Apuntes de Matemática - UCE

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Juan Sebastian Obando Pallo

FOLLETO - Capítulo 3: Relaciones.

Lógica y Teoría de Conjuntos.

FOLLETO DE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CARRERA DE MATEMÁTICA No. 1 (1)

FOLLETO - Capítulo 3: Relaciones.: Lógica y Teoría de Conjuntos.

Sebastian Obando.

Responsable de la Edición: J.S.Obando

Registro de derecho autoral No. *(1)
ISBN: 000-0-00000-000

Publicado en linea,
Quito, Ecuador.

Primera edición: 2024
Primera impresión: 2024

Índice general

Capítulo 1

Clases y Conjuntos

https://github.com/Sebastian0142/Apuntes-de-logica

Capítulo 2

Funciones

https://github.com/Sebastian0142/Apuntes-de-logica

CAPÍTULO 3

RELACIONES

3.1 INTRODUCCIÓN

. Relaciones de Equivalencia y Conjunto Cociente -Archimedes Tube.

https://www.youtube.com/watch?v=ogaYK6YZwGw

3.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y DEFINICIONES.

Definición 3.1: –Relación–
Sea A una clase. Una relación en A es una subclase arbitraria de $A \times A$.

Definición 3.2
Sea G una relación en A, entonces

i) G se denomina reflexiva si

$$\forall x \in A, (x, x) \in G$$

ii) G se denomina simétrica si

$$(x, y) \in G \Longrightarrow (y, x) \in G$$

iii) G se denomina anti-simétrica si

$$(x, y) \in G \text{ y } (y, x) \in G \Longrightarrow x = y$$

iv) G se denomina transitiva si

$$(x, y) \in G \text{ y } (y, z) \in G \Longrightarrow (x, z) \in G$$

Definición 3.3: –Diagonal principal–

Sea A una clase. La diagonal, denotada por I_A, es la clase definida por $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$.

Teorema 3.1

Sea G una relación en A.

i) G es simétrica si y solo si $G = G^{-1}$

ii) G es anti-simétrica si y solo si $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$

iii) G es transitiva si y solo si $G \circ G \subseteq G$

Demostracion

i)Se supone que G es simétrica, se va a probar que $G = G^{-1}$

$$\begin{aligned}(x,y) \in G &\iff (y,x) \in G \\ &\iff (x,y) \in G^{-1}\end{aligned}$$

Por otro lado, se supone que $G = G^{-1}$ se va a probar que G es simétrica.

$$\begin{aligned}(x,y) \in G &\iff (x,y) \in G^{-1} \\ &\iff (y,x) \in G\end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha demostrado i).

ii)Se supone que G es antisimétrica, se va a probar que $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$. Se toma un par ordenado arbitrario

$$\begin{aligned}(x,y) \in G \cap G^{-1} &\Rightarrow (x,y) \in G \text{ y } (x,y) \in G^{-1} \\ &\Rightarrow (x,y) \in G \text{ y } (y,x) \in G \\ &\Rightarrow x = y, \text{ por antisimétrica} \\ &\Rightarrow (x,y) = (x,x) \in I_A.\end{aligned}$$

Como (x,y) fué arbitrario entonces, el resultado se cumple para todo par ordenado.

Por otro lado, se supone que $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$ se va a probar que G es antisimétrica.

$$\begin{aligned}(x,y)\in G \text{ y } (y,x)\in G &\Rightarrow (x,y)\in G \text{ y } (x,y)\in G^{-1}\\ &\Rightarrow (x,y)\in G\cap G^{-1}\\ &\Rightarrow (x,y)\in I_A\\ &\Rightarrow x=y\end{aligned}$$

Por lo tanto, G es antisimétrica.
iii)Se supone que G es transitiva, se va a probar que $G\circ G\subseteq G$.

$$\begin{aligned}(x,y)\in G\circ G &\Rightarrow \exists z \ni (x,z)\in G \text{ y } (z,y)\in G\\ &\Rightarrow (x,y)\in G, \text{ por transitividad}\end{aligned}$$

Ahora se supone que $G\circ G\subseteq G$ se va a probar que G es transitiva.

$$\begin{aligned}(x,z)\in G \text{ y } (z,y)\in G &\Rightarrow (x,y)\in G\circ G\\ &\Rightarrow (x,y)\in G\end{aligned}$$

Se concluye que, G es transitiva.

Definición 3.4: –Relación de equivalencia–

Si una relación es reflexiva, simétrica y transitiva, esta de denomina relación de equivalencia.

Definición 3.5

Sea G una relación en A, entonces

i) G se denomina irreflexiva si

$$\forall x\in A, (x,x)\notin G$$

ii) G se denomina asimétrica si

$$(x,y)\in G \Longrightarrow (y,x)\notin G$$

iii) G se denomina intransitiva si

$$(x,y)\in G \text{ y } (y,z)\in G \Longrightarrow (x,z)\notin G$$

3.3 Ejercicios Sección 3.2

Ejercicio 3.1. Cada una de las siguientes describe una relación en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros. Indica, para cada una, si tiene alguna de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, irreflexiva, asimétrica, intransitiva. Determina si es una relación de equivalencia, una relación de orden, o ninguna de las anteriores. Justifica tu respuesta en cada caso.

