Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
24.04.2020

Lösungsvorschlag Übungsblatt 01

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 04.05.2020 bis 08.05.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es 37 Theorie- und 0 Matlab-Punkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 01) bei 25,9 Theorie- und 0 Matlabpunkten.

Aufgabe 1 *(*Kondition eines Problems, Schnittpunkt zweier Geraden) (2T+2T+2T+4T+4T Punkte)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit dem Begriff der Kondition eines Problems und verdeutlichen diesen Begriff am Schnittpunkt zweier Geraden:

a) Sie kennen für eine Gerade die Darstellung $y = m\,x + c$, wobei $m \in \mathbb{R}$ die Steigung und $c \in \mathbb{R}$ den y-Achsenabschnitt der Geraden bezeichnen. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m\,x + c\}$ gibt also die Menge der Punkte auf der Geraden an.

   In der Vorlesung haben wir für die Geraden G_1 und G_2 die Darstellung $G_i = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{i,1}\,y_1 + a_{i,2}\,y_2 = x_i\}$, $i = 1, 2$ gesehen.

   Erklären Sie, wie diese beiden Darstellungen zusammen hängen. Geben Sie die Größen x, y, m und c in Abhängigkeit von $y_1, y_2, a_{i,1}$ und $a_{i,2}$ an.

b) Bestimmen Sie für $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$ den Schnittpunkt der beiden Geraden G_1 und G_2 als Lösung $y^* = (y_1^*, y_2^*)^T$ des entsprechenden Gleichungssystems $A\,y = x$. Nehmen Sie dazu an, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ regulär ist.

c) Erklären Sie (allgemein, also nicht an einem Beispiel) den Begriff der „Kondition".

d) Geben Sie nun für das Beispiel des Schnittpunts der beiden Geraden G_1 und G_2 jeweils eine möglichst einfache Kombination der Koeffizienten $a_{i,j}$ und des Vektors x für ein gut konditioniertes und ein schlecht konditioniertes Problem an. Dabei soll auch beim schlecht konditionierten Problem die Matrix A regulär sein.

   Skizzieren Sie den Sachverhalt für gestörte Eingabedaten $\tilde{x} = x + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon_i \in \mathbb{R}, \varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2$ und erklären Sie anschaulich, warum Ihre Beispiele gut bzw. schlecht konditioniert sind.

e) Sei jetzt $X = Y = \mathbb{R}^2$ und $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = y = A^{-1}\,x$ für $x \in X,\ y \in Y,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Gehen Sie davon aus, dass es eine Störung $\varepsilon > 0$ in der ersten Komponente der Eingabedaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gibt, also $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   Geben Sie den Eingabefehler Δx und den Ausgabefehler Δy an und berechnen Sie das Verhältnis

$$\frac{||\Delta y||_Y}{||\Delta x||_X} = \frac{||\tilde{y} - y||_Y}{||\tilde{x} - x||_X}$$

   des absoluten Ausgabefehlers $||\Delta y||_Y$ zum absoluten Eingabefehler $||\Delta x||_X$ des allgemeinen Schnittpunktproblems. Verwenden Sie hierbei für die Norm $||\cdot||_X$ auf X und die Norm $||\cdot||_Y$ auf Y jeweils die durch $||z||_\infty = max_{i=1,\dots,n}|z_i|$ definierte Maximumsnorm. Wie nennt man dieses Verhältnis?

Lösungsvorschlag:

a) Betrachten wir die beiden angegebenen Darstellungen der Geraden:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m\,x + c\} \tag{1}$$

und

$$G_i = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{i,1}\,y_1 + a_{i,2}\,y_2 = x_i\}, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Die Darstellung (1) können wir zur Darstellung mehrerer Geraden verallgemeinern, indem wir für jede der Geraden $i = 1, 2$ die Steigung m_i und den y-Achsenabschnitt c_i angeben. Also

$$G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m_i\,x + c_i\}, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Betrachten wir einen Punkt $(y_1, y_2) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Geraden, so sehen wir, dass y_1 bzw. y_2 aus der Darstellung (2) der x- bzw. y-Koordinate der Darstellung (3) entsprechen.

