Prof. Dr. Dirk Lebiedz
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Angewandte Numerik 1
SoSe 2020
05.06.2020

Übungsblatt 07

Besprechung in den Tutorien in der Woche vom 15.06.2020 bis 19.06.2020

Für dieses Übungsblatt gibt es 21 Theorie- und 10 Matlab-Punkte, sowie 6 Theorie- und 7 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 07) bei 122,5 Theorie- und 75,6 Matlabpunkten.

Aufgabe 27 *(Geometrische Interpretation der Householder-Transformation)* (3T+1T+2T Punkte)

a) Konstruieren Sie zum Vektor

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

die Householder-Transformation Q_v, sodass y auf die x_1-Achse gespiegelt wird. Stellen Sie die Vektoren y, v und $Q_v y$ graphisch dar und erklären Sie die Bedeutung des Vektors v.

b) Zeichnen Sie auch die Hyperebene $H_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^\top v = 0\}$ ein.

c) Ist die Wahl der Householder-Transformation eindeutig? Oder gibt es eine weitere Householder-Transformation $Q_{\tilde{v}}$, die den Vektor y auf die x_1-Achse spiegelt? Geben Sie gegebenenfalls die Vektoren $\tilde{v}$ und $Q_{\tilde{v}} y$ dieser zweiten Householder-Transformation $Q_{\tilde{v}}$ an und erläutern Sie Ihre Vermutung am Schaubild.

Aufgabe 28 *(QR-Zerlegung und lineare Ausgleichsprobleme)* (4T+2T+3T+2T Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und den Vektor} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Transformieren Sie mittels Householder-Spiegelungen die Matrix A in eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Geben Sie dabei in jedem Schritt i jeweils die Householder-Vektoren v^i explizit an und vermeiden Sie es, die Matrizen Q_{v^i} der Householder-Transformationen aufzustellen.

b) Überlegen Sie sich, wie Sie die Matrizen Q und $Q^\top$ der QR-Zerlegung der Matrix A, also $A = QR$, aus den Householder-Transformationen Q_{v^i} aufstellen könnten. Sie brauchen weder die Householder-Transformationen Q_{v^i} noch die Matrizen Q und $Q^\top$ für das konkrete Beispiel dieser Aufgabe auszurechnen.

c) Berechnen Sie den Vektor $Q^\top b$ (ohne die Matrix $Q^\top$ aufzustellen).

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2^2$ mittels der QR-Zerlegung der Matrix A.

Aufgabe 29 *(Programmieraufgabe: QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen)* (4M+4M+2M Punkte)

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `[V, R] = qrHouseholder(A)`, die die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mittels Householder-Spiegelungen berechnet. Dabei ist `R` die rechte obere Dreiecksmatrix der QR-Zerlegung der Matrix `A`. Die Matrix `V` $= (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ enthält in ihren Spalten die Householder-Vektoren v^i der einzelnen Spiegelungen. `V` ist also eine linke untere Dreiecksmatrix. Ihre MATLAB-Funktion `qrHouseholder` soll die Matrix Q nicht explizit aufstellen.

b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `x = solveHouseholder(V, R, b)`, die die Lösung `x` des linearen Ausgleichsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$ berechnet. Dabei sind `V` und `R` die von Ihrer MATLAB-Funktion `[V, R] = qrHouseholder(A)` berechneten Matrizen. `b` ist der Vektor b des linearen Ausgleichsproblems.

c) Testen Sie Ihre MATLAB-Funktionen am linearen Ausgleichsproblem der Aufgabe 28 d).

Aufgabe 30 *(Programmieraufgabe: Lineares Ausgleichsproblem)* (4T+3M*+4M* Punkte)

Die Höhe des Wasserstandes in der Nordsee wird hauptsächlich durch die so genannte M_2-Tide bestimmt, deren Periode ca. 12 Stunden beträgt. Die Höhe des Wasserstandes h kann daher durch die Funktion

$$h(t) = x_1 + x_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + x_3 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

beschrieben werden (t in Stunden). Zur Bestimmung der unbekannten Parameter x_1, x_2 und x_3 sind bei Helgoland folgende Messungen durchgeführt worden:

t_i	0	2	4	6	8	10	Std.
h_i	$\frac{19}{10}$	3	$\frac{13}{5}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	Meter

a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem $\min \|Ax - b\|_2^2$. Geben Sie die Matrix A und die Vektoren x und b explizit an. Welche Dimensionen haben A, x und b?

b) Lösen Sie dieses lineare Ausgleichsproblem mit Ihren MATLAB-Funktionen `qrHouseholder` und `solveHouseholder` aus der letzten Aufgabe 29.

c) Fertigen Sie mit MATLAB eine Skizze an, in der die Ausgleichsfunktion und die Messdaten eingezeichnet sind. Zeichnen Sie in Ihre Skizze auch die Fehler der Lösung des Ausgleichsproblems gegenüber den Messwerten ein.

Aufgabe 31 *(Normalengleichungen)* (6T* Punkte)

Stellen Sie für das lineare Ausgleichsproblem aus Aufgabe 30 die Normalengleichungen auf und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem von Hand. Verwenden Sie bei allen Rechnungen ausschließlich Brüche und keine Dezimalzahlen und geben Sie alle Zwischenschritte an. Hinweis: Rechnen Sie mit $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der in Aufgabe 30 mit Matlab berechneten Lösung.

Hinweise:

Die Lösungen der Theorieaufgaben und Ihren Text zu den Programmieraufgaben können Sie in LaTeX erstellen oder handschriftlich aufschreiben und einscannen. Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.

Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, geben Sie bitte auf allen Lösungen alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an. Jedes Teammitglied muss eine Lösung abgeben.

Speichern Sie Ihre Lösungen und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt07_*Vorname*_*Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. Laden Sie **spätestens 48 Stunden vor Ihrem Tutorium** diese `.zip`-Datei in Moodle hoch.