(a) $G = \{(x, y) : x + y < 3\}$

Propiedades:

- **Reflexiva:** No es reflexiva porque, por ejemplo, para $x = 2$, $(2, 2)$ no pertenece a G ya que $2 + 2 = 4$ y no es menor que 3.
- **Simétrica:** No es simétrica porque si $(x, y) \in G$, no necesariamente (y, x) pertenece a G. Por ejemplo, $(2, 0) \in G$ ya que $2 + 0 = 2$, pero $(0, 2) \notin G$ ya que $0 + 2 = 2$.
- **Antisimétrica:** No aplica porque la relación no es reflexiva ni simétrica.
- **Transitiva:** No es transitiva. Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in G$, no implica que $(x, z) \in G$. Por ejemplo, si $(1, 1) \in G$ y $(1, 0) \in G$, $(1, 0)$ no necesariamente está en G.
- **Irreflexiva:** Puede ser irreflexiva para algunos valores de x, pero no para todos, ya que (x, y) podría cumplir la relación en ciertos casos.
- **Asimétrica:** Es asimétrica, ya que si $(x, y) \in G$, entonces (y, x) no está en G.
- **Intransitiva:** Es intransitiva.

Conclusión: Ninguna de las propiedades listadas.

(b) $G = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$

Propiedades:

- **Reflexiva:** Es reflexiva porque todo número x divide a sí mismo.
- **Simétrica:** No es simétrica. Por ejemplo, si $x = 2$ y $y = 4$, entonces $(2, 4) \in G$, pero $(4, 2) \notin G$.
- **Antisimétrica:** Es antisimétrica. Si x divide a y y y divide a x, entonces $x = y$.

- **Transitiva:** Es transitiva porque si x divide a y y y divide a z, entonces x divide a z.
- **Irreflexiva:** No es irreflexiva.
- **Asimétrica:** No es asimétrica porque $(x, x) \in G$ no implica $(x, x) \notin G$.
- **Intransitiva:** No es intransitiva.

Conclusión: Es una relación de orden parcial.

(c) $G = \{(x, y) : x \text{ y } y \text{ son relativamente primos}\}$

Propiedades:

- **Reflexiva:** No es reflexiva porque, por ejemplo, $(2, 2)$ no pertenece a G ya que 2 y 2 no son relativamente primos.
- **Simétrica:** Es simétrica. Si x y y son relativamente primos, entonces y y x también lo son.
- **Antisimétrica:** No es antisimétrica. Puede haber casos en que $(x, y) \in G$ y $(y, x) \in G$ pero $x \neq y$.
- **Transitiva:** No es transitiva.
- **Irreflexiva:** Es irreflexiva.
- **Asimétrica:** Es asimétrica.
- **Intransitiva:** Es intransitiva.

Conclusión: Ninguna de las propiedades listadas.

(d) $G = \{(x, y) : x + y \text{ es un número par}\}$

Propiedades:

- **Reflexiva:** Es reflexiva porque para cualquier x, (x, x) pertenece a G ya que $x + x$ es siempre par.
- **Simétrica:** Es simétrica. Si $(x, y) \in G$, entonces (y, x) también pertenece a G ya que $x + y = y + x$.
- **Antisimétrica:** No es antisimétrica.
- **Transitiva:** Es transitiva. Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in G$, entonces (x, z) también pertenece a G.
- **Irreflexiva:** No es irreflexiva.
- **Asimétrica:** No es asimétrica.

– **Intransitiva:** No es intransitiva.

Conclusión: Ninguna de las propiedades listadas.

(e) $G = \{(x,y) : x = y \text{ o } x = -y\}$

Propiedades:

– **Reflexiva:** Es reflexiva. Todo número es igual a sí mismo.

– **Simétrica:** Es simétrica. Si $(x,y) \in G$, entonces $(y,x) \in G$.

– **Antisimétrica:** No es antisimétrica.

– **Transitiva:** Es transitiva.

– **Irreflexiva:** No es irreflexiva.

– **Asimétrica:** No es asimétrica.

– **Intransitiva:** No es intransitiva.

Conclusión: Es una relación de equivalencia.

(f) $G = \{(x,y) : x + y \text{ es par y } x \text{ es múltiplo de } y\}$

Propiedades:

– **Reflexiva:** No es reflexiva.

– **Simétrica:** No es simétrica.

– **Antisimétrica:** No es antisimétrica.

– **Transitiva:** Es transitiva.

– **Irreflexiva:** No es irreflexiva.

– **Asimétrica:** No es asimétrica.

– **Intransitiva:** No es intransitiva.

Conclusión: Ninguna de las propiedades listadas.

(g) $G = \{(x,y) : y = x + 1\}$

Propiedades:

– **Reflexiva:** No es reflexiva porque para ningún x se cumple $x + 1 = x$.

– **Simétrica:** No es simétrica.

– **Antisimétrica:** Es antisimétrica.

– **Transitiva:** Es transitiva.

- **Irreflexiva:** Es irreflexiva.
- **Asimétrica:** Es asimétrica.
- **Intransitiva:** No es intransitiva.

Conclusión: Es una relación de orden estricto.