Somit können wir $a_{i,1}\,y_1 + a_{i,2}\,y_2 = x_i$ aus (2) nach $y = y_2$ auflösen und erhalten für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & a_{i,1}\,y_1 + a_{i,2}\,y_2 &= \;& x_i \\ \Leftrightarrow \quad & a_{i,2}\,y_2 &= \;& x_i - a_{i,1}\,y_1 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{y_2}_{=y} &= \;& \underbrace{\frac{x_i}{a_{i,2}}}_{=c_i} - \underbrace{\frac{a_{i,1}}{a_{i,2}}}_{=m_i}\,\underbrace{y_1}_{=x}. \end{aligned}$$

Damit haben wir für den y-Achsenabschnitt $c_i = \frac{x_i}{a_{i,2}}$ und für die Steigung $m_i = -\frac{a_{i,1}}{a_{i,2}}$.

b) Der Schnittpunkt $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ der beiden Geraden liegt sowohl in G_1 als auch in G_2. Für ihn gilt also sowohl $a_{1,1}\,y_1 + a_{1,2}\,y_2 = x_1$ als auch $a_{2,1}\,y_1 + a_{2,2}\,y_2 = x_2$. In Matrixschreibweise erhalten wir $A\,y = x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ergibt sich also als Lösung des Gleichungssystems $A\,y = x$.

Falls A regulär ist (d. h. Determinante $\det A \neq 0$), ist y gegeben durch $y = A^{-1}\,x$.

Die Inverse A^{-1} erhalten wir durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$y = A^{-1}\,x = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22}\,x_1 - a_{12}\,x_2 \\ -a_{21}\,x_1 + a_{11}\,x_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

c) Der Begriff Kondition beschreibt eine *Eigenschaft des Problems* selbst. Unter der Kondition eines Problems verstehen wir die Empfindlichkeit des Problems für Störungen. Sie gibt die Antwort auf die Frage, wie Fehler in den (Eingabe-)Daten die Ausgabedaten beeinflussen.

Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleiner das Verhältnis von relativem Ausgabefehler zu relativem Eingabefehler ist (Das ist der Begriff der *relativen Kondition*).

Beachte: Die Kondition beschreibt **nicht** die Qualität einer Lösungsmethode, denn wir setzen exakte Rechnung voraus. Die Kondition gibt also an, mit welchen Fehlern man in jedem Fall, also selbst bei exakter Rechnung, rechnen muss.

d) Wir betrachten nun zwei konkrete Beispiele für das Problem der Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden:

i) **Ein Beispiel für ein gut konditioniertes Problem:**
Wir wählen die erste Gerade G_1 als y-Achse, also $y_1 = 0$.
In der Darstellung (2) erhalten wir mit $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 0$ und $x_1 = 0$

$$G_1 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1\, y_1 + 0\, y_2 = 0\}.$$

Die zweite Gerade G_2 wählen wir parallel zur x-Achse (also Steigung $m_2 = 0$) mit y-Achsenabschnitt $c_2 = 1$. Wir setzen $a_{2,2} = 1$ und erhalten nach Teilaufgabe a) $a_{2,1} = -m_2 \cdot a_{2,2} = 0 \cdot 1 = 0$ und $x_2 = c_2 \cdot a_{2,2} = 1 \cdot 1 = 1$.
In Matrixschreibweise lautet also das Problem: Löse das lineare Gleichungssystem $A\, y = x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es hat die Lösung $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Durch die gestörten Eingabedaten

$$\tilde{x} = x + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 1 + \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varepsilon_i \in \mathbb{R},\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1, 2$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 1 + \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

also für die gestörte Gerade $\tilde{G_1}$ die Gleichung $y_1 = \varepsilon_1$ und für die gestörte Gerade $\tilde{G_2}$ die Gleichung $y_2 = 1 + \varepsilon_2$. Die Störung bewirkt also eine Verschiebung von G_1 um ε_1 nach rechts und von G_2 um ε_2 nach oben. Der Schnittpunkt der gestörten Geraden ist also

