.** $f(x) = \sqrt{x}$

d. $f(x) = \ln x$ **e.** $f(x) = \operatorname{sen} x$ **f.** $f(x) = \frac{1}{x}$

Problema 6

a. El dominio de $f(x) = mx + b$ es Dom f = $\mathbb{R}$.
Como $f(x) = mx + b$, entonces, $f(x + h) = m(x + h) + b$.

Luego, resulta que $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + b - (mx + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{mx} + mh + \cancel{b} - \cancel{mx} - \cancel{b}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m\cancel{h}}{\cancel{h}} = m$$

Por lo tanto, $f'(x) = m$ para cualquier número real **x**, pues Dom f' = $\mathbb{R}$.
Hemos demostrado que si $f(x) = mx + b$, entonces, $f'(x) = m$.
Luego, si $m = 0$, entonces, $f(x) = b$ y $f'(x) = 0$. Por lo tanto, Dom f = Dom f'= $\mathbb{R}$.

Algo más...
Existen diferentes notaciones para indicar la función derivada de una función. Si consideramos f(x) = y, la función derivada de f(x) se puede escribir simbólicamente de cualquiera de las siguientes maneras:

$f'(x)$, y', $D(f(x))$, Dy, $\frac{dy}{dx}$ o $D_x y$.

¿Cómo se lee...?
$\subseteq$: está incluido o es igual a.

13. Indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifiquen sus respuestas.

a. La función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ no es derivable en 3 porque no es continua en ese valor.

____

b. La función $g(x) = |x + 2|$ es derivable en -2 porque es continua en dicho valor.

____

c. La función $h(x) = \frac{1}{x+5}$ es derivable en cada valor de su dominio, o sea, en todo su dominio.

____

Recordemos que...

- $(a + b)^3 = (a + b)^2 . (a + b) =$

$= (a^2 + 2ab + b^2) . (a + b)$

Si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, obtenemos lo siguiente:

$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$

Luego sumamos y resulta que

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- $(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2$, con lo cual $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

b. Para $f(x) = x^3$ el dominio es Dom f = ℝ.

Luego, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} = 3x^2$

Entonces, $f'(x) = 3x^2$; en consecuencia, Dom f'= ℝ.

c. El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es Dom f = $[0; +\infty)$.

Luego, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$. Pero este límite está indeterminado. Para salvar la indeterminación, multiplicamos y dividimos el cociente incremental por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$. Entonces,

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\cancel{\sqrt{\ }}x+h)^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{\ }}x)^{\cancel{2}}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Por lo tanto,

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y Dom f'= $(0; +\infty)$. En este caso, el dominio de f'(x) no coincide con el dominio de f(x) porque $0 \in$ Dom f, pero $0 \notin$ Dom f'.

Recordemos que...

Algunas de las propiedades del logaritmo son las siguientes:

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b . c)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$
- $c \log_a b = \log_a (b^c)$

d. Para $f(x) = \ln x$ el dominio es Dom f = $(0; +\infty)$.

Luego, resulta que $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} . \ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

Como la función logarítmica es continua en todo su dominio, entonces, se cumple que $\lim\limits_{h \to 0} \ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left[\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]$.

Recordemos que...

El número neperiano **e** se puede definir de la siguiente manera:

$e = \lim\limits_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$

Pero este límite está indeterminado. Sin embargo, por la definición del número **e** sabemos que $e = \lim\limits_{h \to 0}\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$. Entonces,

$\ln\left[\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln\left[\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{x}{x} + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln\left[\lim\limits_{h \to 0}\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}}\right] =$

$= \ln\left[\lim\limits_{h \to 0}\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} . \ln e = \dfrac{1}{x} . 1 = \dfrac{1}{x}$

Por lo tanto, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

El dominio de la función $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$. Sin embargo, como Dom f = (0; +∞), entonces, debe ser Dom f' = (0; +∞), pues siempre el dominio de f'(x) está incluido o es igual al dominio de f(x).

e. El dominio de la función f(x) = sen x es Dom f = $\mathbb{R}$. Luego,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \underset{\downarrow}{=} \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} =$$

por la propiedad $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \underset{\downarrow}{=} 1 \cdot \cos x = \cos x.$$ Por lo tanto,

como $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

f'(x) = cos x y Dom f' = $\mathbb{R}$.

Utilizando un razonamiento similar al empleado en el ítem **e.**, si f(x) = cos x, resulta que f'(x) = – sen x, y Dom f = Dom f' = $\mathbb{R}$.

f. Para la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es Dom f = $\mathbb{R}-\{0\}$. Luego,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x-(x+h)}{(x+h)xh} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{(x+h)xh} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{(x+h)x\cancel{h}} = -\frac{1}{x^2}.$$ Por lo tanto, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ y Dom f' = $\mathbb{R}-\{0\}$.

Después de haber resuelto el problema 6, podemos darnos una idea del trabajo que implica calcular el límite del cociente incremental cuando **h** tiende a cero cada vez que es necesario hallar la función derivada. Por este motivo, los matemáticos desarrollaron fórmulas que permiten facilitar los cálculos.

Propiedades de las funciones derivables

▮ **Si las funciones f(x) y g(x) son derivables en el valor** a**, entonces, (f + g)(x) es derivable en el valor** a **y, además, se verifica que (f + g)' (a) = f'(a) + g'(a).**

Recordemos que...

sen (a + b) = sen a cos b + cos a sen b y
sen (a – b) = sen a cos b – cos a sen b.

Al sumar miembro a miembro estas dos igualdades obtenemos lo siguiente:

sen (a + b) + sen (a – b) = 2 sen a cos b (1)

Consideremos a + b = p (2) y a – b = q (3).

Si sumamos miembro a miembro las expresiones (2) y (3), resulta que 2a = p + q. Entonces, $a = \frac{p+q}{2}$ (4).

Si restamos miembro a miembro las expresiones (2) y (3) obtenemos 2b = p – q. Entonces, $b = \frac{p-q}{2}$ (5).

Reemplazando en (1) a a + b, a – b, a y b utilizando las expresiones (2), (3), (4) y (5), respectivamente, resulta que

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

De igual forma podemos demostrar que

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$ y

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

14. Hallen la función derivada de cada una de estas funciones utilizando las propiedades de las funciones derivables y las funciones derivadas obtenidas en el problema 6.

a. $f(x) = \frac{1}{x} - \text{sen } x$

b. $g(x) = \ln x + x^3$

c. $h(x) = \text{sen } x - \sqrt{x}$

Para demostrar esta propiedad, utilizamos la expresión **(2)** de la página 17.

Luego, $(f+g)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$

Como **a** puede ser cualquier número real, entonces, podemos afirmar que **$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$**.

▮ Si las funciones f(x) y g(x) son derivables en el valor a, **entonces, (f – g)(x) es derivable en el valor** a **y, además, se verifica que (f – g)' (a) = f '(a) – g'(a).**
Esta propiedad la podemos demostrar utilizando un razonamiento similar al empleado para demostrar la primera propiedad. Luego, como **a** puede ser un número real cualquiera, resulta que **$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$**.

Utilicemos la propiedad anterior en el siguiente ejemplo: si $f(x) = x^3 - \text{sen } x$, entonces, de acuerdo con los resultados obtenidos en el problema 6, es $f'(x) = 3x^2 - \cos x$.

▮ Si g(x), que no es una función constante, es una función derivable en el valor a **y f(x) es una función derivable en el valor g(a), entonces, la función (fog)(x) es derivable en el valor** a **y, además, se verifica que (fog)' (a) = f '[g(a)] . g'(a).**
Esta propiedad recibe el nombre de **regla de la cadena**.

Demostremos esta propiedad.
Sabemos que si el conjunto imagen de g(x) está incluido en el dominio de f(x) o es igual a él, entonces, es posible hallar la función compuesta de g(x) con f(x), o sea, (fog)(x).

Además, como f(x) es derivable en g(a) y g(x) es derivable en **a**,

entonces, resulta que $f'[g(a)] = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(a)+h) - f(g(a))}{h}$ **(1)** y

$g'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ **(2)**. Luego,

$(fog)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(fog)(a+h) - (fog)(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}$ **(3)**

Recordemos que...
La **función compuesta** de g(x) con f(x) es la función (f o g)(x) = f[g(x)].

Es decir que a un elemento del dominio de g(x)

$x \xrightarrow[\text{le aplicamos g y obtenemos}]{} g(x) \xrightarrow[\text{le aplicamos f y obtenemos}]{} f[g(x)]$

No siempre es posible componer dos funciones. Para que sea posible, los elementos del conjunto imagen de la primera función que se aplica deben pertenecer al dominio de la segunda función.

Para poder utilizar las expresiones **(1)** y **(2)** en la **(3)**, multiplicamos y dividimos el cociente incremental de la expresión **(3)** por g(a + h) – g(a). Entonces, obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)-g(a)}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \quad \textbf{(4)}$$

Si consideramos g(a+h) – g(a) = t, entonces, g(a + h) = g(a) + t, con lo cual $t \to 0$, cuando $h \to 0$. Luego, la expresión **(4)** es igual a

$$\left[\lim_{t\to 0}\frac{f(g(a)+t)-f(g(a))}{t}\right].\,g'(a) \quad \textbf{(5)}$$

Si comparamos

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(g(a)+t)-f(g(a))}{t} \text{ con } \lim_{h\to 0}\frac{f(g(a)+h)-f(g(a))}{h}$$

deducimos que ambas expresiones son equivalentes y, por lo tanto, iguales a f'[g(a)]. Entonces, la expresión **(5)** resulta igual a f'[g(a)] . g'(a).
Luego, como **a** puede ser cualquier número real, podemos afirmar que **(fog)'(x) = f'[g(x)] . g'(x)**.

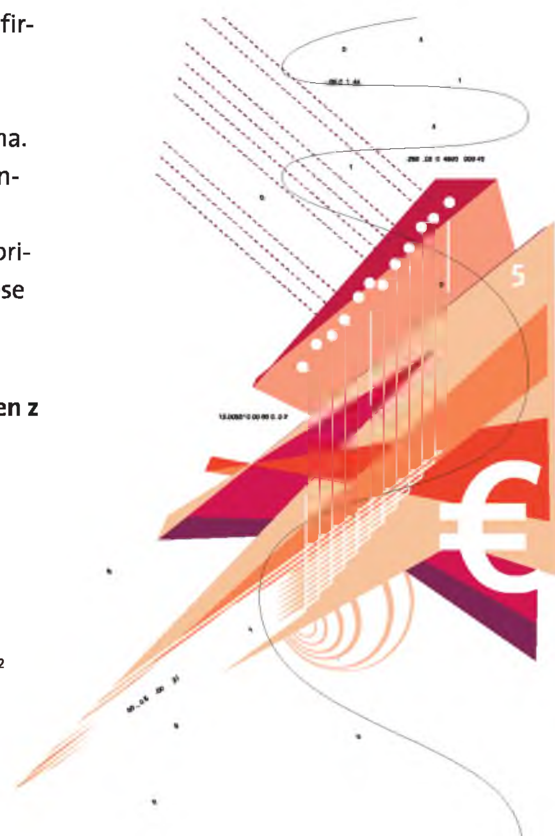
Veamos un ejemplo en el que aplicamos la regla de la cadena. Consideremos la función m(x) = sen (x^3) y busquemos su función derivada, o sea, m'(x).
Notemos que, dado un valor **x** cualquiera, para hallar m(x) primero debemos elevar **x** al cubo y luego calcular el seno de ese resultado. Observemos esto en el siguiente esquema:

$$\mathbf{x} \xrightarrow[\text{lo elevamos al cubo y obtenemos}]{} \mathbf{x^3} \xrightarrow[\text{hallamos el seno de z y obtenemos}]{\text{lo llamamos z}} \mathbf{sen\ z}$$

La función m(x) es la función compuesta de g(x) = x^3 y f(z) = sen z. Es decir que m(x) = f[g(x)] = (fog)(x).
Luego, como g'(x) = $3x^2$ y f '(z) = cos z, entonces,
m'(x) = (fog)'(x) = f'[g(x)] . g'(x) = cos(g(x)) . $3x^2$ = cos(x^3) . $3x^2$

Algo más...
El concepto de derivada resulta también una herramienta útil en economía.
Si y = c(x) es la función que relaciona el costo total **y** con la cantidad **x** de mercadería producida y comercializada, se define como **costo marginal** la función derivada de c(x).
La nueva función c'(x) permite analizar cómo varía el costo ante un pequeño incremento de la cantidad producida.

Por ejemplo, si una empresa determina que la función que vincula la cantidad de unidades fabricadas (x) al costo total (c) es c(x) = x^3 + 500, entonces, el costo marginal será c'(x) = $3x^2$.



15. Obtengan la función derivada de las siguientes funciones utilizando la regla de la cadena y las funciones derivadas halladas en el problema 6.

a. $a(x) = (3x + 2)^3$

b. $b(x) = \ln(2x - 3)$

c. $c(x) = \cos^3 x$

d. $d(x) = \cos(x^3)$

e. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$

g. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2x + 3}\right)^3$

Si las funciones f(x) y g(x) son derivables en el valor a**, entonces, (f . g) (x) es derivable en el valor** a **y, además, se verifica que (f . g)'(a) = f '(a) . g(a) + f(a) . g'(a).**

Demostremos esta propiedad.
Como f(x) y g(x) son derivables en **a**, entonces,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \textbf{(1)} \text{ y } g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{Luego, } (f \,.\, g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \,.\, g)(a + h) - (f \,.\, g)(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) \,.\, g(a + h) - f(a) \,.\, g(a)}{h}$$

Si en este límite sumamos y restamos f(a + h) . g(a) en el numerador del cociente incremental, entonces, resulta que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) \,.\, g(a + h) - f(a + h) \,.\, g(a) + f(a + h) \,.\, g(a) - f(a) \,.\, g(a)}{h}$$

Si en el numerador de este último límite sacamos factor común f(a + h) y g(a), obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) \,.\, [g(a + h) - g(a)] + g(a) \,.\, [f(a + h) - f(a)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(a + h) \,.\, \frac{g(a + h) - g(a)}{h} + g(a) \,.\, \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(a + h) \,.\, \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[g(a) \,.\, \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(a + h) \,.\, \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} + \lim_{h \to 0} g(a) \,.\, \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \textbf{(3)}$$

Como f(x) y g(x) son derivables en **a**, entonces, son continuas en **a**. Con lo cual, $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$ **(4)** y $\lim_{h \to 0} g(a) = g(a)$ **(5)**.

Luego, considerando las expresiones **(1)**, **(2)**, **(4)** y **(5)**, la expresión **(3)** es igual a f(a) . g'(a) + g(a) . f '(a).

Luego, como **a** puede ser un número real cualquiera, resulta que **(f . g)' (x) = f '(x) . g(x) + f(x) . g'(x)**.

Por ejemplo, la función derivada de $h(x) = \text{sen } x \,.\, (x^3 + 3)$ es
$h'(x) = (\text{sen } x)' \,.\, (x^3 + 3) + \text{sen } x \,.\, (x^3 + 3)' =$
$= \cos x \,.\, (x^3 + 3) + \text{sen } x \,.\, (3x^2+0)$

Observemos que si en (f . g)(x) es f(x) = k, con $k \in \mathbb{R}$, y g(x) es cualquier función, como f '(x) = 0, resulta que
$(f \,.\, g)'(x) = (f(x) \,.\, g(x))' = (k \,.\, g(x))' = 0 \,.\, g(x) + k \,.\, g'(x) = k \,.\, g'(x)$

Si las funciones f(x) y g(x) son derivables en cualquier valor de sus respectivos dominios y g(x) ≠ 0 para cualquier valor de x perteneciente al dominio de g(x), entonces, se verifica que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Para demostrar esta propiedad, expresamos la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ de otra manera: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, con lo cual obtenemos un producto entre dos funciones y, entonces, podemos utilizar la propiedad anterior para hallar $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$.

Determinemos la función derivada de $\frac{1}{g(x)}$, a la cual llamaremos $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$. Como $\frac{1}{g(x)}$ es una función compuesta, podemos hacer el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{le aplicamos } g \text{ y obtenemos}"'] & g(x) \arrow[r, "\text{lo llamamos } z", "\text{le aplicamos } \frac{1}{g(x)} \text{ y obtenemos}"'] \arrow[d, "\text{Hallamos la función derivada y obtenemos}"'] & \frac{1}{z} \arrow[d, "\text{Hallamos la función derivada y obtenemos}"'] \\
& g'(x) & -\frac{1}{z^2}
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, resulta que $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Luego, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Derivada logarítmica

En muchas ocasiones, para hallar funciones derivadas, es útil usar la regla de la cadena en (fog)(x) siendo f(x) = ln x.

Veamos un ejemplo. Hallemos la función derivada de $m(x) = 3^{\text{sen}\,x}$ **(1)**. Para ello, apliquemos logaritmo natural a ambos miembros de **(1)**: $\ln[m(x)] = \ln(3^{\text{sen}\,x})$. Entonces, utilizando una de las propiedades del logaritmo, resulta que $\ln[m(x)] = \text{sen}\,x \cdot \ln 3$ **(2)**

Debemos obtener la función derivada de cada miembro de la expresión **(2)**.

Como ln[m(x)] es una función compuesta, entonces, para hallar su función derivada utilizamos la regla de la cadena. Luego, la función derivada del primer miembro de la igualdad **(2)** es

$(\ln[m(x)])' = \frac{1}{m(x)} \cdot m'(x)$ **(3)**

16. Determinen la función derivada de estas funciones usando las propiedades de las funciones derivables y las funciones derivadas obtenidas en el problema 6.

a. $h(x) = \text{sen}\,x \cdot \ln x$

b. $i(x) = (x^3 + 5x) \cdot \text{sen}\,x$

c. $j(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x}$

d. $k(x) = \frac{\ln x}{x}$

e. $l(x) = \frac{\text{sen}\,x}{x^3 + 5x}$

f. $m(x) = \frac{\ln x}{\text{sen}\,2x}$

17. Demuestren estas afirmaciones usando la definición de función derivada.

a. Si $f(x) = x$, entonces, $f'(x) = 1$.

b. Si $f(x) = \cos x$, entonces, $f'(x) = -\text{sen } x$.

18. Demuestren la siguiente afirmación utilizando que $a^x = e^{(\ln a) \cdot x}$.
Si $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, $f'(x) = a^x \ln a$.

La función derivada del segundo miembro de la expresión (2) es $(\ln 3 \,.\, \text{sen } x)' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{como ln 3 es un número real}}}{=} \ln 3 \,.\, (\text{sen } x)' = \ln 3 \,.\, \cos x$ (4).

En virtud de la igualdad (2) y de las expresiones (3) y (4), concluimos lo siguiente:

$$\frac{1}{m(x)} \,.\, m'(x) = \ln 3 \,.\, \cos x \Rightarrow m'(x) = m(x) \,.\, \ln 3 \,.\, \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m'(x) = 3^{\text{sen } x} \,.\, \ln 3 \,.\, \cos x$$

El método que utilizamos para hallar $m'(x)$ se llama **derivada logarítmica**.

Funciones derivadas de funciones elementales

- **Si $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces, $f'(x) = 0$.**
- **Si $f(x) = x$, entonces, $f'(x) = 1$.**
- **Si $f(x) = \ln x$, entonces, $f'(x) = \frac{1}{x}$.**
- **Si $f(x) = \cos x$, entonces, $f'(x) = -\text{sen } x$.**
- **Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces, $f'(x) = \cos x$.**
- **Si $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$, entonces, $f'(x) = n \,.\, x^{n-1}$.**

Demostremos esta última afirmación para $x > 0$ utilizando la derivada logarítmica.
Si $f(x) = x^n \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln x^n \Rightarrow \ln[f(x)] = n \,.\, \ln x$.
Luego, obtenemos lo siguiente:

$$(\ln[f(x)])' = (n \,.\, \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \,.\, f'(x) = n \,.\, \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \,.\, n \,.\, \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^n \,.\, n \,.\, x^{-1} = n \,.\, x^{n-1}$$

La afirmación que hemos demostrado también es cierta para cualquier valor de **x** del dominio de $f(x)$.

- **Si $f(x) = e^x$, entonces, $f'(x) = e^x$.**

Para demostrar esta afirmación, utilizamos la derivada logarítmica. Luego, resulta que si $f(x) = e^x \Rightarrow \ln [f(x)] = \ln e^x \Rightarrow \Rightarrow \ln [f(x)] = x \,.\, \ln e \Rightarrow \ln [f(x)] = x$. Por lo tanto, resulta que

$$(\ln[f(x)]' = (x)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \,.\, f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) = e^x$$

- **Si $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, $f'(x) = a^x \,.\, \ln a$.**
- **Si $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, $f'(x) = \frac{1}{x \,.\, \ln a}$.**

Demostremos esta afirmación. Para ello, en la expresión de f(x) cambiamos la base **a** del logaritmo considerando como nueva base el número **e**. Luego, utilizando la fórmula para el cambio de base del logaritmo, resulta que $f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} . \ln x$.

Entonces, como $\frac{1}{\ln a}$ es un número real, $f'(x) = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' =$

$= \frac{1}{\ln a} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x . \ln a}$

Problema 7

La distancia en centímetros de un móvil a un cierto lugar está determinada por la función $d(t) = \frac{16}{t} + 4t$, donde **t** es el tiempo de marcha medido en segundos.

a. ¿Qué velocidad alcanzó el móvil a los 4 segundos de marcha?
b. ¿Cuál era la aceleración instantánea del móvil a los 10 segundos de iniciada la marcha?

Problema 7

a. Sabemos que, conociendo la función que vincula la distancia a un punto al tiempo de marcha, la velocidad instantánea del móvil a los 4 segundos se puede calcular a través de la derivada de dicha función en t = 4.

Como $d(t) = \frac{16}{t} + 4t = 16 . t^{-1} + 4 . t$, entonces, $d'(t) = -16 . t^{-2} + 4$.

Luego, el valor de d'(t) en t = 4 es el siguiente:

$d'(4) = -16 . 4^{-2} + 4 = -16 . \frac{1}{16} + 4 = 3$. Por lo tanto, a los 4 segundos de marcha la velocidad del móvil fue de $3 \frac{cm}{seg}$.

b. La aceleración media de un móvil es el cociente entre la variación de la velocidad instantánea y el tiempo transcurrido. Si el intervalo de tiempo transcurrido es cada vez más pequeño, es decir, tiende a cero, entonces, la aceleración instantánea del móvil en un instante **t** cualquiera es la siguiente:

$$a(t) = \lim_{h \to 0} \frac{Vi(t+h) - Vi(t)}{h}$$

Recordemos que...
La propiedad del logaritmo referida al cambio de base es la siguiente:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

19. Hallen la función derivada de cada una de las siguientes funciones y redúzcanla a la mínima expresión.

a. $a(x) = \frac{e^x}{x^5}$

____

____

b. $b(x) = \log_5(x^2 + 3x)$

____

____

c. $c(x) = \frac{3x + 8}{(2x + 4)^2}$

____

____

d. $d(x) = \sqrt[3]{\cos x}$

____

____

e. $e(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x + 2}}$

____

____

f. $f(x) = tg\ x$

____

____

20. Obtengan las funciones derivadas primera, segunda y tercera de cada una de las funciones que se indican a continuación. Además, calculen el dominio de cada función y el de cada función derivada sucesiva.

a. $f(x) = x^5 + 3x^4$

b. $g(x) = e^x$

c. $h(x) = \ln x$

d. $i(x) = \operatorname{sen} x$

Pero, como $Vi(t) = d'(t)$, entonces, $a(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{d'(t+h) - d'(t)}{h}$.

O sea que la aceleración instantánea es la función derivada de la función derivada de d(t). Esa nueva función derivada recibe el nombre de **función derivada segunda de d(t)** y se denota d"(t). Por lo tanto, a(t) = d"(t).

En el problema 7, como $d'(t) = -16 \cdot t^{-2} + 4$, entonces, $d''(x) = -16 \cdot (-2)t^{-2-1} + 0 = 32 \cdot t^{-3}$. Luego, cuando t = 10 resulta que $d''(10) = 32 \cdot 0{,}001 = 0{,}032$. Por lo tanto, la aceleración instantánea del móvil a los 10 segundos era de $0{,}032 \dfrac{cm}{seg^2}$.

Observen que en el problema 7, la velocidad se mide en $\dfrac{cm}{seg}$ y el tiempo está expresado en segundos. Luego, como la aceleración es el cociente entre la variación de la velocidad y la variación del tiempo, entonces, en el problema 7, la aceleración instantánea se mide en $\dfrac{\frac{cm}{seg}}{seg}$, o sea, en $\dfrac{cm}{seg^2}$.

Funciones derivadas sucesivas

En el problema anterior, necesitábamos hallar la función derivada segunda. También, de una función f(x) cualquiera se pueden calcular las funciones derivada tercera (hallando la función derivada de f"(x)), derivada cuarta (hallando la función derivada de f'"(x)) y así sucesivamente. A estas nuevas funciones se las llama **funciones derivadas sucesivas de la función f(x)**.