Ejercicio 3.2. Sea G una relación en A, demostrar cada uno de los siguientes casos:

1. G es irreflexiva si y solo si $G \cap I = \emptyset$

   - Primero, supongamos que G es irreflexiva, así, por la Definición 48, literal i), para todo $x \in A$, $(x, x) \notin G$.

   $$(1) \tag{3.1}$$

   - Además, sabemos que $I = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

   $$(2) \tag{3.2}$$

   - De (1) y (2), $G \cap I = \emptyset$.
   - Por otro lado, supongamos que $G \cap I = \emptyset$, probamos que G es irreflexiva. Sea $x \in A$, tenemos que $(x, x) \notin G$ como $(x, x) \in I$ y $G \cap I = \emptyset$, así, por la Definición 48, literal i), G es irreflexiva.

2. G es asimétrica si y solo si $G \cap G^{-1} = \emptyset$.

   - Primero, supongamos que G es asimétrica, por la Definición 48, literal ii), si $(x, y) \in G$, entonces $(y, x) \notin G$.

   $$(1) \tag{3.3}$$

   - Además, sabemos que $G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$.

   $$(2) \tag{3.4}$$

   - De (1) y (2), $G \cap G^{-1} = \emptyset$.
   - Por otro lado, supongamos que $G \cap G^{-1} = \emptyset$, probamos que G es asimétrica. Sea $(x, y) \in G$, por la definición de G^{-1}, $(y, x) \in G^{-1}$. Como $G \cap G^{-1} = \emptyset$, $(y, x) \notin G$, por lo tanto, G es asimétrica.

3. G es antitransitiva si y solo si $(G \circ G) \cap G = \emptyset$.

- Primero, supongamos que G es antitransitiva, por la Definición 48, literal iii), si $(x,y) \in G$ y $(y,z) \in G$ entonces $(x,z) \notin G$.

$$(1) \tag{3.5}$$

- Además, $G \circ G = \{(x,z) \mid \exists y\ ((x,y) \in G\ y\ (y,z) \in G\}$.

$$(2) \tag{3.6}$$

- De (1) y (2), $(G \circ G) \cap G = \emptyset$.
- Por otro lado, supongamos que $(G \circ G) \cap G = \emptyset$, probamos que G es antitransitiva. Sean $(x,y) \in G$ y $(y,z) \in G$, por la Definición 23, $(x,z) \in G \circ G$. Como $(G \circ G) \cap G = \emptyset$, $(x,z) \notin G$. Así, G es antitransitiva.

Ejercicio 3.3. Demuestre que si G es una relación de equivalencia en A, entonces $G \circ G = G$

Demostración. Sea G una relación de equivalencia en A. Sea $(x,z) \in G \circ G$,

$$(x,z) \in G \circ G \Leftrightarrow \exists y\,(x,y) \in G \text{ y } (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G$$

Por lo tanto, $G \circ G = G$. □

Ejercicio 3.4. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de relaciones de equivalencia en A. Demuestre que $\bigcap_{i \in I} G_i$ es una relación de equivalencia en A.

Demostración. Por la Definición 47, probaremos que $\bigcap_{i \in I} G_i$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad

Sea $x \in A$. Como para todo $i \in I$, G_i es una relación de equivalencia en A, entonces $(x,x) \in G_i$. Así, $(x,x) \in \bigcap_{i \in I} G_i$.

Simetría

Sea $(x,y) \in \bigcap_{i \in I} G_i$. Por la Definición 28, para todo $i \in I$, $(x,y) \in G_i$. Como G_i es una relación de equivalencia, $(y,x) \in G_i$. Así, $(y,x) \in \bigcap_{i \in I} G_i$.

Transitividad

Sean $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} G_i$ y $(y,z) \in \bigcap_{i\in I} G_i$. Por la Definición 28, para todo $i \in I$, $(x,y) \in G_i$ y $(y,z) \in G_i$. Como G_i es una relación de equivalencia, $(x,z) \in G_i$. Así, $(x,z) \in \bigcap_{i\in I} G_i$.

Por lo tanto, $\bigcap_{i\in I} G_i$ es una relación de equivalencia. □

Ejercicio 3.5. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de relaciones de orden en A. Pruebe que $\bigcap_{i\in I} G_i$ es una relación de orden en A.

Demostración. Por la Definición 49, probamos que $\bigcap_{i\in I} G_i$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- **Reflexividad:** Sea $x \in A$, para cada $i \in I$, $(x,x) \in G_i$. Así, $(x,x) \in \bigcap_{i\in I} G_i$.
- **Antisimetría:** Sean $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} G_i$ y $(y,x) \in \bigcap_{i\in I} G_i$. Por la Definición 28, para todo $i \in I$, $(x,y) \in G_i$ y $(y,x) \in G_i$. Como G_i es una relación de orden, entonces $x = y$.
- **Transitividad:** Sean $(x,y) \in \bigcap_{i\in I} G_i$ y $(y,z) \in \bigcap_{i\in I} G_i$. Por la Definición 28, para todo $i \in I$, $(x,y) \in G_i$ y $(y,z) \in G_i$. Como G_i es una relación de orden, $(x,z) \in G_i$. Así, $(x,z) \in \bigcap_{i\in I} G_i$.