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 1 + \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = y + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit (4) durch Lösung des linearen Gleichungssystems für die gestörten Geraden:

$$\tilde{y} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22}\, \tilde{x}_1 - a_{12}\, \tilde{x}_2 \\ -a_{21}\, \tilde{x}_1 + a_{11}\, \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \cdot \varepsilon_1 - 0 \cdot (1 + \varepsilon_2) \\ 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot (1 + \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ 1 + \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Eine Störung der Eingabedaten um $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ bewirkt hier also eine Störung der Ausgabedaten um den gleichen Wert.

ii) **Ein Beispiel für ein schlecht konditioniertes Problem:**
Wie im obigen Beispiel wählen wir die zweite Gerade G_2 wieder parallel zur x-Achse (also Steigung $m_2 = 0$) mit y-Achsenabschnitt $c_2 = 1$. Wir setzen wieder $a_{2,2} = 1$ und erhalten wie oben $a_{2,1} = 0$ und $x_2 = 1$.
Die erste Gerade G_1 soll jetzt fast parallel zu G_2 mit Steigung $m_1 = 0.0000001$ und wie G_2 mit y-Achsenabschnitt $c_1 = 1$ verlaufen. Wir setzen wieder $a_{1,2} = 1$ und erhalten mit Teilaufgabe a) $a_{1,1} = -m_1 \cdot a_{1,2} = 0.0000001 \cdot 1 = 0.0000001$ und $x_1 = c_1 \cdot a_{1,2} = 1 \cdot 1 = 1$.
Dieses Problem lautet in Matrixschreibweise: Löse das lineare Gleichungssystem $A\, y = x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000001 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

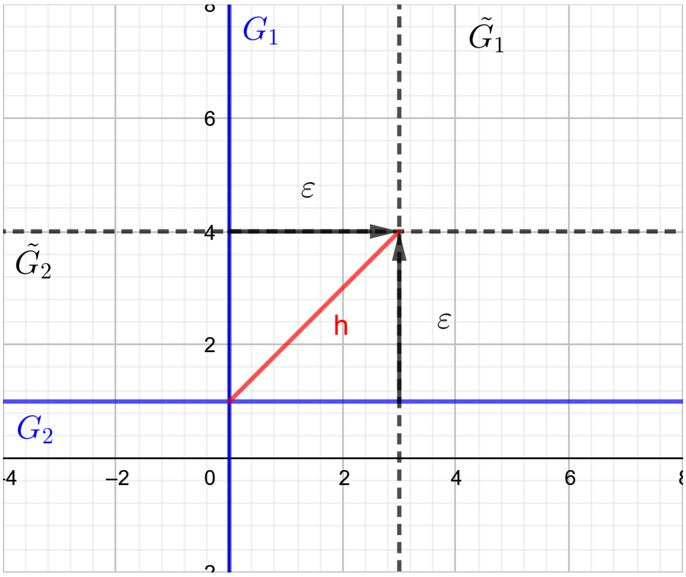

Abbildung 1: Schnittpunkt zweier Geraden: Gut konditioniertes Problem

Es hat nach (4) die Lösung
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22}\,x_1 - a_{12}\,x_2 \\ -a_{21}\,x_1 + a_{11}\,x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.0000001\cdot 1 - 0\cdot 1} \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ -0\cdot 1 + 0.0000001\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
Durch die gestörten Eingabedaten

$$\tilde{x} = x + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 \\ 1+\varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varepsilon_i \in \mathbb{R},\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1,2$$

erhält man nun das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.0000001 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 \\ 1+\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

also für die gestörte Gerade $\tilde{G}_1$ die Gleichung $0.0000001 y_1 + y_2 = 1 + \varepsilon_1$ und für die gestörte Gerade $\tilde{G}_2$ die Gleichung $y_2 = 1 + \varepsilon_2$. Die Störung bewirkt also eine Verschiebung von G_1 um ε_1 nach oben und von G_2 um ε_2 nach oben.
Der Schnittpunkt der gestörten Geraden ist nach (4) also