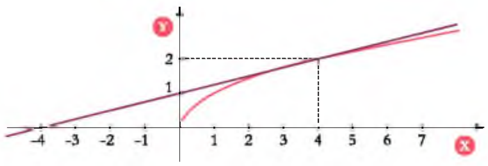
Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^4 + 8x^2 + 9$.
Algunas de las funciones derivadas sucesivas de f(x) son:
$f'(x) = 4x^3 + 16x$ (función derivada primera de f(x))
$f''(x) = 12x^2 + 16$ (función derivada segunda de f(x))
$f'''(x) = 24x$ (función derivada tercera de f(x))

Problema 8

Queremos calcular $\sqrt{4{,}1}$ y se rompió la calculadora. ¿Cómo podemos hallar un resultado aproximado de ese cálculo sabiendo que $\sqrt{4} = 2$?

Problema 8

Grafiquemos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta tangente a su gráfico en el punto cuya abscisa es 4.



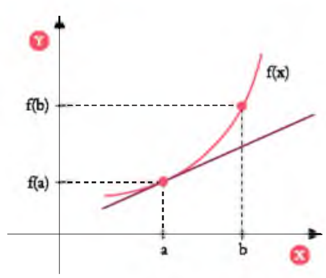
En el gráfico, observamos que en un entorno de 4 la recta tangente es una aproximación de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Es decir que para cualquier valor muy próximo a 4, su imagen a través de f(x) es aproximadamente igual a la que se obtiene por medio de la recta tangente.

Por lo tanto, para obtener un resultado aproximado de $\sqrt{4{,}1}$, debemos hallar la ecuación de dicha recta tangente. Para ello, calculemos primero su pendiente. Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, entonces, la pendiente de la recta tangente es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Luego, la ecuación de la recta tangente es $y = \frac{1}{4}x + b$, donde **b** es la ordenada al origen. Además, la recta tangente pasa por el punto (4; f(4)), es decir, por el punto (4; 2), con lo cual para x = 4 es y = 2. Luego, reemplazando estos valores en $y = \frac{1}{4}x + b$, obtenemos que $2 = \frac{1}{4} . 4 + b \Rightarrow b = 1$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Luego, si x = 4,1, entonces, su imagen a través de la recta tangente es $y = \frac{1}{4} . 4{,}1 + 1 = 2{,}025$. Este valor es una aproximación de $\sqrt{4{,}1}$. Por lo tanto, resulta que $\sqrt{4{,}1} \cong 2{,}025$.

Consideremos una función f(x) cualquiera, un valor **a**, otro valor **b** muy cercano a a, las imágenes de ambos valores a través de f(x) y la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (a; f(a)). Grafiquemos la situación.



21. Calculen un valor aproximado de sen 46°, sabiendo que sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Recuerden que 45° corresponde en radianes a $\frac{\pi}{4}$.

22. Obtengan un resultado aproximado de $\sqrt[3]{64{,}95}$ utilizando que $\sqrt[3]{64} = 4$.

23. Hallen aproximadamente el valor de ln 3 si ln e = 1.

¿Cómo se lee...?
$\cong$: es aproximadamente igual a.

24. Consideren la función

$$f(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

y determinen f'(x), f''(x) y los respectivos dominios de las tres funciones.

25. a. Demuestren que si f(x) es derivable en 0, f'(0) = 3 y $g(x) = f(x^2 - 4)$, entonces, g(x) es derivable en 2.

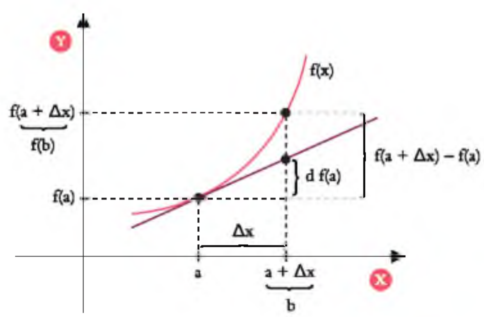
b. Hallen g'(2).

¿Cómo se lee... ?
Δ: delta.
Δx: delta de **x**.
dx: diferencial de **x**.

¿Cuál es el error cometido al calcular la imagen de **b** a través de la recta tangente al gráfico de f(x) en (a; f(a)), en lugar de calcularla a través de f(x)?
La pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (a; f(a)) es f'(a). Luego, la ecuación de la recta tangente es
y = f'(a) . (x –a) + f(a)
El error cometido al calcular la imagen de **b** a través de la recta tangente es el siguiente:

error = valor real – valor aproximado, o sea,
error = f(b) – [f'(a) . (b –a) + f(a)] **(1)**

Como **b** es un valor cercano a **a**, llamamos Δx (delta de **x**) al valor que sumado o restado a **a** da **b**. Luego, si b = a + Δx **(2)** ⇒ ⇒ b – a = Δx **(3)**. Reemplazando las expresiones **(2)** y **(3)** en la expresión **(1)** resulta que
error = f(a + Δx) – [f'(a) . Δx + f(a)] = f(a + Δx) – f(a) – f'(a) . Δx
Luego, si **b** es cada vez más próximo a a, entonces, el error cometido tiende a cero, con lo cual f(a + Δx) – f(a) es aproximadamente igual a f'(a) . Δx. O sea, f(a + Δx) – f(a) ≅ f'(a) . Δx. La expresión f'(a) . Δx se llama **diferencial de f(x) en el valor a** y se denota **df(a)**. Es decir que **df(a) = f'(a) . Δx** **(4)**.
Al realizar la interpretación geométrica de df(a), obtenemos el siguiente gráfico:



Consideremos la función f(x) = x y calculemos su diferencial en cualquier valor de **x**.
Como f'(x) = 1 para cualquier valor de **x**, entonces,
df(x) = f'(x) . Δx = 1 . Δx = Δx **(5)**. Luego, por ser f(x) = x es df(x) = dx **(6)**. De las expresiones **(5)** y **(6)** resulta que Δx = dx.
Por lo tanto, la expresión **(4)** resulta df(a) = f'(a) . dx.

Diferencial de una función en un valor

Llamamos **diferencial de la función f(x) en el valor a**, y lo denotamos **df(a)**, a f'(a) . dx. Es decir que **df(a) = f'(a) . dx**.

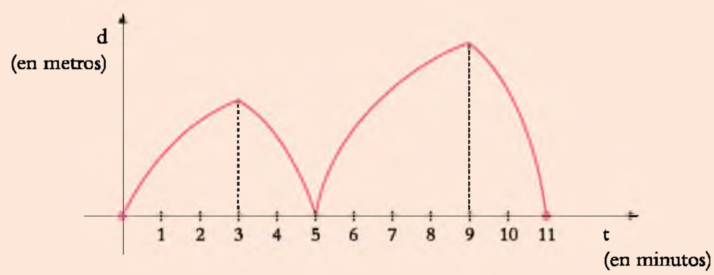
1. Consideren la función $d(t) = -t^3 + 8t^2 + 5t$ que relaciona la distancia (d) a la ciudad de San Juan de un camión, medida en metros, con el tiempo de marcha (t), medido en segundos.

a. Calculen la velocidad media entre los 2 y 3 segundos.

b. ¿Habrá algún instante en que el camión estuvo parado? ¿Cuál?

c. ¿Cuánto tiempo después de haber comenzado la marcha el camión alcanza una velocidad instantánea de $10 \frac{m}{seg}$?

2. El siguiente gráfico representa la distancia (d) a un cierto punto de una bicicleta que transita por la vereda, en función del tiempo (t).
Indiquen en qué intervalos de tiempo la velocidad instantánea es positiva, negativa o nula.



3. Propongan el gráfico de dos funciones que sean continuas en 4, pero que, por causas diferentes, no sean derivables en ese valor.

4. Dibujen el gráfico de una función f(x) que verifique las siguientes condiciones: la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto de abscisa –2 es horizontal, la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto de abscisa 5 es paralela a la recta y = x, y f(x) no es derivable en 0 .

5. Hallen los puntos (x; y) donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ es:

a. paralela a la recta $y = x - 9$

b. perpendicular a la recta $y = -\frac{3}{2}x + 5$

c. horizontal

6. ¿Existe algún punto (x; y) donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ sea horizontal? Justifiquen su respuesta.

7. ¿En qué puntos (x; y) la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 + 7x^2 + 15x$ es horizontal? Justifiquen su respuesta.

8. Si $f'(4) = 3$ y $f(4) = 10$, ¿cuál es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto de abscisa 4?

9. La recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (1; f(1)) es $y = 2x + 3$. Calculen f(1) y f'(1).

10. Escriban las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = \frac{1}{x-3}$ en los puntos donde f(x) se corta con $g(x) = \frac{x^2-3}{x-3}$.

11. Calculen los valores de **a** y **b** para los cuales la recta $y = \frac{5}{4}x - 3$ es tangente al gráfico de $f(x) = \frac{x^2}{a\,x - b}$ en el punto de abscisa –1.

12. Obtengan la función derivada de las siguientes funciones:

a. $a(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

b. $b(x) = (x+3)(x^3 + 5)$

c. $c(x) = 3^x \,.\, \text{sen}\, x$

d. $d(x) = e^{4x+5}$

e. $e(x) = \text{tg}\, x - (\ln x)^2$

f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+5}}{e^x}$

g. $g(x) = \cos(3x^2 + 5x)$

h. $h(x) = \ln\left(\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)$

i. $i(x) = (2x + 3)^{\text{sen}\, x}$

j. $j(x) = (\text{sen}\, x)^{2x+3}$

13. La función que relaciona la distancia (d) a la base de lanzamiento de una nave con el tiempo de marcha (t) es $d(t) = 4t^4 - 5t^2$, donde **d** está medida en metros y **t**, en segundos. ¿Cuál es la aceleración de la nave a los 10 segundos de iniciada la marcha?

14. Hallen la función derivada segunda de las siguientes funciones:

a. $a(x) = (x + 3)^3$

b. $b(x) = \sqrt{x^5 - 5}$

c. $c(x) = \text{sen}(4x^4 + 6x^3)$

d. $d(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x + 1}$

15. Consideren la función $f(x) = \cos(2x + 3)$ y obtengan la función derivada de

a. $a(x) = \ln(f(x))$

b. $b(x) = e^{f(x)}$

c. $c(x) = \text{sen}(f(x))$

16. Determinen un valor aproximado de cos 31° sabiendo que cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Hallen un resultado aproximado de $\sqrt{145}$ utilizando que $\sqrt{144} = 12$.

18. Calculen los valores de **a**, b, **c** y **d** en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si se verifica que $f(0) = 4$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -3$ y $f'''(0) = 8$.

19. Determinen en cada caso cuál es la opción correcta. Justifiquen su respuesta.

a. Si la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x) = e^{k-x}$ en el punto $(-1; f(-1))$ es $-\frac{1}{e}$, entonces:

I. $k = 2$
II. $k = -2$
III. k es un número cualquiera
IV. k no puede ser un número

b. Si la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = \frac{ax - b}{4x^2}$ en el punto $(1; f(1))$ es $y = \frac{13}{4}x - \frac{11}{2}$, entonces:

I. $a = -5$ y $b = 4$
II. $a = 5$ y $b = -2$
III. $a = -12$ y $b = -14$
IV. ninguna de las opciones anteriores

1. La función $d(t) = 2t^3 - 100t + 50$ relaciona la distancia (d) a la ciudad de donde partió un auto, medida en metros, con el tiempo de marcha (t), medido en segundos.
Calcular la velocidad instantánea y la aceleración del auto a los 5 segundos de haber comenzado la marcha.

2. Hallar los puntos (x; y) donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 4x + 1$ es paralela a la recta $y = 23x - 2$.

3. Determinar los valores de **a**, b y **c** en $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que la recta $y = 5x + 2$ sea tangente al gráfico de f(x) en el punto (1, f(1)) y la ordenada al origen de f(x) sea 0.

4. Obtener la ecuación de la recta tangente al gráfico de $h(x) = (fog)(x)$ en el punto (1; h(1)) considerando que $g(x) = 2x + 1$ y $f(x) = x^5 - x$.

5. Si $f(x) = x \cdot e^{3x}$, indicar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar la respuesta.

a. $f'(x) = e^{3x} \cdot (3x^2 + 1)$

b. $f'(0) = 0$

ALUMNO CURSO FECHA

c. La pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (1; f(1)) es $4e^3$.

6. Determinar para la siguiente frase cuál es la opción correcta. Justificar la elección.
La función derivada de $f(x) = e^{x^2+1}$ es:

I. $(x^2 + 1)\, e^{x^2}$
II. $2x\, e^{x^2+1}$
III. e^{x^2+1}

7. Para cada uno de los siguientes casos hallar f'(x) y f''(x).

a. $f(x) = (3x^3 + 7x) \,.\, \text{sen } x$

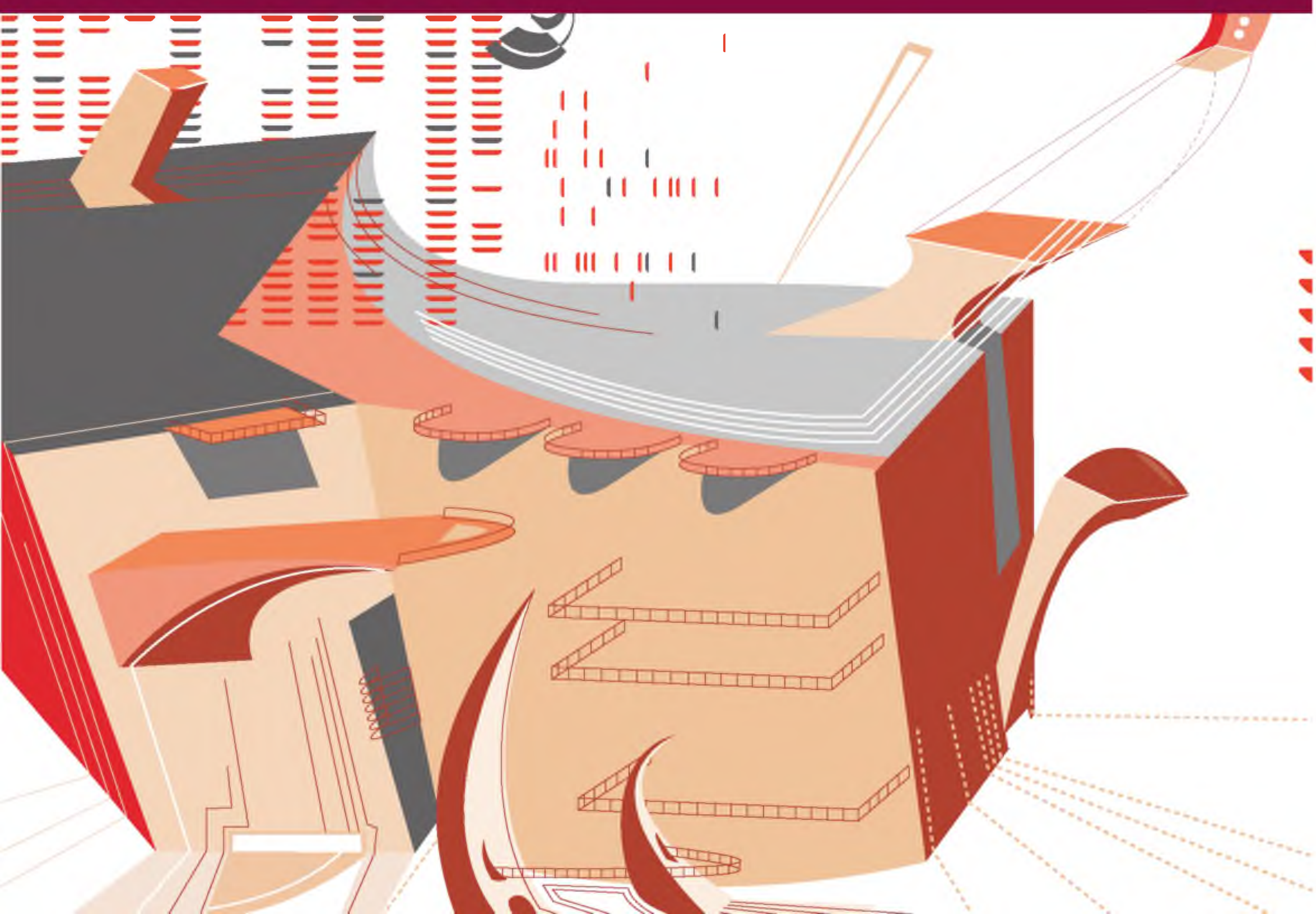
b. $f(x) = \text{sen } \frac{\pi}{3} \,.\, e^{x^2}$

c. $f(x) = (x + 1)^{2x-5}$

8. Calcular un valor aproximado de $\log_2 9$, sabiendo que $\log_2 8 = 3$.

2 Aplicaciones de la función derivada

Al modelizar situaciones en disciplinas como economía, biología o arquitectura, entre otras, se utilizan funciones cuyo comportamiento es necesario conocer. El análisis de las funciones derivadas de esas funciones permite realizar un estudio adecuado y, en consecuencia, tomar decisiones concernientes a la disciplina en cuestión.



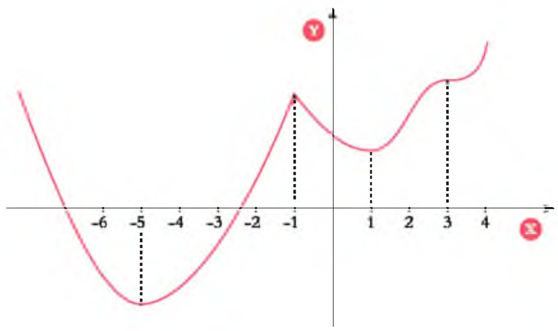
Al terminar de resolver un problema, es importante que analicen si la respuesta que obtuvieron verifica todas las condiciones establecidas en el enunciado del problema. De esta manera, podrán detectar errores y, entonces, revisar el procedimiento empleado para intentar subsanar el error cometido.

¿Sabían que...?
En 1744, Pedro Luis Moreau de Maupertius estableció el "principio metafísico" de la naturaleza, según el cual la naturaleza siempre opera con la mayor economía posible. Esto quiere decir que la naturaleza siempre actúa de tal manera que minimiza alguna cantidad. Por ejemplo, la forma esférica de las burbujas de jabón está relacionada con el hecho de que la esfera es el cuerpo que con mínima área contiene un volumen fijo. Maupertius fue presidente de la Academia de Berlín, donde Leonard Euler era director del área de Matemática. Euler proporcionó muchas herramientas matemáticas que facilitaron el estudio de máximos y mínimos de funciones con dominio en los números reales.

Pedro Luis Moreau de Maupertius

Problema 1

Una función f(x) tiene el siguiente gráfico:



A partir del gráfico de f(x), determinen lo siguiente:

a. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
b. Los máximos y los mínimos relativos y absolutos de f(x).
c. Los valores de **x** en los cuales f(x) **no** es derivable.
d. Los puntos en donde la recta tangente al gráfico de f(x) es horizontal.
e. Las abscisas de los puntos en los cuales la recta tangente al gráfico de f(x) tiene pendiente positiva.
f. Los valores de **x** en los cuales la función derivada de f(x) es negativa.

Problema 1

Antes de comenzar a resolver el problema 1, recordemos las siguientes definiciones que hemos enunciado en el capítulo 1 del Libro 1.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Un intervalo abierto I es un **intervalo de crecimiento** de la función f(x) si I está incluido en el dominio de f(x) y, además, para cualquier par de valores **a** y **b** pertenecientes a I, con $a < b$, se verifica que $f(a) < f(b)$.

Un intervalo abierto I es un **intervalo de decrecimiento** de la función f(x) si I está incluido en el dominio de f(x) y, además, para cualquier par de valores **a** y **b** pertenecientes a I, con $a < b$, se verifica que $f(a) > f(b)$.

Máximos y mínimos

La función f(x) alcanza un **máximo relativo** en x = c si existe, en el dominio de f(x), un intervalo **I** al que pertenece **c** y en el cual para cualquier valor de **x** distinto de **c** se verifica que f(x) < f(c).

La función f(x) alcanza un **mínimo relativo** en x = c si existe, en el dominio de f(x), un intervalo **I** al que pertenece **c** y en el cual para cualquier valor de **x** distinto de **c** se verifica que f(x) > f(c).

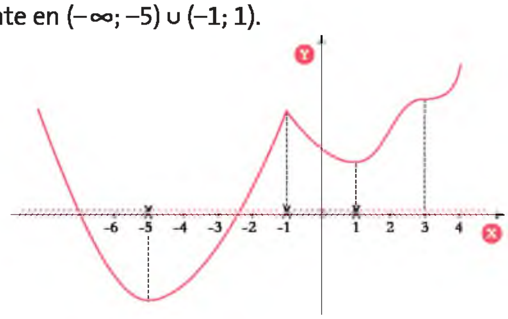
La función f(x) alcanza un **máximo absoluto** en x = c si **c** pertenece al dominio de f(x) y para cualquier valor de **x** perteneciente a dicho dominio pero distinto de **c** se verifica que f(x) < f(c).

La función f(x) alcanza un **mínimo absoluto** en x = c si **c** pertenece al dominio de f(x) y para cualquier valor de **x** perteneciente a dicho dominio pero distinto de **c** se verifica que f(x) > f(c).

El valor **c** es un **extremo relativo/absoluto** si es máximo o mínimo relativo/absoluto.

Observemos el gráfico de la página 42 y utilicemos las definiciones anteriores para resolver el problema 1.

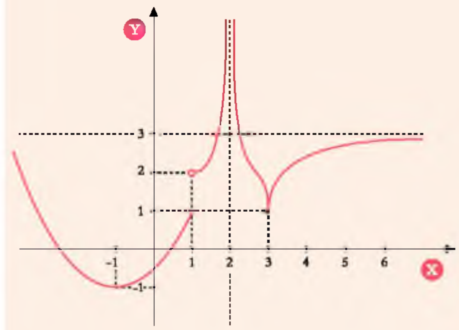
a. La función f(x) es creciente en (–5 ; –1) ∪ (1; +∞) y es decreciente en (–∞; –5) ∪ (–1; 1).



b. En x = 1 la función alcanza un mínimo relativo y en x = –5, un mínimo absoluto. Además, f(x) tiene un máximo relativo en x = –1 y no posee máximo absoluto.

c. En el gráfico de f(x) observamos que (–1; f(–1)) es un “punto anguloso”, con lo cual f(x) no es derivable en –1. En los demás valores del dominio, la función f(x) es derivable.

1. El gráfico que figura a continuación corresponde a una función f(x).



Observando el gráfico de f(x), contesten las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el dominio de f(x)?

____

b. ¿En qué valores de **x** la función no es continua? ¿Qué tipo de discontinuidad tiene f(x) en esos valores?

____

____

c. ¿Cuáles son los valores de **x** en los cuales la función no es derivable?

____

d. ¿Para qué valores de **x** la función derivada de f(x) es 0?

____

e. ¿En qué valores de **x** la función f(x) tiene máximos o mínimos relativos?

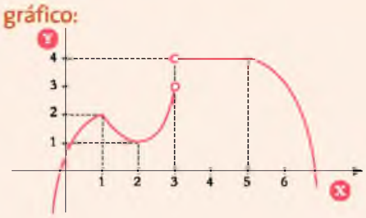
____

f. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x)?

____

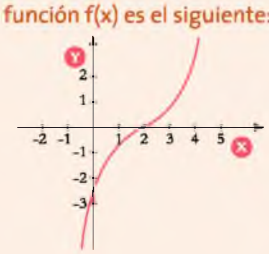
Recordemos que...
Una recta con pendiente positiva es creciente.
Una recta con pendiente negativa es decreciente.

2. Una función f(x) tiene el siguiente gráfico:



A partir del gráfico de f(x) determinen:
a. Los valores de **x** para los cuales f'(x) > 0.
b. Los valores de **x** en los cuales f'(x) < 0.
c. Los puntos estacionarios de la función f(x).
d. Los extremos relativos de f(x).

3. El gráfico de la función derivada de una función f(x) es el siguiente:



Observando el gráfico, decidan si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifiquen sus respuestas.
a. La función f(x) es creciente en ℝ.

b. En x = 2, la función f(x) tiene un mínimo relativo.

d. La recta tangente es horizontal en los puntos (–5; f(–5)), (1; f(1)) y (3; f(3)). Estos puntos se llaman **puntos estacionarios**.

Punto estacionario

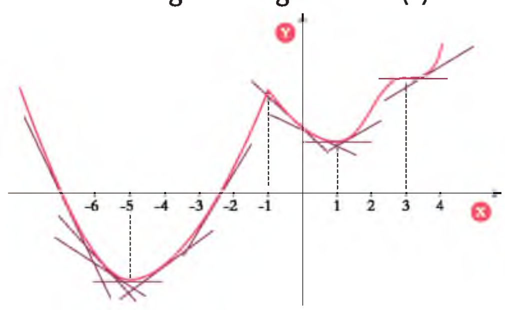
El punto (c; f(c)) es un **punto estacionario** de la función f(x) si f'(c) = 0.

