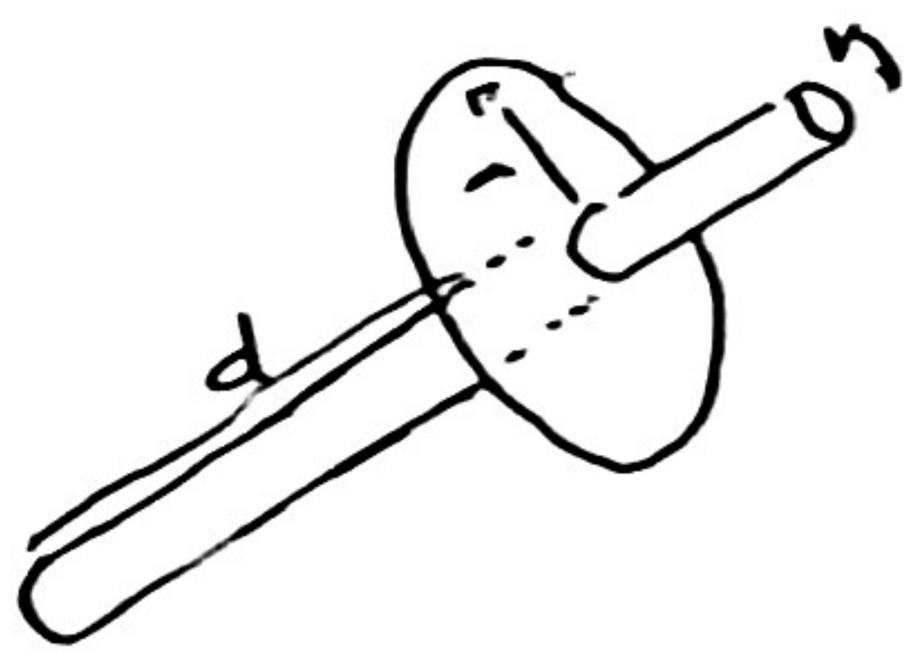
3) $r = d_{\text{axis} \to \text{par}}$

$I_\alpha = \frac{1}{4} m r^2$

$I_\beta = m d^2$

$I_0 = I_\alpha + I_\beta$



r es la distancia desde la barra hasta el final del aro, es decir, la rotación del aro está dada por la rotación del cilindro de ensamble.

la I_α está dada por el momento de inercia dad el eje de rotación e I_β está dado por el momento de inercia desde un eje perpendicular en el centro de inercia del objeto.

)

$$\rho = \frac{m}{2\pi R^2} = \frac{dm}{dA} \qquad y \quad dA = 2\pi r\, dr$$

$$I_z = \int r^2 dm = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2}{4}\frac{m}{R^2} r^4 \Big|^{r=R} - \frac{2}{4}\frac{m}{R^2} r^4 \Big|^{r=0}$$

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

)

$$L = \frac{1}{2} I_0 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2 - mgd\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \frac{2}{2} I_0 \dot\phi \sin^2\theta + \frac{2}{2} I_z (\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\cdot\cos\theta$$

$$= I_0 \dot\phi \sin^2\theta + I_z \dot\phi \cos^2\theta + I_z \dot\psi \cos\theta = p_\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{2}{2} I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \cdot 1 = I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = p_\psi$$

$$\frac{d(\partial L/\partial \dot{\theta})}{dt} = I_o \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_o \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - I_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) - \sin\theta + mgd\sin\theta$$

$$\boxed{I_o \ddot{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta}}$$