□

Ejercicio 3.6. Sea H una relación reflexiva en A. Pruebe que para cualquier relación G en A, $G \subseteq H \circ G$ y $G \subseteq G \circ H$.

Demostración. Sea G una relación en A, probamos que $G \subseteq H \circ G$ y $G \subseteq G \circ H$.

1. Sea $(x,y) \in G$
$$\Rightarrow x \in A \text{ y } y \in A$$
$$\Rightarrow (x,y) \in G,\ y\ (y,y) \in H$$
$$\Rightarrow (x,y) \in H \circ G$$
Por lo tanto, $G \subseteq H \circ G$.
2. Sea $(x,y) \in G$
$$\Rightarrow x \in A \text{ y } y \in A$$
$$\Rightarrow (x,x) \in H\ y\ (x,y) \in G$$

$$\Rightarrow (x, y) \in G \circ H$$

Por lo tanto, $G \subseteq G \circ H$.

$\square$

Ejercicio 3.7. Sean G y H relaciones en A, suponga que G es reflexiva y H es reflexiva y transitiva. Pruebe que $G \subseteq H$ si y sólo si $G \circ H = H$.

Demostración. Sea G una relación reflexiva y H reflexiva y transitiva. Primero, supongamos que $G \subseteq H$ y probaremos que $G \circ H = H$.

Sea $(x, z) \in G \circ H \Rightarrow \exists y((x, y) \in H$ y $(y, z) \in G \Rightarrow (x, y) \in H$ y $(y, z) \in H \Rightarrow (x, z) \in H$.

- Definición 23, $G \subseteq H$
- H transitiva
- $(x, y) \in H$ y $(y, z) \in H \Rightarrow (x, z) \in H$

Sea $(x, z) \in H \Rightarrow x = z \in H \Rightarrow (x, z) \in G$ y $(x, z) \in H$. $(x, x) \in H$ y $(x, z) \in H \Rightarrow (x, z) \in G \circ H$.

- H transitiva
- G reflexiva
- Definición 23

Por lo tanto, $G \circ H = H$.

Por otro lado, supongamos que $G \circ H = H$ y probaremos que $G \subseteq H$.

Por el ejercicio 6, $G \subseteq G \circ H$, pues H es reflexiva y G puede ser cualquier relación en A.

Como $G \circ H = H$, tenemos $G \subseteq H$. $\square$

Ejercicio 3.8. Demuestre que la inversa de una relación de orden en A es una relación de orden en A.

Demostración. Por la Definición 19, probamos que G^{-1} es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. Reflexividad: Sea $x \in A$. Como G es reflexiva, $(x, x) \in G$. Así, $(x, x) \in G^{-1}$.

2. Antisimetría: Sea $(x,y) \in G^{-1}$ y $(y,x) \in G^{-1}$, por la Definición 22, $(y,x) \in G$ y $(x,y) \in G$. Luego, G es antisimétrica, por lo tanto, $x = y$.

3. Transitividad: Sea $(x,y) \in G^{-1}$ y $(y,z) \in G^{-1}$, por la Definición 22, $(y,x) \in G$ y $(z,y) \in G$. Como G es transitiva, $(x,z) \in G$. Luego, $(x,z) \in G^{-1}$.

Por lo tanto, G^{-1} es una relación de orden en A. □

Ejercicio 3.9. Sea G una relación en A. Pruebe que G es una relación de orden, si y solo si, $G \cap G^{-1} = I_A$ y $G \circ G = G$.

Demostración. Primero, supongamos que G es una relación de orden en A, y probaremos que $G \cap G^{-1} = I_A$ y $G \circ G = G$.

1. Sea $(x,y) \in G \cap G^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in G$ y $(y,x) \in G$

$$\Leftrightarrow x = y \quad \text{(Definición 44)}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in I_A \quad \text{(Definición 20)}$$

Así, $G \cap G^{-1} = I_A$

2. Sea $(x,y) \in G \circ G \Leftrightarrow \exists z, (x,z) \in G$ y $(z,y) \in G$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in G \quad \text{(Definición 23)}$$

Así, $G \circ G = G$ (G transitiva)

Por otro lado, supongamos que $G \cap G^{-1} = I_A$ y $G \circ G = G$ y probaremos que G es una relación de equivalencia

1. Reflexividad: Sea $x \in A$, por la Definición 46, $(x,x) \in I_A$ por hipótesis, $(x,x) \in G \cap G^{-1}$. Así,

$$(x,x) \in G.$$

2. Antisimetría: En particular, $G \cap G^{-1} = I_A$, así, por el literal iii del Teorema 39, G es antisimétrica.

3. Transitividad: En particular, $G \circ G = G$, así, por el literal iii del Teorema 39, G es transitiva. □

Ejercicio 3.10. Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Pruebe que $G \circ H$ es una relación de equivalencia en A, si y solo si, $G \circ H = H \circ G$.

Demostración. Primero, supongamos que $G \circ H$ es una relación de equivalencia y probaremos que $G \circ H = H \circ G$.

