Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
04.05.2020

Übungsblatt 02

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 11.05.2020 bis 15.05.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es 22 Theorie- und 12 Matlab-Punkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 02) bei 41,3 Theorie- und 8,4 Matlabpunkten.

Aufgabe 4 *(Relative Konditionszahl)* (3T+1T+2T+3T+3T Punkte)

Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p^2 \geq -q$ (also $p^2 + q \geq 0$) sollen die Lösungen $x_1 \leq x_2$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 2px - q = 0$$

berechnet werden. Diese Lösungen x_1 und x_2 hängen von den Parametern p und q ab. Wir wollen in dieser Aufgabe nur die Berechnung der größeren Nullstelle x_2 betrachten:

a) Berechnen Sie die Verstärkungsfaktoren $\phi_p(p, q)$ und $\phi_q(p, q)$. Überlegen Sie sich dazu zunächst, wie Sie die in die Verstärkungsfaktoren eingehende Funktion f definieren müssen.

b) Geben Sie die relative Konditionszahl κ_{rel} in Abhängigleit von p und q an.

c) Erklären Sie Ihren Kommilitonen und Ihrem Tutor, für welche p und welche q das Problem der Berechnung der größeren der beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung gut konditioniert ist. Für welche p und welche q ist das Problem schlecht konditioniert?

d) Geben Sie ein konkretes gut konditioniertes und ein konkretes schlecht konditioniertes Beispiel an. Wie lauten die Verstärkungsfaktoren $\phi_p(p, q)$ und $\phi_q(p, q)$ und die relative Konditionszahl κ_{rel} für diese Beispiele?

e) Skizzieren Sie beide Beispiele. Wie können Sie sich die Bedeutung der Verstärkungsfaktoren und der Konditionszahl anhand Ihrer Skizzen veranschaulichen?

Aufgabe 5 *(Matrixnormen (Spaltensummen- und Zeilensummen-Norm))* (3T+3T+4T Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir die beiden Formeln für die Zeilensummen- und die Spaltensummen-Norm aus Bemerkung 2.20 auf Folie 32 herleiten.
Wir betrachten die beiden Vektornormen

i) $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\|_1$ mit $\|v\|_1 := \sum_{k=1}^n |v_k| \quad \forall\, v = (v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ (Summennorm) und

ii) $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\|_\infty$ mit $\|v\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |v_k| \quad \forall\, v = (v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ (Maximumnorm).

Für die Vektorräume $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$, ausgestattet mit der p-Norm für $1 \leq p \leq \infty$, und die Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert man die *von der Vektornorm induzierte Matrixnorm* als

$$\|B\|_p \;:=\; \|B\|_{X \to Y} \;=\; \sup_{x \neq 0} \frac{\|B\,x\|_{Y,p}}{\|x\|_{X,p}} \;=\; \sup_{\|x\|_{X,p}=1} \|B\,x\|_{Y,p}.$$

a) Zeigen Sie: Die *Maximumnorm induziert die Zeilensummen-Norm*, also

$$\|B\|_\infty \;=\; \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}|.$$

b) Zeigen Sie: Die *Summennorm induziert die Spaltensummen-Norm*, also

$$\|B\|_1 \;=\; \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |b_{i,j}|.$$

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix und $\|\cdot\|_p$ eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm. Dann bezeichnet

$$\kappa_{\|\cdot\|_p}(A) := \|A\|_p \, \|A^{-1}\|_p$$

die *Konditionszahl* der Matrix A.

Seien nun eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und zwei Vektoren $v_1 \in \mathbb{R}^n$, $v_2 \in \mathbb{R}^n$ gegeben mit: $\|v_1\|_1 = 4$, $\|A\,v_1\|_1 = 20$, $\|v_2\|_1 = 3$ und $\|A\,v_2\|_1 = 1$.

Geben Sie eine größtmögliche untere Schranke c für $\kappa_{\|\cdot\|_1}(A)$ an.

Aufgabe 6 *(Programmier-Aufgabe: Matrixnormen)* (8M+4M Punkte)

a) Schreiben Sie eine Funktion `norm = mynorm(A, flag)`, welche eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen String `flag` als Parameter bekommt und je nach Wert von `flag` eine bestimmte Norm von A zurückliefert. Ihre Funktion sollte folgenden Werten von `flag` die nachfolgenden Normen zuordnen:

`flag`	Math. Bez.	Berechnung
`'one'`	$\|\cdot\|_1$	$\|A\| = \max\limits_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^{m} \|a_{i,j}\|\right)$
`'infty'`	$\|\cdot\|_\infty$	$\|A\| = \max\limits_{i=1,\dots,m} \left(\sum_{j=1}^{n} \|a_{i,j}\|\right)$
`'frobenius'`	$\|\cdot\|_F$	$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|a_{i,j}\|^2\right)^{1/2}$

Hinweise: Es ist möglich die Teilaufgabe a) ohne Schleife zu lösen. Zum Vergleich zweier Strings eignet sich der Befehl `strcmp`.

Die Verwendung der Matlab-Funktion `norm()` ist für diese Teilaufgabe nicht zulässig.

b) Testen Sie Ihre in a) implementierte Funktion. Erstellen Sie dazu mehrere zufällige Matrizen unterschiedlicher Dimensionen. Hierzu können Sie den Matlab-Befehl `rand` verwenden. Transformieren Sie die mit `rand` erhaltenen Werte auf verschiedene Wertebereiche.

Vergleichen Sie die Ergebnisse der von Ihnen implementierten Funktion mit den Werten, die Sie von der Matlab-Funktion `norm()` erhalten.

Hinweise:
Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt02_ *Vorname*_ *Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.