Blatt 4 Sebastian Maschke

Mittwoch, 20. Mai 2020 13:28

Aufgabe 12

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ -12 & 5 & -12 \\ 18 & 0 & 22 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \frac{41}{12} \\ -\frac{22}{3} \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{41}{12}, -\frac{22}{3}, \frac{29}{2} \right)^T$$

a) Gauss ohne Pivotisierung:

$$\boxed{l_{i,j} := \frac{a_{ij}}{a_{jj}}}$$

$$(A\ b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 7 & \frac{41}{12} \\ -12 & 5 & -12 & -\frac{22}{3} \\ 18 & 0 & 22 & \frac{29}{2} \end{array}\right)$$

$j = 1$

$$l_{2,1} = \frac{-12}{6} = -2 \qquad l_{3,1} = \frac{18}{6} = 3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 7 & \frac{41}{12} \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & 1 & \frac{17}{4} \end{array}\right)$$

$j = 2$

$$l_{3,2} = \frac{12}{-3} = -4 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & 7 & \frac{41}{12} \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 9 & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{\frac{9}{4}}{9} = \frac{\cancel{9}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{9}} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right)^T$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\boxed{\begin{aligned} L_k &= I - (0, \dots, \underbrace{l_{k+1,k}}_{k\text{-te Spalte}}, \dots, l_{n,k})^T \cdot (e^k)^T \quad \text{mit } e^k = (0, \dots, 1, \dots)^T \\ L_k^{-1} &= I + (0 \dots, l_{k+1,k}, \dots, l_{n,k})^T \cdot (e^k)^T \end{aligned}}$$

$$\underset{k=1}{L_1} = I - (0, l_{2,1}, l_{3,1})^T \cdot (1, 0, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ l_{2,1} \\ l_{3,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 0 & 0 \\ l_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1} = I + (0, 0, l_{32})^T \cdot (1, 0, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k=2}{L_2} = I - (0, 0, l_{3,2})^T \cdot (0, 1, 0)$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\l_{32}\end{pmatrix}\cdot(0,1,0) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&l_{32}&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-l_{32}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}$$

$$L_2^{-1} = I + (0,0,l_{32})^T\cdot(0,1,0)$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l_{32}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L = L_1^{-1}\cdot L_2^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&l_{32}&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-4&1\end{pmatrix}$$

$$R = L_2 L_1 \cdot A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-l_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-l_{21}&1&0\\-l_{31}&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\-l_{21}&1&0\\l_{32}l_{21}-l_{31}&-l_{32}&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ -l_{21}a_{11}+a_{21} & -l_{21}a_{12}+a_{22} & -l_{21}a_{13}+a_{23}\\ a_{11}(l_{32}l_{21}-l_{31})-a_{21}l_{32}+a_{31} & a_{12}(l_{32}l_{21}-l_{31})-a_{22}l_{32}+a_{32} & a_{13}(l_{32}l_{21}-l_{31})-a_{23}l_{32}+a_{33}\end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}6&-4&7\\0&-3&2\\0&0&9\end{pmatrix}$$

c) <u>1. Vorwärtseinsetzen</u> $\quad Ly = b$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{41}{12}\\-\frac{22}{3}\\\frac{29}{2}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow y_1 = \frac{41}{12}$

$\rightarrow y_2 = -\frac{22}{3} + 2y_1 = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow y_3 = \frac{29}{2} + 4y_2 - 3y_1 = \frac{9}{4}$

$$y = \left(\frac{41}{12}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

<u>2. Vorwärtseinsetzen</u> $\quad Rx = y$

$$\begin{pmatrix}6&-4&7\\0&-3&2\\0&0&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{41}{12}\\-\frac{1}{2}\\\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow x_3 = \frac{\frac{9}{4}}{9} = \frac{1}{4}$

$\rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - 2x_3\right)$

$$x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)^T$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{41}{12} + 4x_2 - 7x_3\right)$$

$$= \frac{1}{2} \quad \underline{q.e.d.}$$

Aufgabe 14 Zeilenskalierung und Pivotisierung

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 20 \\ -33 \\ -43 \\ 49 \end{pmatrix}$$

a)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \emptyset \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ \emptyset & & & d_4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|}$$

$$d_1 = \frac{1}{2 + 3 + |-1|} = \frac{1}{6}$$

$$d_2 = \frac{1}{13}$$

$$d_3 = \frac{1}{19}$$

$$d_4 = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{6}{19} \\ \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{3}{15} \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung mit Pivotisierung der Matrix D·A:

- $j = 1$

Pivoting $2 \rightarrow 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{6}{19} \\ \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{3}{15} \end{pmatrix}$$

Elimination $\rightarrow$

$$l_{21} = \frac{\frac{2}{6}}{-\frac{6}{13}} = -\frac{13}{18}$$

$$l_{31} = -\frac{13}{57}$$

$$l_{41} = -\frac{26}{45}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{13}{18} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ -\frac{13}{57} & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ -\frac{26}{45} & \frac{8}{45} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

