Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
08.05.2020

Übungsblatt 03

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 18.05.2020 bis 22.05.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es 30 Theorie- und 12 Matlab-Punkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 03) bei 62,3 Theorie- und 16,8 Matlabpunkten.

Aufgabe 7 *(Relative Konditionszahlen einer Matrix)* (7T+1T Punkte)

Für jeden festen Wert $c \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_c definiert durch $A_c := \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die relativen Konditionszahlen $\kappa_{\|\cdot\|_1}(A_c)$, $\kappa_{\|\cdot\|_2}(A_c)$ und $\kappa_{\|\cdot\|_\infty}(A_c)$ der Matrix A_c in Abhängigkeit von c. Dabei stehen die Matrix-Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ für die aus der Vorlesung bekannten induzierten Matrixnormen.

b) Sei $\tilde{x}$ die Lösung des linearen Gleichungssystems $A_c\, x = b$ mit $b \in \mathbb{R}^2$. Das gestörte Gleichungssystem $A_c\, x = b + \Delta b$ habe die Lösung $(\tilde{x} + \Delta x)$. Außerdem wissen wir, dass $\|\Delta b\|_1 / \|b\|_1 = 0.01$.

   Geben Sie eine obere Schranke für den relativen Fehler $\|\Delta x\|_1 / \|\tilde{x}\|_1$ an.

Aufgabe 8 *(Programmier-Aufgabe: Äquilibrierung einer Matrix)* (8M+2T+4M Punkte)

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `D = normalizeMat(A, norm, type)`, die für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Äquilibrierung durchführt. Dabei ist

   - `A` die zu äquilibrierende reguläre Matrix,
   - `norm` ein String, der festlegt, ob bezüglich der Maximumnorm (`norm == 'infty'`) oder bezüglich der Summennorm (`norm == 'one'`) äquilibriert werden soll;
   - `type` ein String, der die Art der Äquilibrierung festlegt. Es soll gelten

     $\|(DA)_i\| = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\},$ falls `type == 'rows'` und

     $\|(AD)^{(j)}\| = 1 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\},$ falls `type == 'cols'`,

     wobei $(DA)_i$ die i-te Zeile der Matrix DA und $(AD)^{(j)}$ die j-te Spalte der Matrix AD bezeichnen;
   - `D` die Diagonalmatrix, die die Matrix A äqulilibriert.

   Hinweise: Die MATLAB-internen Funktionen zur Berechnung einer Norm dürfen in dieser Teilaufgabe nicht verwendet werden. Es ist möglich, diese Teilaufgabe ohne Verwendung einer Schleife zu lösen.

b) Geben Sie Optimalitätseigenschaften für die Matrizen DA und AD an.

c) Schreiben Sie ein Testskript `main8.m`, mit dem Sie Ihre in Aufgabenteil a) geschriebene Funktion `normalizeMat` für jede Kombination von zulässigen Eingaben für `norm` und `type` mindestens einmal anhand einer geeigneten Matrix testen.

Aufgabe 9 *(Aufwand zur Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems)* (2T+2T Punkte)
Der Aufwand zur Berechnung der Determinate $\det A$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz beträgt ungefähr $n!$ Operationen. Da zur Berechnung der Lösung x^* eines linearen Gleichungssystems $A\,x = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Cramerschen Regel die Berechnung von $n+1$ Determinanten und n Quotienten notwendig sind, ergibt sich insgesamt ein Aufwand von $(n+1)! + n$ Operationen zur Berechnung der Lösung $x^* = A^{-1}b$ des linearen Gleichungssystems.
Im März 2020 wurde an der Universität Ulm der neue Hochleistungsrechner JUSTUS 2 eingeweiht. JUSTUS 2 hat eine theoretische Leistungsfähigkeit von 2 Petaflops und gehörte zum Zeitpunkt seiner Einweihung zu den 400 leistungsstärksten Supercomputern der Welt.
Wie lange würde dieser Supercomputer benötigen, um ein lineares Gleichungssystem der Dimension $n = 25$ mittels der Cramerschen Regel unter Verwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes zu lösen.
Hinweis: Ein Jahr hat rund $365,242$ Tage.

Aufgabe 10 *(Aufwand zur Berechnung von Vektor- und Matrix-Multiplikationen)* (2T+2T+2T Punkte)
Seien im Folgenden $x, y \in \mathbb{R}^n$ zwei Spaltenvektoren und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen.

a) Wie viele Additionen und wieviele Multiplikationen werden zur Berechnung des Vektor-Vektor-Produkts $x^T y$ benötigt. Geben Sie die Zahl der Operationen in $\mathcal{O}$-Notation an.

b) Geben Sie auch die Zahl der zur Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts Ax benötigten Additionen und Multiplikationen an. Wie können Sie den benötigten Aufwand in $\mathcal{O}$-Notation angeben?

c) Wie viele Additionen und wieviele Multiplikationen benötigen Sie zur Berechnung des Matrix-Matrix-Produkts AB? Wie groß ist der Aufwand in $\mathcal{O}$-Notation?

Aufgabe 11 *(LR-Zerlegung durch Koeffizientenvergleich)* (4T+3T+3T Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die LR-Zerlegung durch Koeffizientenvergleich bestimmen. Gesucht sind also eine linke untere normierte Dreiecksmatrix L und eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix},$$

so dass $A = LR$.

a) Wie und in welcher Reihenfolge kann man die Koeffizienten $l_{i,j}$ und $r_{i,j}$ bestimmen.

b) Verallgemeinern Sie dies auf 4×4 –Matrizen und $n \times n$ –Matrizen.

c) Kann man für jede reguläre Matrix A eine LR-Zerlegung finden, so dass gilt $A = LR$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweise:
Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt03_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.