1)

a) $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + c \,,\; m, c \in \mathbb{R} \}$

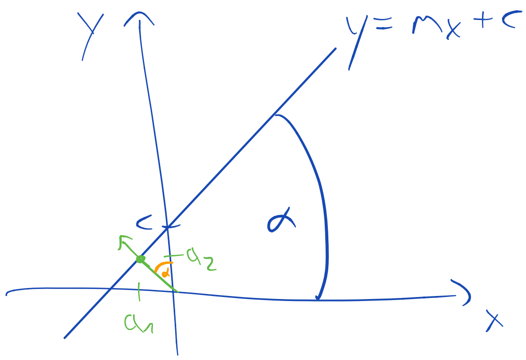
$G_i = \{ (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{i,1} y_1 + a_{i,2} y_2 = x_i \}$

$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = x_1$

$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} x_1 \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$\vec{n}_1^T \cdot \vec{y} = d$

ges: $(x, y, m, c) \{ y_1, y_2, a_{i1}, a_{i2} \}$



$x = y_1$

$y = y_2$

$m = -\frac{a_{i2}}{a_{i1}}$

$c = \frac{x_i}{a_{i2}} = \frac{a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2}{a_{i2}}$

---

b) $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \,,\quad a_{ij} \in \mathbb{R} \,,\quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \wedge \det A \neq 0$

LGS: $Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

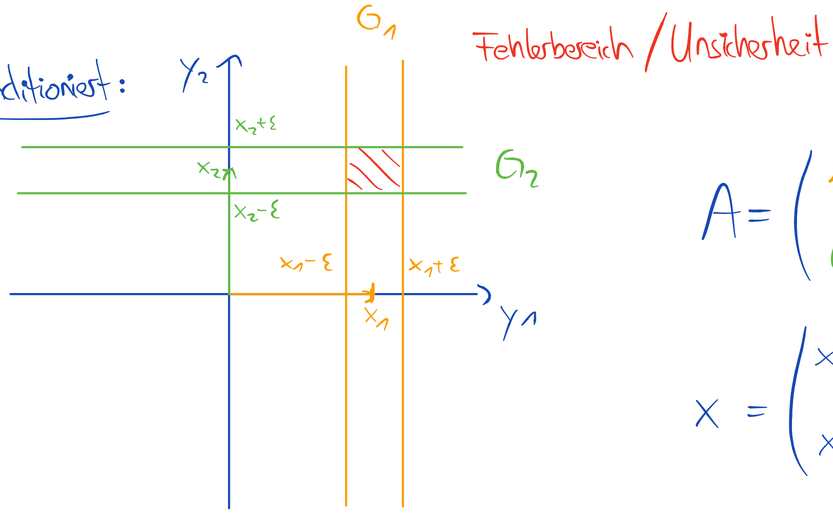
$\rightarrow y^* = A^{-1} x = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,,\quad \det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$= \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} x_1 - a_{12} x_2 \\ -a_{21} x_1 + a_{11} x_2 \end{pmatrix}$

c) Kondition ist die Abhängigkeit der Fehler Unsicherheit am Ausgang eines Systems von der Unsicherheit am Eingang.

d)

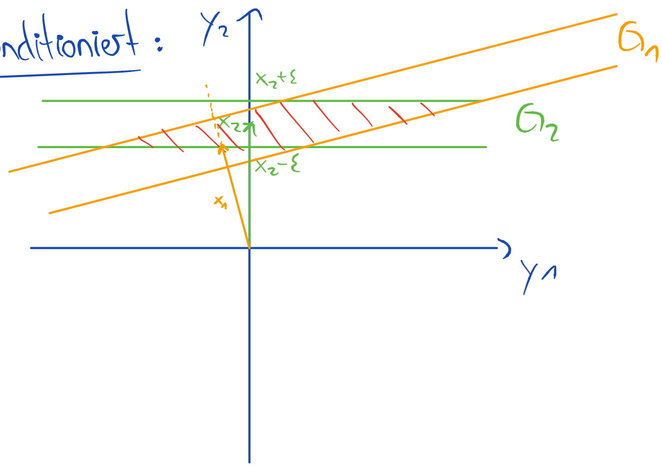
gut konditioniert:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schlecht konditioniert:



