Aplicaciones de elementos finitos

Universidad nacional de Colombia

Facultad de ingeniería

Jhon Sebastian Gómez Castillo - *jsgomezca@unal.edu.co*

21 de mayo de 2024

1. Esquemas de integración temporal

1.1. Integración exponencial

La integración exponencial basada en sub espacios de Krylov se busca aproximar la matriz exponencial de un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias (1) con condiciones iniciales (2 con un espacio de menor dimensión

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{q}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{v} \tag{2}$$

Para una matriz del sistema $\mathbf{A}$ un vector de valores nodales $\mathbf{u}$, unas condiciones iniciales $\mathbf{v}$ y unos términos fuente $\mathbf{q}$ Las soluciones del sistemas estarán dadas de la siguiente forma [**?**].

$$\mathbf{u}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{v} + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}\mathbf{q}(s)ds \tag{3}$$

Para poder obtener este sistema linear de ecuaciones usamos el método de elementos finitos tal que si tenemos un problema en ecuaciones diferenciales parciales como lo es el flujo de calor tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = f \quad x \in (\Omega) y t \in (0, T] \tag{4}$$

Con condiciones de frontera :

$$u = u_D \qquad\qquad en\ \Omega \times (0, T] \tag{5}$$

$$u = u_0 \qquad\qquad en\ \Omega \times (0, T] \tag{6}$$

Formulamos la forma debil del problema para las funciones base u y la función de prueba v integrando en Ω y multiplicandos por las función de prueba

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int_\Omega (\nabla^2 u) v dx = \int_\Omega f v dx \tag{7}$$

Aplicando el teorema de la divergencia tenemos que:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_\Omega f v dx \tag{8}$$

Así pues nuestro problema variacional sera:

Encontrar un $u \in V$ tal que:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_\Omega f v dx \qquad \forall v \in \hat{V} \tag{9}$$

Definiendo los espacios V y $\hat{V}$ como :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_D \text{ en } \partial\Omega\}, \tag{10}$$

$$\hat{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \partial\Omega\} \tag{11}$$

1.2. esquemas BDF

Para contrastar el método de integración temporal con otros métodos de alto orden en la integración temporal usaremos los esquemas BDF para aproximar la derivada temporal del problema variacional.

Los esquemas de discretizacion BDF, conocidos como Backward Differentiation Formulas. Estas discretizaciones son particularmente útiles cuando se busca una aproximación de segundo orden en el tiempo. En esencia, las BDF de segundo orden emplean una combinación ponderada de los valores actuales y previos de las variables para calcular las derivadas temporales en un instante futuro. Esto se logra mediante una fórmula recursiva que utiliza pasos temporales anteriores para estimar el valor en el siguiente paso. Matemáticamente, para una variable u y un intervalo de tiempo discreto Δt, una discretización de la familia BDF se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\beta_0}{\gamma \Delta t} u(t^n) + \sum_{i=1}^{s} \frac{\beta_i}{\gamma \Delta t} u(t^{n-i}) \tag{12}$$

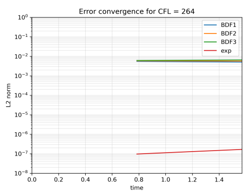
donde $u^n = u(t^n)$ representa el valor de la variable en el tiempo discreto $n\Delta t$. Cada uno de los coeficientes para cada esquema están dados en la Tabla **??**.

2. Casos de prueba

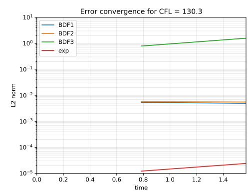
Se eligieron dos casos como Benchmark para probar el desarrollo computacional implementado. el primero es eun problema de pulso gausiano rotatorio y el segundo es un problema de conducción unidimensional con condición de neumman

Cuadro 1: Coeficientes para los métodos BDF.

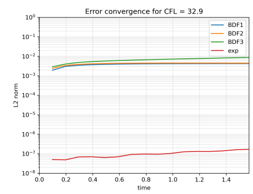
Esquema	γ	β_0	β_1	β_2	β_3
BDF1 (Euler implicito)	1	1	-1		
BDF2	2	3	-4	1	
BDF3	6	11	-18	9	-2



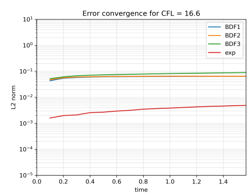
(a) CFL 264



(b) cfl 130.3



(c) 32.9



(d) cfl 16.6

Figura 1: Three simple graphs

2.1. Pulso gausiano

Sea el problema de ecuaciones diferenciales parciales definido por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0{,}0001\nabla u + \nabla \cdot (wu) = 0 \text{en } M = \Omega \times (0, T) \tag{13}$$

Donde:

$$u(x,t) \in \mathbb{R} \tag{14}$$
$$\Omega = x \in \mathbb{R}^2 : x_i \in (-0{,}5, 0{,}5), i = 1, 2 \tag{15}$$
$$w(x_1, x_2) = [-4x_2, 4x_1] \tag{16}$$
$$T = \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

podemos escribir el problema variacional para un espacio discreto de la ecuación como :

Encuentre un $u \in V$ tal que:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v dx + 0{,}0001 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (\nabla \cdot wu) v dx = 0 \qquad \forall v \in \hat{V} \tag{18}$$

