

```

% Angewandte Numerik 1, SoSe 2020
% Uebungsblatt 07, Aufgabe 29: QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen
%
% Berechnet die Loesung x des linearen Ausgleichsproblems
%  $\min\{x \in \mathbb{R}^n\}(\|Ax - b\|^2)$  mit Householder Spiegelung
%
% Letzte Aenderung: 09.06.2020

% Cleanup
clearvars
close all
clc

% Initialisierung -----
fprintf('\nAngewandte Numerik 1, Sommersemester 2020\n');
fprintf( ['Uebungsblatt 7, Aufgabe 29d: QR-Zerlegung mit ', ...
        'Householder Spiegelung' ] );
fprintf('\nLoest das lineare Ausgleichsproblem  $\min(\|Ax - b\|^2)$ ');
fprintf(' aus Aufgabe 28d\n\n');

A = [ 1 1; ...
      1 2; ...
      1 2; ...
      1 5 ];
b = [ 2; 2; 4; 6 ];

% Loesung des linearen Ausgleichsproblems -----
fprintf( 'Lineares Ausgleichsproblems  $\min\{x \in \mathbb{R}^n\}(\|Ax - b\|^2)$ : \n' );
fprintf( '          ( %d %d )          ( %d )\n', A(1,:), b(1) );
fprintf( '  A * x = b :   ( %d %d ) * x = ( %d )\n', A(2,:), b(2) );
fprintf( '          ( %d %d )          ( %d )\n', A(3,:), b(3) );
fprintf( '          ( %d %d )          ( %d )\n', A(4,:), b(4) );

% Householder Spiegelung
[V, R] = qrHouseholder(A);

% Loesung des linearen Ausgleichsproblems
x      = solveHouseholder(V, R, b);

fprintf( '\nLoesung des linearen Ausgleichsproblems:\n');
fprintf( '  x = ( %d )\n', x(1) );
fprintf( '        ( %d )\n', x(2) );

#####

function [ V, R ] = qrHouseholder( R )

```

```

% Angewandte Numerik 1, SoSe 2020
% Uebungsblatt 07, Aufgabe 29: QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen
%
% Die Funktion [V, R] = qrHouseholder(A) berechnet die QR-Zerlegung
% einer Matrix A in  $\mathbb{R}^{m \times n}$  mittels Householder-Spiegelungen.
% Dabei ist R die rechte obere Dreiecksmatrix der QR-Zerlegung der
% Matrix A. Die linke untere Dreiecksmatrix  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 
% enthaelt in ihren Spalten die Householder-Vektoren  $v_i$  der einzelnen
% Spiegelungen.
%
% Input: R      Matrix deren QR-Zerlegung berechnet werden soll
% Output: V     Linke untere Dreiecksmatrix  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 
%              die in ihren Spalten die Householder-Vektoren  $v_i$  der
%              einzelnen Spiegelungen enthaelt
%              R      Rechte obere Dreiecksmatrix der QR-Zerlegung
%
% Letzte Aenderung: 09.06.2020

% Signum Funktion
sgn = @(x) (x>=0)-(x<0);

% Dimension der Matrix
[m,n] = size(R);

% Dimension der unteren Dreiecksmatrix fuer die Householder Vektoren
V = zeros( m, n );

for j = 1:n
    % Householder Vektor
    v = R(j:m,j);
    v(1) = v(1) + sgn( v(1) ) * norm( v );

    % Householder Spiegelung
    R(j:m,j:n) = R(j:m,j:n) - 2 / (v'*v) * v * ( v' * R(j:m,j:n) );

    % Householder Vektoren speichern
    V(j:m,j) = v;
end
end

#####

function x = solveHouseholder(V, R, b)
% Angewandte Numerik 1, SoSe 2020
% Uebungsblatt 07, Aufgabe 29: QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen
%
```

```

% Die Funktion x = solveHouseholder(V, R, b) berechnet die die
% Loesung x des linearen Ausgleichsproblems  $\min\{x \in \mathbb{R}^n\}(\|Ax - b\|_2^2)$ 
% Dabei sind V und R die von der Matlab-Funktion
% [V, R] = qrHouseholder(A) berechneten Matrizen. b ist der Vektor b
% des linearen Ausgleichsproblems
%
% Input:  V      Linke untere Dreiecksmatrix  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,
%              die in ihren Spalten die Householder-Vektoren  $v_i$  der
%              einzelnen Spiegelungen enthaelt
%         R      Rechte obere Dreiecksmatrix der QR-Zerlegung
%         b      Vektor b des linearen Ausgleichsproblems
% Output: x      Loesung x des linearen Ausgleichsproblems
%
% Letzte Aenderung: 09.06.2020

% Dimension der Matrizen
[m,n] = size( V );

% Vektor  $Q^*b$  berechnen -----
% Wende Householder-Spiegelungen auf den Vektor b an, und
% zwar in gleicher Reihenfolge wie sie zur Berechnung von R
% angewendet wurden
for i = 1:n
    % Householder-Vektor des i-ten Schritts
    v      = V(i:m, i);
    b(i:m) = b(i:m) - 2 / (v'*v) * (v'*b(i:m)) * v;
end

% Rueckwaertseinsetzen -----
x = zeros(n, 1);
for i = n:-1:1
    x(i) = (b(i) - R(i,i+1:n) * x(i+1:n)) / R(i,i);
end
end

```

Angewandte Numerik 1, Sommersemester 2020
 Uebungsblatt 7, Aufgabe 29d: QR-Zerlegung mit Householder Spiegelung
 Loest das lineare Ausgleichsproblem $\min(\|Ax - b\|^2)$ aus Aufgabe 28d

Lineares Ausgleichsproblems $\min\{x \in \mathbb{R}^n\}(\|Ax - b\|^2)$:

$$A * x = b : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Loesung des linearen Ausgleichsproblems:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$