Blatt 7 Sebastian Maschke

Dienstag, 9. Juni 2020 10:05

$\alpha = \text{sign}(y_1) \|y\|_2$
$v = y + \alpha e^1$
$Q_v y = -\alpha e^1$

Aufgabe 27 Householder-Transformation

a) $y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

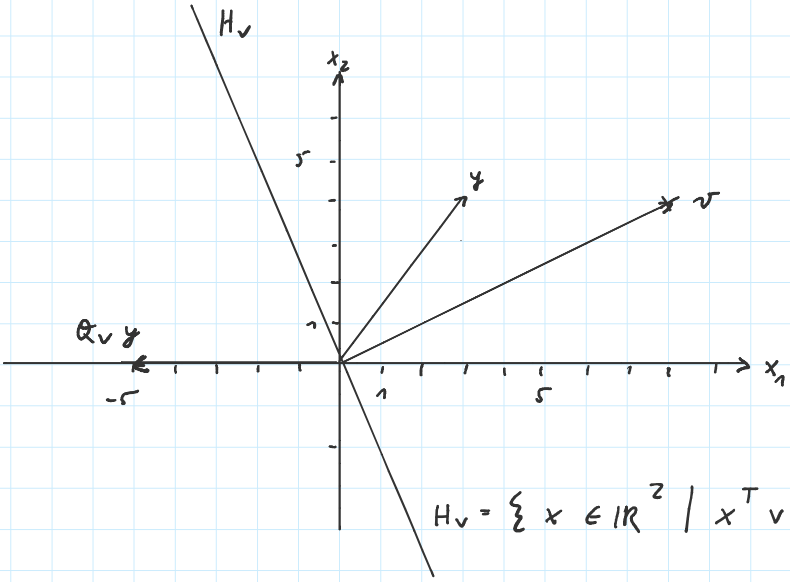
$\|y\|_2 = 5$

$\alpha = +1 \cdot 5 = 5$

$v = y + \alpha e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$Q_v y = -\alpha e_1 = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

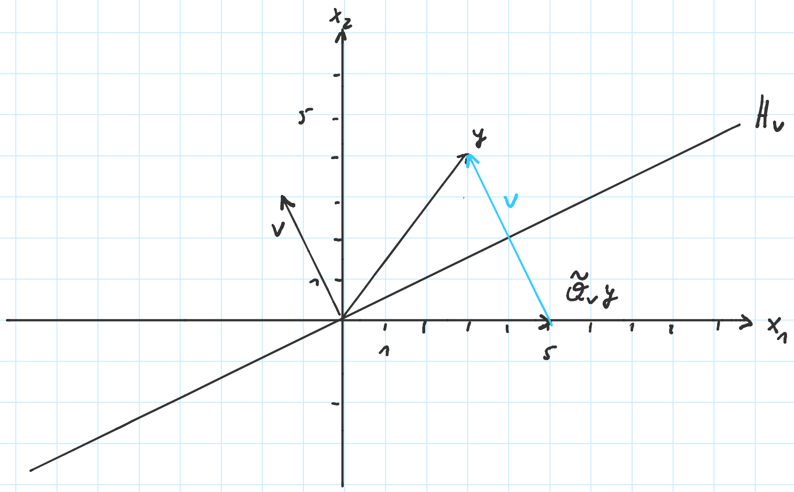


$H_v = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T v = 0 \}$

v ist der Normalenvektor der Spiegelebene H_v

b) s. a)

c) Die Transformation ist nicht eindeutig. Es wäre ebenfalls eine zweite Spiegelung auf die x_1-Achse möglich. Der gespiegelte Vektor $Q_{\tilde{v}} y$ verläuft in die umgekehrte Richtung. Jedoch wird diese Spiegelung normalerweise nicht gewählt, da sie zu Auslöschung führen kann.



