Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 11

(Abgabe Fr. 12.07. 2013 um 10 Uhr **vor** der Übung.)

Aufgabe 33 *(Newton Cotes Gewichte)* (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Gewichte λ_i der Newton-Cotes Formeln für die Knoten

$$t_0 = \frac{3a+b}{4}, \quad t_1 = \frac{2a+2b}{4}, \quad t_2 = \frac{a+3b}{4}.$$

Lösung

Für die Lagrange-Basisfunktionen gilt

$$\begin{aligned}
L_{0,2}(x) &= \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{8x^2-(6a+10b)x+(a+b)(a+3b)}{(a-b)^2}\\
L_{1,2}(x) &= \frac{(x-t_0)(x-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = \frac{-16x^2+(16a+16b)x-(3a+b)(a+3b)}{(a-b)^2}\\
L_{2,2}(x) &= \frac{(x-t_0)(x-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{8x^2-(10a+6b)x+(a+b)(3a+b)}{(a-b)^2}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Newton-Cotes-Gewichte:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b L_{0,2}(x)\,dx = \ldots = \frac{2}{3}\\
\lambda_1 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b L_{1,2}(x)\,dx = \ldots = -\frac{1}{3}\\
\lambda_2 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b L_{2,2}(x)\,dx = \ldots = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 34 *(Quadraturformeln)* (5+5 Punkte)

Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

$$\hat{I}(f) := \lambda_1 f\left(\frac{1}{3}\right) + \lambda_2 f(x_2)$$

zur Approximation von

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

(i) Bestimmen Sie die Gewichte λ_1 und λ_2 und den freien Knoten x_2, so dass die Ordnung m der Formel möglichst gross wird. Wie groß ist die Ordnung der Formel dann?

(ii) Vergleichen Sie für

$$\int_{-1}^2 e^x\,dx$$

die Ergebnisse der auf das Intervall $[-1, 2]$ transformierten Form $\hat{I}$ mit den entsprechenden Werten der Trapezregel und der Mittelpunktsformel.

Lösung:

(i) Um eine möglichst hohe Konvergenzordnung zu erhalten, versuchen wir, für Monome $m_j(x) := x^j$ die Gleichung

$$\hat{I}(m_j) = \int_0^1 m_j(x)\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^j \lambda_1 + x_2^j \lambda_2 = \frac{1}{j+1}$$

für möglichst grosses $j = 0, 1, 2, \dots$ zu erfüllen. Die ersten drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
j = 0:\ m_0(x) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \qquad = 1, \\
j = 1:\ m_1(x) = x \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\lambda_1 + x_2\lambda_2 = \frac{1}{2}, \\
j = 2:\ m_2(x) = x^2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{9}\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

sind eindeutig lösbar. Auflösen der ersten Gleichung liefert $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\frac{1}{3}(1 - \lambda_2) + x_2\lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_2 - \frac{1}{3})\lambda_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

und damit $x_2 \neq 1/3$, da dies einen Widerspruch liefern würde ($1/3 = 1/2$). Auflösen nach λ_2 liefert $\lambda_2 = \frac{1}{6(x_2 - \frac{1}{3})}$ einsetzen in die dritte Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{9}(1 - \lambda_2) + x_1^2\lambda_2 &&= \frac{1}{3} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{6(x_2 - \frac{1}{3})}\right) + \frac{9}{9}\frac{x_2^2}{6(x_2 - \frac{1}{3})} &&= \frac{1}{3} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{9}\frac{9x_2^2 - 1}{6(x_2 - \frac{1}{3})} &&= \frac{2}{9} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{9}\frac{(3x_2 - 1)(3x_2 + 1)}{2(3x_2 - 1)} &&= \frac{2}{9} \\
\Longleftrightarrow \quad &\frac{1}{9}\frac{(3x_2 + 1)}{2} &&= \frac{2}{9} \\
\Longleftrightarrow \quad &(3x_2 + 1) &&= 4
\end{aligned}$$

und damit

$$x_2 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_1 = \frac{3}{4}.$$

Damit besitzt die Quadraturformel

$$\hat{I}(f) = \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$$

wenigstens die Ordnung 3. Allerdings gilt für $j = 3$ nicht mehr die Gleichheit

$$\hat{I}(m_3) = \frac{3}{4}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{4} = I(m_3).$$

somit ist die Ordnung 3.