Sea $(x,y,z) \in G \circ H \Leftrightarrow (x,y) \in G$ y $(y,z) \in H$.

$$\Leftrightarrow \exists y, (z,y) \in H \wedge (y,x) \in G$$

$$\Leftrightarrow (y,z) \in H \text{y } (x,y) \in G$$

$$\Leftrightarrow (y,x) \in G\text{y } (y,z) \in H$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in G\text{y } (z,y) \in H$$

$$\Leftrightarrow (z,x,y) \in H \circ G \quad \text{(Definición 23)}$$

Así, $(x,y,z) \in H \circ G$.

Por otro lado, supongamos que $G \circ H = H \circ G$, y probaremos que $G \circ H$ es una relación de equivalencia.

1. Reflexividad: Sea $x \in A$. Como G y H son reflexivas, $(x,x) \in G$ y $(x,x) \in H$, luego por la Definición 23, $(x,x,x) \in G \circ H$.

Simetría: Sean $(x,z) \in G \circ H$.

$$(x,z) \in G \circ H \Rightarrow \exists y : (x,y) \in H \text{ y } (y,z) \in G$$

$$\Rightarrow (y,x) \in H \text{ y } (z,y) \in G$$

$$\Rightarrow (z,y) \in G \text{ y } (y,x) \in H$$

$$\Rightarrow (z,x) \in H \circ G$$

$$\Rightarrow (z,x) \in G \circ H$$

Transitividad: Sean $(x,y) \in G \circ H$ y $(y,z) \in G \circ H$.

$$(x,y) \in G \circ H \text{ y } (y,z) \in G \circ H \Rightarrow [\exists a : (x,a) \in H \text{ y } (a,y) \in G]$$

$$\text{y } [\exists a : (y,a) \in H \text{ y } (a,z) \in G]$$

$$\Rightarrow [\exists a : (x,a) \in H \text{ y } (y,a) \in G]$$

$$\text{y } [\exists a : (a,y) \in H \text{ y } (a,z) \in G]$$

$$\Rightarrow [(x,a) \in H \text{ y } (a,y) \in H] \text{ y}$$

$$[(y,a) \in G \text{ y } (a,z) \in G]$$

$$\Rightarrow (x,y) \in H \text{ y } (y,z) \in G$$

$$\Rightarrow (x,z) \in G \circ H$$

□

Ejercicio 11

Sea G, H relaciones de equivalencia en A. Prueba que $G \circ H$ es una relación de equivalencia en A si y sólo si $G \circ H = H \circ G$ y $H \circ G = G \circ H$.

Primero, supongamos que $G \circ H$ es una relación de equivalencia, y probaremos que $G \circ H = H \circ G$ y $H \circ G = G \circ H$.

Sea $(x, z) \in G \circ H$, entonces $\exists y$ tal que $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$.

$$(x, y) \in G \quad \text{y} \quad (y, z) \in H \quad \Rightarrow \quad (z, y) \in H \quad \text{y} \quad (y, x) \in G \quad \text{(Definición 23 i), Teorema 7}$$

$$(x, y) \in H \quad \text{y} \quad (y, z) \in G \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in G \circ H$$

Sea $(x, z) \in H \circ G$, entonces $\exists y$ tal que $(x, y) \in H$ y $(y, z) \in G$.

$$(x, y) \in H \quad \text{y} \quad (y, z) \in G \quad \Rightarrow \quad (z, y) \in G \quad \text{y} \quad (y, x) \in H$$

$$(x, y) \in G \quad \text{y} \quad (y, z) \in H \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in G \circ H$$

Por otro lado, supongamos que $G \circ H = H \circ G = G \circ H$ y probaremos que $G \circ H$ es una relación de equivalencia.

- **Reflexividad:** Sea $x \in A$. Como G y H son reflexivas, entonces $(x, x) \in G$ y $(x, x) \in H$. Así, $(x, x) \in G \circ H$.
- **Simetría:** Sea $(x, y) \in G \circ H$, por la Definición 10, $(x, y) \in G$ o $(y, x) \in H$, como G y H son simétricas, $(y, x) \in G$ o $(y, x) \in H$. Así, $(y, x) \in G \circ H$.
- **Transitividad:** Sean $(x, y) \in G \circ H$ y $(y, z) \in G \circ H$, por la Definición 10, $(x, y) \in G$ o $(y, z) \in H$, $(x, y) \in G$ o $(y, z) \in H$. De aquí obtenemos las siguientes posibilidades:
  1. Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in G$, tenemos que $(x, z) \in G$ y, por tanto, $(x, z) \in G \circ H$.
  2. Si $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in H$, por la Definición 23, $(x, z) \in H \circ G$ o así, $(x, z) \in G \circ H$.
  3. Si $(x, y) \in H$ y $(y, z) \in G$, por la Definición 23, $(x, z) \in G \circ H$ o así, $(x, z) \in G \circ H$.

4. Si $(x,y) \in H$ y $(y,z) \in H$, tenemos que $(x,z) \in H$ y, por tanto, $(x,z) \in G \circ H$.

Ejercicio 3.11. Sea G una relación de equivalencia en A. Pruebe que si H y J son relaciones reflexivas en A, entonces $G \subseteq H$ y $G \subseteq J \to G \subseteq H \cap J$.