De los ítem **b.**, **c.** y **d.** podemos concluir que en las abscisas de los puntos estacionarios y en los valores donde la función no es derivable hay "posibles" máximos o mínimos. Decimos que son posibles pues (3; f(3)) es un punto estacionario **y**, sin embargo, en x = 3 la función no tiene un máximo ni un mínimo.

Valor crítico

Llamamos **valor crítico** al valor en el cual posiblemente la función tiene un máximo o un mínimo.

e. Para poder determinar lo que se pide en el ítem **e.**, tracemos varias rectas tangentes al gráfico de f(x):



Observamos que las rectas tangentes con pendiente positiva, es decir, crecientes, son rectas tangentes al gráfico de f(x) en puntos cuyas abscisas pertenecen al intervalo (–5; –1) o al intervalo (1; +∞), o sea, al conjunto (–5; –1) ∪ (1; +∞). Notemos que estos intervalos coinciden con los intervalos de crecimiento de f(x).

f. Para determinar los valores de **x** en los cuales f'(x) es negativa, debemos tener presente que la derivada de f(x) en un valor **a** es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (a; f(a)). Por lo tanto, debemos hallar los valores de **x** que son abscisas de los puntos en donde la recta tangente al gráfico de f(x) tiene pendiente negativa, es decir, es decreciente. Observando el gráfico anterior, obtenemos que los valores de **x** buscados son los que pertenecen al conjunto (–∞; –5) ∪ (–1; 1). Notemos que estos intervalos coinciden con los intervalos de decrecimiento de la función.

Conclusión

▌Una función f(x) es creciente en un intervalo I de su dominio si y sólo si para cualquier valor c que pertenece a I la pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c; f(c)) es positiva. Esto quiere decir que f'(c) > 0 para cualquier valor c que pertenece a I.

▌Una función f(x) es decreciente en un intervalo I de su dominio si y sólo si para cualquier valor c que pertenece a I la pendiente de la recta tangente al gráfico de f(x) en el punto (c; f(c)) es negativa. Esto quiere decir que f'(c) < 0 para cualquier valor c que pertenece a I.

▌En el valor c donde la función f(x) tiene un extremo (absoluto o relativo) se verifica que f'(c) = 0 o f'(c) no existe.

Por lo tanto, podemos analizar el crecimiento y el decrecimiento de una función a partir del estudio de los valores de **x** en los cuales la función derivada es positiva o negativa, o sea, a partir del estudio de los intervalos de positividad y de negatividad de la función derivada.

Problema 2

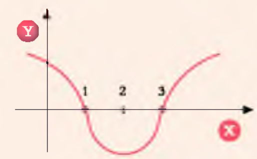
La función $T(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 6$ permite calcular la temperatura, expresada en grados centígrados, de una sustancia en función del tiempo, expresado en minutos.

a. Determinen cuándo aumenta la temperatura y cuándo disminuye.
b. ¿En qué momentos la temperatura alcanza un máximo o un mínimo relativo?
c. Grafiquen aproximadamente la función T(x).

Problema 2

En este problema debemos tener en cuenta que como **x** es el tiempo, entonces, Dom T = $[0; +\infty)$.
a. Utilicemos la conclusión anterior para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de T(x). Es decir, hallemos los intervalos de positividad y de negatividad de T'(x).
Al calcular la función derivada de T(x) obtenemos lo siguiente:
$T'(x) = 6x^2 - 42x + 60$
Luego, para determinar los intervalos de positividad y de negatividad de T'(x) buscamos sus ceros y, por ser T(x) una función continua en cualquier valor de su dominio porque es una función polinómica, utilizamos el teorema de la conservación del signo.

4. El gráfico que figura a continuación corresponde a la función derivada de una función f(x).

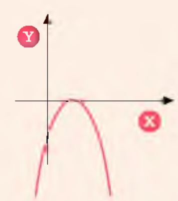


Analizando el gráfico obtengan:
a. Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x).

b. Los valores de **x** en los cuales la función f(x) tiene máximos o mínimos relativos.

Justifiquen sus respuestas.

5. Determinen si el siguiente gráfico puede ser el de la función derivada de una función que es decreciente en todo su dominio. Justifiquen su respuesta.



Recordemos que...
El teorema de la conservación del signo establece lo siguiente:
Si una función es continua, entonces, entre dos ceros consecutivos la función no cambia de signo. O es positiva o es negativa.
Una función no sólo puede cambiar de signo en sus ceros, sino también en los valores en los que es discontinua.

6. Para cada una de las funciones que se indican, hallen el dominio, los intervalos de positividad y de negatividad, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

a. $f(x) = x^5 - 8x^2$

b. $g(x) = (x - 2)^2 (x + 1)^2$

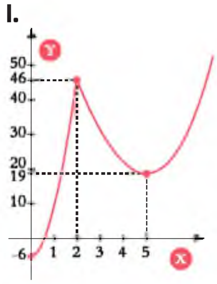
c. $h(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

Si $T'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x = 2$ o $x = 5$. Por lo tanto, $T'(x)$ puede cambiar de signo en $x = 2$ y en $x = 5$.
Consideremos, en el dominio de $T(x)$, los intervalos $[0; 2)$, $(2; 5)$ y $(5; +\infty)$, y hallemos la derivada de $T(x)$ en un valor cualquiera de cada intervalo, por ejemplo, en 1, en 3 y en 6. Luego, obtenemos que $T'(1) > 0$, $T'(3) < 0$ y $T'(6) > 0$. Usando esta información y las definiciones de intervalo de crecimiento e intervalo de decrecimiento, confeccionamos la siguiente tabla:

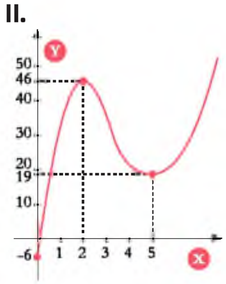
	0	[0; 2)	2	(2; 5)	5	(5; +∞)
T'(x)	60	+ (positiva)	0	– (negativa)	0	+ (positiva)
T(x)	–6	↗ (crece)	46	↘ (decrece)	19	↗ (crece)

Luego, la temperatura aumenta donde $T(x)$ crece, o sea, en $[0; 2) \cup (5; +\infty)$, y disminuye donde $T(x)$ decrece, es decir, en $(2; 5)$.
b. Como Dom $T = [0; +\infty)$ y a partir de $x = 0$ la función comienza a crecer, entonces, en $x = 0$ la función $T(x)$ alcanza un mínimo relativo.
Por lo tanto, una función también posee valores críticos en los extremos del intervalo cerrado en el cual está definida.
En un entorno de 2, la temperatura aumenta para valores menores que 2 y disminuye para valores mayores que 2. Por lo tanto, la temperatura alcanza un máximo relativo en $x = 2$.
En un entorno de 5, la temperatura disminuye para valores menores que 5 y aumenta para valores mayores que 5. Por lo tanto, la temperatura alcanza un mínimo relativo en $x = 5$.
c. Como $T(x)$ es una función continua en cualquier valor de su dominio, entonces a los puntos $(0; -6)$, $(2; 46)$ y $(5; 19)$ los podemos unir mediante un trazo continuo, teniendo en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento hallados en el ítem **a**. Sin embargo, a pesar del dato que proporcionan esos intervalos, podemos dibujar la función de diferentes maneras.

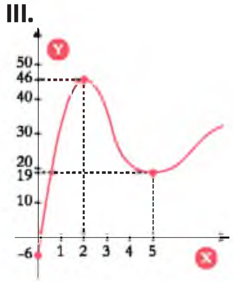
I.



II.



III.



De los gráficos anteriores, ¿cuál es el que le corresponde a T(x)? Observemos que el gráfico **I.** posee un punto anguloso. Por lo tanto, dicho gráfico no puede corresponder a T(x), pues esta función, por ser polinómica, es derivable en todos los valores de su dominio. Luego, debemos decidir cuál de los dos gráficos restantes le corresponde a T(x). Para ello, necesitamos determinar la forma de la curva que une los puntos anteriores.

Función cóncava y función convexa

Una función es **cóncava o cóncava hacia arriba** en un intervalo I de su dominio si en dicho intervalo el gráfico de la función tiene la siguiente forma:

Una función es **convexa o cóncava hacia abajo** en un intervalo I de su dominio si en dicho intervalo el gráfico de la función tiene la siguiente forma:

Consideremos una función f(x) cóncava hacia arriba y tracemos rectas tangentes al gráfico de f(x) en varios de sus puntos.

Observamos que las pendientes de las rectas tangentes aumentan a medida que consideramos valores de **x** cada vez mayores. Entonces, la función f'(x), que permite obtener la pendiente de cada una de las rectas tangentes al gráfico de f(x), crece. Por lo tanto, la función derivada de f'(x) es positiva, es decir que f''(x) > 0.

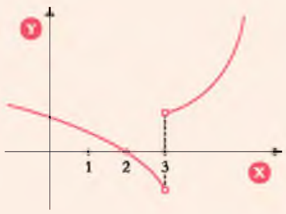
¿Sabían que...?

La palabra **cóncavo** apareció por primera vez en inglés *(concave)* en un artículo de geometría titulado *Pantometría*, escrito por Thomas Digges.

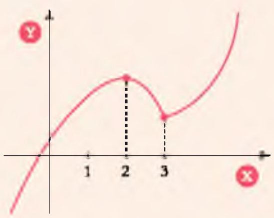
Thomas Digges nació en 1546 y murió en 1595, en Inglaterra. Recibió instrucción sobre Matemática avanzada de la mano de John Dee, con quien publicó artículos de geometría.

Digges formó parte de los English Copernicans. Entre sus trabajos sobre astronomía, figura la traducción al inglés de la obra de Copérnico, en la que incluye sus ideas sobre el universo infinito con estrellas que van cambiando de posición.

7. Consideren el siguiente gráfico que corresponde a una función f'(x), es decir, a la función derivada de f(x).



¿Es posible que el gráfico de la función f(x) sea el que figura a continuación? Justifiquen su respuesta.



8. Si la función f(x) es derivable y creciente en todos los números reales y la función g(x) es $g(x) = f(x^2 - 12x)$, determinen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de g(x).

9. Calculen los valores de **a**, **b** y **c** si se verifica que la función $f(x) = a\,x + b + c\,e^{-x}$ tiene un extremo relativo en $x = 0$ y $f'(\ln 2) = 6$.

Analicemos una función f(x) cóncava hacia abajo.
Al trazar las rectas tangentes al gráfico de f(x) en algunos de sus puntos, obtenemos lo siguiente:

Observamos que las pendientes de las rectas tangentes disminuyen a medida que consideramos valores de **x** cada vez mayores. Por lo tanto, la función f'(x) decrece y, en consecuencia, la función derivada segunda de f(x) es negativa, es decir que $f''(x) < 0$.

Conclusión

- **Una función f(x) es cóncava hacia arriba en un intervalo I de su dominio si y sólo si se verifica que $f''(x) > 0$ para cualquier valor de x que pertenece a I.**
- **Una función f(x) es cóncava hacia abajo en un intervalo I de su dominio si y sólo si se verifica que $f''(x) < 0$ para cualquier valor de x que pertenece a I.**

Continuemos con la resolución del ítem **c.** del problema 2.
Para determinar cuál es el gráfico de T(x), analizamos los intervalos de positividad y de negatividad de T"(x). Para ello buscamos los ceros de T"(x) y utilizamos el teorema de la conservación del signo.

Como $T'(x) = 6x^2 - 42x + 60$, entonces, $T''(x) = 12x - 42$.

Si $T''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 42 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

Considerando, en el dominio de T(x), por ejemplo, a 2 y a 4, es decir, a un valor menor que $\frac{7}{2}$ y a otro mayor que él, obtenemos que $T''(2) < 0$ y $T''(4) > 0$. Luego, utilizando estos datos y la conclusión anterior confeccionamos la siguiente tabla:

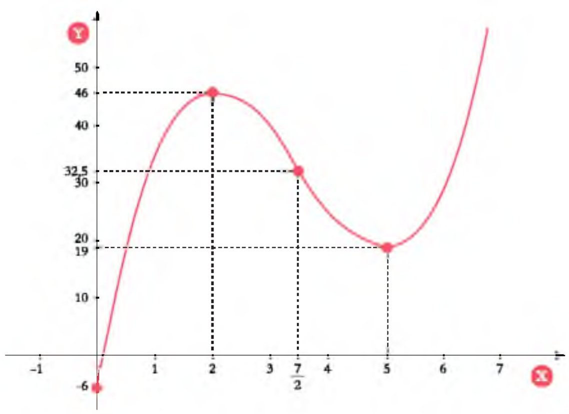
	0	$\left[0; \frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$
T"(x)	–42	–	0	+
T(x)	–6		$\frac{65}{2}$	

En la tabla anterior observamos que en el punto $\left(\frac{7}{2}; \frac{65}{2}\right)$ la función T(x) cambia la concavidad. Ese punto se llama **punto de inflexión** de la función.

Punto de inflexión

El punto (c; f(c)) es un **punto de inflexión** de la función f(x) si y sólo si en un entorno de **c** la función cambia la concavidad a la izquierda y a la derecha de **c**.

Comparemos la concavidad que figura en la tabla anterior con la que se observa en los gráficos **II.** y **III.** de la página 46. Podemos afirmar que el gráfico **II.** es el que corresponde a la función T(x) del problema 2. Por lo tanto, el gráfico de T(x) es el siguiente:



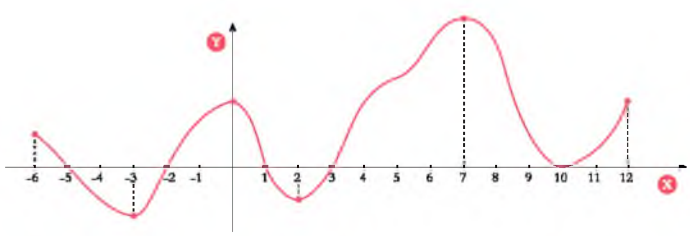
Observando el gráfico podemos asegurar que la función tiene un mínimo absoluto en x = 0 y que no posee un máximo absoluto.

Problema 3

El siguiente gráfico corresponde a la función derivada de una función f(x).

a. A partir del gráfico de f'(x) indiquen los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos relativos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de f(x).

b. Realicen un gráfico aproximado de una posible función f(x).



10. a. Determinen los intervalos de concavidad de las funciones de la actividad 6.

b. Grafiquen aproximadamente cada una de las funciones anteriores utilizando la información obtenida en el ítem **a.** y en la actividad 6.

Recordemos que...
Si una función es derivable en un valor a, entonces, es continua en ese valor.

11. Grafiquen una función f(x) que tenga como dominio a Dom f = $\mathbb{R} - \{-3\}$, que sea derivable en todos los valores de su dominio y que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

$f(2) = 0$, $f(5) = 0$,

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$,

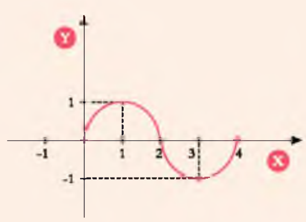
$f'(x) > 0$ en $(-\infty; -3) \cup (-3\,; 3)$,

$f'(x) < 0$ en $(3; +\infty)$,

$f''(x) > 0$ en $(-\infty; -3) \cup (1; 2{,}5)$ y

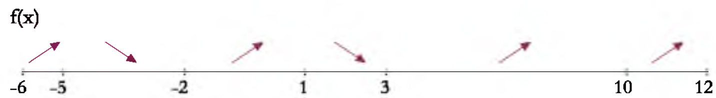
$f''(x) < 0$ en $(-3; 1) \cup (2{,}5; +\infty)$.

12. Si la función $h(x) = [f(x)]^2 - 1$ está definida en el intervalo [0; 4] y el gráfico de f(x) es el que figura a continuación, obtengan los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de h(x).



Problema 3

a. En el gráfico observamos que f'(x) existe para todos los valores pertenecientes al intervalo [–6; 12]. Por lo tanto, f(x) es una función continua en cualquier valor de ese intervalo.
Analicemos el crecimiento y el decrecimiento de f(x). Para ello, debemos determinar los intervalos de positividad y de negatividad de f'(x). Al observar el gráfico de f'(x), podemos afirmar que $f'(x) > 0$ en $[-6; -5) \cup (-2; 1) \cup (3; 10) \cup (10; 12]$ y $f'(x) < 0$ en $(-5; -2) \cup (1; 3)$. Utilizando estos datos confeccionemos el siguiente esquema:

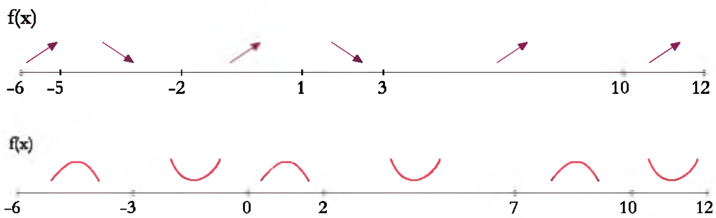


Por lo tanto, f(x) crece en $[-6; -5) \cup (-2; 1) \cup (3; 10) \cup (10; 12]$ y decrece en $(-5; -2) \cup (1; 3)$. Luego, la función f(x) tiene máximos relativos en x = –5, x = 1 y x = 12. En este último valor, hay un máximo relativo porque a dicho valor la función "llega creciendo". Además, f(x) posee mínimos relativos en x = –2, x = 3 y x = –6. En este valor, hay un mínimo relativo porque a partir de dicho valor la función f(x) comienza a crecer.

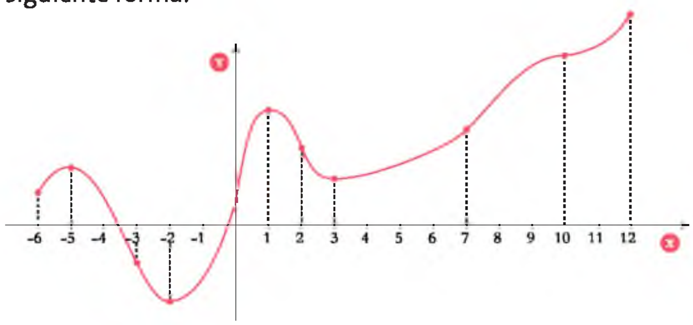
Para analizar la concavidad de f(x), tenemos que determinar los intervalos de positividad y de negatividad de f"(x). Para ello, debemos tener en cuenta, de acuerdo con lo analizado en las páginas 47 y 48, que f"(x) es positiva en los valores de **x** para los cuales f'(x) crece y que f"(x) es negativa en los valores de **x** para los cuales f'(x) decrece. Luego, observando el gráfico de f'(x) obtenemos que f'(x) crece en $(-3; 0) \cup (2; 7) \cup (10; 12]$ y decrece en $[-6; -3) \cup (0; 2) \cup (7; 10)$. Usando esta información, realizamos el siguiente esquema:

Por lo tanto, f(x) es cóncava hacia abajo en $[-6; -3) \cup (0; 2) \cup (7; 10)$ y cóncava hacia arriba en $(-3; 0) \cup (2; 7) \cup (10; 12]$. Luego, los puntos de inflexión de la función f(x) son (–3; f(–3)), (0; f(0)), (2; f(2)), (7; f(7)) y (10; f(10)).

Utilizando todos los datos que hemos obtenido acerca de f(x), confeccionamos los siguientes esquemas:



Al no conocer la fórmula de f(x), no es posible marcar con exactitud los puntos que pertenecen a su gráfico. Sin embargo, usando la información de los esquemas anteriores, podemos determinar la forma aproximada del gráfico de f(x).
Luego, el gráfico de f(x) tiene aproximadamente la siguiente forma:



Problema 4

Una fuente chata, de forma rectangular, puede apoyarse sobre un posafuentes de 50 cm de diámetro sin sobresalir de él. ¿Cuáles son las dimensiones de la fuente si ésta debe tener la mayor área posible?

Problema 5

Se necesita fabricar una lata cilíndrica de 350 cm^3 de capacidad utilizando la menor cantidad de hojalata posible.
¿Qué dimensiones debe tener la lata?

Problema 4

Para resolver el problema 4, primero debemos encontrar una función que relacione al área de la fuente con las dimensiones de ésta y luego obtener el máximo relativo de dicha función.

Recordemos que...

La recta x = a es asíntota vertical de la función f(x) si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

La recta y = b es asíntota horizontal de la función f(x) si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

La recta y = mx + b es asíntota oblicua de la función f(x) si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.

Los valores de **m** y **b** de la asíntota oblicua de f(x) son $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$.

13. Consideren la función $g(x) = \dfrac{4x + 3}{x^2 + 2}$ y determinen lo siguiente:

a. El dominio de g(x).

b. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

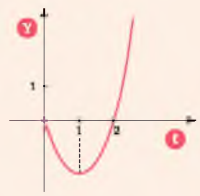
c. Los ceros de la función y los intervalos de positividad y negatividad.

d. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

e. Los intervalos de concavidad.

f. Un gráfico aproximado de g(x).

14. El siguiente gráfico corresponde a la función aceleración de un móvil respecto del tiempo (t).



Observando el gráfico contesten las siguientes preguntas:

a. ¿En qué períodos de tiempo la velocidad instantánea disminuye?

---

b. ¿En qué períodos de tiempo la velocidad instantánea aumenta?

---

15. Demuestren que si f(x) es una función polinómica de grado 3, es decir que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces, tiene exactamente un punto de inflexión.

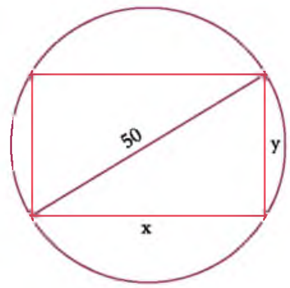
---

16. Verifiquen que la función $g(x) = e^{x^3}$ tiene dos puntos de inflexión.

---

17. Demuestren que la función $h(x) = x^{16} + 3x^6 + x^2$ no tiene puntos de inflexión y es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Llamemos **x** e **y** a las dimensiones de la fuente y realicemos un dibujo para representar la situación planteada en el problema 4.



Si llamamos A al área del rectángulo, entonces, resulta que $A = x \cdot y$ **(1)**.

En el dibujo anterior, observamos que la diagonal del rectángulo es diámetro del círculo. Utilizando el teorema de Pitágoras, obtenemos que $x^2 + y^2 = 50^2$.

Luego, como $x > 0$, debido a que **x** es una de las dimensiones del rectángulo, resulta que $x = \sqrt{2500 - y^2}$ **(2)**.

Reemplazando la expresión **(2)** en la **(1)**, obtenemos la función que relaciona el área del rectángulo con las dimensiones de éste, o sea, $A(y) = y \cdot \sqrt{2500 - y^2}$.

Esta función tiene por dominio al intervalo [0; 50], pues debe ser $2500 - y^2 \geq 0$ y, además, por ser **y** una de las dimensiones del rectángulo, debe ser $y \geq 0$.

Para encontrar el máximo relativo de la función A(y), analizamos su crecimiento y decrecimiento. O sea, determinamos los intervalos de positividad y de negatividad de A'(y).

La función derivada de A(y) es la siguiente:

$A'(y) = 1 \cdot \sqrt{2500 - y^2} + y \cdot \left(\dfrac{-2y}{2\sqrt{2500 - y^2}} \right)$, con lo cual obtenemos que $A'(y) = \sqrt{2500 - y^2} - \dfrac{y^2}{\sqrt{2500 - y^2}}$.

Al buscar los ceros de la función A'(y), resulta que

$$\text{si } A'(y) = 0 \Rightarrow \sqrt{2500 - y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{2500 - y^2}} \Rightarrow 2500 - y^2 = y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 2500 \Rightarrow y^2 = 1250 \Rightarrow y = \sqrt{1250}, \text{ pues } y \geq 0.$$

Entonces, $y = 25\sqrt{2}$, o sea, $y \cong 35{,}36$.

Utilicemos el teorema de la conservación del signo considerando, en [0; 50], los números 2 y 40, es decir, un valor menor que 35,36 y otro mayor que él, pero ambos pertenecientes al dominio de A(y). Luego, obtenemos que A'(2) > 0 y A'(40) < 0. Usando estos datos, realizamos la siguiente tabla:

	0	$(0; 25\sqrt{2})$	$25\sqrt{2}$	$(25\sqrt{2}; 50)$
A'(y)	50	+	0	–
A(y)	0	↗	1250	↘

Por lo tanto, si $y = 25\sqrt{2}$, entonces, el área del rectángulo es la máxima posible. Al calcular la otra dimensión del rectángulo, reemplazando en la expresión **(2)** a **y** por $25\sqrt{2}$, resulta que

$$x = \sqrt{2500 - (25\sqrt{2})^2} = \sqrt{2500 - 1250} = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$$

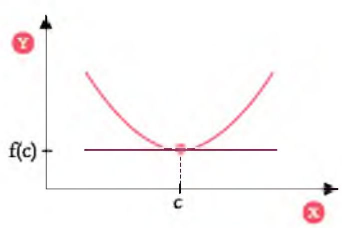
Luego, la fuente tiene aproximadamente 35,36 cm de ancho y 35,36 cm de largo. Por lo tanto, la fuente es cuadrada.

