Angewandte Numerik 1, SoSe 2020, Entwürfe zu Übungsblatt 07
Stand So. 14.06.2020

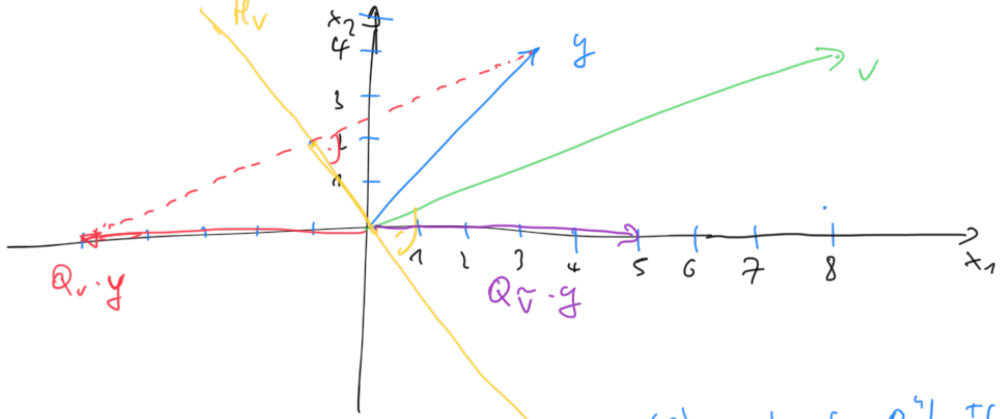
Aufgabe 27

a) sei $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Setze $\alpha = \text{sign}(y_1) \cdot \|y\|_2 = (+1) \cdot \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$v = y + \alpha e^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 \\ 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$Q_v y = -\alpha e^1 = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$



b) $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T v = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ da $\beta(-1\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot (-2+2) = \beta \cdot 0 = 0$

Interpretation:
Der Vektor y wird durch die Householdertransformation Q_v an der Hyperebene H_v auf den Vektor $Q_v \cdot y$ gespiegelt.
$Q_v \cdot y$ ist ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors e^1.
Um Auslöschung bei $v = y + \alpha e^1$ zu vermeiden, wird α gerade so gewählt, dass die erste Komponente von e^1 und die erste Komponente von $\alpha \cdot e^1$ das gleiche Vorzeichen haben.
v ist der Normalenvektor der Hyperebene H_v.
Daher haben die erste Komponente von $Q_v y$ und die erste Komponente von y unterschiedliche Vorzeichen.
Allgemein: H_v ist die $(n-1)$ dimensionale Ebene, die durch den Ursprung geht und die senkrecht zu v steht. Im $\mathbb{R}^2$ ist H_v also eine Gerade.

c) Die QR-Zerlegung ist nicht eindeutig.
Denn wir hätten auch $\tilde{\alpha} = -\text{sign}(y_1)\|y\|_2 = -\sqrt{3^2+4^2} = -\sqrt{9+16} = -\sqrt{25} = -5$ wählen können.
Damit hätten wir erhalten:
$\tilde{v} = y + \tilde{\alpha} e^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und

$Q_{\tilde{v}} y = -\tilde{\alpha} e^1 = -(-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}$ ist also gerade ein Element der Hyperebene H_v, während die Hyperebene $H_{\tilde{v}}$ den Householder v der ersten Variante enthält.

Aufgabe 28

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, erste Spalte der Matrix A: $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wende Grundaufgabe mit $y = a^1$ an:

$$\alpha^1 = \operatorname{sign}(a^1_1)\, \|a_1\|_2 = (+1) \cdot \sqrt{1+1+1+1} = 1 \cdot \sqrt{4} = 2$$

$$v^1 = a^1 + \alpha^1 \cdot e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{v^1} \cdot a^1 = -\alpha^1 \cdot e^1 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung von Q_{v^1} auf zweite Spalte der Matrix A:

$$Q_{v^1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \left(I - \frac{2}{v^{1T} v^1} \cdot v^1 \cdot v^{1T} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{(3\,1\,1\,1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3\,1\,1\,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{9+1+1+1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} 12 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{v^1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & \\ 0 & \tilde{A}^2 \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ mit } \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wende Grundaufgabe auf $y = \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ an:

$$\alpha^2 = \operatorname{sign}(y_1) \cdot \|y\|_2 = (+1) \cdot \sqrt{0+0+9} = \sqrt{9} = 3$$

$$v^2 = y + \alpha e^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}_{v^2} \cdot y = -\alpha e^1 = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $Q_{v^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{Q}_{v^2} \\ 0 & \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q_{v^2} \cdot Q_{v^1} \cdot A = Q_{v^2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: R$$

