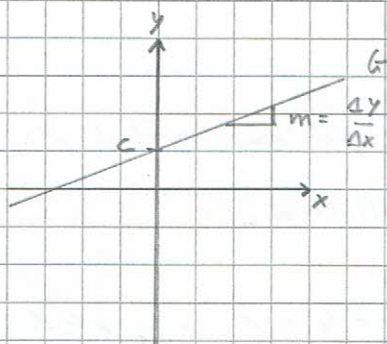


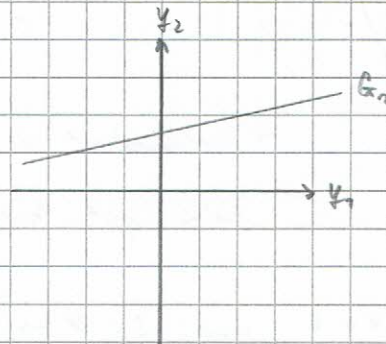
Aufgabe 1

a) 1) $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + c \}$

2) $G_i = \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 = x_i \} \quad i = 1, 2$



$$y = mx + c$$



$$G_i: y_1 = -\frac{a_{i2}}{a_{i1}} y_2 + \frac{x_i}{a_{i1}}$$

$$y = y_1, \quad m = -\frac{a_{i2}}{a_{i1}}, \quad c = \frac{x_i}{a_{i1}}$$

$$x = y_2$$

c)

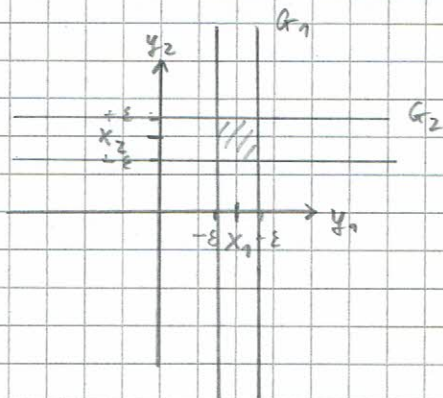
$$A \cdot y^* = x \quad \Rightarrow \quad y^* = A^{-1} \cdot x = \frac{1}{\det} \operatorname{adj}(A) \cdot x$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} \cdot x$$

e) Die Kondition untersucht die Lösung eines Problems.

Sie gibt an, inwiefern ungenaue Eingabedaten sich auf die Ausgabedaten auswirken.

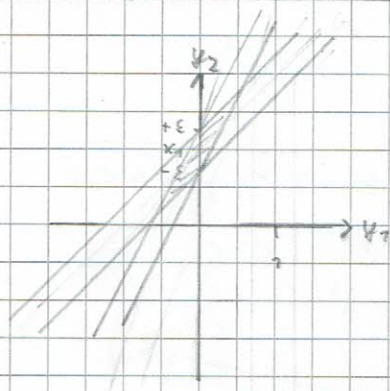
d) gut konditioniertes Problem



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schlecht konditioniertes Problem



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1,05 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Unsicherheit des Schnittpunkts größer als beim gut konditionierten Problem.

c) $X = Y = \mathbb{R}^2$ und $f: X \rightarrow Y, x \rightarrow f(x) = y = A^{-1}x, x \in X, y \in Y, A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 + \epsilon \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta x = \tilde{x} - x = \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta y &= f(\tilde{x}) - f(x) = A^{-1}(\tilde{x} - x) = A^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix} \cdot \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta y\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} &= \frac{\max \{ \Delta y \}}{\max \{ \Delta x \}} = \frac{\epsilon}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \max \{ a_{22}, -a_{21} \} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \max \{ a_{22}, -a_{21} \} \end{aligned}$$

→ Sensitivität

Aufgabe 2

(N1) $\|v\| > 0$, $\forall v \in V$ und $\|v\| = 0$ impliziert $v = 0$

(N2) Für alle $\alpha \in K$, $v \in V$ gilt $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(N3) Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$$i) \|v\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$$

$$(N1): \|v\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |v_i| = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \sqrt{v_i^2} \geq 0 \quad \forall v_i \in \mathbb{R}$$

$$\|v\|_1 = 0 \rightarrow v = 0$$

$$(N2): \|\alpha v\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha v_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha| \cdot |v_i| = |\alpha| \cdot \sum_{i=1}^n |v_i| = |\alpha| \cdot \|v\|_1$$

$$(N3): \|v + w\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |v_i| + \sum_{i=1}^n |w_i|$$

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(v_i + w_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{v_i^2} + \sum_{i=1}^n \sqrt{w_i^2}$$

$$|v_i + w_i|^2 \leq (|v_i| + |w_i|)^2$$

$$v_i^2 + 2v_i w_i + w_i^2 \leq v_i^2 + 2|v_i||w_i| + w_i^2$$

$$2v_i w_i \leq 2|v_i||w_i|$$

$$ii) \|v\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$(N1): \|v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \geq 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} = 0$$

$$\text{für } v = 0$$

$$(N2): \|\alpha v\|_2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{|\alpha v_i|^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{|\alpha|^2 \cdot |v_i|^2} = |\alpha| \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{|v_i|^2} \\ = |\alpha| \cdot \|v\|_2$$

$$(N3): \|v + w\|_2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{|v_i + w_i|^2} = \sum_{i=1}^n |\langle v, w \rangle| \stackrel{\text{CSU}}{\leq} \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle \langle w_i, w_i \rangle \\ = \|v\|_2 + \|w\|_2$$

$$\text{iii) } \|v\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$$

$$(N1) : \|v\|_\infty \geq 0 \Rightarrow \max_{i=1, \dots, n} |v_i| \geq 0 \quad \text{für } |v_i| \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

