Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
12.06.2020

Übungsblatt 08

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 22.06.2020 bis 26.06.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es 14 Theorie- und 9 Matlab-Punkte, sowie 10 Theorie- und 6 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 08) bei 132,3 Theorie- und 81,9 Matlabpunkten.

Aufgabe 32 *(Noch ein lineares Ausgleichsproblem?)* (1T+4T Punkte)

Das Abkühlen eines festen Körpers kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden

$$T(t) = T_u + a\,e^{-b\,t}.$$

Dabei ist

- $T(t)$ die Temperatur zum Zeitpunkt t,
- T_u die (konstante) Umgebungstemperatur,
- a eine unbekannte systemabhängige Konstante und
- b eine unbekannte Materialkonstante.

Die beiden unbekannten Konstanten a und b sollen experimentell bestimmt werden. Dazu werden durch ein Experiment zu den Zeitpunkten t_i für $i \in \{1, ..., m\}$ bei konstanter Umgebungstemperatur T_u die Temperaturwerte T_i des festen Körpers gemessen.

a) Lässt sich dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem formulieren?

b) Begründen Sie Ihre Aussage. Geben Sie dazu die Formulierung des linearen Ausgleichsproblems sowie die auftretende Matrix und die auftretenden Vektoren explizit an. Welche Dimensionen haben dann die Matrix und die Vektoren? Oder erklären Sie detailliert, woran die Formulierung als lineares Ausgleichsproblem scheitert.

Aufgabe 33 *(Gestörtes Lineares Ausgleichsproblem und die Normalengleichungen)* (1M*+2T*+2T*+2T* Punkte)

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2^2 \to \min$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie mit Matlab die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Matrix A bzgl. der euklidischen Norm.

b) Berechnen Sie per Hand $A^\top A$ exakt und mit Matlab die zugehörige Konditionszahl $\kappa_2(A^\top A)$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Betrachten Sie die gestörte Matrix $A^\top A + \Delta(A^\top A)$ mit der Störung

$$\Delta(A^\top A) = \begin{pmatrix} -10^{-10} & 0 \\ 0 & -10^{-10} \end{pmatrix}.$$

Wie würde sich diese Störung auf die Normalengleichungen auswirken?

d) Wie würde sich eine andere Störung, die in etwa die Größenordnung von $\Delta(A^\top A)$ hat, auf die Normalengleichungen auswirken? Was würde für die Kondition der gestörten Matrix $A^\top A + \Delta(A^\top A)$ folgen?

Aufgabe 34 *(Programmieraufgabe: Kondition und Normalengleichungen)* (5M*+4T* Punkte)

a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript `testNormalengleichung`, in dem Sie für $n = (1, \dots, 13)$ jeweils die Matrix A_n und den Vektor x_n durch `An = [hilb(n); hilb(n)];` und `xn = rand(n,1);` definieren. Erzeugen Sie den Vektor b_n durch `bn = An * xn;`. Berechnen Sie mit dem Backslash-Operator (`x = An\bn`), mit Hilfe der Normalengleichungen und mit Hilfe der QR-Zerlegung jeweils eine Näherungslösung des linearen Ausgleichsproblems $\|A_n x - b_n\|_2 \to \min$.

Plotten Sie für die drei verschiedenen Näherungslösungen jeweils die relativen Fehler logarithmisch über n.

Hinweis: Die Normalengleichungen dürfen Sie mit dem Backslash-Operator lösen. Die QR-Zerlegung dürfen Sie mit der MATLAB-Funktion `qr` berechnen und zum „Rückwärtseinsetzen" können Sie ebenfalls den Backslash-Operator verwenden.

Informieren Sie sich in der MATLAB-Dokumentation über den Backslash-Operator.

b) Was stellen Sie fest? Woran liegt das?

Hinweis: Betrachten Sie jeweils die Kondition der Matrix A_n und die Kondition der Matrix $A_n^T A_n$, die Sie mit den MATLAB-Befehlen `cond(An)` und `cond(An'*An)` berechnen dürfen. Können diese Werte stimmen?

Aufgabe 35 *(Unterschied zwischen Kondition und Stabilität)* (3T+2T+4M+5M+4T Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns erneut mit dem Problem der Lösung einer quadratischen Gleichung beschäftigen. Wir greifen die Aufgabenstellung von Aufgabe 4, Übungsblatt 02, erneut auf:
Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p^2 \geq -q$ (also $p^2 + q \geq 0$) sollen die Lösungen $x_1 \leq x_2$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2px - q = 0$$

berechnet werden. Diese Lösungen x_1 und x_2 hängen von den Parametern p und q ab.
Wir betrachten im Folgenden nur den Fall $q > 0$. In Aufgabe 4 haben wir gesehen, dass dann die Berechnung der größeren Nullstelle x_2 gut konditioniert ist. Und mit Beispiel 2.15 auf Folie 30 können wir folgern, dass auch die Berechnung der kleineren Nullstelle x_1 gut konditioniert ist.

a) Begründen Sie, dass die quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen hat und dass man bei Verwendung der üblichen Formel $x_{1/2} = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$ auf Auslöschung achten muss. Unter welchen Bedingungen tritt Auslöschung auf?

b) Zeigen Sie: $x_1 x_2 = -q$ und $x_1 + x_2 = -2p$.

c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[x1, x2] = nst(p, q)`, die x_1 und x_2 mit der üblichen Formel aus Aufgabenteil a) berechnet, sowie eine Matlab-Funktion `[x1, x2] = nstStabil(p, q)`, die x_1 und x_2 mit einem numerisch stabilen Algorithmus berechnet.

d) Schreiben Sie ein Matlab-Skript, das die Nullstellen $x_{1/2}$ mit Ihren Matlabfunktionen aus Aufgabenteil c) für $q = 1$ und viele verschiedene Werte p berechnet. Wählen Sie dazu $p = 10^t$, wobei $t = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 12$. Berechnen Sie die relativen Fehler in x_1 und x_2 und plotten Sie im von Auslöschung betroffenen Fall die relativen Fehler doppelt logarithmisch über p (Matlab-Befehl `loglog`). Sie dürfen davon ausgehen, dass die Berechnung mit dem stabilen Algorithmus die korrekten Werte liefert.

   Führen Sie Ihre Berechnungen auch für negative Werte p (also $p = -10^t$) durch und plotten Sie wieder die relativen Fehler des von Auslöschung betroffenen Falls doppelt logarithmisch (jetzt über $|p|$).

   Interpretieren Sie Ihre Schaubilder.

e) Erklären Sie die Begriffe „Kondition“ und „Stabilität“.

Hinweise:
Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt08_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.