PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

INTERROGACIÓN 1
Métodos Bayesianos - EYP2807 - EYP280I

Profesor	:	Ana María Araneda
Ayudante	:	Josefa Silva
Fecha	:	21 de abril de 2023

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si ella es verdadera o falsa. Si falsa, justifique, y si es verdadera, aporte un trozo de información adicional.

   a) Bajo el enfoque Bayesiano, la predicción de nuevas observaciones debe realizarse en base a su distribución predictiva.

   b) Para conocer la distribución predictiva a posteriori de una secuencia de variables aleatorias permutables, $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$, solo se requiere conocer la distribución a posteriori del parámetro que define la mezcla, dada la muestra disponible, $x_1, ..., x_n$.

   c) Dado un problema de predicción, no existe una única secuencia suficiente ni una única secuencia suficiente minimal de estadísticos.

   d) En teoría de decisiones, el objetivo es realizar la acción, o tomar la decisión, que minimiza la función de pérdida.

   e) En estimación puntual y bajo una función de pérdida cuadrática, el estimador de Bayes siempre corresponde a la media de las observaciones.

   f) Cuando la verosimilitud de las observaciones es Normal, la distribución a priori de su media es Normal, se considera una función de pérdida de valor absoluto, y al sobreestimar se incurre en la misma pérdida que al subestimar, el estimador de Bayes de la media corresponde a un promedio ponderado entre el promedio muestral y la media a priori.

2. Sea $x_1, x_2, \ldots$, una secuencia permutable de variables aleatorias con verosimilitud Weibull(α_0, β), con $\beta > 0$, y $\alpha_0 > 0$ conocido.

   a) Explique, con sus propias palabras, lo que significa que una secuencia de estadísticos sea suficiente paramétrica.

   b) Explique, con sus propias palabras, lo que significa que una secuencia de estadísticos sea suficiente minimal.

   c) Encuentre una secuencia de estadísticos que sea suficiente minimal para β. Justifique sus pasos y argumentos.

3. Considere una secuencia permutable $x_1, x_2, \ldots$ con verosimilitud Normal(θ, σ^2), con σ conocido, y una distribución a priori Normal(μ, τ^2) para θ, con μ y τ^2 conocidos. Considere una muestra de esta secuencia, dada por $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Denote la media y varianza a posteriori de θ por μ_p y τ_p^2, respectivamente.

   a) Muestre que la distribución predictiva a posteriori de x_{n+1}, dada la muestra $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ corresponde a una distribución Normal de media μ_p y varianza $(\sigma^2 + \tau_p^2)$.

   b) La presencia de mercurio en los peces comestibles por el ser humano es un factor de riesgo para la salud. La OMS ha establecido como límite una concentración de 5 ppm (partes por millón). Para estudiar la concentración de mercurio en róbalos de lago, se cuenta con una muestra de 10 de estos peces, escogidos de manera aleatoria, cuya concentración promedio de mercurio resultó ser de 1,23 ppm.

   Utilice el resultado en el apartado anterior para encontrar la distribución predictiva a posteriori de la concentración de mercurio en un nuevo róbalo escogido de manera aleatoria desde el mismo lago que los peces de la muestra. Asuma el modelo Normal - Normal, con una distribución a priori de media 5 ppm y coeficiente de variación 2 %. Asuma además que la desviación estándar de la concentración de mercurio en estos peces es de 0,08 ppm.

   c) Se desea obtener una predicción de la concentración de mercurio en este nuevo róbalo. Para ello, asuma una función de pérdida de valor absoluto. Proponga valores para las constantes de crecimiento de la pérdida, considerando la peligrosidad de las altas concentraciones de mercurio. Entregue la predicción pedida en base a las constantes que propuso. ¿Cree usted que este nuevo róbalo presenta riesgo para la salud de las personas debido a su concentración de mercurio? Explique.

<u>Distribución Weibull:</u> La función de densidad de una distribución Weibull(α, β), con $\alpha, \beta > 0$, corresponde a:

$$p(x|\alpha, \beta) = \alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1} \exp\{-(\beta x)^\alpha\} I_{\mathbb{R}^+}(x).$$

<u>Distribución Weibull:</u> La función de distribución de una distribución Weibull(α, β), con $\alpha, \beta > 0$, corresponde a:

$$F(x|\alpha, \beta) = 1 - \exp\{-(\beta x)^\alpha\} I_{\mathbb{R}^+}(x).$$

<u>Kernel Normal:</u> El kernel de una distribución Normal(μ, σ^2), con $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$, corresponde a:

$$p(x|\mu, \sigma^2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x)\right\}.$$

<u>Modelo Normal-Normal:</u> En el modelo Normal - Normal para n observaciones, de media desconocida θ, su media a posteriori corresponde a:

$$\mu_p = \omega\bar{x} + (1 - \omega)\mu,$$

donde:

$$\omega = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2/n},$$

y su varianza a posteriori corresponde a:

$$\tau_p^2 = \frac{\sigma^2\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}.$$

Tabla Normal Estándar

Distribución Normal Estándar

S_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998