• $j = 2$

Pivoting $3 \to 2$

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{13}{57} & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ -\frac{13}{18} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ -\frac{26}{45} & \frac{8}{45} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \quad l_{32} = \frac{\frac{2}{9}}{-\frac{20}{57}} = -\frac{19}{30}, \quad l_{42} = -\frac{38}{75} \quad \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{13}{57} & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ -\frac{13}{18} & -\frac{19}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{26}{45} & -\frac{38}{75} & \frac{22}{75} & -\frac{19}{75} \end{pmatrix}$$

• $j = 3$

Pivoting $4 \to 3$

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{13}{57} & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ -\frac{26}{45} & -\frac{38}{75} & \frac{22}{75} & -\frac{19}{75} \\ -\frac{13}{18} & -\frac{19}{30} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \quad l_{43} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{22}{75}} = \frac{5}{44} \quad \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ -\frac{13}{57} & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ -\frac{26}{45} & -\frac{38}{75} & \frac{22}{75} & -\frac{19}{75} \\ -\frac{13}{18} & -\frac{19}{30} & \frac{5}{44} & -\frac{5}{132} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{57} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{26}{45} & -\frac{38}{75} & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & -\frac{19}{30} & \frac{5}{44} & 1 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ 0 & 0 & \frac{22}{75} & -\frac{19}{75} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{132} \end{pmatrix}$$

Reihenfolge !!

$$P = P_{34} \cdot P_{23} \cdot P_{12} \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad LR = P \cdot D \cdot A$$

b) Lösung des LGS: $Ax = b$:

Äquivalent zu $DAx = Db$

$$DA = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{6}{19} \\ \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{3}{15} \end{pmatrix} \hat{=} A; \quad Db = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -33 \\ -43 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{33}{13} \\ -\frac{43}{19} \\ \frac{49}{15} \end{pmatrix} \hat{=} b$$

Über Lösung zweier Dreiecksysteme:

<u>1. Vorwärtseinsetzen</u>

$Ly = P \cdot b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{57} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{26}{45} & -\frac{38}{75} & 1 & 0 \\ -\frac{13}{18} & -\frac{19}{30} & \frac{5}{44} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{33}{13} \\ -\frac{43}{19} \\ \frac{49}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{13} \\ -\frac{43}{19} \\ \frac{49}{15} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\frac{33}{13} \\ y_2 &= -\frac{43}{19} - \left(-\frac{13}{57} y_1\right) = -\frac{54}{19} \\ y_3 &= \frac{49}{15} - \left(-\frac{26}{45} \cdot y_1 - \frac{38}{75} y_2\right) = \frac{9}{25} \\ y_4 &= \frac{10}{3} - \left(-\frac{13}{18} y_1 - \frac{19}{30} y_2 + \frac{5}{44} y_3\right) = -\frac{15}{44} \end{aligned}\right\} \quad y = \left(-\frac{33}{13}, -\frac{54}{19}, \frac{9}{25}, -\frac{15}{44}\right)^T$$

<u>2. Rückwärtseinsetzen</u>

$Rx = y$

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & -\frac{20}{57} & \frac{6}{19} & -\frac{16}{57} \\ 0 & 0 & \frac{22}{75} & -\frac{19}{75} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{132} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{13} \\ -\frac{54}{19} \\ \frac{9}{25} \\ -\frac{15}{44} \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \frac{-\frac{15}{44}}{-\frac{5}{132}} = 9$$

$$x_3 = \frac{75}{22} \cdot \left(\frac{9}{25} - -\frac{19}{75} x_4\right) = 9$$

$$x_2 = -\frac{57}{20} \cdot \left(-\frac{54}{19} - \left(\frac{6}{19} x_3 - \frac{16}{57} x_4 \right) \right) = 9$$

$$x_1 = -\frac{13}{6} \cdot \left(-\frac{33}{13} - \left(-\frac{5}{13} x_2 + \frac{2}{13} x_4 \right) \right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = (1, 9, 9, 9)^T$$

Aufgabe 15

d) Bis auf Beispiel i) sind alle Lösungen identisch.
In i) ist ein Pivotelement Null, deshalb scheitert an dieser Stelle der Gauss-Algorithmus ohne Pivotisierung.

Durch die Skalierung unterscheiden sich die Matrizen L und R im Vergleich vom Gauss-Algorithmus ohne Pivotisierung zum Gauß-Algorithmus mit Skalierung und Pivotisierung.
Außerdem werden in einem Fall Zeilen vertauscht.

f) $L R x^i = P e^i$ ← i-ter Einheitsvektor

↑ i-ter Spaltenvektor von A^{-1}

Zur Lösung dieser Aufgabe wurde die Funktion [L, R, P, d] = lrPivot(A) modifiziert, sodass diese keine Skalierung vornimmt. Die neue Funktion heißt [L, R, P] = lrPivotNoScale(A).

Zur Bestimmung der Inverse wurde die Funktion [x] = solveInv(L, R, P, e) geschrieben, welche sukzessive dazu benutzt werden kann, die Inverse einer Matrix über $L R x_i = P \cdot e_i$ zu bestimmen.