Ejercicios Fourier

Samuel Jaramillo

1.1

Para la demostración necesitamos las siguientes propiedades:

1) La suma de funciones integrables es integrable. Sean $f(x), g(x), H(x)$ integrables, entonces,

$$\int [f(x)+g(x)+H(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx.$$

2) Tanto $\sin(ax)$ como $\cos(ax)$ son integrables para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ahora, $f(t)$ se puede escribir como

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right]$$

Pero esta no es más que la suma de funciones integrables y, por lo tanto, se puede integrar. Más específicamente, como las funciones que componen $f(t)$ son integrables en todo $\mathbb{R}$, $f(t)$ es integrable en todo $\mathbb{R}$. Así, para cualquier $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} \left[-b_n\left(\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)\right) + a_n\left(\sin(n\omega_0 t_2) - \sin(n\omega_0 t_1)\right)\right].$$

Si bien para algunas funciones, $f(t)$ puede parecer no diferenciable (por presencia de picos, por ejemplo), cabe recordar que esto no es más que una sumatoria infinita de senos y cosenos y que, estrictamente hablando, nunca llega a ser completamente no diferenciable. Ya que, si nos acercamos lo suficiente, veremos que la función sigue siendo "suave".

1.2. Presentación de funciones. $f_{(t)} = t$, $-\pi \leq t < \pi$

$T = 2\pi$, $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = 0 \rightarrow \text{La función } t\cos(nt) \text{ es impar}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t\cos(nt)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin nt}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\Rightarrow f_{(t)} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cdot\cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\boxed{f_{(t)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(nt)}$$

1.3 1. $f(t)=t^2, \quad -\pi \le t \le \pi \quad y \quad f(t+2\pi)=f(t)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt\,dt \qquad \begin{matrix} u=t^2 & v=\frac{1}{n}\sin nt \\ du=2t\,dt & dv=\cos nt\,dt \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{n}\sin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt\right] \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt \qquad \begin{matrix} u=t & v=-\frac{\cos nt}{n} \\ du=dt & dv=\sin(nt)\,dt \end{matrix}$$

$$= -\frac{t}{n}\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}\sin(nt) - \frac{t}{n}\cos(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2}\sin(\pi n) - \frac{2\pi}{n}\cos\pi n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^2}{n}\overset{0}{\sin(\pi n)} + \frac{4\pi}{n^2}\cos(\pi n) - \frac{4}{n^3}\overset{0}{\sin(\pi n)}\right)$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}\cos(\pi n) = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(nt)\,dt = 0$$ debido a que el integrando $t^2\sin(nt)$ es impar.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t^3}{3}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

2. La identidad de Parseval:

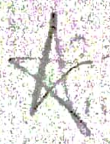
$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Reemplazando nuestros valores:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\cos^2(\pi n) = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \rightarrow \frac{8}{45}\pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = \zeta(4)$$



Ahora, jugando un poco con la serie de Fourier de $f(t)$ podemos hacer aparecer $\zeta(6)$:

$$f(t) = \int_0^t t^2\,dt = \int_0^t\left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nt)\right)dt$$

$$\frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nt)4}{n^3}$$

vamos que $a_n \sim \frac{1}{n^3}$ y, con Parseval, tendremos $a_n^2 \sim \frac{1}{n^6}$.

$$\frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(nt)4}{n^3}$$

Aplicando la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}t\right)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \frac{\sin(nt)4}{n^3}\right)^2$$

Este paso se puede aplicar a un programa de Python.

$$\frac{1}{16\pi}\left[\frac{16\pi^7}{945}\right] = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}}$$