Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
10.07.2020

Lösungsvorschlag Übungsblatt 12

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 20.07.2020 bis 24.07.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es keine Theorie- und keine Matlab-Punkte, sowie 46 Theorie- und 18 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.

Somit sind für das Bestehen der Vorleistung insgesamt **163,1 Theorie- und 112,7 Matlabpunkte** nötig.

Bitte melden Sie sich umgehend, **spätestens bis Montag, 13.07.2020**, zur Vorleistung an.

Die beiden **Klausuren** finden nach aktueller Planung am **Mittwoch, 05.08.2020** im Zeitraum zwischen 11:30 Uhr und 15:00 Uhr und am **Dienstag, 13.10.2020** im Zeitraum zwischen 08:00 Uhr und 11:30 Uhr statt. Die genaue Uhrzeit und die Raumeinteilung werden über Moodle bekannt gegeben. Beachten Sie bitte auch möglicherweise kurzfristig über Moodle veröffentlichte Hinweise zu den Klausuren.

Als **Hilfsmittel zu den Klausuren** ist nur ein **eigenhändig** beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (keine Kopien oder Ausdrucke) zugelassen. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches, Tablets und ähnliches nicht erlaubt.

Wichtiger Hinweis:
Da der gesamte Stoff dieses Übungsblattes erst in der Vorlesung vom Donnerstag, 16.07.2020 behandelt werden wird, gibt es auf dieses Übungsblatt keine Pflicht-, sondern ausschließlich Zusatzpunkte. Der Inhalt dieses Übungsblatts ist dennoch wichtig und klausurrelevant.

Aufgabe 53 *(Fehlerabschätzung des zentralen Differenzenquotienten)* (4T* Punkte)

Auf Folie 211 der Vorlesung wird die Grundidee der Numerischen Differentiation erläutert. Dort finden Sie auch die Fehlerabschätzung für die Annäherung der Ableitung f' einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion f durch den zentralen Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi).$$

Beweisen Sie diese Abschätzung.
Hinweis: Entwickeln Sie mit Taylor sowohl $f(x+\frac{1}{2}h)$ als auch $f(x-\frac{1}{2}h)$ um $f(x)$ und subtrahieren Sie diese beiden Taylor-Entwicklungen voneinander. Überlegen Sie sich dann, wie Sie die beiden Restglied-Terme mit Hilfe des Zwischenwertsatzes zu einem einzelnen Restglied zusammenfassen können.

Lösungsvorschlag:

Sei f eine hinreichend oft differenzierbare Funktion.
Sei $h > 0$.

Mit der Taylorentwicklung von $f(x+\frac{1}{2}h)$ um $f(x)$ erhalten wir mit dem Lagrange-Restglied:

$$
\begin{aligned}
&\exists \xi_1 \in (x, x+\frac{1}{2}h) \text{ und } \xi_2 \in (x-\frac{1}{2}h, x) \text{ mit:}\\
&f(x+\frac{1}{2}h) = f(x) + \frac{h}{2}\cdot\frac{1}{1!}f'(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}f''(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}f'''(\xi_1) \quad \text{und}\\
&f(x-\frac{1}{2}h) = f(x) + \frac{-h}{2}\cdot\frac{1}{1!}f'(x) + \left(\frac{-h}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}f''(x) + \left(\frac{-h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\\
\Longrightarrow &f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h) = 2\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{1!}f'(x) + \left(\frac{h}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))\\
=&h\cdot f'(x) + \frac{h^3}{8\cdot 6}\cdot(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))
\end{aligned}
$$

Da $\xi_2 < x < \xi_1$ ist $[\xi_2, \xi_1]$ ein abgeschlossenes Intervall.
f ist auf $[\xi_2, \xi_1]$ stetig, da f nach Voraussetzung hinreichend oft differenzierbar ist.
Ferner gilt für $u := \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$: $\min\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\} < u < \max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$.
Damit folgt mit dem Zwischenwertsatz:

$$\exists \xi \in [\xi_2, \xi_1] \text{ mit } u = f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$$

Also:

$$
\begin{aligned}
f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h) = h\cdot f'(x) + \frac{h^3}{4\cdot 6}\cdot\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2} &= h\cdot f'(x) + \frac{h^3}{24}\cdot f'''(\xi)\\
\Longrightarrow h\cdot f'(x) = f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h) - \frac{h^3}{24}\cdot f'''(\xi)&\\
\Longrightarrow f'(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24}\cdot f'''(\xi)&
\end{aligned}
$$

Aufgabe 54 *(Programmieraufgabe: Zusammengesetzte Quadraturformeln)*
(10M*+6M*+(2M*+2T*) Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $-\infty < a < b < \infty$.
Wir wollen in dieser Aufgabe zusammengesetzte Quadraturformeln zur Approximation des Integrals

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

betrachten, und zwar die zusammengesetzte (summierte) linke Rechteckregel (Linke-Box-Regel), die zusammengesetzte (summierte) Mittelpunktregel, die zusammengesetzte (summierte) Trapezregel und die zusammengesetzte (summierte) Simpsonregel.
Die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel finden Sie im Skript. Bei der summierten Mittelpunktsregel wird völlig analog auf jedem der Teilintervalle das Integral durch die Mittelpunktsregel approximiert. Bei der summierten linken Rechteckregel werden die Integrale $\int_{t_{k-1}}^{k} f(x)\,dx$ durch $f(t_{k-1})\cdot(t_k - t_{k-1})$ approximiert.