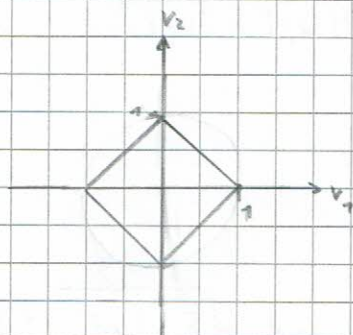
$$\|v\|_\infty = 0 \Rightarrow \max_{i=1, \dots, n} |v_i| = 0 \quad \text{für } |v_i| = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$(N2) : \|a \cdot v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|a \cdot v_i|\} = \max_{i=1, \dots, n} \{|a| \cdot |v_i|\} = |a| \cdot \max_{i=1, \dots, n} |v_i| \\ = |a| \cdot \|v\|_\infty$$

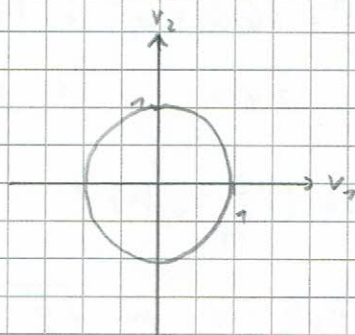
$$(N3) : \|v + w\|_\infty \Rightarrow \max_{i=1, \dots, n} |v_i + w_i| \leq \max_{i=1, \dots, n} |v_i| + \max_{i=1, \dots, n} |w_i| \\ = \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$$

b) $n=2$

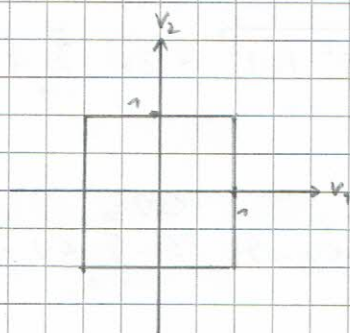
$$\cdot \{v \in \mathbb{R}^2; \|v\|_1 = 1\}$$



$$\cdot \{v \in \mathbb{R}^2; \|v\|_2 = 1\}$$



$$\cdot \{v \in \mathbb{R}^2; \|v\|_\infty = 1\}$$



$$c) \|\cdot\|_\infty : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g \mapsto \max_{t \in [a, b]} |g(t)| \quad \forall g \in C[a, b]$$

$$(N1) : \|g(t)\|_\infty \geq 0 \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |g(t)| \geq 0 \quad \forall |g(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\|g(t)\|_\infty = 0 \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |g(t)| = 0 \quad \forall g(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\begin{aligned}
 (N2) \quad \|a \cdot g(t)\|_{\infty} &= \max_{t \in [a,b]} |a \cdot g(t)| = \max_{t \in [a,b]} |a| \cdot |g(t)| \\
 &= |a| \cdot \max_{t \in [a,b]} |g(t)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (N3) \quad \|g(t) + w(t)\|_{\infty} &= \max_{t \in [a,b]} \{|g(t) + w(t)|\} \leq \max_{t \in [a,b]} \{|g(t)| + |w(t)|\} \\
 &\leq \max_{t \in [a,b]} \{|g(t)|\} + \max_{t \in [a,b]} \{|w(t)|\} = \|g(t)\|_{\infty} + \|w(t)\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) $h_1: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+4x}$
 $u, v \in [0,2]$

$$\|h(u) - h(v)\| \leq L \cdot \|u - v\| \quad \forall u, v \in [0,2]$$

$$\|\sqrt{1+4u} - \sqrt{1+4v}\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

$$\left\| \frac{1+4u - (1+4v)}{\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v}} \right\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

$$\left\| \frac{4(u-v)}{\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v}} \right\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

$$4 \cdot \left\| \frac{u-v}{\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v}} \right\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+4u} + \sqrt{1+4v}} \geq \frac{1}{2} \quad \forall u, v \in [0,2]$$

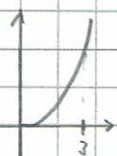
$\rightarrow L$ wird mit 4 abgeschätzt

b) $h_2: [-4,3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h_2(x)$ mit $c > 0$

$$\|h_2'(x)\| \leq \frac{c}{2} x^2$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{\|h_2(x+\Delta) - h_2(x)\|}{\|\Delta\|} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\left\| \frac{h_2(x+\Delta) - h_2(x)}{\Delta} \right\| \right) = \|h_2'(x)\|$$

$$\leq \frac{c}{2} x^2 \leq \underbrace{4,5}_L \quad \forall x \in [-4,3]$$



c) Jede monoton steigende Funktion

$$h_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto h_3(x) = x^2$$

→ Mittelwertsatz für $a \rightarrow 0$: $h_3'(x) = 2x$

$$\forall L \in \mathbb{R}: \exists x \in \mathbb{R}: \|h_3'(x)\| = \|2x\| \geq L$$