Observen que para resolver el problema 4, debimos buscar el máximo relativo de una función y, para hallarlo, analizamos el crecimiento y el decrecimiento de dicha función.

Veamos ahora una forma más económica de encontrar máximos y mínimos relativos, en la cual no es necesario determinar el crecimiento y el decrecimiento de la función.

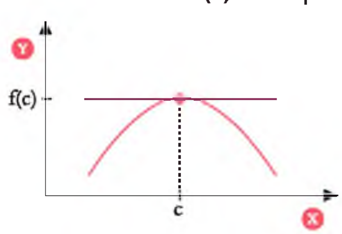
Si la recta tangente al gráfico de una función f(x) en un punto (c; f(c)) es horizontal, entonces, su pendiente es cero y, en consecuencia, $f'(c) = 0$.

Supongamos que para una función f(x) es $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, es decir, que en un entorno de **c** la concavidad de f(x) es hacia arriba. El gráfico de la función f(x) será aproximadamente:



Por lo tanto, en x = c la función f(x) tendrá un mínimo relativo.

En cambio, si suponemos que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, o sea, que en un entorno de **c** la concavidad de f(x) es hacia abajo, entonces, el gráfico de la función f(x) será aproximadamente:



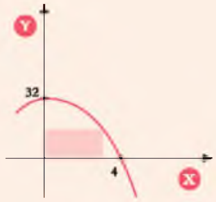
Por lo tanto, en x = c la función f(x) tendrá un máximo relativo.

18. El costo de producir una cantidad **x** de artículos se calcula por medio de la función $c(x) = 2100 + 135x - 900\sqrt{x}$.
La ganancia obtenida después de la venta de los artículos es la diferencia entre el dinero que ingresa debido a dicha venta y el dinero que demanda el costo de la producción de dichos artículos.
Si se venden todos los artículos que se producen y el precio de venta de cada uno de ellos es de \$90, ¿cuántos artículos se deben producir para que la ganancia sea la máxima posible?

19. Hallen los puntos del gráfico de la función $f(x) = x^3 + x + 8$ en los cuales la recta tangente al gráfico de f(x) tenga la mínima pendiente posible.

20. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de menor perímetro entre todos los rectángulos de 1 m^2 de área?

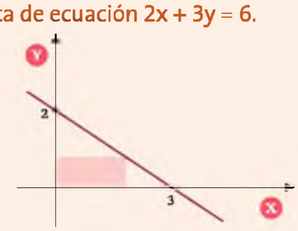
21. El gráfico que figura a continuación muestra un rectángulo inscripto en el gráfico de $f(x) = 32 - 2x^2$ en el primer cuadrante.



¿Cuál es el área del mayor rectángulo que puede inscribirse en las condiciones anteriormente mencionadas?

22. Encuentren los puntos que pertenecen a la recta $y = -2x + 3$ y que están más próximos al origen de coordenadas.

23. En el siguiente gráfico, figura un rectángulo que tiene dos lados apoyados, respectivamente, en los semiejes positivos de las abscisas y de las ordenadas, y el vértice restante sobre la recta de ecuación $2x + 3y = 6$.



Entre todos los rectángulos que cumplen las condiciones anteriores, hallen las dimensiones del que tiene área máxima y del que tiene área mínima.

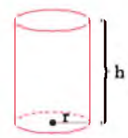
Teorema de la función derivada segunda

Si $f(x)$ es una función derivable en un valor **c**, para el cual $f'(c) = 0$ y, además, se verifica que

- $f''(c) > 0$, entonces, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = c$.
- $f''(c) < 0$, entonces, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = c$.

Problema 5

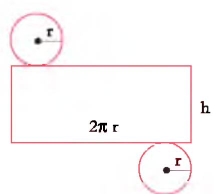
Dibujemos un cilindro que representa una lata:



Llamemos **r** al radio de la base y **h** a la altura del cilindro. Como el volumen del cilindro es igual al área de la base de éste por su altura y la lata tiene 350 cm^3 de capacidad, entonces, podemos escribir $350 = \pi r^2 h$ **(1)**.

Para que la cantidad de hojalata sea la mínima necesaria, el cilindro debe tener la menor área posible. Luego, tenemos que determinar la función área del cilindro.

Al desarmar el cilindro, obtenemos dos círculos y un rectángulo cuya base se encontraba bordeando a uno de los círculos. Por lo tanto, la medida de la base del rectángulo es igual a la de la longitud de la circunferencia. Entonces,



$$\text{Área} = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{área de los dos círculos}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{área del rectángulo}} \quad \textbf{(2)}$$

Debemos buscar el mínimo relativo de esta función área. Pero como esa función tiene dos variables, **r** y **h**, entonces, de la condición **(1)** despejamos, por ejemplo, **h** y sustituimos la expresión de **h** en **(2)**.

Luego, resulta que $h = \dfrac{350}{\pi r^2}$ **(3)**.

Reemplazando la expresión **(3)** en la **(2)** obtenemos la siguiente función:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\,\frac{350}{\cancel{\pi}\, r^{\cancel{2}}}, \text{ o sea, } A(r) = 2\pi r^2 + \frac{700}{r}$$

La función $A(r)$ es continua en los valores positivos de **r**.

Luego, para hallar el mínimo relativo de dicha función, calculamos los ceros de la función derivada $A'(r)$ y utilizamos el teorema de la función derivada segunda.

La función derivada de A(r) es $A'(r) = 4\pi r - \dfrac{700}{r^2}$.

Entonces, resulta que si $A'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \dfrac{700}{r^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\pi r = \frac{700}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{700}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{175}{\pi}} \ \textbf{(4)} \Rightarrow r \cong 3{,}82.$$

La función derivada segunda de A(r) es $A''(r) = 4\pi + \dfrac{1400}{r^3}$ **(5)**.

Luego, reemplazando la expresión **(4)** en la **(5)** obtenemos

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1400}{\left(\sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}\right)^3} = 4\pi + 8\pi = 12\pi, \text{ con lo cual es}$$

$A''\left(\sqrt[3]{\dfrac{175}{\pi}}\right) > 0$. Por lo tanto, el área del cilindro es mínima si el radio de los círculos es aproximadamente de 3,82 cm.

Para hallar la altura del cilindro, sustituimos **(4)** en **(3)**. Resulta entonces que $h = \dfrac{350}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{175}{\pi}}\right)^2}$, es decir que $h \cong 7{,}64$.

Por lo tanto, las dimensiones que debe tener la lata de 350 cm^3 de capacidad son aproximadamente 3,82 cm de radio de la base y 7,64 cm de altura.

Regla de L'Hôpital

Esta regla, que es una aplicación de la función derivada, permite calcular algunos límites indeterminados sin necesidad de "salvar la indeterminación" [1], utilizando métodos algebraicos.

Regla de L'Hôpital

- Si f(x) y g(x) son funciones derivables en un entorno de un valor x_0, $g'(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$ en dicho entorno, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ finito entonces se verifica que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

¿Sabían que...?

La regla de L'Hôpital fue descubierta por Johann Bernoulli.

Bernoulli, durante su estancia en París, hizo un pacto con el marqués Guillaume François Antoine de L'Hôpital, a quien enseñaba Matemática. Este pacto consistía en que, a cambio de un sueldo, Bernoulli enviaría sus descubrimientos en Matemática al marqués, para que éste los usara como quisiera.

Un descendiente de Bernoulli descubrió, leyendo un curso de su antepasado, que Johann Bernoulli había encontrado una regla muy similar a la de L'Hôpital y que dicho descubrimiento era muy anterior al momento en que L'Hôpital había hecho pública su famosa regla.

La diferencia entre ambas reglas radicaba en que en la de L'Hôpital aparecían corregidos algunos errores que figuraban en la de Bernoulli.

Guillaume Françoise Antoine de L'Hôpital nació en 1661 y murió en 1704, en París. Fue un matemático muy competente que resolvió algunos problemas importantes en los que también trabajaban, independientemente, Newton, Leibniz y Bernoulli. En 1696, en su libro *Analyse des Infiniment Petits*, referido al cálculo infinitesimal, L'Hôpital presenta por primera vez la regla que lleva su nombre. En su prólogo, acepta la influencia que sobre sus ideas tuvieron Leibniz y los hermanos Bernoulli, aunque aclara que él también influyó en los trabajos de ellos.

Guillaume Françoise Antoine de L'Hôpital

1 Ver Libro 5, capítulo 2.

24. Calculen el siguiente límite:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x - 3\text{ sen } x}{x + \text{sen } x}$, y expliquen por qué no se puede utilizar la regla de L'Hôpital para realizar el cálculo.

25. Decidan si es correcto el siguiente procedimiento para hallar el límite indicado:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 21x^2 + 36x - 20} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{6x - 6}{12x^2 - 42x + 36} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{6}{24x - 42} = 1$$

26. Obtengan el valor de los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2\text{ sen}(5x)} =$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\text{sen}(\pi x)} =$

Si f(x) y g(x) son funciones derivables en un entorno del valor x_0, $g'(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ finito, entonces, se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La regla de L'Hôpital también se cumple cuando **x**, en lugar de tender a x_0, tiende a infinito.

Problema 6

Calculen los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x^2 + x)}{x} =$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen } x - x} =$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + x}{x^2 + 2} =$

d. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x - 1)\,.\,\ln(x - 1) =$

Problema 6

a. Al calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x^2 + x)}{x}$ obtenemos:

$\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}(2x^2 + x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Estamos, entonces, ante la presencia de una indeterminación. Pero esta indeterminación es una de las contempladas en la regla de L'Hôpital (L'H). Por lo tanto, utilizamos dicha regla para salvar la indeterminación. Luego, resulta que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x^2 + x)}{x} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[\cos(2x^2 + x)]\,.\,(4x + 1)}{1} = 1.$

b. Para $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen } x - x}$ sucede que $\lim\limits_{x\to 0} e^x - e^{-x} - 2x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen } x - x = 0$. Entonces, estamos ante la presencia de la misma indeterminación que en **a.**, con lo cual podemos usar la regla de L'Hôpital. Luego, obtenemos:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen } x - x} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos x - 1}$. Pero resulta que $\lim\limits_{x\to 0} e^x + e^{-x} - 2 = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$. Por lo tanto, utilizamos otra vez la regla de L'Hôpital y lo hacemos la cantidad de veces que sean necesarias para salvar la indeterminación.

Luego, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos x - 1} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-\text{sen } x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$$

c. Al calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + x}{x^2+2}$ resulta que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2 = \infty$. Por lo tanto, estamos ante la presencia de una indeterminación distinta de la del ítem **a.** Pero esta indeterminación corresponde al otro tipo de indeterminación que contempla la regla de L'Hôpital. Luego, al usar dicha regla obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{x^2+2} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+1}{2x} = 0$$

d. Para $\lim\limits_{x\to1^+} (x-1) \,.\, \ln(x-1)$, al resolverlo, sucede que

$\lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0$ y $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x-1) = -\infty$

En este caso, podríamos pensar que si multiplicamos una función que tiende a cero por otra cualquiera, entonces, el resultado tendería a cero. Sin embargo, también podríamos pensar que si multiplicamos una función que tiende a infinito por cualquier otra, entonces, el resultado tendería a infinito. Estamos, entonces, ante la presencia de un nuevo tipo de indeterminación.

Conclusión

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \,.\, g(x)]$ es una indeterminación.

Esta conclusión también se cumple cuando x **tiende a infinito.**

Para salvar la indeterminación que presenta el límite planteado en el ítem **d.**, sustituimos la expresión de la función por otra que, además de ser equivalente en todos los valores del dominio de aquélla, nos permita utilizar la regla de L'Hôpital. Por ejemplo, podemos reemplazar $(x-1) \,.\, \ln(x-1)$ por $\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}}$, con lo cual transformamos el producto de funciones en un cociente de funciones.

Luego, resulta que $\lim\limits_{x\to1^+} (x-1) \,.\, \ln(x-1) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}} \underset{L'H}{=}$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-(x-1)^{-2}} = \lim_{x\to1^+} -\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to1^+} -(x-1) = 0$$

Es importante resaltar que la regla de L'Hôpital se refiere a la división entre las funciones derivadas y no a la función derivada de una división entre funciones.

27. Calculen los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$

b. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x + \ln x}{e^x + x^{-1}} =$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2} \ln x =$

d. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x\cos x + \operatorname{sen} x - 2x} =$

28. Hallen el valor de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-2}{5x}$, considerando que $f(0) = 2$ y $f'(0) = \dfrac{5}{6}$.

Algo más...

Un ejemplo de indeterminación es $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$ cuando $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Veamos cómo utilizar la regla de L'Hôpital para salvar la indeterminación anterior.

Consideremos, por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 0}(x^4 + x^2)^{x^3}$, que en principio está indeterminado. Llamemos T al resultado de ese límite, o sea que $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = T$ (1).

Apliquemos logaritmo natural a ambos miembros de (1). Luego, como la función logarítmica es continua en cualquier valor de su dominio, resulta que

$$\ln T = \lim_{x\to 0} \ln\left[(x^4 + x^2)^{x^3}\right] = \lim_{x\to 0} x^3 . \ln(x^4 + x^2)$$

Este límite está indeterminado. Para salvar esta indeterminación, trabajamos como lo hicimos en el ítem **d.** del problema 6. Con lo cual, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} x^3 . \ln(x^4 + x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^4 + x^2)}{x^{-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2}}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(4x^3 + 2x)}{-3(x^4 + x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{4}\,2}(4x^3 + 2x)}{-3\cancel{x^2}(x^2 + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^5 + 2x^3}{-3x^2 - 3} = 0$$

Por lo tanto, $\ln T = 0$. Luego, $T = e^0 = 1$.

De la misma manera, se pueden salvar las siguientes indeterminaciones:

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, o $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Los tres tipos de indeterminaciones anteriores también se presentan si **x** tiende a infinito.

Problema 7

Consideren las siguientes funciones:

a. $f(x) = (x + 2) . e^x$ **b.** $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Realicen el estudio completo de cada una de ellas. Es decir, para cada una de las funciones anteriores obtengan:

I. El dominio.
II. Los valores en los cuales la función es discontinua.
III. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.
IV. Los intervalos de positividad y negatividad.
V. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.
VI. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
VII. Un gráfico aproximado de la función.

Problema 7

a. Realicemos el estudio completo de $f(x) = (x + 2) . e^x$.

I. El dominio de la función es **Dom f = ℝ**.

II. La función f(x) **es continua en cualquier valor de su dominio**, pues es el producto entre $x + 2$ y e^x, que son funciones continuas en ℝ, ya que la primera es una función polinómica y la segunda es una función exponencial.

III. Como Dom f = ℝ, la función f(x) **no tiene asíntotas verticales**. Para obtener la asíntota horizontal, debemos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} (x + 2) . e^x$. Pero, como uno de los factores de f(x) es e^x, que es una función exponencial, entonces, tenemos que hallar el límite de f(x) cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$.

Si $x \to +\infty$, entonces, $x + 2 \to +\infty$ y $e^x \to +\infty$. Luego, resulta que $\lim\limits_{x\to +\infty} (x + 2) . e^x = +\infty$. Por lo tanto, **no existe asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$**.

Si $x \to -\infty$, entonces, $x + 2 \to -\infty$ y $e^x \to 0$, con lo cual estamos ante la presencia de una indeterminación. Para salvarla, transformamos la expresión de f(x) en un cociente de funciones y utilizamos la regla de L'Hôpital. Luego, obtenemos:

$$\lim_{x\to -\infty} (x + 2) . e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x + 2}{e^{-x}} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$ Por lo tanto, la recta **y = 0 es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$**.

Como la función f(x) posee asíntota horizontal, entonces, **no tiene asíntota oblicua**.

IV. Para hallar los intervalos de positividad y negatividad buscamos los ceros de f(x) y utilizamos el teorema de la conservación del signo.

Luego, si $f(x) = 0 \Rightarrow (x + 2) \, . \, e^x = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$ o $e^x = 0$. Pero como $e^x \neq 0$ para cualquier número real, entonces, $x = -2$.
Consideremos, por ejemplo, los valores -5 y 0, pues pertenecen a Dom f y, además, $-5 < -2$ y $0 > -2$. Luego, resulta que $f(-5) < 0$ y $f(0) > 0$. Usando estos datos realizamos el siguiente esquema:

f(x)	–	-2	+
	$f(-5) < 0$		$f(0) > 0$

Por lo tanto, obtenemos que $C^- = (-\infty; -2)$ y $C^+ = (-2; +\infty)$.
V. Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x), determinamos los intervalos de positividad y negatividad de la función derivada de f(x). Para ello, calculamos los ceros de f'(x) y utilizamos el teorema de la conservación del signo.
Como $f(x) = (x + 2) \, . \, e^x$, entonces, $f'(x) = 1 \, . \, e^x + (x + 2) \, . \, e^x =$
$= (1 + x + 2) \, . \, e^x = (x + 3) \, . \, e^x$
Si $f'(x) = 0 \Rightarrow (x + 3) \, . \, e^x = 0 \Rightarrow x = -3$.
Consideremos, por ejemplo, los valores -6 y 1. Luego, resulta que $f'(-6) < 0$ y $f'(1) > 0$. A partir de estos datos confeccionamos la siguiente tabla:

	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; +\infty)$
f'(x)	–	0	+
f(x)	↘	−0,05	↗

Por lo tanto, la función **f(x) decrece en $(-\infty; -3)$ y crece en $(-3; +\infty)$**. Luego, **en $x = -3$ tiene un mínimo relativo y no posee máximos relativos.**
VI. Para obtener los intervalos de concavidad de f(x), determinamos los intervalos de positividad y negatividad de f"(x), con lo cual debemos resolver la ecuación $f''(x) = 0$ y usar el teorema de la conservación del signo.
Como $f'(x) = (x + 3) \, . \, e^x$, entonces, $f''(x) = 1 \, . \, e^x + (x + 3) \, . \, e^x =$
$= (x + 4) \, . \, e^x$
Luego, si $f''(x) = 0 \Rightarrow (x + 4) \, . \, e^x = 0 \Rightarrow x = -4$.
Considerando los valores -7 y 2, obtenemos que $f''(-7) < 0$ y $f''(2) > 0$. Luego, podemos realizar la siguiente tabla:

	$(-\infty; -4)$	-4	$(-4; +\infty)$
f"(x)	–	0	+
f(x)	∩	−0,04	∪

Por lo tanto, la función f(x) es **cóncava hacia abajo en $(-\infty; -4)$ y cóncava hacia arriba en $(-4; +\infty)$**, con lo cual **el punto de inflexión es $(-4; f(-4))$, es decir, el punto $(-4; -2e^{-4})$.**

¿Cómo se lee...?
C^+: conjunto de positividad.
C^-: conjunto de negatividad.

29. Para la función $f(x) = (x - 2) \, . \, e^{-x}$, determinen lo siguiente:
a. El dominio.
b. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.
c. Los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.
d. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.
e. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
f. Un gráfico aproximado de la función.

30. Para la función $g(x) = e^{x} - e^{-x}$, encuentren lo siguiente:

a. El dominio.

b. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

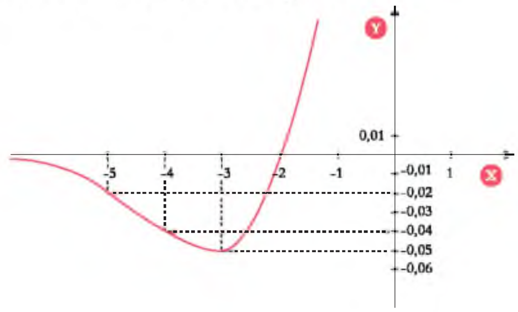
c. Los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.

d. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

e. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

f. Un gráfico aproximado de g(x).

VII. Para realizar el gráfico de f(x), utilizamos toda la información que hemos obtenido en los ítem anteriores. Luego, el gráfico de la función f(x) es el siguiente:



b. Hagamos el estudio completo de $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

I. El dominio de la función es **Dom g = ℝ – {1}**, pues debe ser $(x-1)^2 \neq 0$, o sea, $x \neq 1$.

II. Como g(x) es una función racional, entonces, **es continua en cualquier valor de su dominio**.

III. Para hallar la asíntota vertical, calculamos el límite de g(x) cuando **x** tiende a 1, pues 1 no pertenece al dominio de g(x).

Luego, resulta que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$. Por lo tanto, la recta **x = 1 es asíntota vertical** de g(x).

Al buscar la asíntota horizontal obtenemos que

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$, con lo cual la función **no tiene asíntota horizontal.**

Hallemos la asíntota oblicua de g(x). Es decir, calculemos los valores **m** y **b** de la recta $y = mx + b$.

Al hallar el valor de **m** resulta que

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2(x-1)} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2} = 1$$

Al hallar el valor de **b** obtenemos que $b = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) - mx =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{4x-1}{2(x-1)} \underset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{4}{2} = 2$$

Luego, la recta **y = x + 2 es asíntota oblicua** de la función.

IV. Para encontrar los intervalos de positividad y negatividad, buscamos los ceros de g(x) y usamos el teorema de la conservación del signo en los dos intervalos en donde la función es continua, o sea, en $(-\infty; 1)$ y en $(1; +\infty)$.

Luego, si $g(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Al considerar, por ejemplo, los valores −4, 0,5 y 5 obtenemos que $g(-4) < 0$, $g(0{,}5) > 0$ y $g(2) > 0$. Utilizando estos datos confeccionamos el siguiente esquema:

g(x)	−		+		+
	$g(-4) < 0$	0	$g(0{,}5) > 0$	1	$g(2) > 0$

Por lo tanto, resulta que $\mathbf{C^+ = (0; 1) \cup (1; +\infty)}$ y $\mathbf{C^- = (-\infty; 0)}$.

V. Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos, trabajamos con la positividad y la negatividad de g'(x).

Como $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$, entonces,

$$g'(x) = \frac{3x^2 . (x-1)^2 - x^3 . 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2\cancel{(x-1)}\,[3(x-1)-2x]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{x^2(3x-3-2x)}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

Busquemos el dominio y los ceros de g'(x).

El dominio de la función derivada es Dom $g' = \mathbb{R} - \{1\}$, pues debe ser $(x-1)^3 \neq 0$.

Luego, si $g'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$.

Por lo tanto, la positividad y la negatividad de g'(x) pueden cambiar sólo en 0, en 1 y en 3. Consideremos los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 3)$ y $(3; +\infty)$ y elijamos en cada uno de ellos un valor, por ejemplo: -1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$ y 4. Luego, obtenemos lo siguiente:

$g'(-1) > 0$, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$, $g'\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$ y $g'(4) > 0$. Usando estos datos realizamos la siguiente tabla:

	$(-\infty; 0)$	0	(0; 1)	1	(1; 3)	3	$(3; +\infty)$
g'(x)	+	0	+	no existe	−	0	+
g(x)	↗	0	↗	no existe	↘	6,75	↗

Por lo tanto, la función g(x) **crece en $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$** y **decrece en (1; 3)**, con lo cual **en x = 3 tiene un mínimo relativo y no posee máximos relativos.**

31. Consideren las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

b. $g(x) = \dfrac{x^4 + 27}{x^3}$

Para cada una de las funciones anteriores obtengan lo siguiente:

I. El dominio.

II. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

III. Los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.

IV. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

V. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

VI. Un gráfico aproximado de la función.

32. Para $h(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$, encuentren lo siguiente:

a. El dominio.
b. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.
c. Los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.
d. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.
e. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
f. Un gráfico aproximado de h(x).

En x = 1, la función g(x) cambia el crecimiento, pero en ese valor no hay un extremo relativo, pues $1 \notin$ Dom g.

VI. Para hallar los intervalos de concavidad, trabajamos con g"(x) de manera análoga a como lo hicimos con g'(x) en el ítem **V.**

Como $g'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = \dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{(3x^2-6x)\,.\,(x-1)^3-(x^3-3x^2)\,.\,3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)^2}\,x[(3x-6)(x-1)-3(x^2-3x)]}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= \frac{x(\cancel{3x^2}-3x-6x+6-\cancel{3x^2}+9x)}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Luego, el dominio de g"(x) es Dom g" = $\mathbb{R} - \{1\}$, pues debe ser $(x-1)^4 \neq 0$, o sea, $x \neq 1$.

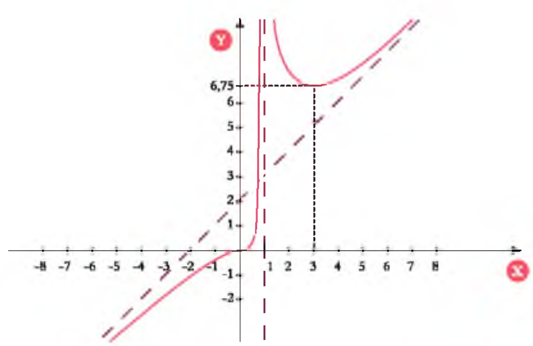
Si $g''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0$. Por lo tanto, el signo de g"(x) sólo puede cambiar en 0 o en 1.