a) Schreiben Sie vier MATLAB-Funktionen `intApprox = linkeRechteckSumme(f, a, b, n)`, `intApprox = mittelpunktSumme(f, a, b, n)`, `intApprox = trapezSumme(f, a, b, n)` und `intApprox = simpsonSumme(f, a, b, n)` zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I(f)$ mit den oben genannten Methoden. Die Funktionen erhalten jeweils den Integrand `f` als function handle, die Intervallgrenzen `a` und `b`, sowie die Anzahl `n` der Teilintervalle. Zurückgegeben wird jeweils der Näherungswert `intApprox` für das Integral .

b) Schreiben Sie ein Matlab-Skript, welches Ihre Funktionen für das Integral

$$I(f) \ := \ \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\, dx \ = \ \pi$$

testet. Approximieren Sie dazu für $n = 2^0, ..., 2^{15}$ mit allen vier Regeln das Integral und berechnen Sie jeweils den absoluten Fehler. Stellen Sie anschließend die jeweiligen Fehler in doppelt logarithmischer Skala in Abhängigkeit von n dar.

c) Erklären Sie das Ergebnis. Zeichnen Sie dazu geeignete Steigungsgeraden in Ihr Schaubild ein. War das Ergebnis so zu erwarten? Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag:

a) Siehe Moodle-Kurs im Abschnitt „Lösungsvorschläge“ unter „Blatt 12 Aufgabe 54 Matlab-Lösung“.

b) Siehe Moodle-Kurs im Abschnitt „Lösungsvorschläge“ unter „Blatt 12 Aufgabe 54 Matlab-Lösung“.

c) Mit den Steigungsgeraden und Aufgabenteil b) erhalten wir das Schaubild der Abbildung 1:

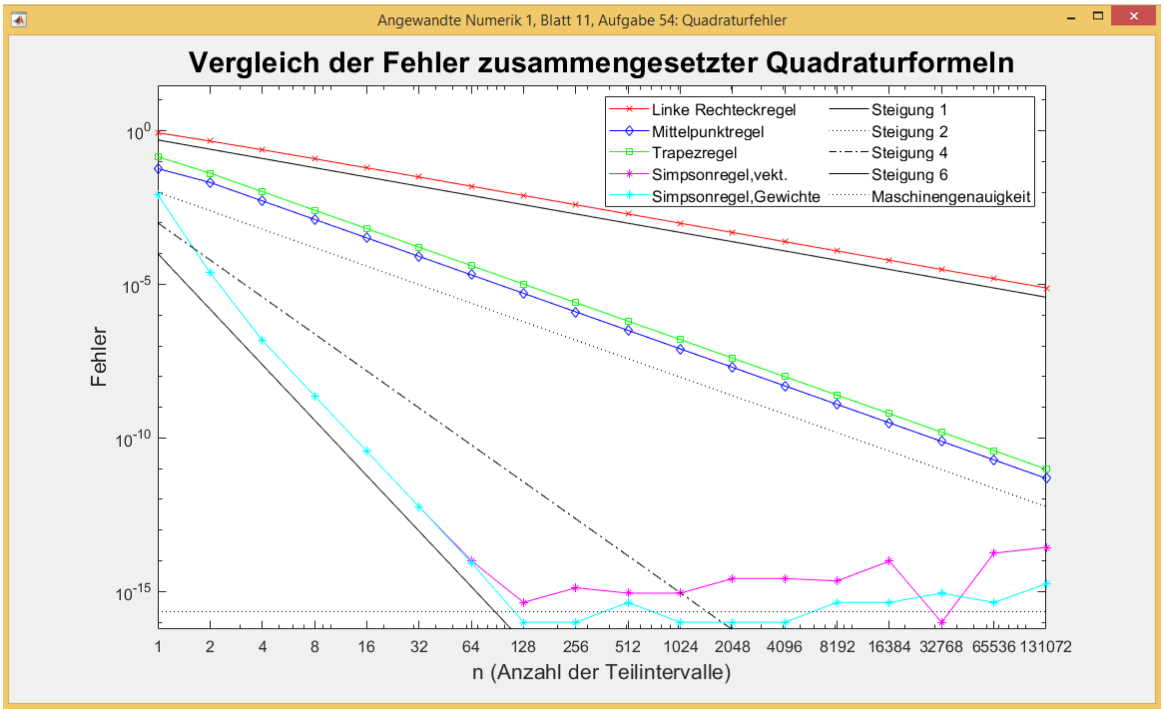

Abbildung 1: Absoluter Fehler verschiedener Quadraturformel

Für die Trapezregel gilt nach der Tabelle auf Folie 224:

$$\hat{J}(f) - \int_c^d f(x)dx = \frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi),$$

wobei $\hat{J}(f)$ den durch die Trapezregel enthaltenen Nährungswert für das Integral $\int_c^d f(x)dx$ bezeichnet. Nach Folie 219 ergibt sich für den Verfahrensfehler der summierten Trapezregel die Abschätzung

$$|T(h) - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{h^3}{12} \cdot n \cdot \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{h^2}{12}(b-a)||f''||_\infty$$