(ii) Es gilt

$$\int_{-1}^2 e^x\,dx = e^2 - e^{-1} = 7.021.$$

Um die Quadraturformel $\hat{I}(f)$ auf $[-1, 2]$ anzuwenden, müssen wir zunächst die Stützstellen $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = 1$ auf das Intervall $[-1, 2]$ transformieren. Allgemein wird die Transformation von Werten $x \in [a, b]$ auf Werte $y \in [c, d]$ beschrieben durch die Abbildung

$$y = c + \frac{x - a}{b - a}(d - c).$$

Damit ergeben sich die transformierten Werte $\widetilde{x}_1 = 0, \widetilde{x}_2 = 2$. Für die Gewichte $\lambda_2 = \frac{1}{4}, \lambda_1 = \frac{3}{4}$ erhält man die transformierten Gewichte $\widetilde{\lambda_2} = (b-a)\lambda_2 = 3\lambda_2$ sowie $\widetilde{\lambda_1} = 3\lambda_1$. Die transformierten Quadraturformeln ergeben

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{[-1,2]}(e^x) &= 3\left(\frac{3}{4}e^0 + \frac{1}{4}e^2\right) = 7.792 \\
I_T(e^x) &= \frac{3}{2}(e^{-1} + e^2) = 11.635 \\
I_M(e^x) &= 3e^{0.5} = 4.946
\end{aligned}$$

Somit liefert die Quadraturformel das beste Ergebnis.

Aufgabe 35 *(*MATLAB*)* (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}, -\infty < a < b < \infty$ und $h = (b-a)/n$. Zur Approximation von $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$ betrachten wir die folgenden zusammengesetzte Integrationsmethoden:

a) *zusammengesetzte Mittelpunktsregel*

$$M_n(f) := h \sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h)$$

b) *zusammengesetzte Trapezregel*

$$T_n(f) := \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n} f(a + (j-1)h) + f(b) \right)$$

c) *zusammengesetzte Simpsonregel*

$$S_n(f) := \frac{h}{6} \left(f(a) + 2 \sum_{j=2}^{n} f(a + (j-1)h) + 4 \sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h) + f(b) \right)$$

(i) Schreiben Sie jeweils MATLAB-Funktionen

```
int = Mittelpunkt(f,a,b,n)
int = Trapez(f,a,b,n)
int = Simpson(f,a,b,n)
```

zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I(f)$ mit den oben genannten Methoden. Die Funktionen erhalten jeweils den Integrand `f` als Funktionszeiger, die Intervallgrenzne `a` und `b`, sowie die Anzahl `n` der Teilintervalle. Zurückgegeben wird der Integralwert `int`.

(ii) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, welches Ihre Funktionen für das Integral

$$I(f) := \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx = \pi$$

testet. Berechnen Sie dazu für $n = 2^1, ..., 2^{10}$ mit allen drei Regeln das Integral und den absoluten Fehler. Stellen Sei anschließend den Fehler in doppelt logarithmischer Skala in Abhängigkeit von n dar. Erklären Sie das Ergebnis.

Aufgabe 36 *(*MATLAB*)* (10* Punkte)

Es seien

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_1(x) = x - x_1, \quad \ldots, \quad \omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

die Newton-Basisfunktionen zu den Knoten $0 \le x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n \le 1$ $(i = 2, \ldots, n)$. Des Weiteren sei $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ und

$$\widetilde{\omega}_0(s) = 1, \quad \widetilde{\omega}_1(s) = s - s_1, \quad \ldots, \quad \widetilde{\omega}_n(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i)$$

die Newton-Basisfunktionen zu den Knoten $s_i = a + (b-a)x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Man beachte

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |\widetilde{\omega}_n(s)|\,ds = \int_a^b \left| \prod_{i=1}^{n}(s - s_i) \right| ds \\
= \quad &(b-a) \int_0^1 \left| \prod_{i=1}^{n} \left(\Big(a + (b-a)x\Big) - \Big(a + (b-a)x_i\Big) \right) \right| dx \\
= \quad &(b-a)^{n+1} \int_0^1 \left| \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \right| dx = (b-a)^{n+1} \int_0^1 |\omega_n(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun numerisch die folgenden Fehlerterme

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{\xi \in (a,b)} |f^{(2)}(\xi)|$$

und

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{8}\left(f(a)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+f(b)\right) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{3570} \sup_{\xi \in (a,b)} |f^{(4)}(\xi)|,$$

verifizieren, in dem wir $\int_0^1 |\omega_n(x)|\,dx$ für das entsprechende $\omega_n(x)$ mittels summierter Trapezformel mit m Teilintervallen approximieren.
Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, in dem Sie die Integrale mit verschiedenen m ($m \leq 1000$) berechnen. Überlegen Sie sich, wie die Teilintervalle in der summierten Trapezformel gewählt werden müssen ($|f(x)|$ ist nicht sehr glatt, aber von $f(x)$ setzen wir es voraus!). Berechnen Sie jeweils den Fehler zu $\frac{(b-a)^3}{12}$ bzw. $\frac{(b-a)^5}{3570}$ und plotten Sie anschließend den Fehler über die Anzahl der Teilintervalle m in doppelt-logarithmischer Skala. Erklären Sie das Ergebnis.

Drucken sie den Code sowie das Schaubilder aus und geben Sie diese mit ab. Senden Sie außerdem alle Funktionen in einer Email an folgende Adresse

angewandtenumerik@gmail.com
Betreff: Blatt11, Name1 Vorname1, Name2 Vorname2