$$\begin{aligned}
\tilde{y} &= A^{-1}\,\tilde{x} \\
&= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22}\,\tilde{x}_1 - a_{12}\,\tilde{x}_2 \\ -a_{21}\,\tilde{x}_1 + a_{11}\,\tilde{x}_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{0.0000001\cdot 1 - 0\cdot 1} \begin{pmatrix} 1\cdot(1+\varepsilon_1) - 1\cdot(1+\varepsilon_2) \\ 0\cdot(1+\varepsilon_1) + 0.0000001\cdot(1+\varepsilon_2) \end{pmatrix} \\
&= 10000000 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 0.0000001\cdot(1+\varepsilon_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10000000\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ 1+\varepsilon_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Also insbesondere wenn die Störungen in den Eingabedaten unterschiedliche Vorzeichen haben, ist der Fehler in der ersten Komponente der Ausgabedaten sehr groß.

Im ersten Beispiel bewirkt also eine kleine Störung der Daten eine kleine Störung der Lösung. Es handelt sich dabei also um ein gut konditioniertes Problem.

Im zweiten Beispiel bewirkt eine kleine Störung der Daten eine enorme Störung der Lösung. Dieses zweite Problem ist daher ein schlecht konditioniertes Problem.

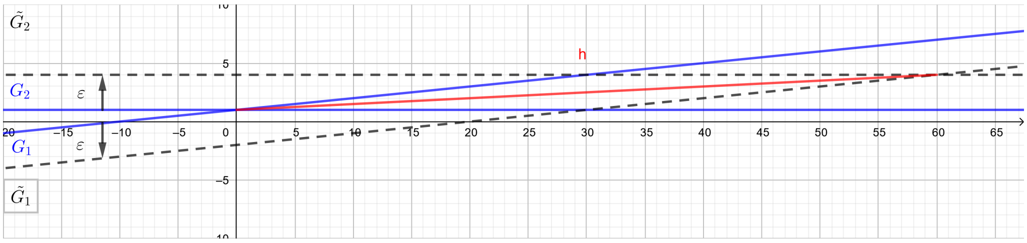

Abbildung 2: Schnittpunkt zweier Geraden: Schlecht konditioniertes Problem

e) Sei jetzt $X = Y = \mathbb{R}^2$ und $f : X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = y = A^{-1}x$ für $x \in X,\ y \in Y,\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Seien ferner die Eingabedaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in der ersten Komponente x_1 gestört durch $\varepsilon > 0$, also $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen $\|\Delta y\|_\infty$ und $\|\Delta x\|_\infty$ separat:

$$\|\Delta x\|_X = \|\Delta x\|_\infty = \|\tilde{x} - x\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|\epsilon|\,, 0\} = \epsilon \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
\|\Delta y\|_Y &= \|\Delta y\|_\infty \\
&= \|\tilde{y} - y\|_\infty \\
&= \left\|A^{-1}\tilde{x} - A^{-1}x\right\|_\infty \\
&= \left\|A^{-1}(\tilde{x} - x)\right\|_\infty \\
&= \left\|A^{-1}\Delta x\right\|_\infty \\
&= \left\| \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22}\epsilon \\ -a_{21}\epsilon \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= \max\left\{ \left| \frac{a_{22}\,\epsilon}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right|, \left| \frac{-a_{21}\,\epsilon}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X} = \frac{\max\left\{ \left| \frac{a_{22}\,\epsilon}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right|, \left| \frac{-a_{21}\,\epsilon}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right| \right\}}{\varepsilon} = \max\left\{ \left| \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right|, \left| \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right| \right\}.$$

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ des gut konditionierten Problems aus Aufgabenteil d) erhält man

$$\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X} = \max\left\{ \left| \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right|, \left| \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right| \right\} = \max\left\{ \left| \frac{1}{1\cdot 1 - 0\cdot 0} \right|, \left| \frac{-0}{1\cdot 1 - 0\cdot 0} \right| \right\} = 1.$$