Beim Aufsummieren über die einzelnen Teilintervalle geht im Fehler also eine h-Potenz verloren. Analog gilt nach der Tabelle auf Folie 224 für die Mittelpunktsregel:

$$\hat{J}(f) = \int_c^d f(x)dx = -\frac{1}{24}h^3 f^{(2)}(\xi)$$

$\hat{J}(f)$ bezeichnet jetzt den durch die Mittelpunktsregel erhaltenen Nährungswert für das Integral $\int_c^d f(x)dx$.
Durch Aufsummieren über die Teilintervalle erhalten wir für die Mittelpunktsregel:

$$\begin{aligned}
|E_M(h)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{24} h^3 f^{(2)}(\xi_k) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left| -\frac{1}{24} h^3 f^{(2)}(\xi_k) \right|, \quad \text{mit } \xi_k \in [t_{k-1}, t_k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{24} h^3 \left| f^{(2)}(\xi_k) \right|, \quad \text{mit } \xi_k \in [t_{k-1}, t_k] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{24} h^3 \max_{x \in [t_{k-1}, t_k]} \left| f^{(2)}(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{24} h^3 \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(2)}(x) \right| \\
&= \frac{1}{24} \cdot h^3 \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(2)}(x) \right| \cdot n \\
&= \frac{1}{24} \cdot h^2 \cdot (b-a) \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(2)}(x) \right| \\
&= \frac{1}{24} \cdot h^2 \cdot (b-a) \cdot \left\| f^{(2)} \right\|_\infty
\end{aligned}$$

Die summierte Trapezregel und die summierte Mittelpunktsregel weisen also beide die Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^2)$ auf.
Das können wir am Schaubild bestätigen, da die Geraden der beiden Fehlerentwicklungen jeweils die Steigung -2 haben.
Man kann am Schaubild auch erkennen, dass der Fehler der summierten Mittelpunktsregel kleiner, als der Fehler der Trapezsumme ist.
Das entspricht den beiden obigen Fehlerabschätzungen:

$$\begin{aligned}
\text{Trapezsumme: } |E_T(h)| &= |T(h) - \int_a^b f(x)dx| \leq \frac{1}{12} \cdot h^2(b-a)||f^{(2)}||_\infty \\
\text{summierte Mittelpunktsregel: } |E_M(h)| &\leq \frac{1}{24} \cdot h^2(b-a)||f^{(2)}||_\infty
\end{aligned}$$

Für die summierte Simpsonregel erhalten wir mit Folie 226 die Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
|E_S(h)| &= \left| \frac{h^4}{2880} \sum_{k=1}^{n} h f^{(4)}(\xi_k) \right|, \quad \xi_k \in [t_{k-1}, t_k] \\
&\leq \frac{h^4}{2880} (h \cdot n \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|) \\
&= \frac{h^4}{2880} (b-a) \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \\
&= \frac{h^4}{2880} (b-a) ||f^{(4)}||_\infty
\end{aligned}$$

Wir haben hier also die Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^4)$.
Daher würden wir für die Fehlerentwicklung im Schaubild die Steigung -4 erwarten. Wir sehen im Schaubild aber eine Steigung der Geraden von -6, was einer Fehlerordnung von $\mathcal{O}(h^6)$ entspricht.
Dies ist kein Widerspruch, da die Abschätzungen zur Fehlerordnung ja obere Grenzen sind. In konkreten Fällen kann die Fehlerordnung durchaus besser ausfallen.
Bei der linken Rechteckregel lesen wir aus dem Schaubild eine Steigung der Geraden von -1 ab. Das entspricht einer Fehlerordnung von $\mathcal{O}(h)$.

Das verwundert nicht, da die linke Rechteckregel der Integration des konstanten Interpolationspolynoms (also Interpolationspolynom vom Grad 0) entspricht.
Im Gegensatz dazu entspricht die Trapezregel der Integration über das Interpolationspolynom vom Grad 1.
Also ist zu erwarten, dass die Fehlerordnung der summierten Trapezregel 1 zumindest nicht niedriger ist, als die Fehlerordnung der summierten linken Rechteckregel.

Anmerkung:

Nehmen wir an, für den Fehler einer Quadraturformel gelte $E(h) = c \cdot h^p$.
Die Quadraturformel habe also die Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^p)$
Dann gilt:

$$\ln(E(h)) = \ln(c \cdot h^p) = \ln c + \ln h^p = \ln c + p \ln h$$

Bei doppelt logarithmischer Darstellung erhält man also eine Gerade mit Steigung $-p$ (beachte, dass $\ln h < 0$) und y-Achsenabschnitt $\ln c$.

Aufgabe 55 *(Gewichte interpolatorischer Quadraturformeln)* (6T* Punkte)

Bestimmen Sie die Gewichte λ_i der interpolatorischen Quadraturformel

$$\hat{I}_2(f) \;=\; (b-a)\sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i) \;\approx\; \int_a^b f(x)\,dx$$

mit den Knoten

$$x_0 = \frac{3a+b}{4}, \quad x_1 = \frac{2a+2b}{4}, \quad x_2 = \frac{a+3b}{4}.$$

Hinweis: Approximieren Sie f durch das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in der Lagrange-Darstellung und integrieren Sie anschließend dieses Interpolationspolynom.