Aufgabe 28 QR-Z. und lin. Ausgleichsprobleme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a)

1. Schritt:

$$v^1 = y^1 + \alpha \cdot e^1 \quad \text{mit} \quad \alpha = \operatorname{sign}(y_1^1) \cdot \|y^1\|_2 = 2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 := Q_{v_1}; \quad Q_1 A = \left(Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{v_1} y^1 = -\alpha \cdot e^1 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{v_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{(v^1)^T v^1} \cdot v^1 (v^1)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q_{v_1} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Schritt

$$v^2 = y^2 + \alpha \cdot e^2 \quad \text{mit} \quad \operatorname{sign}(0) := 1 \qquad \alpha = 1 \cdot 3 = 3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_{v_2} \; ; \qquad \tilde{Q}_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\alpha \cdot e^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ 0 & \tilde{Q}_2 \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot Q_1 \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

b)

$$\underbrace{Q_{v_n} \cdots Q_{v_2} Q_{v_1}}_{Q^T} \cdot A = R \qquad \Big| \cdot Q$$

mit Eigenschaft $\quad Q_v = Q_v^T = Q_v^{-1}$

$$Q\,Q^T A = Q \cdot R$$

$$1 \cdot A = Q \cdot R$$

c)

$$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow \underbrace{Q^T Q}_{I} R x = Q^T b$$

$$b^{(2)} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 54 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad ↯$$

d)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2^2 \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{\overset{m}{4} \times \overset{n}{2}} \qquad \text{Rang}(A) = 2 \, , \; b \in \mathbb{R}^4$$

$$QA = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \hline 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad b_1 \in \mathbb{R}^2$$

$$Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad b_1 \in \mathbb{R}^2$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\tilde{R} x = b_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -2x_1 - 5x_2 = 2$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(2 + 5x_2) = -\frac{1}{2}\left(2 - \frac{10}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$x = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$$

Aufgabe 30

$$h(t) = x_1 + x_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + x_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

Minimierungsproblem:

$$\sum_{i=1}^{6} \left(y(t_i, x_1, x_2, x_3) - b_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(a_{i,1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 - b_i \right)^2 = \min.$$

a) $$\|Ax^* - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{19}{10} \\ 3 \\ \frac{13}{5} \\ \frac{11}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & \qquad 2 & \qquad 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \sin(0) & \cos(0) \\ 1 & \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ 1 & \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ 1 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \\ 1 & \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \\ 1 & \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) siehe Code
c) -"-

Aufgabe 31

$$A^T A x = A^T b \qquad \text{(Normalengleichung)}$$

Linke Seite:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sin(\frac{1}{3}\pi) & \sin(\frac{2}{3}\pi) & \sin(\pi) & \sin(\frac{4}{3}\pi) & \sin(\frac{5}{3}\pi) \\ 1 & \cos(\frac{1}{3}\pi) & \cos(\frac{2}{3}\pi) & \cos(\pi) & \cos(\frac{4}{3}\pi) & \cos(\frac{5}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sin(\frac{1}{3}\pi) & \cos(\frac{1}{3}\pi) \\ 1 & \sin(\frac{2}{3}\pi) & \cos(\frac{2}{3}\pi) \\ 1 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \\ 1 & \sin(\frac{4}{3}\pi) & \cos(\frac{4}{3}\pi) \\ 1 & \sin(\frac{5}{3}\pi) & \cos(\frac{5}{3}\pi) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & -1 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0{,}5 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -0{,}5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -0{,}5 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Rechte Seite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & -1 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{19}{10} \\ 3 \\ \frac{13}{5} \\ \frac{11}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}5 \\ 3{,}2043 \\ 1{,}550 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}5 \\ 3{,}2043 \\ 1{,}550 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{10{,}5}{6} = 1{,}75$$

$$x_2 = \frac{3{,}2043}{3} = 1{,}0681 \qquad \Rightarrow x = (1{,}75 \,;\, 1{,}0681 \,;\, 0{,}5167)^T$$

$$x_3 = \frac{1{,}55}{3} = 0{,}5167$$