Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
24.04.2020

Übungsblatt 01

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 04.05.2020 bis 08.05.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es 37 Theorie- und 0 Matlab-Punkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 01) bei 25,9 Theorie- und 0 Matlabpunkten.

Aufgabe 1 *(*Kondition eines Problems, Schnittpunkt zweier Geraden) (2T+2T+2T+4T+4T Punkte)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit dem Begriff der Kondition eines Problems und verdeutlichen diesen Begriff am Schnittpunkt zweier Geraden:

a) Sie kennen für eine Gerade die Darstellung $y = m\,x + c$, wobei $m \in \mathbb{R}$ die Steigung und $c \in \mathbb{R}$ den y-Achsenabschnitt der Geraden bezeichnen. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m\,x + c\}$ gibt also die Menge der Punkte auf der Geraden an.

   In der Vorlesung haben wir für die Geraden G_1 und G_2 die Darstellung $G_i = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{i,1}\,y_1 + a_{i,2}\,y_2 = x_i\}$, $i = 1, 2$ gesehen.

   Erklären Sie, wie diese beiden Darstellungen zusammen hängen. Geben Sie die Größen x, y, m und c in Abhängigkeit von $y_1, y_2, a_{i,1}$ und $a_{i,2}$ an.

b) Bestimmen Sie für $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$ den Schnittpunkt der beiden Geraden G_1 und G_2 als Lösung $y^* = (y_1^*, y_2^*)^T$ des entsprechenden Gleichungssystems $A\,y = x$. Nehmen Sie dazu an, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ regulär ist.

c) Erklären Sie (allgemein, also nicht an einem Beispiel) den Begriff der „Kondition“.

d) Geben Sie nun für das Beispiel des Schnittpunts der beiden Geraden G_1 und G_2 jeweils eine möglichst einfache Kombination der Koeffizienten $a_{i,j}$ und des Vektors x für ein gut konditioniertes und ein schlecht konditioniertes Problem an. Dabei soll auch beim schlecht konditionierten Problem die Matrix A regulär sein.

   Skizzieren Sie den Sachverhalt für gestörte Eingabedaten $\tilde{x} = x + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon_i \in \mathbb{R}, \varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2$ und erklären Sie anschaulich, warum Ihre Beispiele gut bzw. schlecht konditioniert sind.

e) Sei jetzt $X = Y = \mathbb{R}^2$ und $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = y = A^{-1}\,x$ für $x \in X,\ y \in Y,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gehen Sie davon aus, dass es eine Störung $\varepsilon > 0$ in der ersten Komponente der Eingabedaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gibt, also $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   Geben Sie den Eingabefehler Δx und den Ausgabefehler Δy an und berechnen Sie das Verhältnis

   $$\frac{||\Delta y||_Y}{||\Delta x||_X} = \frac{||\tilde{y} - y||_Y}{||\tilde{x} - x||_X}$$

   des absoluten Ausgabefehlers $||\Delta y||_Y$ zum absoluten Eingabefehler $||\Delta x||_X$ des allgemeinen Schnittpunktproblems. Verwenden Sie hierbei für die Norm $||\cdot||_X$ auf X und die Norm $||\cdot||_Y$ auf Y jeweils die durch $||z||_\infty = max_{i=1,\ldots,n}|z_i|$ definierte Maximumsnorm. Wie nennt man dieses Verhältnis?

Aufgabe 2 *(*Einfache Normen) (9T+3T+3T Punkte)

a) Zeigen Sie, dass durch

i) $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (1-Norm),

ii) $\|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2} = \langle v, v\rangle_2^{1/2}, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (Euklidische Norm) und

iii) $\|v\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (∞-Norm)

Normen auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Dabei bezeichne $\langle v, w\rangle_2^{1/2} = (v^T w)^{1/2}$ das euklidische Skalarprodukt.

Hinweis: Verwenden Sie für ii) die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

b) Skizzieren Sie für $n = 2$ und die Normen $\|\cdot\|_*$ aus Aufgabenteil a) jeweils die Menge $\{v \in \mathbb{R}^2;\ \|v\|_* = 1\}$.

c) Sei $C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$. Diese Menge bildet einen Vektorraum, dies müssen Sie nicht zeigen.

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$||\cdot||_\infty : C[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto \max_{t\in[a,b]} |g(t)| \qquad \forall g \in C[a, b]$$

eine Norm auf dem Vektorraum $C[a, b]$ definiert ist.

Aufgabe 3 *(*Lipschitz-Stetigkeit) (3T+3T+2T Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1 + 4x}$$

Lipschitz-stetig ist und geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

Hinweis: Sie dürfen die dritte binomische Formel verwenden.

b) Sei $h_2 : [-4, 3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h_2(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion, von der wir wissen, dass mit einer festen Konstanten $c > 0$ die Ungleichung

$$\|h_2'(x)\| \le \frac{c}{2} x^2$$

für alle $x \in [-4, 3]$ gilt.

Zeigen Sie, dass dann h_2 Lipschitz-stetig ist und geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

Hinweis: Sie dürfen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwenden.

c) Geben Sie eine Abbildung h_3 an, die nicht Lipschitz-stetig ist.

Hinweise:
Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt01_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.