Blatt 3

Freitag, 8. Mai 2020 11:29

Sebastian Maschke

Aufgabe 7

für festen Wert $c \in \mathbb{R}$ sei Matrix $A_c := \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a)

· Matrix A_c hat $\forall c$ vollen Rang

$$K_{\|\cdot\|_1}(A_c) = \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|_1$$

$$= \max_{j=1\dots 2} \sum_{i=1}^{2} |\bar{a}_{ij}| \cdot \max_{j=1\dots 2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}|$$

$$= (c+1) \cdot (c+1) = c^2 + 2c + 1$$

$$K_{\|\cdot\|_2}(A_c) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}\left((A^{-1})^T \cdot A^{-1}\right)} \cdot \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

· mit $(A^{-1})^T \cdot (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ -c & c^2+1 \end{vmatrix}$

$$\lambda \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & -c \\ -c & c^2+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -c \\ -c & c^2+1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(c^2+1-\lambda) - c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{c^2} + 1 - \lambda - \lambda c^2 - \lambda + \lambda^2 - \cancel{c^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + (-2 - c^2)\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \frac{2 + c^2 \pm \sqrt{4 + 4c^2 + c^4 - 4}}{2}$$

$$\lambda_{max} = \frac{2 + c^2 + \sqrt{4c^2 + c^4}}{2} = c^2 + c + 1$$

· mit $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ c & c^2+1 \end{vmatrix}$

$$\lambda_{max} = c^2 + c + 1$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2 = \left(\sqrt{\lambda_{max}}\right)^2 = \lambda_{max} = c^2 + c + 1$$

$$K_{\|\cdot\|_\infty}(A_c) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = (1+c) \cdot (1+c) = c^2 + 2c + 1$$

b) $\to$ $\tilde{x}$ Lösung des LGS $A_c x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^2$

$\to$ $A_c x = b + \Delta b$ habe die Lösung $(\tilde{x} + \Delta x)$

$\to$ $\dfrac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = 0{,}01$

$$\frac{\|\Delta x\|_1}{\|\tilde{x}\|_1} \leq K_{\|\cdot\|_1}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = (c^2 + 2c + 1) \cdot 0{,}01$$

Aufgabe 9 Antwort

- det $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nach Laplaschen E-satz $\to$ $n!$ Operationen
- Lgs $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe Cramersche R.

  $\to$ $n+1$ Determinanten $\to$ $(n+1)!$

  $\to$ n Quotienten

  $\to$ Insgesamt $(n+1)! + n$ Operationen für $x^* = A^{-1} \cdot b$

· JUSTUS 2   2 Petaflops $\left(2 \cdot 10^5 \text{ Rechenoperation pro Sek } \frac{Op}{s}\right)$

· Gesucht Zeit t für Berechnung von LGS mit $n = 25$

$$t = \frac{Op}{\frac{Op}{s}} = \frac{(n+1)! + n}{2 \cdot 10^{15} \, \frac{1}{s}} = \frac{(25+1)! + n}{2 \cdot 10^{15} \, \frac{1}{s}} = 2{,}01 \cdot 10^{11} \, s \cdot \frac{1 \, a}{3{,}154 \cdot 10^7 \, s}$$

$$= 6.393 \text{ Jahre}$$

<u>Aufgabe 10</u>

$x, y \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadr. Matrizen

a) $x^T y$

$\rightarrow$ $(n-1)$ Additionen

(n) Multiplikationen $\rightarrow$ $O(n)$

b) Ax

$\rightarrow$ $n \cdot (n-1)$ Additionen

$n \cdot n$ Multiplikationen $\rightarrow$ $O(n^2)$

c) $A \cdot B$

$\rightarrow$ $n \cdot n \cdot (n-1)$

$2n \cdot 2n = 4n^2$ Multiplikationen $\rightarrow$ $O(n^2)$

<u>Aufgabe 11</u> LR-Zerlegung durch Koeffizientenvergleich

$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $L = 3\underset{3}{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}$, $R = \overset{3}{\begin{bmatrix} r_{1,1} & & \\ & r_{22} & \\ & & r_{33} \end{bmatrix}} 3$

$\rightarrow A = L R$

a) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A = L \cdot R$

Koeffizientenvergleich:

$$L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21} r_{11} & l_{21} r_{12} + r_{22} & l_{21} r_{13} + r_{23} \\ l_{31} r_{11} & l_{31} r_{12} + l_{32} r_{22} & l_{31} r_{13} + l_{32} r_{23} + r_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3} \end{pmatrix}$$

① $r_{11} = a_{11}$, $r_{12} = a_{12}$, $r_{13} = a_{13}$

② $l_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$, $l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$

③ $r_{22} = a_{22} - l_{21} r_{12} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12}$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} r_{12}}{r_{22}}$$

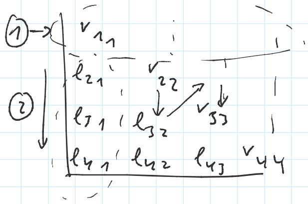
$v_{23} = a_{23} - l_{21} v_{13}$

(9) $v_{33} = a_{33} - l_{31} v_{13} - l_{32} v_{23}$

b) 4x4 Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ 0 & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ 0 & 0 & v_{33} & v_{34} \\ 0 & 0 & 0 & v_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ l_{21} v_{11} & l_{21} v_{12} + v_{22} & l_{21} v_{13} + v_{23} & l_{21} v_{14} + v_{24} \\ l_{31} v_{11} & l_{31} v_{12} + l_{32} v_{22} & l_{31} v_{13} + l_{32} v_{23} + v_{33} & l_{31} v_{14} + l_{32} v_{24} + v_{34} \\ l_{41} v_{11} & l_{41} v_{12} + l_{42} v_{22} & l_{41} v_{13} + l_{42} v_{23} + l_{43} v_{33} & l_{41} v_{14} + l_{42} v_{24} + l_{43} v_{34} + v_{44} \end{pmatrix}$$

(1) Bestimmung v_{1i} $\forall i \in [1, 4]$
(2) – " – $l_{i,1}$ $\forall i \in [2, 4]$
(3) – " – v_{2i} $\forall i \in [2, 4]$
(4) – " – l_{32}
(5) – " – v_{3i} $\forall i \in [3, 4]$
(6) – " – l_{4i} $\forall i \in [2, 3]$
(7) – " – v_{4i} $\forall i \in [4]$



nxn Matrizen:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots\; l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} ; \quad R = \begin{pmatrix} v_{1,1} & - - - & v_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & v_{n,n} \end{pmatrix}$$

(1) Bestimmung der $v_{1,i}$ $\forall i \in [1, n]$
(2) – " – der $l_{i,1}$ $\forall i \in [2, n]$
(3) – " – $v_{2,i}$ $\forall i \in [2, n]$
(4) – " – $l_{3,i}$ $\forall i \in [2, 3]$

usw.

c) Ähnlich wie beim Gauß-Eliminationsverfahren versagt auch die LR-Zerlegung falls Elemente $a_{ij} = 0$ sind.
Da beim Koeffizientenvergleich häufig Quotienten gebildet werden, kann es dabei zu einer Division durch 0 kommen, welche ungültig ist.

Aufgabe 8:

a) Optimalitätseigenschaften für Matrizen DA u. AD

- $\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(DA)$
- $\kappa_1(A D_z) \leq \kappa_1(A \cdot D)$

c) siehe im Skript