Demostración. Sean H y J relaciones reflexivas en A y G una relación de equivalencia en A, tal que $G \subseteq H$ y $G \subseteq J$. Probemos que $G \subseteq H \cap J$.

Sea $(x,y) \in G$

$$\Rightarrow (x,x) \in G \text{ y } (x,y) \in G$$

$$\Rightarrow (x,x) \in I \text{ y } (x,y) \in H$$

$$\Rightarrow (x,y) \in H \cap J$$

Por lo tanto, $G \subseteq H \cap J$. □

3.4 Particiones y Relaciones de Equivalencia

- P1. Si $\exists x \in A_i \cap A_j$ entonces $A_i = A_j$ y
- P2. Si $x \in A$, entonces $x \in A_i$ para algún $i \in I$.

Sea G una relación de equivalencia en A; a veces escribiremos $x \sim y$ en lugar de $(x,y) \in G$, y diremos que "x es equivalente a y módulo G"; cuando no haya peligro de ambigüedad, simplemente escribiremos $x \sim y$ y diremos que "x es equivalente a y." Nótese que dado que G es una relación de equivalencia en A, tenemos:

i) $x \sim x, \forall x \in A$.

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

iii) $x \sim y$ y $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Definición 3.6
Sea A un conjunto y sea G una relación de equivalencia en A. Si $x \in A$, entonces la clase de equivalencia de x módulo G es el conjunto G_x definido de la siguiente manera:

$$G_x = \{y \in A : (y,x) \in G\} = \{y \in A : y \sim x\}.$$

En otras palabras, G_x es el conjunto de todos los elementos de A que son equivalentes a x. En la literatura matemática, G_x también se denota con los símbolos A_x, $[x]$, x/G.

Lema 3.2. Sea G una relación de equivalencia en A. Entonces

$$x \sim y \text{ si y solo si } G_x = G_y.$$

Demostración:
i) Supongamos $x \sim y$; tenemos

$$z \in G_x \Leftrightarrow z \sim x \Rightarrow z \sim y$$

porque asumimos $x \sim y$

$$\Rightarrow z \in G_y.$$

Hemos mostrado que $G_x \subseteq G_y$; análogamente, $G_y \subseteq G_x$; por lo tanto, $G_x = G_y$.

ii) Supongamos que $G_x = G_y$; por la propiedad reflexiva, $x \sim x$, así que $x \in G_x$; pero $G_x = G_y$, por lo tanto $x \in G_y$, es decir, $x \sim y$. ■

Teorema 3.3

Sea A un conjunto, sea G una relación de equivalencia en A, y sea $\{G_x\}_{x\in A}$ la familia de todas las clases de equivalencia módulo G. Entonces

$$\{G_x\}_{x\in A}$$

es una partición de A.

Demostración. Por definición, cada G_x es un subconjunto de A; no es vacío porque $x \sim x$, de modo que $x \in G_x$. Queda por demostrar que $P1°$ y $P2°$ son verdaderos.

$P1°$ $z \in G_x \cap G_y \Rightarrow z \in G_x$ y $z \in G_y \Rightarrow z \sim x$ y $z \sim y \Rightarrow x \sim z$ y $z \sim y \Rightarrow x \sim y \Rightarrow G_x = G_y$ (la última implicación sigue de 3.9).

$P2°$ Si $x \in A$, entonces por la propiedad reflexiva $x \sim x$; por lo tanto $x \in G_x$.

OBSERVACIÓN .Si G es una relación de equivalencia en A, y $\{G_x\}_{x\in A}$ es la familia de todas las clases de equivalencia módulo G, entonces $\{G_x\}_{x\in A}$ se denomina la partición inducida por G, o la partición correspondiente a G. □

Teorema 3.4
Sea A un conjunto, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de A, y sea G el conjunto de todos los pares (x,y) de elementos de A tales que x e y están en el mismo miembro de la partición; es decir,

$$G = \{(x,y) : x \in A_i \text{ y } y \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Entonces G es una relación de equivalencia en A, y $\{A_i\}_{i\in I}$ es la partición inducida por G. G se llama la *relación de equivalencia correspondiente* a $\{A_i\}_{i\in I}$.

Demostración. G es reflexiva: $x \in A \Rightarrow x \in A_i$ para algún $i \Rightarrow x \in A_i \Rightarrow (x,x) \in G$.

G es simétrica: $(x,y) \in G \Rightarrow x \in A_i$ y $y \in A_i \Rightarrow y \in A_i$ y $x \in A_i \Rightarrow (y,x) \in G$.

G es transitiva: $(x,y) \in G$ y $(y,z) \in G \Rightarrow x \in A_i$ y $y \in A_i$ y $y \in A_j$ y $z \in A_j$ y como $y \in A_i \cap A_j \Rightarrow y \in A_i$ y $z \in A_i \Rightarrow (x,z) \in G$.

Finalmente, cada A_i es una clase de equivalencia módulo G; porque supongamos $x \in A_i$; entonces $y \in A_i \Leftrightarrow (x,y) \in G \Leftrightarrow y \in G_x$; así $A_i = G_x$.