$$A = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Unsicherheitsbereich des Schnittpunktes viel größer als beim gut konditionierten Problem

e) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = y = A^{-1}x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \varepsilon > 0$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \Delta x = \tilde{x} - x = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta y = f(\tilde{x}) - f(x) = A^{-1}\tilde{x} - A^{-1}x$$

$$= \frac{\varepsilon}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix}$$

Sensitivität:

$$\frac{\|\Delta y\|_\infty}{\|\Delta x\|_\infty} = \frac{\max\{\Delta y_1, \Delta y_2\}}{\max\{\varepsilon, 0\}} = \frac{\frac{\varepsilon}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{\varepsilon} \max\{a_{22}, -a_{21}\}$$

2)

a)

i) $\underline{zz}$: $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|$; $v \in \mathbb{R}^n$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ $\underline{zz}$: $\|v\|_1 \geq 0 \; \forall v \in \mathbb{R}^n \;\wedge\; \|v\|_1 = 0 \Rightarrow v = 0$ (N1)

$\wedge \; \forall a \in \mathbb{K}, v \in V: \|av\|_1 = |a| \cdot \|v\|_1$ (N2)

$\wedge \; \forall v, w \in V: \|v+w\|_1 \leq \|v\|_1 + \|w\|_1$ (N3)

$\underline{N1}$: $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{v_i^2} \geq 0 \quad \forall v_i \in \mathbb{R}$

$\wedge \; \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|v_i|}_{\geq 0} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow |v_i| = 0 \; \forall i \in \{1...n\} \Rightarrow v = 0$ bzw. $\vec{v} = \vec{0}$

$\underline{N2}$: $\|av\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |av_i| = \sum_{i=1}^{n} |a|\,|v_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |v_i| = |a|\,\|v\|_1$

$\underline{N3}$: $\|v+w\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i + w_i| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |v_i| + |w_i| = \|v\|_1 + \|w\|_1$

$$|v_i + w_i|^2 \leq (|v_i| + |w_i|)^2$$

$$v_i^2 + w_i^2 + 2v_iw_i \leq |v_i|^2 + |w_i|^2 + 2|v_i||w_i|$$

$$v_iw_i \leq |v_iw_i|$$

$\varnothing$

ii) $\underline{zz}$: $\|v\|_2 := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|v_i|^2} = \sqrt{\langle v,v\rangle_2}$; $v \in \mathbb{R}^n$ ist eine Norm

$\underline{N1}$: $\|v\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|v_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{v_i^2} \geq 0 \quad \forall v_i \in \mathbb{R}$

$\wedge \ \|v\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sqrt{v_i^2}}_{\geq 0} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \sqrt{v_i^2} = |v_i| = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$

$\underline{N2}$: $\|a v\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a v_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a|^2 |v_i|^2} = |a| \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|v_i|^2} = |a| \, \|v\|_2$

$\underline{N3}$: $\|v+w\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\langle v,w\rangle_2} \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle v,w\rangle_2| \overset{CSU}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\langle v,v\rangle_2 \langle w,w\rangle_2}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\langle v,v\rangle_2} \sqrt{\langle w,w\rangle_2} = \|v\|_2 + \|w\|_2$

$\emptyset$

---

iii) $\underline{zz}$: $\|v\|_\infty = \max_{i\in\{1..n\}} \{|v_i|\}$, $v \in \mathbb{R}^n$ ist eine Norm

$\underline{N1}$: $\|v\|_\infty = \max_{i\in\{1..n\}} \{|v_i|\} \geq 0 \quad \forall |v_i| \geq 0$

$\wedge \ \|v\|_\infty = 0 \Rightarrow |v_i| = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$