Setze $V := \begin{pmatrix} v^1 & \begin{matrix} 0 \\ v^2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) Berechnung der Matrix Q: Definiere $Q := (Q_{v2} \cdot Q_{v1})^{-1}$

dann gilt

$$Q \cdot R = Q \cdot Q_{v2} \cdot Q_{v1} \cdot A = (Q_{v2} \cdot Q_{v1})^{-1} (Q_{v2} \cdot Q_{v1}) \cdot A = A.$$

und

$$Q = (Q_{v2} \cdot Q_{v1})^{-1} = Q_{v1}^{-1} \cdot Q_{v2}^{-1} = Q_{v1}^{T} \cdot Q_{v2}^{T} \underset{\text{Eigenschaft 3.50 (i)}}{\overset{!}{=}} Q_{v1} \cdot Q_{v2}$$

$$\Rightarrow Q^T = (Q_{v1}^T \cdot Q_{v2}^T)^T = Q_{v2} \cdot Q_{v1} = Q_{v2} \cdot Q_{v1}.$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^T b = Q_{v2} \cdot Q_{v1} \cdot b$$

$$Q_{v1} b = \left(I - \frac{2}{v^{1T} v^1} \cdot v^1 \cdot v^{1T}\right) b = b - \frac{2}{v^{1T} v^1} \cdot v^1 \cdot v^{1T} b$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{2}{(3\,1\,1\,1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3\,1\,1\,1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{2}{9+1+1+1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (6+2+4+6)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{36}{12} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechne $\tilde{Q}_{v2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(I - \frac{2}{v^{2T} v^2} v^2 \cdot v^{2T}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{(3\,0\,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (3\,0\,3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{18} \cdot 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^T b = Q_{v2} \cdot Q_{v1} \cdot b = Q_{v2} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Probe

Löse $\tilde{R} x = b_1$, also $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Mit Rückwärtseinsetzen:

$\Rightarrow x_2 = 1$ und $-2x_1 = -7 + 5 \cdot x_2 = -7 + 5 = -2$

$\Rightarrow x_1 = 1$

d) Sei die QR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch die Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, also $Q \cdot R = A$, Q orthogonal und R rechte obere Dreiecksmatrix.

Dann gilt:

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Q^T(Ax-b)\|_2^2 = \|Q^T(QRx - b)\|_2^2$$
$$= \|Q^TQRx - Q^Tb\|_2^2 = \|Rx - Q^Tb\|_2^2$$
$$= \|\tilde{R}x - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2,$$

wobei $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die ersten n Zeilen von R und $b_1 \in \mathbb{R}^n$ die ersten n Zeilen von Q^Tb sind. $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ sind dann die restlichen $m-n$ Zeilen von Q^Tb.

Da $\|b_2\|_2^2$ unabhängig von x ist, erhält man als Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ gerade die Lösung von $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{R}x - b_1\|_2^2$.

Das ist gerade die Lösung des linearen Gleichungssystems $\tilde{R}x = b$.

Also: Wir haben aus Aufgabenteil a) $R = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

und aus Aufgabenteil c) $Q^Tb = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit erhalten wir mit $n = 2$:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Also löse $\tilde{R}x = b_1$:

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} -3x_2 &= -3 &\Leftrightarrow\ & x_2 = 1 \\ -2x_1 - 5x_2 &= -7 &\Leftrightarrow\ & -2x_1 - 5 \cdot 1 = -7 \\ &&\Leftrightarrow\ & -2x_1 = -7 + 5 \\ &&\Leftrightarrow\ & -2x_1 = -2 \\ &&\Leftrightarrow\ & x_1 = 1 \end{aligned}$$

Die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^2$ des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2^2$ ist also gegeben durch $x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.