Consideremos los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ y $(1; +\infty)$ y elijamos en cada uno de ellos un valor, por ejemplo -2, $\dfrac{1}{4}$ y 6. Luego, obtenemos que $g''(-2) < 0$, $g''\left(\dfrac{1}{4}\right) > 0$ y $g''(6) > 0$. Utilizando estos datos, confeccionamos la siguiente tabla:

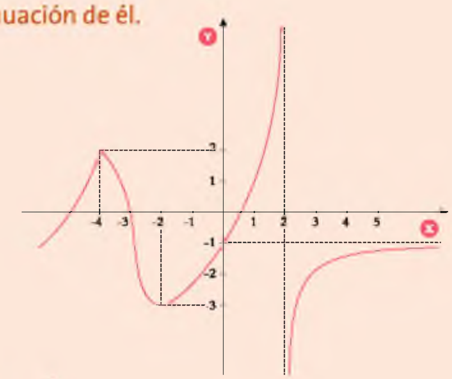
	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
g"(x)	–	0	+	no existe	+
g(x)	∩	0	∪	no existe	∪

Por lo tanto, la función g(x) es **cóncava hacia abajo en $(-\infty; 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0; 1) \cup (1; +\infty)$**, con lo cual **el punto de inflexión es (0; g(0)), es decir, el punto (0; 0).**

VII. Usando toda la información que obtuvimos acerca de g(x) en los ítem anteriores, realizamos un gráfico aproximado de ella. Luego, el gráfico de la función g(x) es el siguiente:



1. Consideren el siguiente gráfico que corresponde a la función f(x) y completen lo que se indica a continuación de él.



a. Dom f = .

b. La asíntota vertical de f(x) es .

c. La asíntota horizontal de la función es .

d. La función f(x) es derivable en .

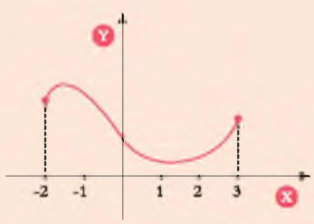
e. f'(x) > 0 en .

f. El máximo relativo de f(x) se encuentra en .

g. El mínimo relativo de la función está en .

h. f"(x) > 0 en .

2. La función derivada de g(x) tiene el siguiente gráfico:



Observando el gráfico decidan si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.

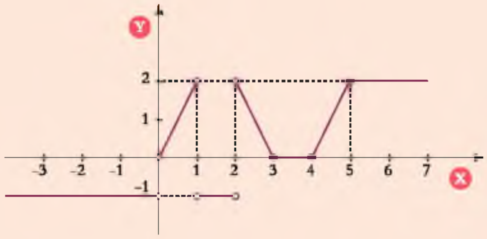
a. La función g(x) tiene un máximo y un mínimo relativo en el intervalo (-2; 3).

b. La función g(x) es cóncava hacia arriba en el intervalo (0; 3).

c. La función g(x) crece en el intervalo [–2; 3].

d. El punto (0; g(0)) es punto de inflexión de g(x).

3. El gráfico que figura a continuación corresponde a la función derivada de una función f(x) continua en ℝ.



A partir del gráfico anterior completen las siguientes afirmaciones:

a. La función f(x) crece en _______.

b. La función f'(x) < 0 en _______.

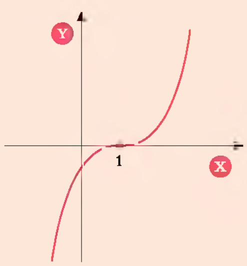
c. La función f(x) es constante en _______.

d. La función f(x) no es derivable en _______.

e. Los máximos relativos de f(x) están en _______.

f. La función f(x) es cóncava hacia arriba en _______.

4. a. Realicen el gráfico aproximado de una función h(x) para la cual el gráfico de su función derivada sea el siguiente:



b. ¿Es único el gráfico de h(x)? Justifiquen su respuesta.

____

____

5. Determinen los valores críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de una función g(x) que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

a. $g(x) = 0$ si $x = -4$, $g(-3) = 4$, $g(-2) = 2$, $g(0) = 1$

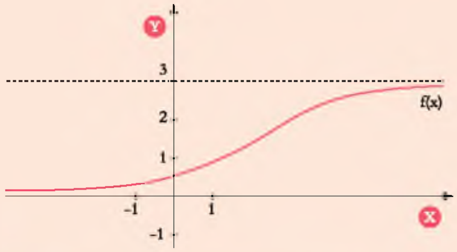
b. g(x) es derivable en todos los números reales

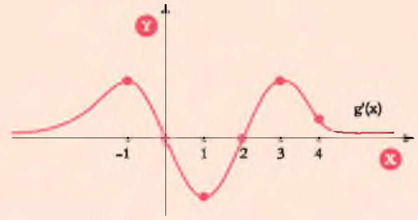
c. $g'(x) = 0$ si $x = -3$ o $x = 0$

d. $g'(x) > 0$ si $x < -3$ o $x > 0$ y $g'(x) < 0$ si $-3 < x < 0$

e. $g''(x) < 0$ si $x < -2$ y $g''(x) > 0$ si $x > -2$

6. Consideren los siguientes gráficos correspondientes a f(x) y g'(x), y dibujen el de f'(x) y el de g(x).





7. Demuestren que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$ y **b**, **c** y **d** son números reales, tiene dos puntos estacionarios distintos, entonces, en la abscisa de uno de ellos posee un máximo relativo y en la abscisa del otro tiene un mínimo relativo.

8. Encuentren los valores de **a** para los cuales $g(x) = ax - \operatorname{sen} x$ es creciente en $\mathbb{R}$.

9. Verifiquen que la función $h(x) = 5\sqrt[3]{x} + 8 \ln x - 27$ es creciente en $\mathbb{R}^+$, o sea, en $(0; +\infty)$.

10. ¿Cuáles son los valores de **a** y **b** si $f(x) = ax^2 + bx$ tiene un máximo relativo en $x = 2$ y la imagen de 2 a través de $f(x)$ es 6?

11. a. ¿Cuál es el valor de **a** para que la función $g(x) = x^3 + \frac{(a-1)}{x}$ tenga un extremo en $x = 2$?

b. Determinen si para el valor de **a** hallado en el ítem anterior la función tiene un máximo o un mínimo relativo en $x = 2$ y si, además, $g(x)$ posee otro extremo.

12. Realicen el análisis completo de las funciones que se indican encontrando para cada una de ellas lo siguiente:

I. El dominio.
II. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.
III. Los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.
IV. Los valores de **x** en los cuales la función no es derivable.
V. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.
VI. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
VII. Un gráfico aproximado de la función.

a. $a(x) = (x-1)^2\,(x+2)^2$

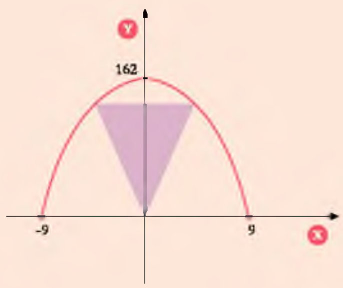
b. $b(x) = \dfrac{7x^2}{x^2 - 4}$

c. $c(x) = \ln(x^2 + 2x + 10)$

d. $d(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{4}x}$

13. Obtengan los números que pertenecen al intervalo [0; 1] tales que la diferencia entre el número y su raíz cuadrada sea la mínima posible.

14. El siguiente gráfico muestra un triángulo isósceles en el cual un vértice es el origen de coordenadas y los otros vértices son puntos simétricos de la parábola correspondiente a $f(x) = 162 - 2x^2$, donde $-9 \le x \le 9$.
Entre todos los triángulos isósceles que cumplen las condiciones mencionadas, ¿cuáles son los vértices del de mayor área?



15. Calculen los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(\cos x - 1)}{\operatorname{sen} 3x - 3x} =$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x^2} =$

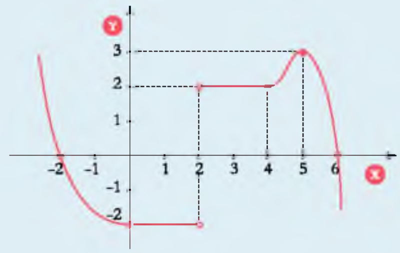
c. $\lim\limits_{x \to 5^+} (x-5)^2 \ln(x-5) =$

d. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} =$

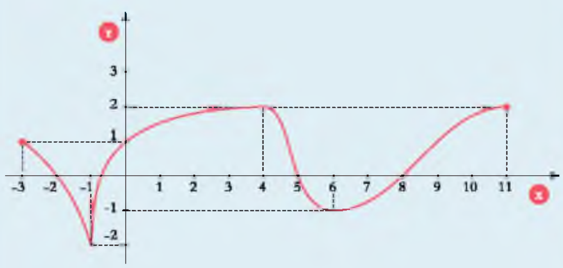
e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \ln x}{x \ln x} =$

16. Hallen $f(0)$ y $f'(0)$ considerando que $f(x)$ es derivable en cualquier valor de su dominio, $f'(x)$ es continua en cualquier valor de su dominio y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 3\cos x}{\operatorname{sen} x} = 7$.

1. La función f(x) es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en cualquier valor de $\mathbb{R} - \{2\}$. Si el gráfico de f'(x) es el que figura a continuación, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de f(x).



2. A partir del siguiente gráfico correspondiente a una función g(x) definida en el intervalo [–3; 11], realizar el gráfico aproximado de g'(x).



3. Determinar para qué valores de **a** la función h(x) = ax lnx – ax es creciente en el intervalo (0; 1).

4. Se quiere construir una caja con tapa, de base cuadrada y de 40.000 cm³ de capacidad. El costo del material para las caras laterales es el doble que para las tapas.
¿Cuáles deben ser las medidas de la caja para que su costo total sea mínimo?

5. Realizar el análisis completo de las funciones que se indican, obteniendo para cada una de ellas lo siguiente:

I. El dominio.

II. Las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

III. Los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.

IV. Los valores de **x** en los cuales la función no es derivable.

V. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos.

VI. Los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

VII. Un gráfico aproximado de la función.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

b. $g(x) = x\,e^{-x}$

6. Si la función f(x) es derivable en cualquier valor de su dominio, la función f'(x) es continua en cualquier valor de su dominio, f(2) = 0 y f'(2) = 6, ¿cuál debe ser el valor de **a** para que

$$\lim_{x \to 1} = \frac{f(a \ln x + 2)}{\operatorname{sen}(\pi x)} = 3?$$

3 El concepto de integral y el cálculo de áreas

Desde tiempos remotos, el hombre se esforzó por calcular áreas de distintas figuras geométricas. Dicho cálculo resultaba sencillo si la forma de las figuras geométricas era regular; en cambio, se tornaba engorroso cuando las figuras tenían formas no regulares. En el siglo XVII, Newton y Leibniz lograron dar una respuesta a esa cuestión.
En este capítulo, estudiaremos cómo calcular áreas de figuras no regulares.

Los problemas matemáticos no siempre tienen una sola forma de resolverse. Por este motivo, es importante que compartan entre ustedes las distintas resoluciones que surgieron al resolver un problema, pues alguna de ellas podría servirles en otra ocasión.

¿Sabían que...?
Una de las frases más famosas de Newton, enunciada en honor de su maestro, Isaac Barrow, es “Si he logrado ver más allá que otros hombres es porque he estado a hombros de gigantes”.

Isaac Barrow nació en 1630, en Londres. En 1644, ingresó en la Universidad de Cambridge y se graduó en 1648. En 1655, fue nombrado para enseñar griego en esa universidad y luego, en 1663, como profesor de Matemática de esa institución. Mientras trabajaba en la Universidad de Cambridge, Barrow dictó una serie de conferencias introductorias, a las que Newton concurrió.
En 1672, el rey de Inglaterra nombró a Barrow su maestro y luego vicerrector del Trinity College, de cuya ahora famosa biblioteca Barrow colocó los cimientos. Entre sus actividades, figura la publicación de trabajos de Euclides, Arquímedes y Apolonio.
Isaac Barrow falleció el 4 de mayo de 1677, en Londres.

Problema 1

Un auto parte de una ciudad ubicada a 20 kilómetros de Buenos Aires rumbo a Mar del Plata. La función $v(t) = 9t^2 + 8$ relaciona la velocidad instantánea del auto (v), medida en kilómetros por hora, con el tiempo de viaje (t), medido en horas.
a. ¿Cuál es la velocidad del auto después de 3 horas de viaje?
b. Encuentren una función que permita calcular la distancia a la que el auto se encuentra de Buenos Aires en cada instante del viaje.

Problema 1

a. Para responder a la pregunta, debemos reemplazar **t** por 3 en v(t). Luego, $v(3) = 9 \,.\, 3^2 + 8 = 89$. Por lo tanto, a las 3 horas de viaje, la velocidad del auto es de 89 kilómetros por hora.
b. Como vimos en el capítulo 1, la velocidad instantánea de un móvil es la función derivada de la función que determina la distancia del móvil a un cierto lugar, en nuestro caso a Buenos Aires. Por lo tanto, para obtener lo pedido en **b.**, debemos hallar una función d(t) cuya función derivada sea $v(t) = 9t^2 + 8$.
Sabemos que al derivar una función polinómica, es decir, al hallar su función derivada, su grado se reduce en uno, y además que para derivar una suma hay que derivar cada término. Busquemos, entonces, una función que al derivarla dé $9t^2$, y otra, que dé 8.
Para que $9t^2$ sea la función derivada de una función, ésta debe ser de la forma at^3, con $a \neq 0$. Luego, al derivar $a \,.\, t^3$ e igualar el resultado a $9t^2$ resulta que $(a \,.\, t^3)' = a \,.\, 3t^2 = 9t^2 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$.
Por lo tanto, una de las funciones que buscamos es $3t^3$ pues $(3t^3)' = 3 \,.\, 3t^2 = 9t^2$.
Para que 8 sea la función derivada de una función, ésta debe ser de la forma $b \,.\, t$, con $b \neq 0$. Entonces, al derivar $b \,.\, t$ e igualar a 8 obtenemos $(bt)' = b = 8$. Por lo tanto, la otra función buscada es $8t$, pues $(8t)' = 8$.
Luego, resulta que $d(t) = 3t^3 + 8t$. Sin embargo, también podría ser $d(t) = 3t^3 + 8t + 7$ o $d(t) = 3t^3 + 8t + 2$, pues en ambos casos la función derivada también es v(t). Es decir, podemos considerar $d(t) = 3t^3 + 8t + k$, con $k \in \mathbb{R}$.
Como el auto parte a 20 kilómetros de Buenos Aires, entonces, es $d(0) = 20$ y, en consecuencia, es $k = 20$. Luego, la función que permite calcular, en cada instante, la distancia del auto a Buenos Aires es $d(t) = 3t^2 + 8t + 20$.

Primitiva de una función
Llamamos **primitiva de una función f(x)** a otra función F(x) que verifica que $F'(x) = f(x)$.

Conclusión

▮ **Si f(x), que es una función continua en cualquier valor de su dominio, tiene una primitiva, entonces, existen infinitas primitivas de f(x).**

▮ **Si F(x) y G(x) son dos primitivas distintas de f(x), entonces, existe un número real k distinto de cero tal que F(x) = G(x) + k.**

Problema 2

Para cada uno de los siguientes casos, hallen todas las funciones primitivas de f(x).

a. $f(x) = \frac{1}{x} + 7 \operatorname{sen} x - 12\sqrt[3]{x}$

b. $f(x) = \sqrt{x} + 2e^x$

c. $f(x) = \cos x - \frac{3}{x^2} + 7x^3$

Problema 2

Antes de comenzar a resolver el problema 2, establezcamos las funciones primitivas de algunas funciones elementales de las cuales conocemos su derivada[1].

Funciones primitivas de funciones elementales

▮ **Si $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{R}-\{-1\}$, entonces, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$,**

pues $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + k\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}x^{n+1-1} = x^n$.

▮ **Si f(x) = sen x, entonces, F(x) = – cos x + k,**

porque $(-\cos x + k)' = -(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$.

▮ **Si f(x) = cos x, entonces, F(x) = sen x + k,**

ya que $(\operatorname{sen} x + k)' = \cos x$.

▮ **Si $f(x) = e^x$, entonces, $F(x) = e^x + k$**, pues $(e^x + k)' = e^x$.

▮ **Si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces, $F(x) = \ln|x| + k$.**

Verifiquemos esta afirmación.

Como debe ser $x \neq 0$, entonces, es $x > 0$ o $x < 0$.

Si $x > 0 \Rightarrow \ln|x| + k = \ln(x) + k \Rightarrow (\ln|x| + k)' = \frac{1}{x}$.

Si $x < 0 \Rightarrow \ln|x| + k = \ln(-x) + k \Rightarrow (\ln|x| + k)' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Por lo tanto, si $x \neq 0$, obtenemos que $(\ln|x| + k)' = \frac{1}{x}$.

[1] Ver capítulo 1, página 28.

1. Para un móvil que parte del reposo, la función v(t) = 9t permite determinar su velocidad (v), medida en kilómetros por hora, respecto del tiempo de marcha (t), medido en horas.

a. ¿Cuál es la velocidad del móvil después de 15 horas continuas de marcha?

____

b. Encuentren una función que permita calcular el espacio recorrido por el móvil después de **t** horas de marcha.

____

____

____

c. ¿Cuántos kilómetros recorre el móvil después de 15 horas de estar en continuo movimiento?

____

____

2. Para cada uno de los siguientes casos, verifiquen si F(x) es o no una función primitiva de f(x).

a. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1$ y $f(x) = x^3$

____

b. $F(x) = e^x \ln x + 2$ y $f(x) = \frac{e^x}{x}$

____

c. $F(x) = 3x^5 - 8x^2 + 9x + 7$ y $f(x) = 15x^4 - 16x + 9$

____

d. $F(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2} + 1$ y $f(x) = \frac{2x + 3}{3x^2}$

____

e. $F(x) = x \ln x - x$ y $f(x) = \ln x$

____

3. Determinen si alguna de las siguientes funciones es una función primitiva de $g(x) = x^2$ sen x.

a. $G(x) = 2x \cos x$

b. $G(x) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + 8$

c. $G(x) = 2x \cos x - 5$

d. $G(x) = \frac{x^3}{3}(-\cos x)$

e. $G(x) = 2x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x + 2 \cos x$

4. Encuentren una función F(x) que sea una primitiva de $f(x) = \frac{5x^2 + \sqrt{x} + 2}{x^3}$ y que además verifique que F(1) = 8.

5. Obtengan una función H(x) que cumpla las siguientes condiciones: la función H(x) es una primitiva de $h(x) = \frac{x^3 + 2\sqrt{x^3} + x}{x^3}$ y el punto (4; 5) pertenece a H(x).

- **Si $f(x) = \frac{1}{x-a}$, donde $a \in \mathbb{R}$, entonces, $F(x) = \ln|x-a| + k$**, ya que usando la regla de la cadena y la afirmación anterior resulta que $(\ln|x-a| + k)' = \frac{1}{x-a} \cdot 1 = \frac{1}{x-a}$.

Establezcamos también, a partir de las propiedades de las funciones derivables[2], propiedades de las funciones primitivas.

Propiedades de las funciones primitivas

- **Si F(x) es una primitiva de f(x) y G(x) es una primitiva de g(x), entonces, F(x) + G(x) es una primitiva de f(x) + g(x).**
Esta propiedad es cierta porque
$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.
- **Si F(x) es una primitiva de f(x) y G(x) es una primitiva de G(x), entonces, F(x) – G(x) es una primitiva de f(x) – g(x).**
Esta propiedad se puede comprobar utilizando un razonamiento similar al empleado para verificar la propiedad anterior.
- **Si F(x) es una primitiva de f(x) y c es cualquier número real, entonces, c . F(x) es una primitiva de c . f(x).**
Esta propiedad se verifica porque $(c \cdot F(x))' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$.

Resolvamos el problema 2 utilizando estas propiedades y las funciones primitivas de las funciones elementales.

a. Para la función $f(x) = \frac{1}{x} + 7 \operatorname{sen} x - 12\sqrt[3]{x} = \frac{1}{x} + 7 \operatorname{sen} x - 12x^{\frac{1}{3}}$

obtenemos que $F(x) = \ln|x| + k_1 + 7(-\cos x) + k_2 - 12\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + k_3 =$

$= \ln|x| - 7\cos x - 9x^{\frac{4}{3}} + k$

considerando $k_1 + k_2 + k_3 = k$

Verifiquemos que, para cada valor de **k**, la función F(x) es una primitiva de f(x).

Al hallar la función derivada de F(x) obtenemos lo siguiente:

$F'(x) = \frac{1}{x} - 7(-\operatorname{sen} x) - 9\,\frac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x} + 7 \operatorname{sen} x - 12\sqrt[3]{x} = f(x)$

b. Para $f(x) = \sqrt{x} + 2e^x = x^{\frac{1}{2}} + 2e^x$ su función primitiva, para cada valor de **k**, es $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2e^x + k = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2e^x + k$.

Al comprobar si F'(x) es f(x) resulta que

$F'(x) = \frac{2}{3}\,\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} + 2e^x = x^{\frac{1}{2}} + 2e^x = f(x)$

[2] Ver capítulo 1, página 23.

c. Para la función $f(x) = \cos x - \frac{3}{x^2} + 7x^3 = \cos x - 3x^{-2} + 7x^3$

obtenemos que $F(x) = \text{sen } x - 3\frac{x^{-1}}{(-1)} + 7\frac{x^4}{4} + k =$

$= \text{sen } x + 3x^{-1} + \frac{7}{4}x^4 + k$

Al verificar, para cada valor de **k**, si F(x) es una primitiva de f(x), resulta que $F'(x) = \cos x + 3(-1)x^{-2} + \frac{7}{4}4x^3 =$

$= \cos x - \frac{3}{x^2} + 7x^3 = f(x)$

Problema 3

Claudio necesita calcular, en kilómetros cuadrados, el área de su campo, que tiene la siguiente forma:

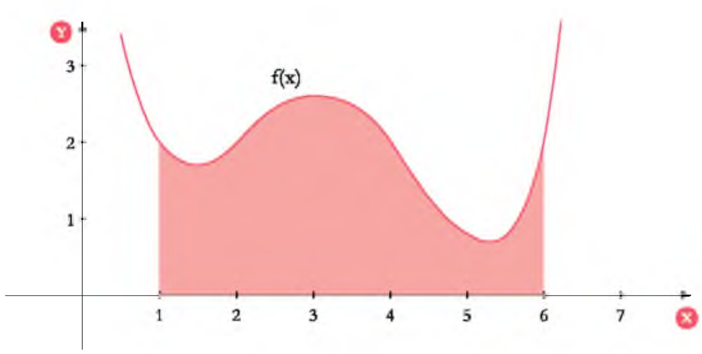
Al intentar encontrar el área que busca, como la forma del campo no es regular, decide introducir la figura de su campo en una computadora. Por medio de ella, logra averiguar que la función correspondiente al lado curvo del campo es la siguiente:

$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{13}{10}x^3 + \frac{28}{5}x^2 - \frac{46}{5}x + \frac{34}{5}$ en el intervalo [1; 6].

Si estuviéramos en el lugar de Claudio, ¿cómo podemos hacer para calcular el área del campo si sólo disponemos del dato brindado por la computadora?

Problema 3

Dibujemos la figura del campo en un sistema de ejes cartesianos.



6. Hallen las funciones primitivas de las siguientes funciones:

a. $a(x) = e^x - \text{sen } x + \sqrt[3]{x}$

b. $b(x) = \frac{x \text{ sen } x + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x}$

c. $c(x) = 7x^8 - 5x^7 + 2x^6 - 10x^3 + 6x^2 + 3x + 9$

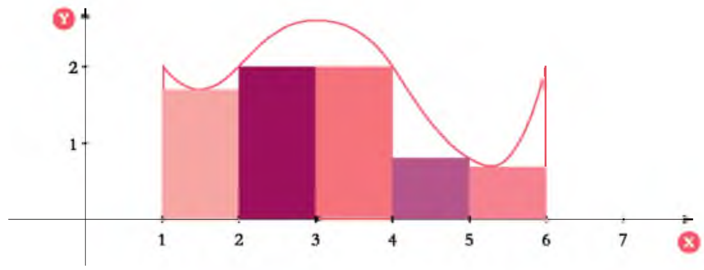
d. $d(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

e. $e(x) = (1 + \sqrt{x})(x^2 + \sqrt[3]{x} - 1)$

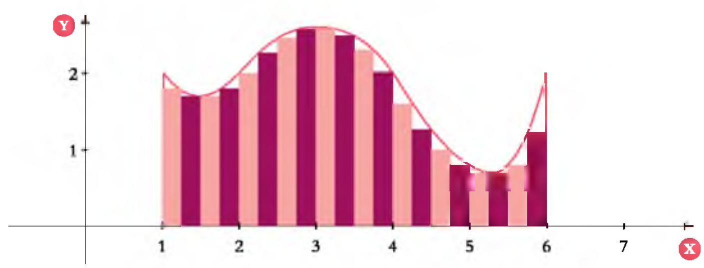
¿Sabían que...?
El estudio del cálculo de áreas de figuras con formas no regulares comenzó con los griegos, en el siglo III a. C. Arquímedes fue el primero en tratarlo considerando las superficies como una colección infinita de segmentos, con lo cual comenzó a esbozar lo que siglos después sería el cálculo integral. Como los griegos tenían “terror” al concepto de infinito, hubo que esperar dos mil años para que las ideas de Arquímedes fueran retomadas.
Quien retomó las ideas de Arquímedes fue Cavalieri. Posteriormente, John Wallis las aritmetizó y logró darles valores numéricos a las áreas. De esta manera, Wallis convirtió el cálculo de áreas, que hasta ese momento era geométrico, en cálculos aritméticos.

