Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
10.07.2020

# Übungsblatt 12

**Besprechung** in den Tutorien in der Woche vom 20.07.2020 bis 24.07.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es keine Theorie- und keine Matlab-Punkte, sowie 46 Theorie- und 18 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.

Somit sind für das Bestehen der Vorleistung insgesamt **163,1 Theorie- und 112,7 Matlabpunkte** nötig.

Bitte melden Sie sich umgehend, **spätestens bis Montag, 13.07.2020**, zur Vorleistung an.

Die beiden **Klausuren** finden nach aktueller Planung am **Mittwoch, 05.08.2020** im Zeitraum zwischen 11:30 Uhr und 15:00 Uhr und am **Dienstag, 13.10.2020** im Zeitraum zwischen 08:00 Uhr und 11:30 Uhr statt. Die genaue Uhrzeit und die Raumeinteilung werden über Moodle bekannt gegeben. Beachten Sie bitte auch möglicherweise kurzfristig über Moodle veröffentlichte Hinweise zu den Klausuren.

Als **Hilfsmittel zu den Klausuren** ist nur ein **eigenhändig** beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt (keine Kopien oder Ausdrucke) zugelassen. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Smartphones, Smartwatches, Tablets und ähnliches nicht erlaubt.

**Wichtiger Hinweis:**
Da der gesamte Stoff dieses Übungsblattes erst in der Vorlesung vom Donnerstag, 16.07.2020 behandelt werden wird, gibt es auf dieses Übungsblatt keine Pflicht-, sondern ausschließlich Zusatzpunkte. Der Inhalt dieses Übungsblatts ist dennoch wichtig und klausurrelevant.

**Aufgabe 53** *(Fehlerabschätzung des zentralen Differenzenquotienten)* (4T* Punkte)

Auf Folie 211 der Vorlesung wird die Grundidee der Numerischen Differentiation erläutert. Dort finden Sie auch die Fehlerabschätzung für die Annäherung der Ableitung $f'$ einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion $f$ durch den zentralen Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi).$$

Beweisen Sie diese Abschätzung.
**Hinweis:** Entwickeln Sie mit Taylor sowohl $f(x+\frac{1}{2}h)$ als auch $f(x-\frac{1}{2}h)$ um $f(x)$ und subtrahieren Sie diese beiden Taylor-Entwicklungen voneinander. Überlegen Sie sich dann, wie Sie die beiden Restglied-Terme mit Hilfe des Zwischenwertsatzes zu einem einzelnen Restglied zusammenfassen können.

**Aufgabe 54** *(Programmieraufgabe: Zusammengesetzte Quadraturformeln)*

(10M*+6M*+(2M*+2T*) Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $-\infty < a < b < \infty$.
Wir wollen in dieser Aufgabe zusammengesetzte Quadraturformeln zur Approximation des Integrals

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

betrachten, und zwar die zusammengesetzte (summierte) linke Rechteckregel (Linke-Box-Regel), die zusammengesetzte (summierte) Mittelpunktregel, die zusammengesetzte (summierte) Trapezregel und die zusammengesetzte (summierte) Simpsonregel.
Die summierte Trapezregel und die summierte Simpsonregel finden Sie im Skript. Bei der summierten Mittelpunktsregel wird völlig analog auf jedem der Teilintervalle das Integral durch die Mittelpunktsregel approximiert. Bei der summierten linken Rechteckregel werden die Integrale $\int_{t_{k-1}}^{k} f(x)\,dx$ durch $f(t_{k-1}) \cdot (t_k - t_{k-1})$ approximiert.

a) Schreiben Sie vier MATLAB-Funktionen `intApprox = linkeRechteckSumme(f, a, b, n)`, `intApprox = mittelpunktSumme(f, a, b, n)`, `intApprox = trapezSumme(f, a, b, n)` und `intApprox = simpsonSumme(f, a, b, n)` zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I(f)$ mit den oben genannten Methoden. Die Funktionen erhalten jeweils den Integrand `f` als function handle, die Intervallgrenzen `a` und `b`, sowie die Anzahl `n` der Teilintervalle. Zurückgegeben wird jeweils der Näherungswert `intApprox` für das Integral .

b) Schreiben Sie ein Matlab-Skript, welches Ihre Funktionen für das Integral

$$I(f) \;:=\; \int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx \;=\; \pi$$

testet. Approximieren Sie dazu für $n = 2^0, ..., 2^{15}$ mit allen vier Regeln das Integral und berechnen Sie jeweils den absoluten Fehler. Stellen Sie anschließend die jeweiligen Fehler in doppelt logarithmischer Skala in Abhängigkeit von $n$ dar.

c) Erklären Sie das Ergebnis. Zeichnen Sie dazu geeignete Steigungsgeraden in Ihr Schaubild ein. War das Ergebnis so zu erwarten? Begründen Sie Ihre Aussage.