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0.0000001 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ des schlecht konditionierten Problems aus Aufgabenteil d) erhält man dagegen

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X} &= \max\left\{ \left| \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right|, \left| \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right| \right\} \\
&= \max\left\{ \left| \frac{1}{0.0000001\cdot 1 - 0\cdot 1} \right|, \left| \frac{-0}{0.0000001\cdot 1 - 0\cdot 1} \right| \right\} \\
&= \max\{10000000, 0\} \\
&= 10000000.
\end{aligned}$$

Dieses Verhältnis nennt man absolute Kondition.

Aufgabe 2 *(*Einfache Normen) (9T+3T+3T Punkte)

a) Zeigen Sie, dass durch

i) $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (1-Norm),

ii) $\|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2} = \langle v, v\rangle_2^{1/2}, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (Euklidische Norm) und

iii) $\|v\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (∞-Norm)

Normen auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Dabei bezeichne $\langle v, w\rangle_2^{1/2} = (v^T w)^{1/2}$ das euklidische Skalarprodukt.

Hinweis: Verwenden Sie für ii) die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

b) Skizzieren Sie für $n = 2$ und die Normen $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$ aus Aufgabenteil a) jeweils die Menge $\{v \in \mathbb{R}^2;\ \|v\|_p = 1\}$.

c) Sei $C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$. Diese Menge bildet einen Vektorraum, dies müssen Sie nicht zeigen.

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$||\cdot||_\infty : C[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto \max_{t\in[a,b]} |g(t)| \qquad \forall g \in C[a, b]$$

eine Norm auf dem Vektorraum $C[a, b]$ definiert ist.

Lösungsvorschlag:

a) Überprüfung der Voraussetzungen und der drei Axiome N1 (Definitheit), N2 (absolute Homogenität) und N3 (Dreiecksungleichung) aus Definition 2.6:

Für alle drei Teilaufgaben gilt: $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen.

i) $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n \qquad$ (1-Norm),

Betrachte $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$: Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$!!!

N1) $\|x\|_1 = \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \underbrace{|x_2|}_{\geq 0} = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$

N2) $\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda|(|x_1| + |x_2|) = |\lambda|\|x\|_1$

N3) $\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$

ii) $\|v\|_2 := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2} = \langle v, v\rangle_2^{1/2}, \quad v \in \mathbb{R}^n$ (Euklidische Norm)

N1) $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \quad \text{da} \quad |x_i| \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

N2) $$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2\right)^{1/2} = \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\lambda^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \|x\|_2$$

N3) $$\|x + y\|_2^2 = \langle x + y, x + y\rangle_2 = \|x\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle_2 + \|y\|_2^2$$

$$\overset{\text{C.S.*}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

Die Behauptung folgt durch das Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten.

*Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2$

iii) $\|v\|_\infty := \max\limits_{i=1,\ldots,n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n$ (∞-Norm)

N1) $$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$\|x\|_\infty = \max \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{da} \quad |x_i| \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

N2) $$\|\lambda x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda x_i|$$

$$= |\lambda| \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_{infty}$$

N3) $$\|x + y\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + |y_i|$$

$$\leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Normen auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Dabei bezeichne $\langle v, w\rangle_2^{1/2} = (v^T w)^{1/2}$ das euklidische Skalarprodukt.

Hinweis: Verwenden Sie für ii) die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.

b) siehe Abbildung 3

c) Sei $C[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ mit $a < b$. Diese Menge bildet einen Vektorraum, dies müssen Sie nicht zeigen.

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$|| \cdot ||_\infty : C[a, b] \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto \max_{t \in [a,b]} |g(t)| \qquad \forall g \in C[a, b]$$

eine Norm auf dem Vektorraum $C[a, b]$ definiert ist.