John Wallis fue un matemático inglés que nació en Ashford, en 1616, y falleció en Oxford en 1703. Fue el más importante de los matemáticos ingleses inmediatamente anteriores a Newton. Se consagró como sacerdote, pero dedicó la mayor parte de su tiempo a su profesión de matemático. Escribió extensos trabajos de Matemática. Además fue el primero en utilizar el símbolo del infinito y en extender el uso de los exponentes a los números negativos y a las fracciones.

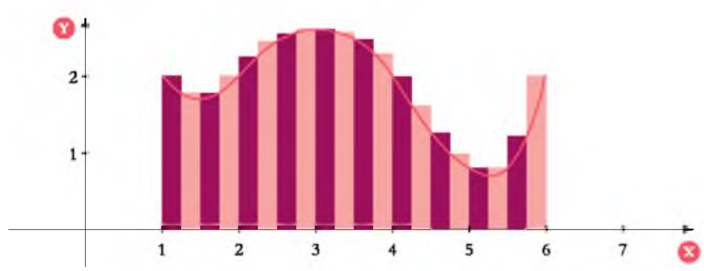
Para resolver el problema 2, tenemos que calcular el área de esta figura, que no es ninguna figura geométrica conocida. O sea, debemos calcular el área de la región determinada por el gráfico de f(x) y el eje **x**, entre x = 1 y x = 6, es decir, en el intervalo [1; 6].
Observemos que f(x) es una función continua y positiva en cualquier valor de **x** perteneciente a [1; 6].
Luego, para hallar el área que buscamos, podemos comenzar por aproximarla construyendo rectángulos que estén incluidos en la figura anterior de la siguiente manera:



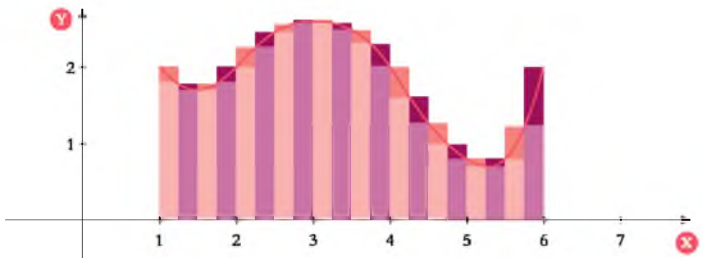
Es decir, dividimos al intervalo [1; 6] en cinco subintervalos de igual longitud y sumamos las áreas de los cinco rectángulos cuyas bases son respectivamente cada uno de esos subintervalos y cuyas alturas corresponden en cada caso al mínimo valor que toma la función en el subintervalo. Para realizar una mejor aproximación del área, dividimos el intervalo [1; 6] en más subintervalos, de igual longitud, de la siguiente forma:



La suma de las áreas de los rectángulos obtenidos se llama **aproximación del área por defecto**.
Al dividir el intervalo [1; 6], también podemos considerar rectángulos que sobrepasen la figura de la siguiente manera:



La suma de las áreas de los rectángulos así obtenidos se llama **aproximación del área por exceso**.
Consideremos simultáneamente rectángulos que estén incluidos en la figura y rectángulos que la sobrepasen, de la siguiente forma:



A medida que dividimos el intervalo [1; 6] en más subintervalos, las aproximaciones por defecto y por exceso que obtenemos dan valores cada vez más cercanos al área buscada.

Área de la región limitada por el gráfico de una función positiva

Si una función f(x) es continua en cualquier valor del intervalo [a; b] y positiva en el intervalo (a; b), entonces, **el área de la región limitada por el gráfico de f(x), el eje x, x = a y x = b** es el valor del límite de las aproximaciones del área por defecto y por exceso cuando la cantidad de subintervalos de igual longitud en que se divide el intervalo [a; b] tiende a infinito.

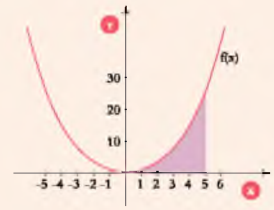
Es decir que el área de una región es el valor que resulta de sumar las áreas de infinitos rectángulos, determinados por defecto y por exceso, en los cuales la base es cada vez más pequeña en cada nueva subdivisión del intervalo [a; b].
La notación que se utiliza para indicar el área (A) de la región limitada por el gráfico de f(x), el eje **x**, x = a y x = b es la siguiente:

$\int_a^b f(x)dx$, o sea, $A = \int_a^b f(x)dx$. Esta notación se debe a que

- El símbolo $\int$ es una deformación de la letra S asociada a la palabra "suma" y significa que sumamos infinitos términos, cada uno de los cuales es el área de un rectángulo.
- El símbolo dx (diferencial de **x**) representa la variación que en el eje **x** tiene el valor de la base de cada rectángulo[2].
- El producto f(x) . dx simboliza al área de cada rectángulo.
- Los valores **a** y **b** se llaman **límites de integración** e indican el intervalo en el que calculamos el área de la región.

[2] Ver capítulo 1, página 32.

7. Consideren el siguiente gráfico en el cual es $f(x) = x^2$.



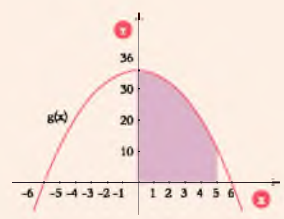
Encuentren una aproximación por defecto del área de la figura sombreada para cada uno de estos casos:
a. Dividiendo el intervalo [0; 5] en cinco subintervalos de igual longitud.
b. Dividiendo el intervalo [0; 5] en diez subintervalos de igual longitud.

____

____

____

8. En el gráfico que figura a continuación, la región sombreada está debajo de la función $g(x) = -x^2 + 36$.



Obtengan una aproximación por exceso del área de la región sombreada de cada una de las siguientes maneras:
a. Dividiendo el intervalo [0; 5] en cinco subintervalos de igual longitud.
b. Dividiendo el intervalo [0; 5] en diez subintervalos de igual longitud.

____

____

____

¿Cómo se lee...?
$\int_a^b f(x)dx$: integral entre **a** y **b** de f(x) diferencial de x, o integral de f(x) diferencial de **x** entre **a** y **b**.

¿Sabían que...?

El primer matemático que utilizó el símbolo $\int$ fue Leibniz en un manuscrito del 29 de octubre de 1675 que nunca publicó.

El 21 de noviembre del mismo año agregó el símbolo dx a la notación.

La notación de Leibniz fue impresa por primera vez en 1686, en una revista llamada *Acta eruditorum*.

En un comienzo, los límites de integración se escribían con palabras; luego Euler los empezó a poner entre paréntesis.
Más tarde, en 1822, Fourier introdujo la notación que conocemos actualmente.

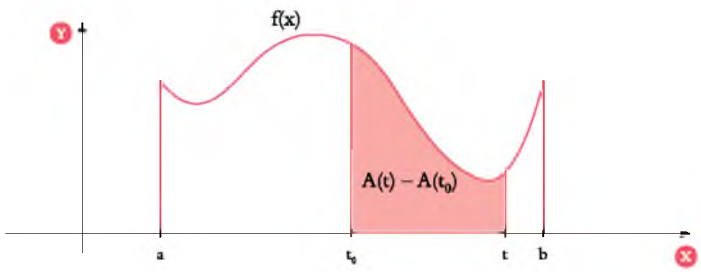
Jean Baptiste Joseph Fourier nació en Francia el 21 de marzo de 1768 y murió el 16 de mayo de 1830. Fue un matemático conocido principalmente por su contribución al análisis matemático en el flujo del calor. Enseñó Matemática en la *École Normale* y fue consejero científico del ejército de Napoleón.
Sus investigaciones fueron muy valoradas, a pesar de que inicialmente habían sido criticadas por falta de rigor.

Jean Baptiste Joseph Fourier

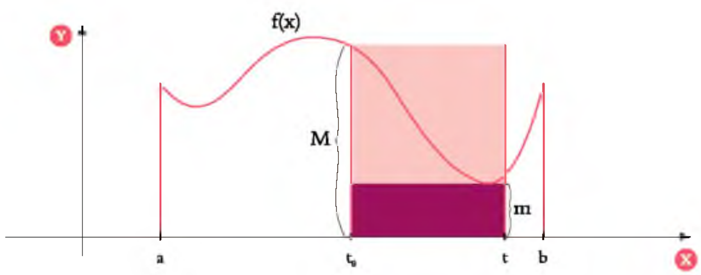
Como no es posible determinar los infinitos rectángulos a través de cuyas áreas podríamos calcular el área de la figura del campo, busquemos la función que nos permita hallar esa área. Es decir, tratemos de encontrar la función área.

Consideremos $A(t) = \int_a^t f(x)dx$, es decir, llamemos A(t) a la función que permite obtener el área de la región limitada por el gráfico de la función f(x), que es continua en cualquier valor de [a; b] y positiva en (a; b), el eje **x**, x = a y x = t, con $a \leq t \leq b$, y hallemos la función derivada de A(t). Resulta, entonces, que $A'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0}$. Calculemos en principio este límite cuando **t** tiende a t_0 por derecha, siendo $a \leq t \leq b$.

A la expresión $A(t) - A(t_0)$ la podemos representar gráficamente de la siguiente manera:



Luego, la diferencia $A(t) - A(t_0)$ es el área de la región limitada por el gráfico de f(x), el eje **x**, $x = t_0$ y $x = t$.
Como podemos observar en el siguiente gráfico:



A la región antes mencionada la podemos incluir en un rectángulo cuya base mide $t - t_0$ y cuya altura mide M, que es el máximo valor que toma f(x) para cualquier valor de **x** entre t_0 y **t**.
También, dicha región incluye al rectángulo cuya base mide $t - t_0$ y cuya altura mide **m**, que es el mínimo valor que toma f(x) para cualquier valor de **x** entre t_0 y **t**. Por lo tanto, resulta que
$m \cdot (t - t_0) \leq A(t) - A(t_0) \leq M \cdot (t - t_0)$

Luego, dividiendo toda la expresión anterior por $t - t_0$, obtenemos, debido a que $t > t_0$, que $m \leq \dfrac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} \leq M$. Como la función f(x) es continua en cualquier valor del intervalo $[t_0; t]$, cuando $t \to t_0^+$ resulta que

$m \to f(t_0)$ y $M \to f(t_0) \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ f(t_0)}}{M} \leq \dfrac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ f(t_0)}}{M}$. Es decir que la expresión $\dfrac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0}$ está comprendida entre dos funciones que tienden a $f(t_0)$ cuando $t \to t_0^+$. O sea que $\lim\limits_{t \to t_0^+} \dfrac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$.

De manera similar podemos demostrar que

$$\lim_{t \to t_0^-} \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$$

Luego, resulta que $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$. Por lo tanto, $A'(t_0) = f(t_0)$ para cualquier valor de t_0 entre **a** y **b**. Entonces, podemos afirmar que para $a \leq t \leq b$ es $A'(t) = f(t)$.

Conclusión

Teorema fundamental del cálculo

Si A(t), con $a \leq t \leq b$, es la función que permite calcular el área de la región limitada por el gráfico de la función f(x), que es continua en cualquier valor de [a; b] y positiva en (a; b), el eje x, x = a y x = t, entonces, A'(t) = f(t). Es decir que la función área, o sea, A(t), es una primitiva de f(t).

Por lo tanto, para hallar la función área correspondiente a la región encerrada por el gráfico de f(x) con el eje **x**, entre a y **b**, debemos encontrar una primitiva de f(x). Pero sabemos que hay infinitas primitivas de una misma función. ¿Cuál de todas ellas será la función área?
Si G(t) es una primitiva cualquiera de f(t), entonces, G'(t) = f(t).
Luego, la diferencia entre A(t) y G(t) es un número real. Es decir que para cualquier valor de **t**, con $a \leq t \leq b$ se verifica que
A(t) = G(t) + k, donde **k** es un número real.
Si consideramos t = a, entonces, A(a) = G(a) + k . Pero como A(a) es el área de la figura limitada por el gráfico de f(t) y el eje **x**, entre **a** y **a**, entonces, es A(a) = 0. Luego, obtenemos lo siguiente:
$0 = G(a) + k \Rightarrow k = -G(a)$

9. Calculen la función derivada de las siguientes funciones:

a. $A(t) = \int_0^t x^4 dx$

b. $B(t) = \int_0^t x^3 dx$

c. $C(t) = \int_0^{t^2} \cos x \, dx$

10. Hallen los valores de **t** en los cuales las siguientes funciones tienen máximos o mínimos relativos.

a. $H(t) = \int_1^t (x-1)^4 (x+5)^5 dx$

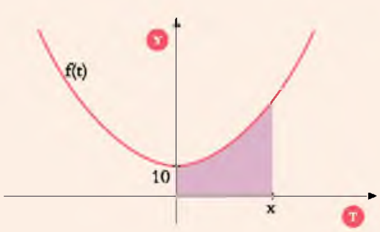
b. $J(t) = \int_0^t (x^2 - 6x + 8) dx$

11. Para cada uno de los siguientes casos, grafiquen la función f(x) y hallen el área de la región determinada por el gráfico de f(x) con el eje **x**.

a. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

b. $f(x) = -x^4 + 1$

12. El gráfico que figura a continuación es $f(t) = t^2 + 10$. Encuentren la función que permita calcular el área de la región sombreada para cualquier valor de **x**.



Por lo tanto, si G(t) es una primitiva de f(t), la función A(t) = G(t) – G(a) es la función que permite obtener el área de la región encerrada por el gráfico de f(x) y el eje **x**, entre **a** y **t**.

O sea que $A(t) = \int_a^t f(x)dx = G(t) - G(a)$, donde G(t) es una primitiva cualquiera de f(t). Entonces, al calcular el área entre **a** y **b** obtenemos $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Conclusión

Regla de Barrow

Si G(x) es una primitiva cualquiera de f(x), que es continua en cualquier valor del intervalo [a; b] y positiva en (a; b), entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

La expresión G(b) - G(a) se puede escribir como $G(x)\Big|_a^b$, con lo cual resulta que $\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

Calculemos, entonces, el área que debía hallar Claudio utilizando las propiedades de la página 74 y las funciones primitivas de la página 73.
Luego, obtenemos lo siguiente:

$$\int_1^6 \left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{13}{10}x^3 + \frac{28}{5}x^2 - \frac{46}{5}x + \frac{34}{5}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{10}\frac{x^5}{5} - \frac{13}{10}\frac{x^4}{4} + \frac{28}{5}\frac{x^3}{3} - \frac{46}{5}\frac{x^2}{2} + \frac{34}{5}x + k\right)\Bigg|_1^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{50}6^5 - \frac{13}{40}6^4 + \frac{28}{15}6^3 - \frac{23}{5}6^2 + \frac{34}{5}6 + k\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{50}1^5 - \frac{13}{40}1^4 + \frac{28}{15}1^3 - \frac{23}{5}1^2 + \frac{34}{5}1 + k\right) =$$

$$= \left(\frac{318}{25} + k\right) - \left(\frac{2257}{600} + k\right) = \frac{215}{24} = 8{,}958\widehat{3}$$

Observemos que al realizar el cálculo del área, el número real **k** se cancela. Por este motivo, no importa cuál es la función primitiva de f(x) considerada, pues con cualquiera de ellas obtendremos la misma área. Luego, el área del campo de Claudio es $8{,}958\widehat{3}$ km².

Problema 4

Consideren la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ y calculen el área (A) de la región que determina el gráfico de f(x) con el eje **x** en cada uno de estos casos:

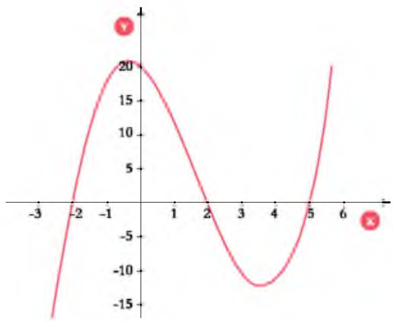
a. Entre $x = -1$ y $x = 2$.

b. En el intervalo [2; 3].

c. Entre $x = -1$ y $x = 3$.

Problema 4

Grafiquemos la función f(x), continua en $\mathbb{R}$. Dicho gráfico es:

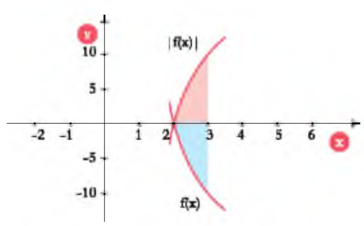


a. Como f(x) es una función positiva entre $x = -1$ y $x = 2$, el área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{2} (x^3 - 5x^2 - 4x + 20)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 20x \right) \Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{68}{3} - \left(-\frac{241}{12} \right) = \frac{171}{4}$$

b. En el gráfico de f(x) observamos que entre $x = 2$ y $x = 3$ la función es negativa. Por lo tanto, no podemos calcular el área utilizando el mismo razonamiento que el empleado en el ítem **a.** Consideremos la función $|f(x)|$, que es positiva en $\mathbb{R}$, y dibujemos las regiones que determinan los gráficos de f(x) y $|f(x)|$ respectivamente con el eje **x** en el intervalo [2; 3]. El gráfico que obtenemos es:



Observemos que las dos regiones que quedan determinadas tienen la misma área. Por lo tanto, considerando la función positiva $|f(x)|$, en lugar de f(x), podemos hallar el área correspondiente a [2; 3] utilizando el mismo razonamiento que el empleado en el ítem **a.** Luego, como $|f(x)| = -f(x)$ entre $x = 2$ y $x = 3$, entonces, el área buscada es la siguiente:

13. Calculen el valor de **a** si $a < 8$ y el área de la región encerrada por el gráfico de $g(x) = x^2 + 1$, el eje x, $x = a$ y $x = 8$ es de $\frac{532}{3}$.

14. Para cada uno de los siguientes casos, grafiquen la función y obtengan el área de la región que se indica.

a. Región limitada por el gráfico de $a(x) = \cos x$, el eje x, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

b. Región comprendida entre el gráfico de $b(x) = |x + 1|$, el eje **x** y el eje **y**.

c. Región determinada por el gráfico de $c(x) = x^3 - 4x$ con el eje **x** en [−2; 0].

15. Calculen las siguientes integrales definidas:

a. $\int_0^{\pi} \cos x \, dx =$

b. $\int_1^{5} (6 + 7x^3) \, dx =$

c. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx =$

16. Para cada uno de los casos que se indican a continuación, determinen si la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área de la región comprendida entre el gráfico de f(x), el eje **x**, x = a y x = b. Justifiquen sus respuestas.

a. $f(x) = \sqrt{x} - 3$, $a = 0$ y $b = 9$

b. $f(x) = 2^x$, $x = -1$ y $x = 8$

$$A = \int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 [-f(x)]dx = \int_2^3 (-x^3 + 5x^2 + 4x - 20)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + 5\,\frac{x^3}{3} + 4\,\frac{x^2}{2} - 20x\right)\Bigg|_2^3 = -\frac{69}{4} - \left(-\frac{68}{3}\right) = \frac{65}{12}$$

c. En el gráfico de f(x) podemos observar que en el intervalo [–1; 3] la función f(x) es positiva para algunos valores de ese intervalo y negativa para otros. Luego, para hallar el área pedida podemos calcular el valor de $\int_{-1}^{3} |f(x)|dx$.

Pero para quitar las barras de módulo y colocar la función correspondiente, debemos determinar en qué valores de [–1; 3] la función f(x) es positiva o negativa. Como vemos en el gráfico entre –1 y 2, la función f(x) es positiva y entre 2 y 3 es negativa. Por lo tanto, debemos calcular las dos áreas por separado.

$$A = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_2^3 |f(x)|dx = \int_{-1}^{2} (x^3 - 5x^2 - 4x + 20)dx +$$

$$+ \int_2^3 (-x^3 + 5x^2 + 4x - 20)dx = \frac{171}{4} + \frac{65}{12} = \frac{289}{6}$$

Integral definida

Si la función f(x) es continua en cualquier valor del intervalo [a; b], llamamos **integral definida** de f(x) entre los valores **a** y **b** al valor de $\int_a^b f(x)dx$, con $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$, donde G(x) es una primitiva de f(x).

Esta definición es independiente de la positividad o negatividad de f(x). Comprobémoslo calculando la integral definida de $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ entre 2 y 3.
Al hallar el valor de dicha integral obtenemos lo siguiente:

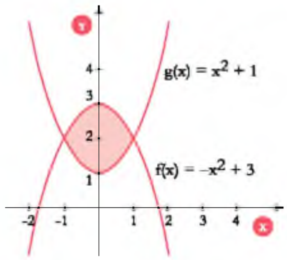
$$\int_2^3 (x^3 - 5x^2 - 4x + 20)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + 20x\right)\Bigg|_2^3 = \frac{69}{4} - \frac{68}{3} = -\frac{65}{12}$$

Este valor no es el área, debido a que es negativo. Sin embargo, coincide en valor absoluto con el área que hallamos en el ítem **b.** Por lo tanto, el valor de la integral definida de f(x) entre los valores **a** y **b** coincide con el área de la región determinada por el gráfico de f(x) con el eje **x** en [a; b] solamente si la función f(x) es continua en [a; b] y positiva en (a; b).

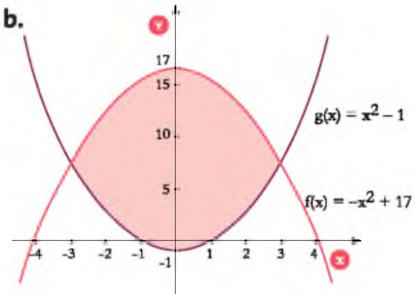
Problema 5

Calculen el área (A) de la región sombreada en cada uno de los siguientes casos:

a.



b.



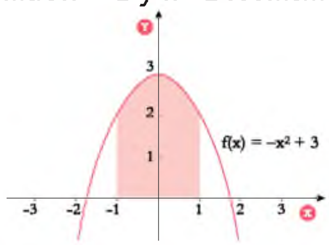
Problema 5

a. El área que debemos hallar corresponde a una región comprendida entre dos funciones. Por lo tanto, lo primero que tenemos que determinar es entre qué valores de **x** estamos trabajando. Para ello, calculamos los valores de **x** de los puntos de intersección de las funciones f(x) y g(x). Entonces resulta que

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = -x^2 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = -1 \text{ o } x = 1$$

Es decir, debemos trabajar con valores de **x** entre –1 y 1.

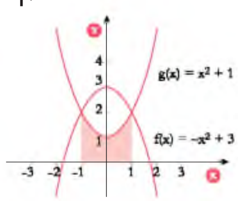
Si dibujamos la región ubicada debajo del gráfico de f(x) pero sobre el eje **x**, entre x = –1 y x = 1 obtenemos lo siguiente:



Al calcular el área de la figura sombreada resulta lo siguiente:

$$\int_{-1}^{1}(-x^2 + 3)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(-\frac{1^3}{3} + 3 . 1\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 3(-1)\right) = \frac{16}{3}$$

Pero no necesitamos la región hasta el eje **x**, sino hasta g(x). Dibujemos el sector que no necesitamos de la región anterior



Observemos que ese sector se encuentra debajo del gráfico de g(x) pero sobre el eje **x**, entre x = 1 y x = –1. Luego, el área de dicho sector es la siguiente:

$$\int_{-1}^{1}(x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto, el área buscada es $A = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$.

Algo más...

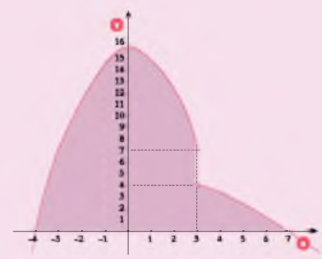
Hasta ahora siempre hemos calculado el área de regiones encerradas entre el eje **x** y el gráfico de una función continua en un intervalo cerrado.

Analicemos qué sucede si la función tiene una discontinuidad de primera especie con salto finito en una determinada cantidad de valores de **x**.

Por ejemplo, calculemos el área (A) de la región encerrada entre el eje **x** y el gráfico de la función.

$$f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{49 - x^2}{10} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

El gráfico de la región comprendida entre el gráfico de f(x) y el eje **x** es:



Si bien la función f(x) tiene en x = 3 una discontinuidad esencial de primera especie con salto finito, podemos calcular el área de la región dividiendo dicha región en dos regiones cuyas áreas, respectivamente, son:

$$A_1 = \int_{-4}^{3}(16 - x^2)dx = \frac{245}{3}$$

$$A_2 = \int_{3}^{7}\left(\frac{49 - x^2}{10}\right)dx = \frac{136}{15}$$

Luego el área buscada es:

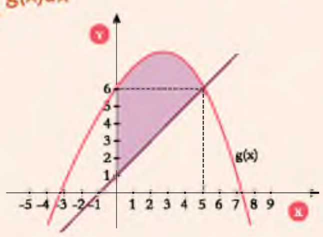
$$A = A_1 + A_2 = \frac{1361}{15}$$

Por lo tanto, cuando la función tiene una discontinuidad de primera especie con salto finito en un intervalo [a, b], podemos calcular el área de la región correspondiente a [a, b] dividiendo dicha región en distintas regiones, cada una de ellas correspondiente a un subintervalo de [a, b] en cuyos valores la función sea continua.

