PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

INTERROGACIÓN 2 - PARTE I
Métodos Bayesianos - EYP2807 - EYP280I

Profesor	:	Ana María Araneda
Ayudante	:	Josefa Silva
Fecha	:	19 de mayo de 2023

La nota de la Interrogación 2 corresponde a:

$$\frac{1}{2}\left(\text{Nota Parte I } + \text{ Nota Parte II}\right)$$

1. **[10 %]** Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si ella es verdadera o falsa. Si es falsa, justifique y, si es verdadera, aporte un trozo de información adicional.

   a) En un problema de predicción a través de regiones de credibilidad, para toda función de pérdida y para una credibilidad dada, la decisión óptima corresponde a la región de más alta probabilidad a posteriori (región HPD), de la credibilidad deseada, de la distribución predictiva a posteriori de las observaciones a predecir.

   b) En un problema de test de hipótesis donde la hipótesis nula es puntual y el parámetro de interés es continuo, es posible utilizar una distribución a priori mixta que dé probabilidad positiva a la hipótesis nula.

   c) En el caso, anterior, las chances a priori de que la hipótesis nula sea correcta se convierten en las chances a posteriori multiplicando por el Factor de Bayes.

2. **[20 %]** Considere una secuencia de variables aleatorias, $x_1, \ldots, x_n$, condicionalmente independientes dado el parámetro $k > 0$, cada una con verosimilitud Pareto, de modo que su función de densidad condicional corresponde a:

$$p(x_i|k) = \begin{cases} \frac{kx_m^k}{x_i^{k+1}} & , x_i > x_m \\ 0 & , x_i \leq x_m, \end{cases}$$

   con $x_m > 0$, conocido. Muestre que la distribución Pareto corresponde a una familia exponencial y utilice este resultado para encontrar el kernel de la función de densidad en la familia de distribuciones conjugada.

3. **[20 %]** Considere una variable aleatoria con verosimilitud Poisson(θ), donde la distribución a priori para θ corresponde a una distribución Exponencial(2). Se desea testear las hipótesis:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad vs. \quad \theta \neq \theta_0.$$

   Explique con sus propias palabras lo que representa el Factor de Bayes (1 o 2 frases, como máximo) y encuentre una expresión para este (en términos de θ_0 y la observación x), para testear las hipótesis dadas.

Distribución Poisson: La función de probabilidad de una distribución Poisson(θ), con $\theta > 0$, corresponde a:

$$p(x|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

Distribución Exponencial: La función de densidad de una distribución Exponencial(λ), con $\lambda > 0$, corresponde a:

$$p(x|\lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\}, \qquad x > 0.$$

Distribución Gama: La función de densidad de una distribución Gama(α, β), con $\alpha, \beta > 0$, corresponde a:

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \qquad x > 0.$$