Lösungsvorschlag:

Es gilt:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx I(P) = \int_a^b P(f|x_0, x_1, x_2)\,dx = \hat{I}_2(f)$$

Wir interpolieren also f an den Stützstellen x_0, x_1, x_2 und integrieren dann das resultierende Polynom. Dieser Wert stellt dann eine Approximation zum exakten Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ dar. Benutzen wir die Lagrange-Interpolation so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_2(f) &= \int_a^b P(f|x_0, x_1, x_2)\,dx \\
&= \int_a^b \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_{i2}(x)\,dx \\
&= \frac{b-a}{b-a}\sum_{i=0}^{2} f(x_i)\int_a^b \ell_{i2}(x)\,dx \\
&= (b-a)\sum_{i=0}^{2} f(x_i)\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b \ell_{i2}(x)\,dx \quad \text{mit den Lagrange-Basispolynomen } \ell_{i2}(x) = \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese Formel mit der angegebenen Quadraturformel so wählen wir:

$$\lambda_i := \frac{1}{b-a}\int_a^b \ell_{i2}(x)\,dx, \quad i = 0, 1, 2.$$

Wir berechnen also die Gewichte λ_i indem wir die Integrale $\int_a^b \frac{1}{b-a}\ell_{i2}(x)\,dx$ für $i = 0, 1, 2$ berechnen. Zuerst einige Rechnungen, die wir später benötigen:

$$\begin{aligned}
(b-a)^3 &= (b^2 - 2ab + a^2)(b-a)\\
&= b^3 - 2ab^2 + a^2b - ab^2 + 2a^2b - a^3\\
&= b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0 - x_1 &= \frac{3a+b}{4} - \frac{2a+2b}{4} = \frac{a-b}{4} = -\frac{1}{4}(b-a)\\
x_0 - x_2 &= \frac{3a+b}{4} - \frac{a+3b}{4} = \frac{2a-2b}{4} = -\frac{1}{2}(b-a)\\
x_1 - x_2 &= \frac{2a+2b}{4} - \frac{a+3b}{4} = \frac{a-b}{4} = -\frac{1}{4}(b-a)
\end{aligned}$$

Damit berechnen wir nun die Lagrange-Basispolynome und die Gewichte:

$$\begin{aligned}
\ell_{02}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{2} \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\\
&= \frac{x-x_1}{-\frac{1}{4}(b-a)}\cdot\frac{x-x_2}{-\frac{1}{2}(b-a)}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{8}(b-a)^2}\cdot\left(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2\right)\\
&= \frac{8}{(b-a)^2}\cdot\left(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right)\\
&= \frac{8}{(b-a)^2}\cdot\left(x^2 - \left(\frac{2a+2b}{4} + \frac{a+3b}{4}\right)x + \left(\frac{2a+2b}{4}\cdot\frac{a+3b}{4}\right)\right)\\
&= \frac{8}{(b-a)^2}\cdot\left(x^2 - \frac{3a+5b}{4}x + \frac{2a^2+2ab+6ab+6b^2}{16}\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\left(8x^2 - (6a+10b)x + a^2 + 4ab + 3b^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda_0 &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \ell_{02}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \left(8x^2 - (6a+10b)x + a^2 + 4ab + 3b^2\right)\,dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \left(8\int_a^b x^2\,dx - (6a+10b)\int_a^b x\,dx + (a^2+4ab+3b^2)\int_a^b 1\,dx\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \left(8 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b - \frac{1}{2}(6a+10b) \cdot \left[x^2\right]_a^b + (a^2+4ab+3b^2) \cdot [x]_a^b\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \left(\frac{8}{3}b^3 - \frac{8}{3}a^3 - (3a+5b)b^2 + (3a+5b)a^2 + (a^2+4ab+3b^2)b - (a^2+4ab+3b^2)a\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \left(\frac{8}{3}b^3 - \frac{8}{3}a^3 - 3ab^2 - 5b^3 + 3a^3 + 5ba^2 + a^2b + 4ab^2 + 3b^3 - a^3 - 4a^2b - 3ab^2\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \left(\left(\frac{8}{3} - 5 + 3\right)b^3 + (-3+4-3)ab^2 + (5+1-4)a^2b + \left(-\frac{8}{3} + 3 - 1\right)a^3\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \left(\frac{2}{3}b^3 - 2ab^2 + 2a^2b - \frac{2}{3}a^3\right) \\
&= \frac{2}{3}\frac{1}{(b-a)^3}\underbrace{\left(b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3\right)}_{=(b-a)^3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_{12}(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{4}(b-a)} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{4}(b-a)} \cdot \left(x^2 - (x_0+x_2)x + x_0x_2\right) \\
&= -\frac{16}{(b-a)^2} \cdot \left(x^2 - \left(\frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4}\right)x + \left(\frac{3a+b}{4} \cdot \frac{a+3b}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left(-16x^2 + 16(a+b)x - 3a^2 - 10ab - 3b^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \ell_{12}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \frac{1}{(b-a)^2}\left(-16x^2 + 16(a+b)x - 3a^2 - 10ab - 3b^2\right)\,dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\left(-16\int_a^b x^2\,dx + 16(a+b)\int_a^b x\,dx + (-3a^2 - 10ab - 3b^2)\int_a^b 1\,dx\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\left(-\frac{16}{3}\left[x^3\right]_a^b + 8(a+b)\left[x^2\right]_a^b + (-3a^2 - 10ab - 3b^2)\,[x]_a^b\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\left(\left(-\frac{16}{3} + 8 - 3\right)b^3 + (8-10+3)ab^2 + (-8-3+10)a^2b + \left(\frac{16}{3} - 8 + 3\right)a^3\right) \\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\left(-\frac{1}{3}b^3 + ab^2 - a^2b + \frac{1}{3}a^3\right) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{(b-a)^3}\left(b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3\right) \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ell_{22}(x) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{2} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}(b-a)}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}(b-a)}\cdot\left(x^2-(x_0+x_1)x+x_0x_1\right)\\
&= \frac{8}{(b-a)^2}\cdot\left(x^2-\left(\frac{3a+b}{4}+\frac{2a+2b}{4}\right)x+\left(\frac{3a+b}{4}\cdot\frac{a+b}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\left(8x^2-(10a+6b)x+3a^2+4ab+b^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \lambda_2 &= \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b \ell_{22}(x)\,dx\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\left(8x^2-(10a+6b)x+3a^2+4ab+b^2\right)\,dx\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\cdot\left(8\int_a^b x^2\,dx-(10a+6b)\int_a^b x\,dx+(3a^2+4ab+b^2)\int_a^b 1\,dx\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\cdot\left(\frac{8}{3}\left[x^3\right]_a^b-(5a+3b)\left[x^2\right]_a^b+(3a^2+4ab+b^2)\left[x\right]_a^b\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\cdot\left(\left(\frac{8}{3}-3+1\right)b^3+(-5+4-1)ab^2+(3+3-4)a^2+\left(-\frac{8}{3}+5-3\right)a^3\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\cdot\left(\frac{2}{3}b^3-2ab^2+2a^2b-\frac{2}{3}a^3\right)\\
&= \frac{2}{3}\frac{1}{(b-a)^3}\cdot\left(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3\right)\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Die gesuchten Gewichte sind also:

$$\lambda_0=\frac{2}{3},\quad \lambda_1=-\frac{1}{3},\quad \lambda_2=\frac{2}{3}.$$

Damit gilt für die Quadraturformel:

$$\hat{I}_2(f)=(b-a)\cdot\left(\frac{2}{3}f(x_0)-\frac{1}{3}f(x_1)+\frac{2}{3}f(x_2)\right).$$

Aufgabe 56 *(Exaktheitsgrad von Quadraturformeln)* (4T*+3T* Punkte)

Der Fehler einer Quadraturformel $\hat{I}(f)$ zur Approximation des Integrals $I(f)$ ist definiert als

$$E(f):=I(f)-\hat{I}(f)$$

a) Zeigen Sie, dass der Fehler linear ist, d. h. dass für alle Funktionen f und g sowie alle Skalare λ und μ

$$E(\lambda f+\mu g)=\lambda\,E(f)+\mu\,E(g)$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie hierbei, dass für die Addition von Funktionen

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$$

und für die Multiplikation von Funktionen mit Skalaren

$$(\lambda\cdot f)(x):=\lambda\cdot f(x)$$

gilt.

Bemerkung: Aufgrund der Linearität des Quadraturfehlers kann der Exaktheitsgrad einer Quadraturformel leicht über die Monome $m_i(x)=x^i\ \ (i=0,1,\ldots)$ bestimmt werden.

b) Welchen Exaktheitsgrad hat die folgende Quadraturformel zur Approximation des Integrals $\int_0^1 f(x)\,dx$?

$$\hat{I}(f) \;=\; \frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\,f\left(\frac{3}{4}\right) \quad\approx\quad \int_0^1 f(x)\,dx$$

Lösungsvorschlag:

a) Man zeigt, dass für zwei auf $[0,1]$ integrierbare Funktionen f und g und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$E(\lambda f + \mu g) = \lambda E(f) + \mu E(g).$$

Hierzu nutzt man die Definition der Quadraturformel, die Linearität des Integrals sowie die definierte Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren.
Für die Quadraturformel gilt wegen $a = 0$ und $b = 1$:

$$\hat{I}(f) = (b-a)\sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
E(\lambda f + \mu g) &= I(\lambda f + \mu g) - \hat{I}(\lambda f + \mu g)\\
&= \int_0^1 (\lambda f + \mu g)(x)\,dx - \hat{I}(\lambda f + \mu g)\\
&= \int_0^1 \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} w_i(\lambda f + \mu g)(x_i)\\
&= \int_0^1 \lambda f(x)\,dx + \int_0^1 \mu g(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} w_i\lambda f(x_i) - \sum_{i=0}^{m} w_i\mu g(x_i)\\
&= \lambda\int_0^1 f(x)\,dx + \mu\int_0^1 g(x)\,dx - \lambda\sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) - \mu\sum_{i=0}^{m} w_i g(x_i)\\
&= \lambda\left(\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i)\right) + \mu\left(\int_0^1 g(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} w_i g(x_i)\right)\\
&= \lambda\left(I(f) - \hat{I}(f)\right) + \mu\left(I(g) - \hat{I}(g)\right)\\
&= \lambda E(f) + \mu E(g).
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\hat{I}(f) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{4}\right) \approx \int_0^1 f(x)\,dx = I(f)$$

