Blatt 6

Sonntag, 31. Mai 2020 14:55

Aufgabe 21 LR-Zerlegung Tridiagonalmatrizen $(p = q = 2)$

a)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \emptyset \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \emptyset & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ l_{21} & 1 & & \\ & l_{32} & \ddots & \\ \emptyset & & \ddots & \\ & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & & \emptyset \\ & r_{22} & r_{23} & \\ & & \ddots & \ddots \\ \emptyset & & & r_{n-1,n} \\ & & & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

Rekursionsformel für $l_{j,j-1}$ $(j = 2, \dots, n)$:

$$l_{j,j-1} = \frac{a_{j,j-1}}{r_{j-1,j-1}}$$

– " – $r_{j,j}$ $(j = 1, \dots, n)$:

$$r_{j,j} = a_{j,j} - l_{j,j-1} \cdot r_{j-1,j}$$

– " – $r_{j,j+1}$ $(j = 1, \dots, n-1)$:

$$r_{j,j+1} = a_{j,j+1}$$

b) Für eine Bandmatrix mit Bandbreite $p = q = 2$:

Rechenaufwand der LR-Zerlegung von Ordnung pqn.

$O(n) = n$

c) Test an versch. Tridiagonalmatrizen:

$A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

d) siehe Matlab Code

Aufgabe 22:

a) siehe Matlab Code.

b) Die Ausgleichsgerade verläuft linear, da die Dimension der Matrix A mit 2^i ansteigt.

Der Thomas-Algorithmus arbeitet mit einer Geschwindigkeit in der Größenordnung $O(n)$. Plottet man die Laufzeit logarithmisch, erhält man eine Gerade.

c) siehe Matlab Code

d) Die Funktion gaussLR nutzt nicht die spezielle Struktur der Tridiagonalmatrix und der Aufwand ist somit wesentlich höher ($O(\frac{1}{3}n^3)$ im Vergleich zu $O(n)$).

<u>Aufgabe 23</u>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = LDL^T = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ l_{21}d_{11} & d_{22} & 0 \\ l_{31}d_{11} & l_{32}d_{22} & d_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$j=1$:
$$d_{11} = a_{11} = 1$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-1}{1} = -1$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = 0$$

$j=2$:
$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 1 - (-1)^2 \cdot 1 = 0$$
$$a_{32} = l_{31}d_{11}l_{21} + l_{32}d_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}}$$
$$= \frac{-1 - 0 \cdot 1 \cdot -1}{0} \quad \lightning$$

da $A_1 \neq A_1^T$ nicht symmetrisch

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$j=1$:
$$d_{11} = a_{11} = 1$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = 2$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = 1$$

$j = 2$:
$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 1 - 2^2 \cdot 1 = -3$$
$$l_{32} = \frac{1}{d_{22}} \left(a_{32} - l_{31} d_{11} l_{21} \right) = -\frac{1}{3} \left(1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \right) = \frac{1}{3}$$

$j = 3$:
$$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22}$$
$$= -2 - 1^2 \cdot 1 - \frac{1}{3}^2 \cdot (-3)$$
$$= -2 - 1 + \frac{1}{3} = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D hat Einträge $d_{ii} < 0$ und verstößt somit gegen Satz 3.34

$\Rightarrow$ Bestimmung der Eigenwerte von A_2:

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \dots \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -2{,}3723 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}\right\} < 0 \ ↯$$
$$\lambda_3 = 3{,}3723$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$j = 1$:
$$d_{11} = a_{11} = 1$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = 2$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = 1$$

$j = 2$:
$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 8 - 2^2 \cdot 1 = 4$$
$$l_{32} = \frac{1}{d_{22}} \left(a_{32} - l_{31} d_{11} l_{21} \right) = \frac{1}{4} \left(2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \right)$$
$$= 0$$

$j = 3$:
$$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22}$$
$$= 2 - 1^2 \, 1 - 0 \cdot 4 = 1$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe 24</u>

d) Der Gauss-Algorithmus benötigt für die Lösung die meiste Zeit $(\mathcal{O}(n^3))$

<u>Aufgabe 25</u> orthogonale Matrizen

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonale Matrix $\Rightarrow Q^T \cdot Q = I \quad (1)$

Zeige, dass ...

a) Q^T ebenfalls orthogonal

$Q = \begin{pmatrix} q_1, & \dots, & q_n \end{pmatrix} \quad q_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (Spaltenvektoren)

$Q^T = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} \quad q_i^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (Zeilenvektoren)

Q^T ist orthogonal, denn (1)

$(Q^T)^T \cdot Q^T = Q \cdot Q^T$

für orthogonale Matrizen gilt $\boxed{Q^T = Q^{-1}}$

$\rightarrow \quad Q \cdot Q^T = Q \cdot Q^{-1} = I$

b) für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

$\rightarrow$ beide Seiten quadrieren

$\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2$

Euklidische Norm abgeleitet von Skalarprodukt

$\Leftrightarrow \quad (Qx)^T Qx = x^T Q^T \cdot Q x = x^T \cdot I \cdot x = \|x\|_2^2$

c) $\kappa_2(Q) = 1$

$$\kappa_2(Q) = \|Q\|_2 \cdot \|Q^{-1}\|_2$$
$$= \|Q\|_2 \cdot \|Q^T\|_2$$
$$= \sqrt{\langle Q, Q \rangle} \cdot \sqrt{\langle Q^T, Q^T \rangle}$$
$$= 1 \cdot 1 = 1$$

d) sei $\tilde{Q}$ eine weitere orthogonale Matrix. Dann ist $Q\tilde{Q}$ orthogonal.

Aus (1): $(Q \cdot \tilde{Q})^T \cdot Q\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \cdot Q^T \cdot Q\tilde{Q}$

$$= \tilde{Q}^T \cdot I \cdot \tilde{Q}$$
$$= I$$

<u>Aufgabe 26</u> Keine Lösung

$v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ und $Q_v = I - 2 \frac{v v^T}{v^T v}$

Zeige, dass ...

a) $Q_v = Q_v^T$