2.1.1. Resultados

2.2. Flujo de calor

Se escogió un problema con condiciones de frontera no homogéneas tal que el sistema linear que representa el problema discretizado tampoco es homogéneo asi pues el problema de ecuaciones diferenciales parciales es :

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{19}$$

con las condiciones de frontera y condición inicial :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(0,t\right) = 1 \tag{20}$$

$$u\left(L,t\right) = 25 \tag{21}$$

$$u\left(x,0\right) = 25 \tag{22}$$

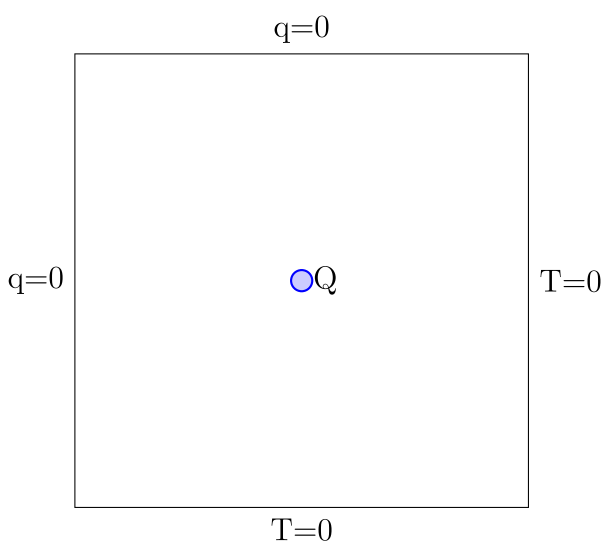
El problema tendrá una solución analítica dada por series tal que :

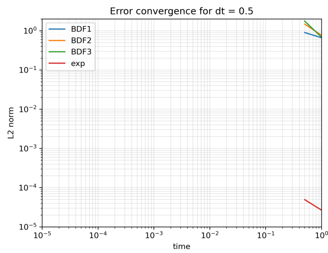
$$u(x,t) = x + 24 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\left(1-2n\right)^2 \pi^2} \cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right) e^{-\left(\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\pi\right)^2 t} \tag{23}$$

La discretización se realiaza conforme a lo explicado en la sección 1

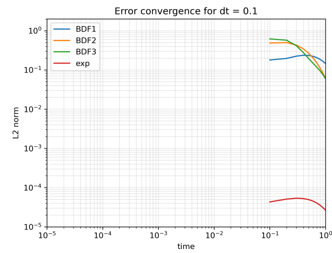
2.2.1. Resultados

Figura 4: dominio del problema

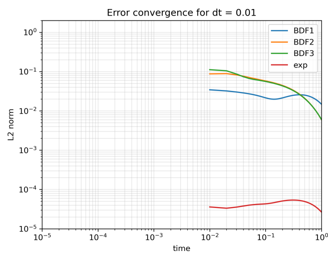




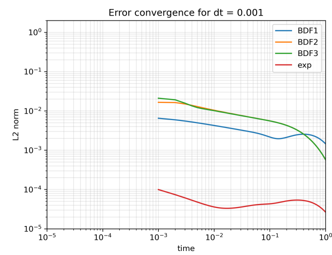
(a)



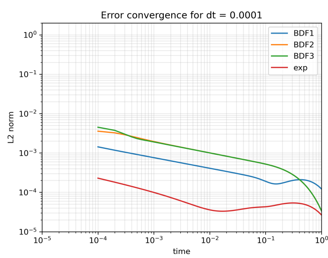
(b)



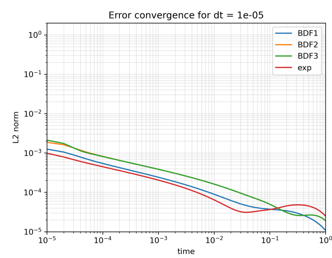
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2: Three simple graphs

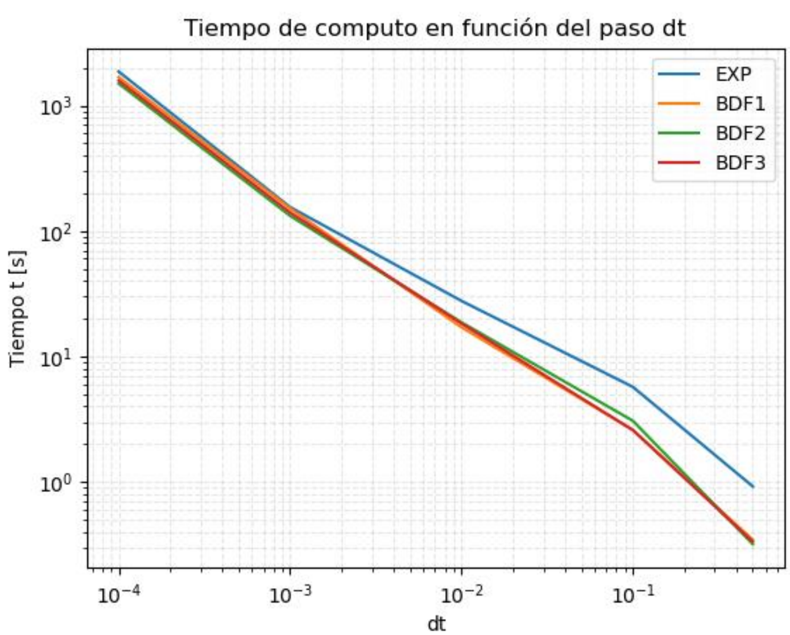


Figura 3