Estos dos últimos teoremas hacen claro que cada relación de equivalencia en A corresponde únicamente a una partición de A, y viceversa. Una vez más: si se nos da una partición de A, la *relación de equivalencia correspondiente* es la relación que une los elementos x y y como .^{e}quivalentes"si están en el mismo miembro de la partición. Mirando hacia el otro lado de la moneda, si se nos da una relación de equivalencia en A, la *partición correspondiente* es la que une elementos x y y en el mismo miembro de la partición si son equivalentes. El lector debe notar que G es la relación de equivalencia correspondiente a $\{A_i\}_{i\in I}$ si y solo si $\{A_i\}_{i\in I}$ es la partición correspondiente a G. □

Ejemplo 3.1. Sea $A = \{a,b,c,d,e\}$; sea $A_1 = \{a,b\}, A_2 = \{c,d\}$ y $A_3 = \{e\}$.

Sea $G = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$. Es fácil ver que $\{A_1,A_2,A_3\}$ es una partición de A (ver Fig. 2), y que G es una relación de equivalencia en A; G es la relación de equivalencia correspondiente a $\{A_1,A_2,A_3\}$, y $\{A_1,A_2,A_3\}$ es la partición correspondiente a G. Se debe notar que $A_1 = G_a = G_b$, $A_2 = G_c = G_d$, y $A_3 = G_e$.

3.5 Ejercicios Sección 3.3

Ejercicio 3.12. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Para cada entero n, sea $B_n = \{m \in \mathbb{Z} : \exists q \in \mathbb{Z}, m = n + 5q\}$. Pruebe que $\{B_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

Demostración. Por la Definición 50, probaremos lo siguiente:

P1. Si $x \in B_r \cap B_s$, entonces $B_r = B_s$.

Sea $x \in B_r$, por hipótesis, $x \in B_r \cap B_s$, así, $x \in B_s$. Por otro lado, sea $x \in B_s$, por hipótesis, $x \in B_r \cap B_s$, así, $x \in B_r$.

Por lo tanto, $B_r = B_s$.

P2. Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x \in B_n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Tomamos $n \in \mathbb{Z}$, tal que existe $q \in \mathbb{Z}$, $n = x - 5q$. Así, $x \in B_n$, pues $x = n + 5q$, para algún $q \in \mathbb{Z}$. □

Demostración. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. En cada caso, pruebe que $\{B_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Describa geométricamente los miembros de la partición. Encuentre la relación de equivalencia correspondiente a cada partición. □

a) $B_r = \{(x, y) : y = x + r\}$ para cada $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Probamos que $\{B_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

P1. Sea $(x, y) \in B_m \cap B_n$, por demostrar que $B_m = B_n$.

Por la Definición 14, $(x, y) \in B_m$ y $(x, y) \in B_n$. Así

$$(x, y) \in B_m \implies y = x + m \implies y - x = m$$

$$(x, y) \in B_n \implies y = x + n \implies y - x = n \quad (1)$$

De (1) y (2), $m = n$. Por lo tanto, $B_m = B_n$.

P2. Sea $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, probaremos que $(x, y) \in B_r$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

Tomamos $r = y - x$. Así $(x, y) \in B_r$, pues $y = x + r$.

Por lo tanto, $\{B_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ es una partición en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Los miembros de la partición se tratan de líneas en el plano, con pendiente igual a 1 y ordenada al origen igual a r.

La relación de equivalencia correspondiente a $\{B_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ es:

$$G = \{((x, y), (v, w)) : (x, y) \in B_r \text{ y } (v, w) \in B_r, \text{ para cada } r \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{((x,y),(v,w)) : y = x + r \text{ y } w = v + r, \text{ para cada } r \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{((x,y),(v,w)) : r = y - x \text{ y } r = w - v, \text{ para cada } r \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{((x,y),(v,w)) : y - x = w - v\}$$

$\square$

b) $B_r = \{(x,y) : x^2 + y^2 = r\}$ para cada $r \in \mathbb{R}$

Demostración. Probamos que $\{B_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ es una partición en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

P1. Sea $(x,y) \in B_m \cap B_n$, probaremos que $B_m = B_n$.

Por la Definición 1, $(x,y) \in B_m$ y $(x,y) \in B_n$. Así,

$$(x,y) \in B_m \Rightarrow x^2 + y^2 = m \tag{1}$$

$$(x,y) \in B_n \Rightarrow x^2 + y^2 = n \tag{2}$$

De (1) y (2), $m = n$. Así, $B_m = B_n$.

P2. Sea $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, probaremos que $(x,y) \in B_r$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

Tomamos $r = x^2 + y^2$. Así, $(x,y) \in B_r$, por hipótesis.

Por lo tanto, $\{B_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ es una partición de $\mathbb{R}^2$.

Los miembros de la partición se tratan de círculos en el plano real, con radio igual a $\sqrt{r}$.

La relación de equivalencia correspondiente a $\{B_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ es:

$$G = \{((x,y),(v,w)) : (x,y) \in B_r \text{ y } (v,w) \in B_r, \text{ para cada } r \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{((x,y),(v,w)) : x^2 + y^2 = r \text{ y } v^2 + w^2 = r, \text{ para cada } r \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{((x,y),(v,w)) : x^2 + y^2 = v^2 + w^2\}$$

$\square$

Ejercicio 3.13. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Prueba que cada uno de los siguientes es una relación de equivalencia en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $G = \{[(a,b),(c,d)] : a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$.

b) $H = \{[(a,b),(c,d)] : b - a = d - c\}$.

c) $J = \{[(a,b),(c,d)] : a + b = c + d\}$.

