2a) Se tiene el método de Störmer-Verlet en la forma:

$$\vec{x}_{n+1} = 2\vec{x}_n - x_{n-1} + A(x_n)h^2$$

Si se alimenta error a cada punto en el tiempo, se tiene que:

$$\vec{x}_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = 2(\vec{x}_n + \vec{\varepsilon}_n) - (\vec{x}_{n-1} + \varepsilon_{n-1}) + \hat{A}(x_n) + (\varepsilon_n \hat{A}) h^2$$

Por lo tanto la suma de errores sería igual a:

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \hat{A}\varepsilon_n h^2$$

$$\varepsilon_{n+1} = (2 + \hat{A}h^2)\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$$

$$0 = \left((2 + Ah^2)\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n+1}\right)(-1)$$

$$0 = \varepsilon_{n-1} - (2 + \hat{A}h^2)\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$$

2b) Se tiene que la ecuación diferencial para un oscilador armónico clásico es:

$$A = \ddot{x}(t) = -w^2 x_{(t)}$$

$$A'_{(x)} = -w^2$$

Lo cual diría que:

$$0 = \varepsilon_{n-1} - (2 - w^2 h^2)\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$$

Si $2R = h^2 w^2$

$$0 = \varepsilon_{n-1} - (2 - 2R)\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$$

$$0 = \varepsilon_{n-1} - 2(1 - R)\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}$$

2c) Si $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda^n$

$$0 = \varepsilon_0 \lambda^{n-1} - 2(1-R)\varepsilon_0 \lambda^n + \varepsilon_0 \lambda^{n+1}$$

$$0 = \frac{\varepsilon_0 \lambda^n}{\lambda} - 2(1-R)\varepsilon_0 \lambda^n + \varepsilon_0 \lambda^n \cdot \lambda$$

$$0 = \frac{1}{\lambda} - 2(1-R) + \lambda$$

$$2(1-R)\lambda = 1 + \lambda^2$$

$$\lambda^2 + 1 - 2(1-R)\lambda = 0$$

Por fórmula de Al-Khuarismi

$$\lambda \pm = \frac{2(1-R) \pm \sqrt{4(1-R)^2) - 4}}{2}$$

$$\lambda \pm = (1-R) \pm \sqrt{(1-R)^2 - 1} = (1-R) \pm \sqrt{R^2 - 2R}$$

2d) $|\lambda \pm| \leq 1$

$$\pm 1 = (1-R) \pm \sqrt{R^2 - 2R}$$

$$\pm 1 - (1-R) = \pm \sqrt{R^2 - 2R}$$

Elevar al cuadrado ambos términos

$$1 - 2(\pm 1)(1-R) + (1-R)^2 = R^2 - 2R$$

$$1 \pm 2 \pm 2R + 1^2 \cancel{- 2R} \cancel{+ R^2} = \cancel{R^2} - \cancel{2R}$$

$$1 \mp 2 \pm 2R + 1^2 = 0$$

$$2R = h^2 w^2$$

$$\underline{2 \mp 2 = \mp 2R}$$

$$2 \mp 2 = \mp h^2 w^2$$

$h > 0$ y $h^2 > 0$ y por lo tanto

$$h^2 = \frac{2+2}{w^2} = \frac{4}{w^2} \qquad h = \left|\sqrt{\frac{4}{w^2}}\right| = \frac{2}{w}$$

Por lo tanto para que exista h debajo del punto límite

$$h \leq \frac{2}{w}$$