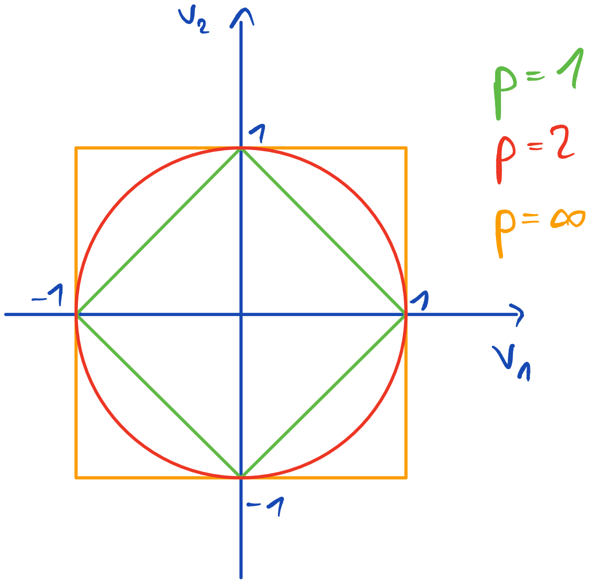
$\underline{N2}$: $\|a \cdot v\|_\infty = \max_{i\in\{1..n\}} \{|a| \cdot |v_i|\} = |a| \cdot \max_{i\in\{1..n\}} \{|v_i|\} = |a| \cdot \|v\|_\infty$

$\underline{N3}$: $\|v+w\|_\infty = \max_{i\in\{1..n\}} \{|v_i + w_i|\} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \max_{i\in\{1..n\}} \{|v_i| + |w_i|\} \leq \max_{i\in\{1..n\}} \{|v_i|\} + \max_{i\in\{1..n\}} \{|w_i|\}$

$= \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$

$\emptyset$

b) $\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v|_p = 1 \}$



c) $C[a,b]$: Menge stetiger Fkt. auf $I = [a,b]$ mit $a<b$

$$\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \; , \; g \mapsto \max_{t\in[a,b]} \{ |g(t)| \} \quad \forall g \in C[a,b]$$

<u>zz:</u> g definiert eine Norm auf $C[a,b]$

<u>N1</u>: $\|g(t)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \{ |g(t)| \} \geq 0 \quad \forall |g(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$\wedge \; \|g(t)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \{ |g(t)| \} \overset{!}{=} 0 \implies |g(t)| = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

<u>N2</u>: $\|a \cdot g(t)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \{ |a| \cdot |g(t)| \} = |a| \cdot \|g(t)\|_\infty$

<u>N3</u>: $\|g(t) + f(t)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \{ |g(t) + f(t)| \} \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \max_{t\in[a,b]} \{ |g(t)| + |f(t)| \}$

$\leq \max_{t\in[a,b]} \{ |g(t)| \} + \max_{t\in[a,b]} \{ |f(t)| \} = \|g(t)\|_\infty + \|f(t)\|_\infty$

$\emptyset$

3)

a) $h_1 : [0,2] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{1+4x}$ $\quad \underline{\text{zz:}}$ h_1 Lipschitz-stetig

$u, v \in [0,2]$

$$\| h_1(u) - h_1(v) \| = \| \sqrt{1+4u} - \sqrt{1+4v} \|$$

$$= \left\| \frac{1+4u - (1+4v)}{\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v}} \right\|$$

$$= \left\| 4 \cdot \frac{u-v}{\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v}} \right\|$$

$$\leq \underbrace{4}_{L} \cdot \| u - v \| \quad \forall u,v \in [0,2]$$

$$\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v} \overset{\text{a-Ungl.}}{\geq} \sqrt{1+4u+1+4v} \geq \sqrt{2} \geq 1 \quad \forall u,v \in [0,2]$$

$\emptyset$

---

b) $h_2 : [-4,3] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto h_2(x)$, h_2 stetig diff'bar

$\| h_2'(x) \| \leq \frac{c}{2} x^2 \quad \forall x \in [-4,3], \; c > 0$ $\quad \underline{\text{zz:}}$ h_2 Lipschitz-stetig

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\| h_2(x+\varepsilon) - h_2(x) \|}{\| \varepsilon \|} \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left\| \frac{h_2(x+\varepsilon) - h_2(x)}{\varepsilon} \right\| \right\} = \| h_2'(x) \|$$

$$\leq \frac{c}{2} x^2 \leq \underbrace{4{,}5\, c}_{L} \quad \forall x \in [-4,3]$$

$\emptyset$

$$\left(\exists x_0 \in [-4,3] : h'(x_0) = \frac{h(-4) - h(3)}{-4-3} \leq \frac{c}{2} x_0^2 \leq 4{,}5c \right)$$

---

c) $h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto h_3(x) = x^2$

$\rightarrow \forall L \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \| h_3'(x) \| = \| 2x \| \geq L$