**Aufgabe 55** *(Gewichte interpolatorischer Quadraturformeln)* (6T* Punkte)

Bestimmen Sie die Gewichte $\lambda_i$ der interpolatorischen Quadraturformel

$$\hat{I}_2(f) \;=\; (b-a)\sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i) \quad\approx\quad \int_a^b f(x)\,dx$$

mit den Knoten

$$x_0 = \frac{3a+b}{4}, \quad x_1 = \frac{2a+2b}{4}, \quad x_2 = \frac{a+3b}{4}.$$

**Hinweis:** Approximieren Sie $f$ durch das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in der Lagrange-Darstellung und integrieren Sie anschließend dieses Interpolationspolynom.

**Aufgabe 56** *(Exaktheitsgrad von Quadraturformeln)* (4T*+3T* Punkte)

Der Fehler einer Quadraturformel $\hat{I}(f)$ zur Approximation des Integrals $I(f)$ ist definiert als

$$E(f) := I(f) - \hat{I}(f)$$

a) Zeigen Sie, dass der Fehler linear ist, d. h. dass für alle Funktionen $f$ und $g$ sowie alle Skalare $\lambda$ und $\mu$

$$E(\lambda f + \mu g) = \lambda\, E(f) + \mu\, E(g)$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie hierbei, dass für die Addition von Funktionen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und für die Multiplikation von Funktionen mit Skalaren

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

gilt.

**Bemerkung:** Aufgrund der Linearität des Quadraturfehlers kann der Exaktheitsgrad einer Quadraturformel leicht über die Monome $m_i(x) = x^i \quad (i = 0, 1, \ldots)$ bestimmt werden.

b) Welchen Exaktheitsgrad hat die folgende Quadraturformel zur Approximation des Integrals $\int_0^1 f(x)\, dx$?

$$\hat{I}(f) \;=\; \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{4}\right) \;\approx\; \int_0^1 f(x)\, dx$$

**Aufgabe 57** *(Gauß-Quadratur)* (3T*+1T*+4T*+4T*+1T*+4T* Punkte)

a) Transformieren Sie das Integral $\int_a^b f(t)dt$ auf das Intervall $[-1, 1]$, d. h. finden Sie Konstanten $c_1$, $c_2$ und $c_3$ so, dass

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; c_1 \int_{-1}^1 f(c_2 + c_3 \cdot s)\, ds.$$

b) Berechnen Sie die Nullstellen $x_i$ des dritten Legendre-Polynoms $L_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3 - 3x)$.

c) Bestimmen Sie zu diesen Nullstellen $x_i$ Gewichte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ so, dass die Quadraturformel

$$\hat{I}(f) \;=\; \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \cdot f(x_i)$$

zur Approximation des Integrals $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$ für alle Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 exakt ist.

**Hinweis:** Setzen Sie für $f$ die Monome $m_i(x) = x^i \quad (i = 0, 1, 2)$ ein und lösen Sie das daraus resultierende Gleichungssystem. Mit der Linearität des Fehlers (vergleiche Aufgabe 56) ist dann die exakte Integration auch für Linearkombinationen der Monome gewährleistet.

d) Welchen Exaktheitsgrad hat die resultierende Quadraturformel?

e) Welchen Exaktheitsgrad kann eine Quadraturformel mit dieser Anzahl Stützstellen maximal haben?

f) Wie können Sie alternativ zum Hinweis in Aufgabenteil c) die Gewichte berechnen? Erhalten Sie mit dieser alternativen Berechnung die gleichen Werte für die Gewichte wie in Aufgabenteil c)?

**Hinweis:** Denken Sie daran, dass auch die obige Quadraturformel interpolatorisch ist. Einen Hinweis (bis auf den Faktor $\frac{1}{b-a}$) könnte Ihnen auch das Vorgehen in Aufgabe 55 oder Lemma 10.4 geben.

**Aufgabe 58** *(Vergleich von Quadraturformeln)* (3T*+3T*+4T* Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir drei verschiedene Quadraturformeln vergleichen. Die zu vergleichenden Quadraturformeln haben jeweils drei Stützstellen und benötigen damit jeweils drei Funktionsauswertungen.
Es gilt

$$\log(x^2+1) = \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,dt.$$

Berechnen Sie hiermit $\log(5)$ näherungsweise

a) unter Verwendung der Trapezsumme mit 2 Teilintervallen,

b) mit Hilfe der Simpson-Regel und

c) mit der in Aufgabe 57 hergeleiteten Quadraturformel.

Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler und vergleichen Sie diese Fehler. War das Ergebnis zu erwarten?

**Hinweise:**

Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt12_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.