Blatt 2

Mittwoch, 6. Mai 2020 14:56

Übungsblatt 2 von Sebastian Maschke

Aufgabe 4

Es gilt:

quadr. Gl.: $x^2 + 2px - q = 0$; $p^2 \geq -q$

$$x_{1/2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2+4q}}{2} \rightarrow x_2 = -p + \sqrt{p^2+q}$$

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(p,q) = -p + \sqrt{p^2+q}$$

$$\frac{df}{dp} = -1 + \frac{1}{2}(p^2+q)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2p = \frac{p}{\sqrt{p^2+q}} - 1$$

$$\frac{df}{dq} = \frac{1}{2}(p^2+q)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}}$$

$$\phi_p(p,q) = \frac{df(p,q)}{dp} \cdot \frac{p}{f(p,q)} = \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} - 1\right) \cdot \frac{p}{-p+\sqrt{p^2+q}} = \frac{p^2}{-p\sqrt{p^2+q} + p^2+q} + \frac{p}{p-\sqrt{p^2+q}} = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q}}$$

$$\phi_q(p,q) = \frac{df(p,q)}{dq} \cdot \frac{q}{f(p,q)} = \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}} \cdot \frac{q}{-p+\sqrt{p^2+q}} = \frac{q}{-2p\sqrt{p^2+q} + 2p^2 + 2q} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\phi_p(p,q) + 1\right)$$

b) $K_{rel} = K_{rel}^{\infty} = \max_j |\phi_j(p,q)|$

c) Für welches p, q Problem gut konditioniert?

$|\phi_p(p,q)|$, $|\phi_q(p,q)|$ möglichst klein

Denn es gilt: $\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \leq K_{rel}(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}\right|$

mit $K_{rel}(x) = \max_j |\phi_j(p,q)|$

· Wenn $q > 0$: $|\phi_p(p,q)| \leq 1 \rightarrow |\phi_q(p,q)| \leq 1$

Problem ist schlecht konditioniert falls $|\phi_j(p,q)|$ groß.

Dann werden kleine Fehler im Eingang zu großen Fehlern im Ausgang.

· Wenn $q < 0$: $|\phi_p(p,q)| \geq 1 \rightarrow |\phi_q(p,q)| \geq 0$

d) gut konditioniert : $p = 1$, $q = 1$ unter Bedingung $p^2 \geq -q$

$$\phi_p(1,1) = \frac{1}{-1\sqrt{2}+1+1} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = -0{,}707$$

$$\phi_q(1,1) = \frac{1}{-2\sqrt{2}+2+2} = \frac{1}{-\sqrt{8}+4} = 0{,}85$$

schlecht konditioniert : $p = 4$ $q = -5$

$$\phi_p(4,-5) = -\frac{p}{\sqrt{p^2+q}} = -\frac{4}{\sqrt{16-5}} = -\frac{4}{\sqrt{9}} = -\frac{4}{3} = -1{,}\overline{3}$$

$$\phi_q(4,-5) = \frac{1}{2}\left(-\phi_p + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+1\right) = \frac{7}{6} = 1{,}1\overline{6}$$

e)

$y = x^2 + 2px - q$

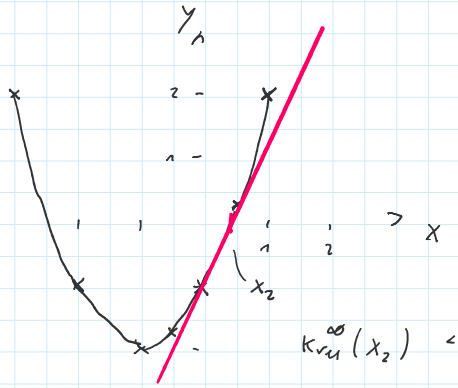
gut konditioniert ϕ_p, ϕ_q sind klein

$p = 1$, $q = 1$ $\rightarrow$ $y(x) = x^2 + 2x - 1$

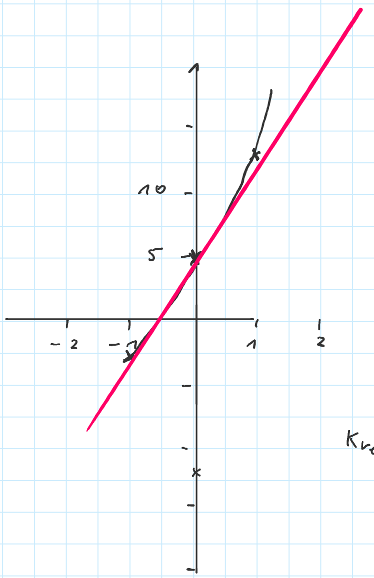
$y(0{,}5) = 0{,}25$
$y(1) = 2$
$y(-0{,}5) = -1{,}75$
$y(-1) = -2$

$p = 4$ $q = -5$ $\rightarrow$ $y(x) = x^2 + 8x + 5$

$y(1) = 13$
$y(2) = 25$
$y(0) = 5$
$y(-1) = -2$



$Kr_{el}^{\infty}(x_2) < 1$



Maßstab!

$Kr_{el}^{\infty}(x_2) \gg 1$

Aufgabe 5

a) z.z.: Maximumsnorm induziert Zeilensummennorm

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|$$

Definition

$$\|B\cdot x\|_\infty := \|B\|_{X\to Y} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_{Y,\infty}}{\|x\|_{X,\infty}} = \sup_{\|x\|_{X,p=\infty}} \|Bx\|_{Y,\infty}$$

$$= \max_{j=1,\dots,m} \left| \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i \right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \max_{j=1\dots m} \sum_{i=1}^{n} |b_{ji}|\cdot|x_i| \leq \underbrace{\max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ji}|}_{\text{max. Zeilensumme}} \cdot \|x\|_\infty$$

b) z.z. Summennorm induziert Spaltensummennorm $\ulcorner B^{m\times n} \lrcorner$

$$\|B\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |b_{i,j}|$$

Aus Definition folgt wieder

$$\|B\|_1 = \dots = \sup_{\|x\|_{1,p=1}} \|Ax\|_1$$

$$= \max_{i=1\ldots n} \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| = \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_1$$

c)