Wir wollen nun die Fehlerordnung bestimmen, indem wir den Exaktheitsgrad r bestimmen (dann hat die zugehörige Quadraturformel die Ordnung $r+1$). Wir suchen also das größte r, so dass die Quadraturformel alle Polynome $p \in \mathbb{P}_r$ exakt integriert, d.h. $E(p) = \hat{I}(p) - I(p) = 0$.
Desweiteren gilt für den Quadraturfehler:

$$E(p) = E\left(\sum_{i=0}^{r} a_i x^i\right) \overset{a)}{=} \sum_{i=0}^{r} a_i E\left(x^i\right)$$

und damit

$$E(p) = 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_r \Leftrightarrow E(x^i) = 0 \quad \forall\, i = 0, \ldots, r$$

Das bedeutet, dass wir zur Bestimmung des Exaktheitsgrades und der Fehlerordnung nur die Exaktheit der Quadraturformel für die Monome $m_i = x^i$, $i = 0, 1, \ldots$ überprüfen müssen, solange bis $E(x^i) = I(x^i) - \hat{I}(x^i) \neq 0$. Dann gilt $r = i - 1$.

Berechne $E(m_0)$:

$$\begin{aligned} I(m_0) &= \int_0^1 x^0\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1 - 0 = 1 \\ \hat{I}(m_0) &= \frac{1}{2} m_0\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} m_0\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1 \\ &\Rightarrow E(m_0) = 0 \end{aligned}$$

Berechne $E(m_1)$:

$$\begin{aligned} I(m_1) &= \int_0^1 x^1\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ \hat{I}(m_1) &= \frac{1}{2} m_1\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} m_1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow E(m_1) = 0 \end{aligned}$$

Berechne $E(m_2)$:

$$\begin{aligned} I(m_2) &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\ \hat{I}(m_2) &= \frac{1}{2} m_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} m_2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16} = \frac{5}{16} \\ &\Rightarrow E(m_2) \neq 0 \end{aligned}$$

Damit hat die Quadraturformel den Exaktheitsgrad $r = 1$ und die Fehlerordnung $r + 1 = 2$.

Aufgabe 57 *(Gauß-Quadratur)* (3T*+1T*+4T*+4T*+1T*+4T* Punkte)

a) Transformieren Sie das Integral $\int_a^b f(t)dt$ auf das Intervall $[-1, 1]$, d. h. finden Sie Konstanten c_1, c_2 und c_3 so, dass

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; c_1 \int_{-1}^1 f(c_2 + c_3 \cdot s)\,ds.$$

b) Berechnen Sie die Nullstellen x_i des dritten Legendre-Polynoms $L_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$.

c) Bestimmen Sie zu diesen Nullstellen x_i Gewichte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadraturformel

$$\hat{I}(f) \;=\; \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \cdot f(x_i)$$

zur Approximation des Integrals $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 exakt ist.

Hinweis: Setzen Sie für f die Monome $m_i(x) = x^i \quad (i = 0, 1, 2)$ ein und lösen Sie das daraus resultierende Gleichungssystem. Mit der Linearität des Fehlers (vergleiche Aufgabe 56) ist dann die exakte Integration auch für Linearkombinationen der Monome gewährleistet.

d) Welchen Exaktheitsgrad hat die resultierende Quadraturformel?

e) Welchen Exaktheitsgrad kann eine Quadraturformel mit dieser Anzahl Stützstellen maximal haben?

f) Wie können Sie alternativ zum Hinweis in Aufgabenteil c) die Gewichte berechnen? Erhalten Sie mit dieser alternativen Berechnung die gleichen Werte für die Gewichte wie in Aufgabenteil c)?

Hinweis: Denken Sie daran, dass auch die obige Quadraturformel interpolatorisch ist. Einen Hinweis (bis auf den Faktor $\frac{1}{b-a}$) könnte Ihnen auch das Vorgehen in Aufgabe 55 oder Lemma 10.4 geben.

Lösungsvorschlag:

a) Nach der Substitutionsregel soll gelten:

$$\int_{-1}^{1} f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt, \quad \varphi\colon [-1,1] \to [\varphi(-1), \varphi(1)] \text{ stetig differenzierbar}$$

Das heißt wir suchen ein solches φ, mit $\varphi(-1) = a$ und $\varphi(1) = b$. Mit dem Ansatz $\varphi(s) = c_2 + c_3 s$ erhalten wir durch Lösung eines LGS:

$$\varphi(s) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}s \text{ mit } a \leq t := \varphi(s) \leq b \text{ für } -1 \leq s \leq 1$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds &= \int_{-1}^{1} f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}s) \cdot \frac{b-a}{2}\,ds \\
&= \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{=c_1} \int_{-1}^{1} f(\underbrace{\frac{b+a}{2}}_{=c_2} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{=c_3} s)\,ds \\
&= \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt \\
&= \int_{a}^{b} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

b) Es gilt $L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3) = \frac{1}{5}x\left(x^2 - \frac{3}{5}\right)$. Daher folgt

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

c) Wegen

$$I(p) - \hat{I}(p) = E(p) = E\left(\sum_{i=0}^{r} a_i x^i\right) \overset{a)}{=} \sum_{i=0}^{r} a_i E\left(x^i\right)$$

gilt

$$E(p) = 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_r \Leftrightarrow E(x^i) = 0 \quad \forall\, i = 0, \ldots, r$$