N1) $$\|g\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |g(t)| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g \equiv 0 \quad \text{auf} \quad [a, b] \quad \text{und}$$

$$\|g\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |g(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [a, b], \quad \text{da} \quad |g(t)| \geq 0 \quad \forall g \in C[a, b] \quad \forall t \in [a, b]$$

N2) $$\|\lambda g\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |\lambda g(t)| = \max_{t \in [a,b]} |\lambda||g(t)| = |\lambda| \max_{t \in [a,b]} |g(t)| = |\lambda| \|g\|_\infty$$

N3) $$\|f + g\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t) + g(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(t)| + |g(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |f(t)| + \max_{t \in [a,b]} |g(t)|$$

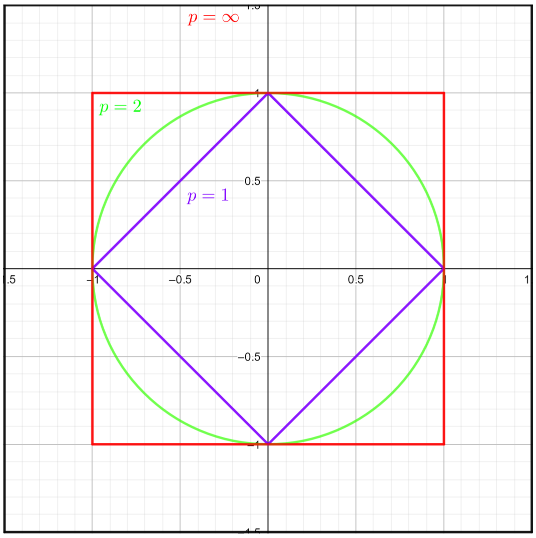

Abbildung 3: Einheitssphären für $p = 1, 2, \infty$

Aufgabe 3 *(*Lipschitz-Stetigkeit) (3T+3T+2T Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h_1 : [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{1+4x}$$

Lipschitz-stetig ist und geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

Hinweis: Sie dürfen die dritte binomische Formel verwenden.

b) Sei $h_2 : [-4,3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h_2(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion, von der wir wissen, dass mit einer festen Konstanten $c > 0$ die Ungleichung

$$\|h_2'(x)\| \leq \frac{c}{2}x^2$$

für alle $x \in [-4,3]$ gilt.

Zeigen Sie, dass dann h_2 Lipschitz-stetig ist und geben Sie eine Lipschitz-Konstante an.

Hinweis: Sie dürfen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwenden.

c) Geben Sie eine Abbildung h_3 an, die nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösungsvorschlag:

a)

$$|h_1(x_1) - h_1(x_2)| = |\sqrt{1+4x_1} - \sqrt{1+4x_2}| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+4x_1} - \sqrt{1+4x_2}\right)\left(\sqrt{1+4x_1} + \sqrt{1+4x_2}\right)}{\left(\sqrt{1+4x_1} + \sqrt{1+4x_2}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{1+4x_1}^2 - \sqrt{1+4x_2}^2}{\sqrt{1+4x_1} + \sqrt{1+4x_2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{1+4x_1} + \sqrt{1+4x_2}}|x_1 - x_2|$$

$$\leq \frac{4}{\sqrt{1} + \sqrt{1}}|x_1 - x_2| = 2|x_1 - x_2| \quad \Rightarrow \quad L = 2$$

b) Wir wissen aus dem Mittelwertsatz:
$\forall x_1, x_2 \in [-4,3] \quad \exists \xi \in [x_1, x_2]$:

$$|h_2(x_1) - h_2(x_2)| = |h'(\xi)(x_1 - x_2)| \leq |\frac{c}{2}\xi^2(x_1 - x_2)|$$

$$\leq \frac{c}{2}16|x_1 - x_2| = 8c|x_1 - x_2|$$

$$\Rightarrow L = 8c$$

c) Sei $f(x) = x^2$. Setze $x_2 = 0$. Dann existiert zu jedem $L > 0$ ein x_1, sodass

$$|x_1^2| > L|x_1|$$

$\Rightarrow f$ ist nicht Lipschitz-stetig.

Hinweise:
Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.
Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.
Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt01_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.