17. Grafiquen la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = 4x$, el de $g(x) = \frac{1}{x}$, $x = e$ y el eje **x**. Hallen además el área de la región anterior.

18. Considerando que el área de la siguiente región sombreada es 25, calculen el siguiente valor:

$$\int_0^5 g(x)dx$$



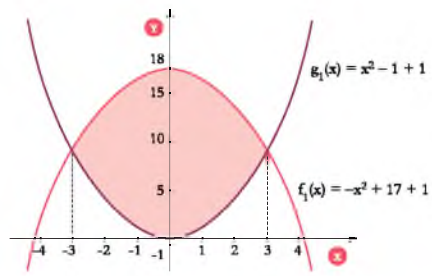
19. Teniendo en cuenta que para la región sombreada siguiente el área es 5 y que g(x) es una función cuadrática, obtengan el siguiente valor:

$$\int_{-1}^{3} h(x)dx$$

A los cálculos que hicimos para hallar el área pedida, los podemos escribir mediante una única expresión de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+3)\,dx-\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx=\int_{-1}^{1}[(-x^2+3)-(x^2+1)]dx=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx$$

b. La región dibujada en el gráfico **b.** posee un sector por sobre el eje **x** y otro por debajo de él. Esto resulta un inconveniente para poder utilizar el razonamiento empleado en el ítem **a.** Traslademos, entonces, hacia arriba las funciones f(x) y g(x), sin cambiar el área buscada, hasta que la región quede toda por sobre el eje **x**. Para ello, sumemos a ambas funciones un mismo número. Luego, como $g(x) \geq -1$ para cualquier valor de **x**, para que toda la región quede por sobre el eje **x** hay que sumar a ambas funciones por lo menos 1. Consideremos las funciones $f_1(x) = -x^2 + 17 + 1$ y $g_1(x) = x^2 - 1 + 1$, y dibujemos la región encerrada entre sus gráficos. El gráfico que resulta es el siguiente:



Como lo único que hicimos fue correr hacia arriba las funciones f(x) y g(x), el área de la región encerrada entre los gráficos de f(x) y g(x) es la misma que la que se encuentra entre los gráficos de $f_1(x)$ y $g_1(x)$, pero con la ventaja de que estas nuevas funciones son positivas entre $x = -3$ y $x = 3$, que son las abscisas de los puntos de intersección entre f(x) y g(x) y entre $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Luego, al hallar el área de la región pedida resulta que

$$\int_{-3}^{3}[(-x^2+17+1)-(x^2-1+1)]dx=\int_{-3}^{3}(-2x^2+18)dx=$$

$$=\left(-2\frac{x^3}{3}+18x\right)\Bigg|_{-3}^{3}=72$$

Observemos que el 1 que sumamos a f(x) y a g(x) se cancela en la operación.

Conclusión

Si a y b son las abscisas de dos puntos consecutivos de la intersección entre las funciones f(x) y g(x), continuas en cualquier valor de [a; b], entonces, el área (A) de la región encerrada entre sus gráficos es:

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

1. Dibujen la región limitada por el gráfico de $f(x)$ y las rectas que se indican en cada caso. Calculen, además, el área de dicha región.

a. $f(x) = -x + 5$, el eje **x** y el eje **y**

b. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ y el eje **x**

c. $f(x) = \cos x + 1$, el eje **x**, $x = 2\pi$ y el eje **y**

d. $f(x) = |x - 2|$ e $y = 6$

e. $f(x) = 5x + 1$, $g(x) = -x + 7$ y el eje **x**

ALUMNO | CURSO | FECHA

2. Para cada uno de los siguientes casos determinen cuál es la opción correcta. Justifiquen el motivo de su elección.

a. El área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 5$ y el eje **x** es:

I. $\int_3^5 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx$

II. $\int_3^5 f(x)dx$

III. $\int_0^3 f(x)dx - \int_3^5 f(x)dx$

IV. ninguna de las anteriores

b. El área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = x^3 - x$, el eje **x**, $x = -1$ y $x = 3$ es:

I. $\int_{-1}^3 f(x)dx$

II. $-\int_{-1}^3 f(x)dx$

III. $\int_{-1}^0 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$

IV. $\int_1^3 f(x)dx - \int_{-1}^1 f(x)dx$

V. $\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx$

VI. $\int_{-1}^0 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

3. Obtengan el área de la región determinada por los siguientes gráficos:

a. $f(x) = x^2$ y $g(x) = 9x$

b. $h(x) = \sqrt[3]{x}$ y $i(x) = x$

c. $j(x) = e^{-x}$, $x = -1$, $x = 3$ y el eje x

d. $k(x) = \sqrt{x}$, $l(x) = -\sqrt{x}$, $m(x) = \dfrac{1}{x}$ y $x = 9$

e. $h(x) = \dfrac{1}{x-5} + 8$, su asíntota vertical, su asíntota horizontal y los ejes coordenados

f. $o(x) = 3x - 15$, $p(x) = \dfrac{12}{x-5}$, $y = 12$ y $x = 5$

g. $q(x) = x^2 + 4$ y $r(x) = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{40}{3}$

h. $s(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$ y $t(x) = -x - 1$

i. $u(x) = x^2 + 8x$, $y = -\dfrac{3}{2}x$ e $y = \dfrac{57}{4}$

j. $v(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$

4. a. Grafiquen la recta $y = 2x + 3$ y la región comprendida entre el gráfico de

$f(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{23}{4}x$ y el eje x

b. Hallen el área de cada uno de los sectores en que está dividida la región anterior y determinen cuál es más grande.

5. Encuentren la función derivada de las siguientes funciones:

a. $A(t) = \displaystyle\int_1^t \ln x \, dx$

b. $B(t) = \int_{2}^{t} (\ln t)\, x^2\, dx$

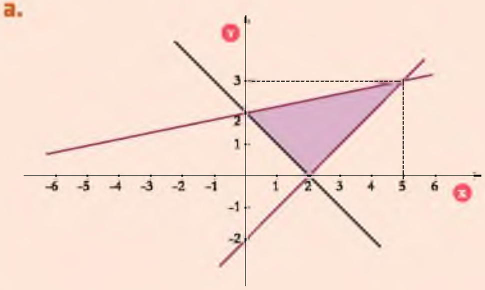
6. Determinen el valor de $\int_{1}^{e} g(x)dx$ si la función $G(x) = \dfrac{2 + \ln^3 x}{x^2}$ es una primitiva de $g(x)$.

7. Obtengan los valores de **t** en los cuales la función $F(t) = \int_{0}^{t} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}\, dx$ tiene máximos o mínimos relativos.

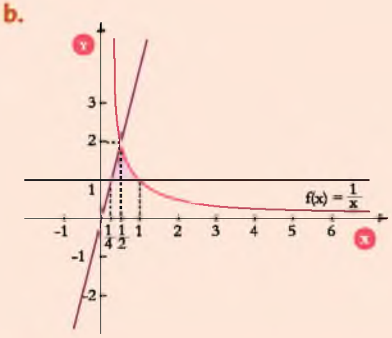
8. Hallen, si existen, los valores positivos de **a** para los cuales el área de la región encerrada entre el gráfico de $h(x) = -\sqrt{x}$, el eje **x**, $x = 0$ y $x = a$ sea 18.

9. Para cada uno de los siguientes gráficos, calculen el área de la región sombreada.

a.

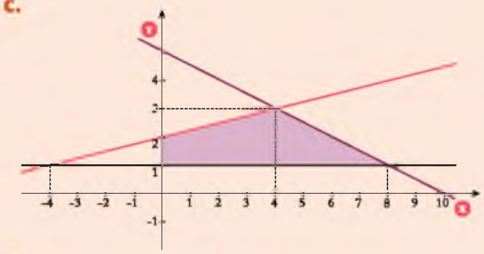


b.

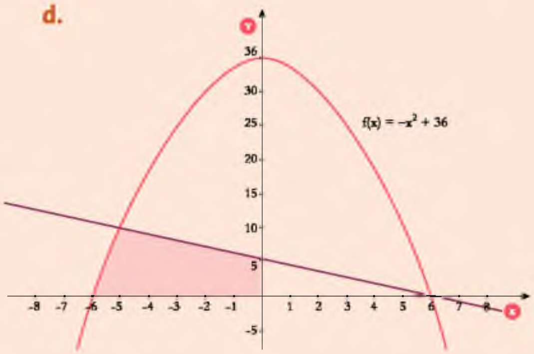


ALUMNO CURSO FECHA

c.



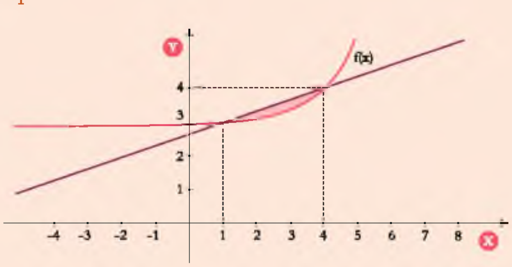
d.



10. Encuentren, si existe, el valor positivo de **m** que verifica que el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = x^3 - 4x$ y el de $g(x) = mx$ sea 72.

11. Obtengan, si existe, el valor de **c** menor que 8 para el cual el área de la región limitada por el gráfico de $h(x) = x^2 + c$ y el de $i(x) = -x^2 + 8$ sea de 576.

12. Considerando que el área de la siguiente región sombreada es 2, hallen el valor de $\int_1^4 f(x)dx$.



1. Dibujar la región limitada por el gráfico de $f(x)$ y las rectas que se indican en cada caso. Hallar, además, el área de la región obtenida.

a. $f(x) = -x^2 + 8x$, la recta $y = \frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$ y la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto cuya abscisa es $x = 3$.

b. $f(x) = e^x$, $x = -1$ y $x = 2$

c. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 6$ e $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{2}$

d. $f(x) = -x^3 + 4x$ y la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

e. $f(x) = \text{sen } x$, el eje **x**, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3}{2}\pi$

2. Graficar la región comprendida entre el gráfico de $g(x) = x^2 - 9$ y el de $h(x) = -x^2 + 9$, y calcular el área de dicha región.

3. Encontrar el valor de $\int_1^2 [f(x) + 2g(x)]\,dx$ si se verifica que $\int_1^2 2f(x)dx = 5$ y que $\int_1^2 g(x)dx = 7$.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la elección.

a. El valor de $\int_0^4 (x-2)dx$ es el área de la región determinada en el primer cuadrante por el gráfico de $h(x) = x - 2$ y $x = 4$.

b. El área de la región encerrada entre el gráfico de $i(x) = x^2 - 1$ y el eje **x**, para $-1 \leq x \leq 3$ es el valor de $-\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx + \int_1^3 (x^2-1)dx$.

c. El valor de $\int_{-1}^{2}(x^2 - x - 2)dx$ es el área de la región limitada por el gráfico de $j(x) = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$.

4 El cálculo de integrales

Debido a la importancia de conocer las funciones primitivas de las distintas funciones, en este capítulo nos dedicaremos al estudio de los diferentes métodos que permiten obtener esas primitivas.

Cuando elijan un determinado procedimiento para resolver un problema, pregúntense el porqué de su elección. De esta manera, si ese procedimiento era correcto podrán utilizar esos mismos argumentos en otras ocasiones.

¿Sabían que...?
El primero que nombró a la integral indefinida fue Sylvestre-François Lacroix. Lacroix nació en Francia el 28 de abril de 1765. A pesar de que sus padres eran pobres, tuvo la fortuna de estudiar en Monge. En 1782, fue profesor de Matemática en la École Gardes de Marine. Sobre esta disciplina escribió importantes textos que contribuyeron a la enseñanza de esta materia. Entre ellos, se encuentran un tratado de tres volúmenes, llamado *Traité de Calcul differéntiel et intégral* (1797-1800), y diez tomos del libro *Cours de Mathématique* (1797-1799), que fue traducido a varios idiomas. Lacroix murió en París el 24 de mayo de 1843.

¿Cómo se lee...?

$\int f(x)\,dx$: integral indefinida de f(x)

diferencial de **x**.

Integral indefinida

Llamamos **integral indefinida** de una función f(x) al conjunto de todas las primitivas de f(x). Para simbolizarlo, escribimos $\int f(x)dx$.

Utilizando las funciones primitivas de la página 73, podemos, determinar las siguientes integrales indefinidas:

- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$, **donde** $n \in \mathbb{R} - \{-1\}$ **y** $k \in \mathbb{R}$
- $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + k$, **con** $k \in \mathbb{R}$
- $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + k$, **donde** $k \in \mathbb{R}$
- $\int e^x dx = e^x + k$, **con** $k \in \mathbb{R}$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + k$, **donde** $k \in \mathbb{R}$
- $\int \dfrac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + k$, **con** $a \in \mathbb{R}$ **y** $k \in \mathbb{R}$

Además, por las propiedades de las funciones primitivas de la página 74 podemos establecer las siguientes propiedades de las integrales indefinidas:

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
- $\int [c \,.\, f(x)]dx = c \,.\, \int f(x)dx$, **donde** $c \in \mathbb{R}$

Como la función derivada de una multiplicación de funciones no es la multiplicación de las funciones derivadas de esas funciones y como tampoco esto sucede con la división, debemos encontrar otros caminos para resolver las integrales para las cuales no se pueda utilizar directamente alguna de las primitivas que hemos enumerado en esta página.
Analicemos entonces distintas formas de hacerlo.

Problema 1

Encuentren todas las funciones primitivas de las siguientes funciones:

a. h(x) = sen (3x + 2) **b.** i(x) = sen x cos x **c.** j(x) = x sen x

Problema 1

a. Para hallar todas las funciones primitivas de h(x), debemos resolver la integral indefinida $\int \text{sen}\,(3x+2)\,dx$.

Observemos que h(x) = sen (3x + 2) es la composición de dos funciones. Es decir, si consideramos g(x) = 3x + 2 y f(z) = sen z, entonces, resulta que
(fog)(x) = f[g(x)] = f[3x + 2] = sen(3x + 2) = h(x)

Sabemos que $\int \text{sen}\,z\,dz = -\cos z + k$ y que en la composición anterior es z = 3x + 2, con lo cual para hallar la integral pedida, podríamos sustituir 3x + 2 por **z** en $\int \text{sen}(3x+2)dx$. Pero si la nueva variable es **z**, entonces, en la integral resultante debe figurar dz y no dx. Luego, para poder realizar la sustitución mencionada, debemos hallar la expresión de dz.

Si $z = z(x) = 3x + 2 \Rightarrow dz = z'(x)\,dx = 3\,dx$ [1] $\Rightarrow dx = \frac{1}{3}dz$.

Por lo tanto, obtenemos que $\int h(x)\,dx = \int \text{sen}(3x+2)dx =$

$$= \int (\text{sen}\,z)\frac{1}{3}dz = \frac{1}{3}\int \text{sen}\,z\,dz = \frac{1}{3}(-\cos z) + k = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + k$$

b. La función i(x) = sen x cos x es la multiplicación de las funciones $f_1(x) = \text{sen}\,x$ y $f_2(x) = \cos x$, las cuales están relacionadas entre sí debido a que $f_1'(x) = f_2(x)$.

Luego, para resolver $\int \text{sen}\,x\cos x\,dx$ consideramos lo siguiente:
z = z(x) = sen x, con lo cual dz = z'(x) dx = cos x dx. Por lo tanto, al calcular las primitivas de i(x) obtenemos lo siguiente:

$$\int i(x)\,dx = \int \underbrace{\text{sen}\,x}_{z}\ \underbrace{\cos x\,dx}_{dz} = \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + k = \frac{\text{sen}^2 x}{2} + k$$

El método que empleamos para hallar todas las primitivas de h(x), en el ítem **a.**, y de i(x), en el ítem **b.**, se llama **método de sustitución**.

Método de sustitución

Este método es útil para resolver integrales indefinidas que tienen alguna de estas formas: $\int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$ o $\int f(x)f'(x)\,dx$.

[1] Ver capítulo 1, página 32.

1. Hallen las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int dx =$

b. $\int \frac{(3x^2-5)^2}{\sqrt{x}}dx =$

c. $\int (5\,\text{sen}\,x + 6\cos x)dx =$

d. $\int (e^x - 5x + 2)dx =$

2. Encuentren la función F(x) que es función primitiva de $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ y que verifica que f(1) = 3.

3. Considerando que **m** $\in \mathbb{R}$ y **n** $\in \mathbb{R}$, obtengan todas las funciones primitivas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \cos(mx + n)$

b. $g(x) = \text{sen}(mx + n)$

c. $h(x) = e^{(mx + n)}$

4. Obtengan el resultado de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \frac{1}{(3x+2)^{10}}\, dx =$

b. $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx =$

c. $\int \frac{x^2}{2x^3+3}\, dx =$

d. $\int 3xe^{-x^2}\, dx =$

El método de sustitución se utiliza de la siguiente manera:

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx \underset{\text{con } z = g(x)}{=} \int f(z)\, dz = F[g(x)] + k, \text{ o}$$

$$\int f(x)\, f'(x)\, dx \underset{\text{con } z = f(x)}{=} \int z\, dz = \frac{[f(x)]^2}{2} + k$$

3
5
7 donde $k \in \mathbb{R}$
5 y $F'(x) = f(x)$
4

Verifiquemos que $F[g(x)] + k$ es función primitiva de $f[g(x)] \,.\, g'(x)$ hallando la función derivada de $F[g(x)] + k$. Utilizando la regla de la cadena obtenemos lo siguiente: $(F[g(x)] + k)' = F'[g(x)] \,.\, g'(x) = f[g(x)] \,.\, g'(x)$.

c. Para resolver la integral indefinida $\int x \,\text{sen}\, x\, dx$ intentemos usar el método de sustitución.

Si consideramos $z = z(x) = \text{sen}\, x$, entonces, $dz = z'(x)\, dx =$ $= \cos x\, dx$, con lo cual es $dx = \frac{dz}{\cos x}$.

Al realizar la sustitución en la expresión $x \,\text{sen}\, x\, dx$, resulta que

$$x \,\text{sen}\, x\, dx = x\, z \frac{dz}{\cos x}$$

Por lo tanto, no es posible que al hacer la sustitución obtengamos una expresión en la cual sólo aparezca **z** como variable. Entonces, tenemos que buscar otra manera de hallar las primitivas de $j(x) = x \,\text{sen}\, x$.

Como $j(x)$ es una multiplicación entre las funciones **x** y $\text{sen}\, x$, analicemos qué ocurre con la función derivada de la multiplicación entre dos funciones.

La función derivada de $f(x) \,.\, g(x)$ es $(f(x) \,.\, g(x))' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$, con lo cual resulta que

$$\int (f(x) \,.\, g(x))'dx = \int f'(x) \,.\, g(x)\, dx + \int f(x) \,.\, g'(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \,.\, g(x) = \int f'(x) \,.\, g(x)\, dx + \int f(x) \,.\, g'(x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(x) \,.\, g'(x)\, dx = f(x) \,.\, g(x) - \int f'(x) \,.\, g(x)\, dx.$$

Esta propiedad recibe el nombre de **método de integración por partes**.

Método de integración por partes

Este método es útil para resolver integrales indefinidas que tienen esta forma: $\int f(x)\, g'(x) dx$.

El método de integración por partes se utiliza de la siguiente manera: $\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$.

Usemos este método para resolver la integral indefinida

$\int x \operatorname{sen} x\, dx$, y consideremos $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$.

Si $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.

Si $g'(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow g(x) = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + k$. Como necesitamos una sola primitiva, de aquí en adelante consideraremos $k = 0$ cada vez que debamos hallar $g(x)$.

Luego, al utilizar el método de integración por partes para hallar todas las primitivas de $j(x)$ obtenemos lo siguiente:

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} . \underbrace{\operatorname{sen} x}_{g'(x)}\, dx = \underbrace{x}_{f(x)} . \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} . \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)}\, dx =$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + k$$

Por lo tanto, para poder resolver la integral indefinida $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, la transformamos en una expresión donde la integral que figura en ella es de sencilla resolución.

Si hubiéramos elegido $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = x$, resultaría que si $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$, y si $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$, con lo cual obtendríamos lo siguiente:

$$\int \underbrace{x}_{g'(x)}\ \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f(x)}\, dx = \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{f(x)} . \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} - \int \underbrace{(\cos x)}_{f'(x)} . \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)}\, dx$$

Luego, tendríamos que resolver una integral que es más complicada que la que se nos pidió. Por lo tanto, las elecciones hechas para $f(x)$ y $g'(x)$ no serían las convenientes.

Problema 2

Hallen las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int x^2 \cos x\, dx =$ **b.** $\int (\operatorname{sen} x)\, e^x\, dx =$ **c.** $\int \ln x\, dx =$

Problema 2

a. Para resolver la integral indefinida $\int x^2 \cos x\, dx$, utilizamos el método de integración por partes considerando $f_1(x) = x^2$ y $g'_1(x) = \cos x$.

Algo más...

Al resolver una integral definida utilizando el método de sustitución debemos tener cuidado con los límites de integración.

Por ejemplo, resolvamos la integral definida $\int_1^5 (5x-4)^2\, dx$ usando el método de sustitución.

Si consideramos $z = 5x - 4$, entonces, $dz = 5\, dx$, con lo cual obtenemos $\frac{1}{5} dz = dx$.

Observemos en la integral definida que **x** está entre 1 y 5. Luego, resulta que si $x = 1 \Rightarrow z = 5 . 1 - 4 = 1$, y si $x = 5 \Rightarrow z = 5 . 5 - 4 = 21$.

Por lo tanto, obtenemos lo siguiente:

$$\int_1^5 (5x-4)^2\, dx = \int_1^{21} z^2 \frac{1}{5}\, dz = \frac{1}{5}\int_1^{21} z^2 dz =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_1^{21} = \frac{1}{5}\left(3087 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1852}{3}$$

5. Calculen el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, el eje **x**, $x = 0$ y $x = 1$.

____

____

____

6. Resuelvan las siguientes integrales:

a. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx =$

b. $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x}-10)}{\sqrt{x}}\,dx =$

c. $\int \text{tg}\, x\, dx =$

7. Dibujen la región limitada por el gráfico de $g(x) = x\sqrt{8-2x}$ y el eje x, y calculen el área de esa región.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f_1(x) = x^2 \Rightarrow f_1'(x) = 2x. \\ \text{Si } g_1'(x) = \cos x \Rightarrow g_1(x) = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x. \end{array}\right\} \Rightarrow \int x^2 \cos x\, dx =$$

$= x^2\, \text{sen}\, x - \int 2x\, \text{sen}\, x\, dx = x^2\, \text{sen}\, x - 2\int x\, \text{sen}\, x\, dx$ **(1)**. Luego,

de acuerdo con lo obtenido en el problema 4, es

$\int x\, \text{sen}\, x\, dx = -x \cos x + \text{sen}\, x + k_1$ **(2)**.

Reemplazando la expresión **(2)** en la **(1)** obtenemos:

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \text{sen}\, x - 2[-x \cos x + \text{sen}\, x + k_1] =$

$= x^2\, \text{sen}\, x + 2x \cos x - 2\, \text{sen}\, x + k$

b. Utilicemos también el método de integración por partes para hallar la integral indefinida $\int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx$.
Consideremos $f_1(x) = \text{sen}\, x$ y $g'_1(x) = e^x$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f_1(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f'_1(x) = \cos x. \\ \text{Si } g'_1(x) = e^x \Rightarrow g_1(x) = \int e^x\, dx = e^x. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx = (\text{sen}\, x)\, e^x - \int (\cos x)\, e^x\, dx$ **(1)**

Para resolver esta integral, usemos nuevamente el método de integración por partes y llamemos $f_2(x)$ a $\cos x$ y $g'_2(x)$ a e^x.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f_2(x) = \cos x \Rightarrow f'_2(x) = -\text{sen}\, x. \\ \text{Si } g'_2(x) = e^x \Rightarrow g_2(x) = \int e^x\, dx = e^x. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int (\cos x) e^x\, dx = (\cos x) e^x - \int (-\text{sen}\, x)\, e^x\, dx$ **(2)**

Reemplazando la expresión **(2)** en la **(1)**, resulta que

$\int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx = (\text{sen}\, x)\, e^x - [(\cos x)\, e^x + \int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx = (\text{sen}\, x)\, e^x - (\cos x)\, e^x - \int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx$ **(3)**

Llamemos I a $\int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx$. Luego, para la expresión **(3)** resulta

lo siguiente:

$I = (\text{sen}\, x)\, e^x - (\cos x)\, e^x - I \Rightarrow 2I = (\text{sen}\, x)\, e^x - (\cos x)\, e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \dfrac{(\text{sen}\, x)\, e^x - (\cos x)\, e^x}{2}$ **(4)**

Pero como $I = \int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx$, entonces, para la expresión **(4)**

obtenemos:

$\int (\text{sen}\, x)\, e^x\, dx = \dfrac{(\text{sen}\, x)\, e^x - (\cos x)\, e^x}{2} + k$

c. Para hallar la integral indefinida $\int \ln x\, dx$ tenemos que encontrar todas las primitivas de la función ln x que no es una multiplicación entre dos funciones. Sin embargo, podemos escribir $\ln x = 1 . \ln x$, y entonces utilizar el método de integración por partes para resolver la integral indefinida pedida.