Eine Quadraturformel ist also genau dann exakt für Polynome $p \in \mathbb{P}_2$ wenn $E(m_i) = I(m_i) - \hat{I}(m_i) = 0$, $i = 0, 1, 2$ für die Monome $m_0(x) = x^0$, $m_1(x) = x^1$, $m_2(x) = x^2$.
Wir berechnen:

$$I(m_0) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2, \quad I(m_1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \quad I(m_2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Nun soll also gelten, dass $\hat{I}(m_0) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i m_0(x_i) = 2$, $\hat{I}(m_1) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i m_1(x_i) = 0$ und $\hat{I}(m_2) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i m_2(x_i) = \frac{2}{3}$. Somit erhalten wir mit den Stützstellen $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dessen Lösung durch $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \frac{8}{9}$ gegeben ist.

d) Berechne $E_3(m_3)$:

$$I(m_3) = \int_{-1}^{1} m_3(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1-1) = 0$$

$$\hat{I}(m_3) = \frac{5}{9}m_3\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}m_3(0) + \frac{5}{9}m_3\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{5}{9}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 + \frac{8}{9}\cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = 0$$

$$\Rightarrow E_3(m_3) = I(m_3) - \hat{I}(m_3) = 0$$

Berechne $E_4(m_4)$:

$$I(m_4) = \int_{-1}^{1} m_4(x)dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}(1-(-1)) = \frac{2}{5}$$

$$\hat{I}(m_4) = \frac{5}{9}m_4\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}m_4(0) + \frac{5}{9}m_4\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{5}{9}\cdot\frac{3^2}{5^2} + \frac{8}{9}\cdot 0 + \frac{5}{9}\cdot\frac{3^2}{5^2} = \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow E(m_4) = I(m_4) - \hat{I}(m_4) = 0$$

Berechne $E_5(m_5)$:

$$I(m_5) = \int_{-1}^{1} m_5(x)dx = \int_{-1}^{1} x^5 dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}(1-1) = 0$$

$$\hat{I}(m_5) = \frac{5}{9}m_5\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}m_5(0) + \frac{5}{9}m_5\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow E(m_5) = I(m_5) - \hat{I}(m_5) = 0$$

Berechne $E_6(m_6)$:

$$I(m_6) = \int_{-1}^{1} m_6(x)dx = \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{1}{7}x^7\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{7}(1+1) = \frac{2}{7}$$

$$\hat{I}(m_6) = \frac{5}{9}m_6\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}m_6(0) + \frac{5}{9}m_6\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{25} + 0 + \frac{3}{25} = \frac{6}{25}$$

$$\Rightarrow E(m_6) = I(m_6) - \hat{I}(m_6) = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{50-42}{175} = \frac{8}{175} \neq 0$$

Damit hat die Quadraturformel den Exaktheitsgrad $r = 5$ und die Fehlerordnung $r + 1 = 6$.

e) Nach Folie 229 kann man mit $m = 2$ (also $2 + 1 = 3$ Stützstellen) höchstens den Exaktheitsgrad $2m + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ erreichen:
Die Quadraturformel aus Aufgabenteil c) hat also den maximal möglichen Exaktheitsgrad.

f) In Aufgabenteil c) sind die drei Stützstellen x_0, x_1, x_2 als Nullstellen des Legendre-Polynoms L_3 gegeben. Durch Integration des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, x_1, x_2)$ erhalten wir die Quadraturformel:

$$\begin{aligned}
\hat{J}(f) &= \int_{-1}^{1} P(f|x_0, x_1, x_2)(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \cdot \ell_{i2}(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} \ell_{i2}(x)dx}_{=:\tilde{\lambda}_i} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \tilde{\lambda}_i f(x_i)
\end{aligned}$$

Es gilt: $\hat{J}(f)$ integriert alle Polynome vom Grad ≤ 2 exakt.
Denn (eigentlich klar nach Konstruktion):
Sei $p \in P_2$ ein Polynom vom Grad ≤ 2

$$\Longrightarrow \hat{J}(p) = \sum_{i=0}^{2} \tilde{\lambda}_i \, p(x_i) = \int_{-1}^{1} P(p|x_0, x_1, x_2)(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)dx = J(p),$$

da $P(p|x_0, x_1, x_2) = p$. Denn es gilt $p \in P_2$ und p interpoliert sich selbst.
Somit löst $(\tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2}, \tilde{\lambda_3})^T$ das LGS aus Aufgabenteil c).
Da die Matrix dieses LGS vollen Rang hat, ist die Lösung dieses LGS eindeutig.
$\Longrightarrow (\tilde{\lambda_1}, \tilde{\lambda_2}, \tilde{\lambda_3})^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$.

Wir erhalten also mit dieser alternativen Berechnung die gleichen Gewichte wie durch Lösen des Gleichungssystems in Aufgabenteil c).

Aufgabe 58 *(Vergleich von Quadraturformeln)* (3T*+3T*+4T* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir drei verschiedene Quadraturformeln vergleichen. Die zu vergleichenden Quadraturformeln haben jeweils drei Stützstellen und benötigen damit jeweils drei Funktionsauswertungen.
Es gilt

$$\log(x^2 + 1) = \int_0^x \frac{2t}{t^2 + 1} \, dt.$$

Berechnen Sie hiermit $\log(5)$ näherungsweise

a) unter Verwendung der Trapezsumme mit 2 Teilintervallen,

b) mit Hilfe der Simpson-Regel und

c) mit der in Aufgabe 57 hergeleiteten Quadraturformel.

Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler und vergleichen Sie diese Fehler. War das Ergebnis zu erwarten?

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen das Integral

$$\log(5) = \int_0^2 \underbrace{\frac{2t}{t^2 + 1}}_{=:f(t)} \, dt = \int_0^2 f(t) \, dt \text{ mit 2 Teilintervallen} \Rightarrow t_0 = 0; t_1 = 1; t_2 = 2;$$

a) unter Verwendung der Trapezsummenregel:

$$\log(5) \approx T(2) = (t_1 - t_0) \cdot \frac{f(t_0) + f(t_1)}{2} + (t_2 - t_1) \cdot \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2} = h \cdot \left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + \frac{f(t_2)}{2}\right)$$
$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} + \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2^2 + 1}\right) = \left(0 + 1 + \frac{2}{5}\right) = 1,4$$

Der relative Fehler beträgt damit:

$$\left|\frac{\log(5) - 1,4}{\log(5)}\right| = 0,1301310916 = 13,01\%$$

b) mit Hilfe der Simpson-Regel:

$$\log(5) \approx \hat{\mathrm{I}}(f) = (t_2 - t_0) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot f(t_0) + \frac{2}{3} \cdot f(t_1) + \frac{1}{6} \cdot f(t_2)\right) = \frac{2}{6} \cdot \left(0 + 4 \cdot 1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{22}{15} = 1,4\overline{6}$$

Der relative Fehler beträgt damit:

$$\left|\frac{\log(5) - 1,4\overline{6}}{\log(5)}\right| = 0,0887088 = 8,87\%$$

c) mit der in Aufgabe 48 hergeleiteten Quadraturformel:
Nach Aufgabe 48 ist

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{2-0}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{0+2}{2} + \frac{2-0}{2} \cdot s\right) ds = \int_{-1}^1 f(1+s)\,ds \approx \sum_{i=0}^2 \lambda_i f(1 + x_i)$$

mit $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \frac{8}{9}$ und $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\log(5) &= \log(2^2 + 1) = \int_0^2 \frac{2t}{t^2 + 1}\,dt = \int_{-1}^1 f(1+s)\,ds \approx \sum_{i=0}^2 \lambda_i \cdot \frac{2(1 + x_i)}{(1 + x_i)^2 + 1} \\
&= \frac{5}{9} \cdot \frac{2(1 - \sqrt{\frac{3}{5}})}{(1 - \sqrt{\frac{3}{5}})^2 + 1} + \frac{8}{9} \cdot \frac{2(1+0)}{(1+0)^2 + 1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2(1 + \sqrt{\frac{3}{5}})}{(1 + \sqrt{\frac{3}{5}})^2 + 1} \\
&= \frac{5}{9} \cdot \frac{2(1 - \frac{\sqrt{15}}{5})}{(1 - \frac{\sqrt{15}}{5})^2 + 1} + \frac{8}{9} \cdot \frac{2(1+0)}{(1+0)^2 + 1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2(1 + \frac{\sqrt{15}}{5})}{(1 + \frac{\sqrt{15}}{5})^2 + 1} \\
&= \frac{5}{9} \cdot \frac{10 - 2\sqrt{15}}{13 - 2\sqrt{15}} + \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{10 + 2\sqrt{15}}{13 + 2\sqrt{15}} \\
&= \frac{5(10 - 2\sqrt{15})(13 + 2\sqrt{15}) + 8(13 - 2\sqrt{15})(13 + 2\sqrt{15}) + 5(10 + 2\sqrt{15})(13 + 2\sqrt{15})}{9(13 - 2\sqrt{15})(13 + 2\sqrt{15})} \\
&= \frac{1572}{981} \approx 1,6024.
\end{aligned}$$

Der relative Fehler ist

$$\left|\frac{\log(5) - \frac{1572}{981}}{\log(5)}\right| \approx 0,0043 = 0,43\%.$$

Der Vergleich der relativen Fehler ergibt, dass die in Aufgabe 48 hergeleitete Quadraturformel log(5) mit dem geringsten Fehler berechnet und die Simpson-Regel genauer als die Trapezsummenregel ist.

Die Simpson-Regel und die Trapezsummenregel sind geschlossene Newton-Cotes-Formeln und besitzen daher einen Exaktheitsgrad entsprechend der Anzahl der Stützstellen des Interpolationspolynoms. Die Simpson-Regel hat 2 Stützstellen und ist damit genauer als die Trapezregel. Die in Aufgabe 48 hergeleitete Quadraturformel ist eine Gauss-Legendre-Quadraturformel und besitzt einen Exaktheitsgrad von $2m + 1$. Daher konnten wir erwarten, dass diese den geringsten Fehler besitzt.

Achtung:
Diese Argumentation ist sehr heuristisch. Um Aussagen über den zu erwartenden Fehler bei der Quadratur von Nicht-Polynomen machen zu können, muss man eigentlich den Fehler geeignet abschätzen. Dies ist etwa mit den Fehlerabschätzungen der Folie 219 für die zusammengesetzte Trapezregel, mit der Fehlerabschätzung für die Simpsonregel aus der Tabelle auf Folie 224 und mit der Fehlerabschätzung nach Satz 10.6 für die Gauß-Quadratur möglich.

Hinweise:
Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt12_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.