Consideremos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = 1$.

Si $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3

$7 \Rightarrow \int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{g'(x)} . \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx =$

4

Si $g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \int 1 \, dx = x$.

$= (\ln x)\, x - \int \dfrac{1}{\cancel{x}} \cancel{x} \, dx = (\ln x)\, x - \int dx = (\ln x)\, x - x + k$

Problema 3

Obtengan todas las funciones primitivas de las siguientes funciones:

a. $h(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 4}$ **b.** $i(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ **c.** $j(x) = \dfrac{3x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

Problema 3

a. Para hallar la integral indefinida de $h(x)$ no podemos utilizar el método de sustitución como hicimos en otros casos, pues para usarlo deberíamos considerar $z = x^2 - 4$ y $dz = 2x \, dx$, con lo cual resultaría que $\dfrac{3x + 4}{x^2 - 4} dx = \dfrac{3x + 4}{z} \dfrac{1}{2x} dz$, y no sería posible eliminar la x. Tampoco podemos utilizar el método de integración por partes, ya que la integral que quedaría por resolver es más complicada que la de $h(x)$.

Busquemos, entonces, una nueva forma de resolver integrales indefinidas.

Observemos el denominador de la función $h(x)$. Como $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, si encontramos dos números reales A y B que verifiquen que $\dfrac{3x + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{A}{x - 2} + \dfrac{B}{x + 2}$ **(1)** para cualquier valor de x del conjunto $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$, entonces, podemos escribir $\int \dfrac{3x + 2}{x^2 - 4} dx = \int \dfrac{A}{x - 2} dx + \int \dfrac{B}{x + 2} dx$, con lo cual obtenemos dos integrales que se pueden resolver empleando el método de sustitución.

Hallemos, entonces, los números reales A y B. Al considerar la expresión **(1)** resulta que $\dfrac{A}{x - 2} + \dfrac{B}{x + 2} = \dfrac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$. Luego, como los denominadores de ésta última expresión son iguales, entonces podemos afirmar lo siguiente:

8. Obtengan las funciones primitivas de estas funciones:

a. $f(x) = (3x + 2) \cos x$

b. $g(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

9. Hallen las integrales indefinidas que figuran a continuación:

a. $\int x \, e^{-x+2} \, dx =$

b. $\int x^3 \ln x \, dx =$

c. $\int (2x + 3)\, e^x \, dx =$

10. Resuelvan las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \ln(5x)\,dx =$

b. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx =$

c. $\int e^{2x}\cos(3x+1)\,dx =$

d. $\int \sqrt{1+x}\,\ln(x+1)\,dx =$

$A(x+2) + B(x-2) = 3x + 2 \Rightarrow Ax + 2A + Bx - 2B = 3x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (A+B)\,x + 2A - 2B = 3x + 2$. Por lo tanto, como dos polinomios son iguales cuando todos sus coeficientes lo son, resulta que $A + B = 3$ y $2A - 2B = 2$, con lo cual es $A = 2$ y $B = 1$.

Luego, obtenemos que $\int \frac{3x+2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx =$

$= 2\int \frac{1}{x-2} + \int \frac{1}{x+2}\,dx = 2\ln|x-2| + \ln|x+2| + k$

b. Con respecto al denominador de la función $i(x) = \frac{3x+2}{x^2-2x+1}$ podemos escribir que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Luego, si queremos encontrar dos números reales A y B tales que $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} =$ $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A+B}{x-1}$ **(1)**, los denominadores de la primera y de la última expresión de **(1)** no quedan iguales. Por lo tanto, no podemos igualar sus numeradores.

Busquemos, entonces, otra opción.

Hallemos dos números reales A y B tales que $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} =$ $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$ **(2)**. Luego, como los denominadores de la primera y de la última expresión de **(2)** son iguales, podemos asegurar que $A(x-1) + B = 3x + 2$ para cualquier valor de **x** que pertenece a $\mathbb{R} - \{1\}$. Por lo tanto, resulta que
$Ax - A + B = 3x + 2 \Rightarrow A = 3$ y $-A + B = 2 \Rightarrow A = 3$ y $B = 5$

Luego, al hallar todas las primitivas de la función $i(x)$, obtenemos $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}\,dx =$

$= 3\int \frac{1}{x-1}\,dx + 5\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = 3\ln|x-1| + k_1 + 5\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ **(3)**

Para calcular esta última integral, utilizamos el método de sustitución. Al considerar $z = x - 2$ resulta que $dz = dx$. Entonces,

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{z^2}\,dz = \int z^{-2}\,dz = \frac{z^{-1}}{-1} + k_2 = \frac{1}{x-1} + k_2 \quad \textbf{(4)}$$

Reemplazando la expresión **(4)** en la **(3)** resulta que

$$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+1}\,dx = 3\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + k$$

El método que hemos utilizado para hallar todas las primitivas de h(x), en el ítem **a.**, y de i(x), en el ítem **b.**, se llama **método de fracciones simples**.

Método de fracciones simples

Este método es útil para resolver integrales indefinidas de funciones racionales cuando el polinomio del denominador, que tiene todas sus raíces reales, es de mayor grado que el del numerador.
El **método de fracciones simples** consiste en transformar la expresión de la función racional en una suma de otras expresiones racionales cuyas integrales se puedan obtener por el método de sustitución.
Si el polinomio del denominador de la función racional tiene raíces reales y simples, entonces, descomponemos la expresión de la función en tantos sumandos como raíces aquél tiene, y luego resolvemos la integral indefinida de cada sumando. Además, si el polinomio del denominador de la función racional tiene alguna raíz real **a** de multiplicidad **p**, entonces, a la expresión correspondiente a dicha raíz la descomponemos en **p** sumandos cuyos denominadores respectivamente son $(x - a)$, $(x - a)^2$, ... ,$(x - a)^p$, y luego hallamos la integral indefinida de cada sumando.

c. Resolvamos la integral indefinida de $j(x) = \dfrac{3x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

En este caso, el grado del polinomio del denominador no es mayor que el del numerador. Por lo tanto, no es posible utilizar el método de fracciones simples. Sin embargo, podemos realizar la división de polinomios que figura en la expresión de j(x), con lo cual, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 + 0x^2 + x - 2 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{3-3}
- & 3x^3 - 15x^2 + 18x & 3x + 15 \quad \text{COCIENTE} \\ \cline{2-2}
 & 15x^2 - 17x - 2 & \\
- & 15x^2 - 75x + 90 & \\ \cline{2-2}
 & 58x - 92 \quad \text{RESTO} &
\end{array}
$$

Luego, es $3x^3 + x - 2 = (x^2 - 5x + 6)(3x + 15) + (58x - 92)$.
Entonces, resulta que

$$\frac{3x^3 + x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x^2 - 5x + 6)(3x + 15) + (58x - 92)}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \frac{\cancel{(x^2 - 5x + 6)}(3x + 15)}{\cancel{x^2 - 5x + 6}} + \frac{58x - 92}{x^2 - 5x + 6} = (3x + 15) + \frac{58x - 92}{x^2 - 5x + 6}$$

Recordemos que...
Una función racional es una función cuya fórmula es un cociente de polinomios.
Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^2 + 3}$ es una función racional.

11. Obtengan el resultado de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \operatorname{sen}(2\sqrt{x} - 3)dx =$

b. $\int \ln^2 x \, dx =$

c. $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx =$

Recordemos que...
La raíz **a** del polinomio P(x) es raíz de multiplicidad p, con p perteneciente a $\mathbb{N}$, si podemos escribir a P(x) de la forma $P(x) = (x - a)^p . Q(x)$, donde Q(x) es un polinomio que no tiene a **a** por raíz.
Si p = 1, decimos que **a** es raíz simple.
Si p > 1, decimos que a es raíz múltiple.

12. Grafiquen la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = \ln(x+1)$, el de $g(x) = \ln(1-x)$, $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$, y encuentren el área de dicha región.

13. Hallen las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \frac{5x+3}{2x^2-6x+4}\,dx =$

b. $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x-3)^2}\,dx =$

c. $\int \frac{x^2-3}{x^2-5x+6}\,dx =$

d. $\int \frac{3e^x}{e^{3x}+4e^{2x}-5e^x}\,dx =$

e. $\int \frac{9\ln x-2}{x(\ln^2 x-4)}\,dx =$

Por lo tanto, al hallar las primitivas de $j(x)$ obtenemos lo siguiente:

$$\int \frac{3x^3+x-2}{x^2-5x+6}\,dx = \int (3x+15)\,dx + \int \frac{58x-92}{x^2-5x+6}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 15x + k_1 + \int \frac{58x-92}{x^2-5x+6}\,dx \quad \textbf{(1)}$$

Observen que la integral que debemos resolver en la expresión **(1)** corresponde a una función racional en la cual el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador. Por lo tanto, para resolver dicha integral podemos utilizar el método de fracciones simples.

Al descomponer la expresión de la integral de **(1)** en sumandos, resulta lo siguiente:

$$\frac{58x-92}{x^2-5x+6} = \frac{58x-92}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Luego, resulta que $A(x-2) + B(x-3) = 58x - 92 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A+B)x - 2A - 3B = 58x - 92$ para cualquier valor de **x**

perteneciente a $\mathbb{R} - \{2; 3\} \Rightarrow A + B = 58$ y $-2A - 3B = -92 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 82$ y $B = -24$

Al resolver la integral de la expresión **(1)** obtenemos:

$$\int \frac{58x-92}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{82}{x-3}\,dx + \int \frac{-24}{x-2}\,dx =$$

$$= 82\int \frac{1}{x-3}\,dx - 24\int \frac{1}{x-2}\,dx = 82\ln|x-3| - 24\ln|x-2| + k_2 \quad \textbf{(2)}$$

Reemplazando la expresión **(2)** en la **(1)** resulta que

$$\int \frac{3x^3+x-2}{x^2-5x+6}\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 15x + 82\ln|x-3| - 24\ln|x-2| + k$$

Los métodos que hemos estudiado en este capítulo para resolver integrales indefinidas también pueden utilizarse para hallar integrales definidas.

Algunas integrales pueden resolverse por más de un método, otras, combinando varios, y otras, en cambio, no pueden hallarse por ninguno de los métodos que hemos estudiado.

1. Obtengan la función f(x) que verifica que $f''(x) = \text{sen}\,(3x - \pi)$, $f(0) = \pi$ y $f(\pi) = 2\pi$.

2. Encuentren la función g(x) para la cual sea $g'(x) = \dfrac{2x + 3}{9 - x^2}$ y $g(0) = 0$.

3. Determinen una función primitiva de $h(x) = x \cos x$ cuyo gráfico pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$. ¿Cuántas primitivas de h(x) que cumplan la condición anterior hay?

4. Resuelvan las siguientes integrales indefinidas:

a. $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 5x^3)^2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$

b. $\displaystyle\int x^{\frac{1}{2}}(x - 2)^2\,dx =$

c. $\displaystyle\int (\ln^2 x + \ln x - 2)\,\frac{1}{x}\,dx =$

d. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$

e. $\displaystyle\int \text{sen}^5 x \cos x\,dx =$

f. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{5-2x^2}}\,dx =$

g. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+8}}\,dx =$

h. $\displaystyle\int \frac{2-3x}{(1-\sqrt{x})^2}\,dx =$

i. $\displaystyle\int \frac{\ln x \sqrt[11]{1+\ln x}}{x}\,dx =$

j. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(3x+1)-2}{\cos^2(3x+1)}\,dx =$

k. $\displaystyle\int x^{-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx =$

l. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$

m. $\int x^2 e^{6x}\, dx =$

n. $\int [\text{sen}(x^2-4)]\, e^{x^2-4}\, x\, dx =$

o. $\int \text{sen}(2x)\cos(3-x)\, dx =$

p. $\int e^{2x-3}\cos(3x-2)\, dx =$

q. $\int \cos(\ln x)\, dx =$

r. $\int 6x^5\, \text{sen}(x^3)\, dx =$

s. $\int \cos(\sqrt[3]{x})\, dx =$

t. $\int (x + \cos x)^2 \, dx =$

u. $\int \frac{x+3}{x-x^3} \, dx =$

v. $\int \frac{x^4+x+2}{2x^3+x^4} \, dx =$

w. $\int \frac{x^3+2}{x^3+2x^2-x-2} \, dx =$

x. $\int \frac{2x+3}{(x-5)^2(x+3)} \, dx =$

5. Hallen las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \frac{\text{sen } x \cos x - 3 \cos x}{\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2} \, dx =$

b. $\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}+8e^x-9} \, dx =$

c. $\int \frac{\text{sen}^2 x \cos x}{\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 2}\, dx =$

d. $\int \frac{(2\cos x - 1)\,\text{sen}\, x}{(1 - \cos x)(3 + \cos x)}\, dx =$

e. $\int \frac{(3e^{2x} - 2)\, e^x}{(e^{2x} - 1)(e^x - 2)}\, dx =$

f. $\int \frac{2}{x - \sqrt{x} - 2}\, dx =$

g. $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x - 4}\, dx =$

h. $\int \frac{(\text{sen}\, x + 2)\cos x}{\text{sen}^2 x + \frac{1}{4}\text{sen}\, x - \frac{1}{8}}\, dx =$

i. $\int \frac{(\cos^3 x + \cos x - 2)\,\text{sen}\, x}{\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{8}}\, dx =$

j. $\int \frac{x^2-2}{x^2-4}\,dx =$

k. $\int \frac{e^{-5x}}{(e^{-10x}-9)^2}\,dx =$

6. Dibujen el área de la región encerrada entre el gráfico $f(x) = \frac{5}{x^2(x+1)}$, el eje x, $x = 5$ y $x = 7$, y encuentren el área de esa región.

7. Grafiquen la región limitada por el gráfico de $g(x) \frac{x-1}{(x+1)^4}$, $y = x - 1$ y $x = 4$, y calculen el área de dicha región.

8. Dibujen la región comprendida entre el gráfico de $h(x) = x\sqrt{4-x}$, $x = 0$ y $x = 4$, y determinen el área de esa región.

1. Para cada una de las siguientes integrales indefinidas, indicar cuál es la solución correcta. Justificar la elección.

a. $\int x \operatorname{sen} x \, dx =$

I. $x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx$ **II.** $-\cos x + \int \cos x \, dx$ **III.** $x \operatorname{sen} x - \int \cos x \, dx$

b. $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx =$

I. $\frac{1}{2}(x^2-1)^{-2} + k$ **II.** $\ln x - \frac{x^2}{2} + k$ **III.** $\frac{x^2}{2} \ln |x^2 - 1| + k$ **IV.** $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + k$

2. Encontrar la función f(x) para la cual $f''(x) = e^{\sqrt{x}}$, $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$.

3. Un autito de juguete parte a 20 centímetros del inicio de una pista de carrera y se desplaza con trayectoria recta.
La función a(t)= sen (5t) relaciona la aceleración (a) del autito, medida en centímetros por segundos al cuadrado, con el tiempo de marcha (t), medido en segundos.
Hallar una función d(t) que permita calcular, en cada instante, la distancia a la que se encuentra el autito del inicio de la pista de carrera.

4. Resolver las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \frac{\ln^2 x - \ln x + 2}{x(\ln x - 3)} dx =$

b. $\int \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} + e^x - 6} dx =$

c. $\int x^3 \cos(3x^2 + 5)\, dx =$

d. $\int \ln(7x + 8)\, dx =$

e. $\int \frac{3x - 2}{(x + 1)(x - 3)^2}\, dx =$

f. $\int \cos(5x - 3)\, \text{sen}(8 - 2x)\, dx =$

5. Graficar la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, el eje **x**, $x = 2$ y $x = 4$, y calcular el área de dicha región.

6. Dibujar la región limitada por el gráfico de $g(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, el eje **x**, $x = -1$ y $x = 2$, y obtener el área de esa región.

Respuestas
Guías de autoevaluación

Capítulo 1

1. $Vi(5) = 50$ m/seg; $a(5) = 60$ m/seg^2

2. $(3; 16)$; $(-3; -14)$

3. $a = -2$; $b = 9$ y $c = 0$

4. $y = 808x - 568$

5. a. Falso porque $f'(x) = e^{3x}(1 + 3x)$.

b. Falso porque $f'(0) = 1$.

c. Verdadero porque $f(1) = 4e^3$.

6. La respuesta correcta corresponde al ítem **II.**, por la regla de la cadena.

7. a. $f'(x) = (9x^2 + 7)\,\text{sen}\,x + (3x^3 + 7x)\cos x$

$$f''(x) = \text{sen}\,x \,.\, (11x - 3x^3) + \cos x \,.\, (18x^2 + 14)$$

b. $f'(x) = \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\, 2x\, e^{x^2}$; $f''(x) = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\, e^{x^2}(1 + 2x^2)$

c. $f'(x) = \left[2\ln(x+1) + \dfrac{2x-5}{x+1}\right](x+1)^{2x-5}$

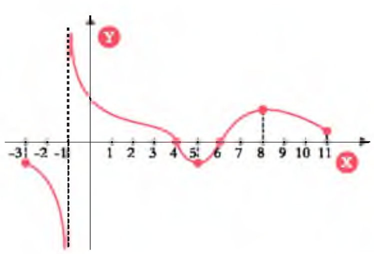
$$f''(x) = \left(\frac{2}{x+1} + \frac{7}{(x+1)^2}\right)(x+1)^{2x-5} + \left[2\ln(x+1) + \frac{2x-5}{x+1}\right]^2 (x+1)^{2x-5}$$

8. $\log_2 9 \cong 3,18$

Capítulo 2

1. La función $f(x)$ crece en $(-\infty; -2) \cup (2; 6)$ y decrece en $(-2, 2) \cup (6; -\infty)$.
En $x = -2$ y en $x = 6$ la función tiene un máximo relativo, y en $x = 2$ un mínimo relativo.

2. Por ejemplo:



3. Para $a < 0$.

4. Las medidas son 20 cm para el lado de la base cuadrada y 100 cm para la altura.

5. a. I. Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

II. $x = 1$ es asíntota vertical, $y = x + 2$ es asíntota oblicua y no hay asíntota horizontal.

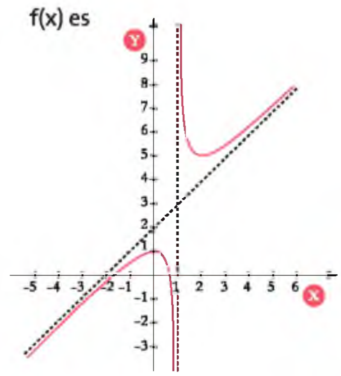
III. La función no tiene ceros, $C^+ = (1, +\infty)$ y $C^- = (-\infty; 1)$.

IV. La función es derivable en todo su dominio.

V. $f(x)$ crece en $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ y decrece en $(0; 1) \cup (1; 2)$. En $x=0$ la función tiene un máximo relativo y en $x=2$ un mínimo relativo.

VI. $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-\infty; 1)$ y cóncava hacia arriba en $(1, +\infty)$. La función no tiene puntos de inflexión.

VII. El gráfico aproximado de $f(x)$ es



b. I. Dom $g = \mathbb{R}$

II. $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. No existe asíntota vertical ni asíntota oblicua.

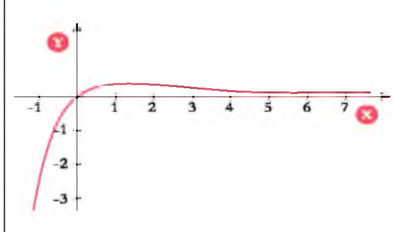
III. La función tiene un cero en $x = 0$, $C^+ = (0; +\infty)$ y $C^- = (-\infty; 0)$.

IV. La función es derivable en todo su dominio.

V. $g(x)$ crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1; +\infty)$. En $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

VI. $g(x)$ es cóncava hacia arriba en $(2; +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty; 2)$. El punto $(2; 2e^{-2})$ es punto de inflexión de la función.

VII. El gráfico aproximado de $g(x)$ es el siguiente:

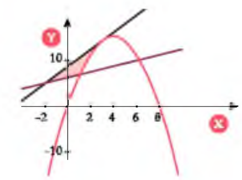


6. $a = -\dfrac{\pi}{2}$

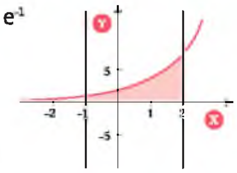
Respuestas
Guías de autoevaluación

Capítulo 3

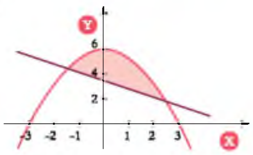
1. a. $\dfrac{26}{3}$



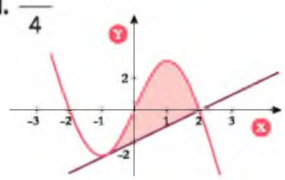
b. $e^2 - e^{-1}$



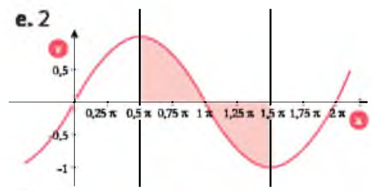
c. $\dfrac{64}{9}$



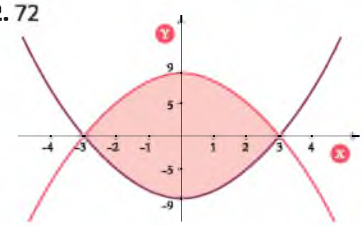
d. $\dfrac{27}{4}$



e. 2



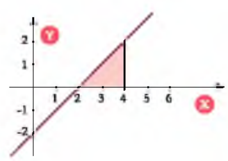
2. 72



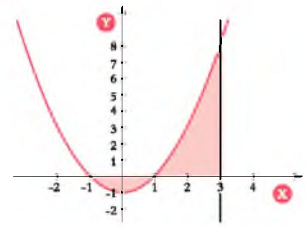
3. $\dfrac{33}{2}$

4. a. Falso pues el área de la región indicada es el valor de

$$\int_2^4 (x-2)\,dx.$$



b. Verdadero porque la función i(x) es positiva en (1; 3] y negativa en (–1; 1).

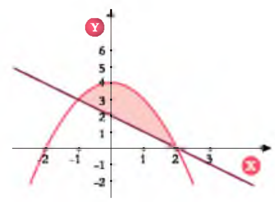


c. Falso pues el valor de

$$\int_{-1}^{2} [(-x^2+4)-(-x+2)]\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\,dx$$

es el área de la región indicada.



Capítulo 4

1. a. II., pues es la expresión que se obtiene utilizando el método de integración por partes.

b. IV., pues la función $\dfrac{x}{x^2-1}$ es la función derivada de la función del ítem **IV.**

2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}\,(4x - 12\sqrt{x} + 12) + (10 - e)x - 12$

3. $d(t) = -\dfrac{1}{25}\,\text{sen}\,(5t) + t + 20$

4. a. $\dfrac{1}{2}(\ln x - 3)^2 + 5\,(\ln x - 3) + 8 \ln |\ln x - 3| + k$

b. $-\dfrac{1}{5}\ln|e^x - 2| + \dfrac{6}{5}\ln|e^x + 3| + k$

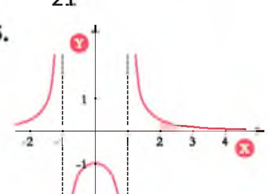
c. $\dfrac{1}{18}[3x^2\,\text{sen}(3x^2+5) + \cos(3x^2+5)] + k$

d. $\dfrac{1}{7}(7x+8)[\ln(7x+8) - 1] + k$

e. $\dfrac{5}{9}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| - \dfrac{4}{3(x-2)} + k$

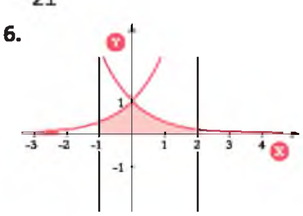
f. $-\dfrac{2}{21}\cos(5x-3)\cos(8-2x) + \dfrac{5}{21}\,\text{sen}(5x-3)\,\text{sen}(8-2x) + k$

5.



$A = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)$

6.



$A = 2 - e^{-1} - e^{-2}$

Notas

Esta obra se terminó
de imprimir en los talleres de Longseller,
Buenos Aires, Argentina,
en el mes de febrero de 2003.

Matemática

Análisis 2

Silvia V. Altman | Claudia R. Comparatore | Liliana E. Kurzrok

Serie Libros Temáticos de Matemática

longseller

Código interno: 1926
ISBN 987-550-044-5
9 789875 500440