Encuentra la partición correspondiente a cada una de estas relaciones de equivalencia, y describe geométricamente a los miembros de esta partición.

[Pista para (b): Si $b - a = d - c = k$, nota que $[(a,b),(c,d)] \in H$ si y solo si (a,b) y (c,d) ambos satisfacen la ecuación $y = x + k$].

[Pista para (c): Si $a + b = c + d = k$, nota que $[(a,b),(c,d)] \in J$ si y solo si (a,b) y (c,d) ambos satisfacen la ecuación $y = -x + k$].

a) $G = \{[(a,b),(c,d)] : a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$

Demostración. Para probar que G es una relación de equivalencia, debemos demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Para cualquier $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (a,b) está relacionado consigo mismo porque $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$. Así, $[(a,b),(a,b)] \in G$.

Simétrica: Si $[(a,b),(c,d)] \in G$, entonces $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Esto implica que $c^2 + d^2 = a^2 + b^2$, por lo que $[(c,d),(a,b)] \in G$.

Transitiva: Si $[(a,b),(c,d)] \in G$ y $[(c,d),(e,f)] \in G$, entonces $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$. Por la propiedad transitiva de la igualdad, $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$, por lo que $[(a,b),(e,f)] \in G$.

$\square$

b) $H = \{[(a,b),(c,d)] : b - a = d - c\}$

Demostración. Para probar que H es una relación de equivalencia:

Reflexiva: Para cualquier $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (a,b) está relacionado consigo mismo porque $b - a = b - a$. Así, $[(a,b),(a,b)] \in H$.

Simétrica: Si $[(a,b),(c,d)] \in H$, entonces $b - a = d - c$. Esto implica que $d - c = b - a$, por lo que $[(c,d),(a,b)] \in H$.

Transitiva: Si $[(a,b),(c,d)] \in H$ y $[(c,d),(e,f)] \in H$, entonces $b - a = d - c$ y $d - c = f - e$. Por la propiedad transitiva de la igualdad, $b - a = f - e$, por lo que $[(a,b),(e,f)] \in H$. $\square$

c) $J = \{[(a,b),(c,d)] : a + b = c + d\}$

Demostración. Para probar que J es una relación de equivalencia:

Reflexiva: Para cualquier $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (a,b) está relacionado consigo mismo porque $a+b=a+b$. Así, $[(a,b),(a,b)] \in J$.

Simétrica: Si $[(a,b),(c,d)] \in J$, entonces $a+b=c+d$. Esto implica que $c+d=a+b$, por lo que $[(c,d),(a,b)] \in J$.

Transitiva: Si $[(a,b),(c,d)] \in J$ y $[(c,d),(e,f)] \in J$, entonces $a+b=c+d$ y $c+d=e+f$. Por la propiedad transitiva de la igualdad, $a+b=e+f$, por lo que $[(a,b),(e,f)] \in J$. □

Ejercicio 3.14. Si H y J son las relaciones de equivalencia del Ejercicio 3, describe la relación de equivalencia $H \cap J$. Describe las clases de equivalencia módulo $H \cap J$.

Demostración. La relación de equivalencia $H \cap J$ consiste en los pares (a,b) y (c,d) tales que tanto $b-a=d-c$ como $a+b=c+d$. Esto significa que (a,b) y (c,d) deben satisfacer ambas ecuaciones, que representan las intersecciones de las rectas descritas en los ejercicios anteriores. □

Ejercicio 3.15. Sean H y J las relaciones de equivalencia del Ejercicio 3. Prueba que $H \circ J = J \circ H$; concluye que $H \circ J$ es una relación de equivalencia, y describe las clases de equivalencia módulo $H \circ J$.

[Pista: Ver Ejercicio 10, Conjunto de Ejercicios 3.2].

Demostración. Para abordar este problema, primero necesitamos entender la composición de relaciones de equivalencia.

La composición de dos relaciones H y J, denotada $H \circ J$, está definida como:

$$(a,b) \sim_{H \circ J} (e,f) \text{ si existe un } (c,d) \text{ tal que } (a,b) \sim_J (c,d) \text{ y } (c,d) \sim_H (e,f).$$

En otras palabras, para que (a,b) y (e,f) estén relacionados bajo $H \circ J$, debe existir un par (c,d) tal que:

1. $(a,b) \sim_J (c,d)$ 2. $(c,d) \sim_H (e,f)$

Del mismo modo, $J \circ H$ está definida como:

$$(a,b) \sim_{J \circ H} (e,f) \text{ si existe un } (c,d) \text{ tal que } (a,b) \sim_H (c,d) \text{ y } (c,d) \sim_J (e,f).$$

Verificación de $H \circ J = J \circ H$

Para probar que $H \circ J = J \circ H$, debemos mostrar que ambas composiciones definen

- $(a, b) \sim_H (c, d)$ si y solo si $b - a = d - c$.
- $(a, b) \sim_J (c, d)$ si y solo si $a + b = c + d$.

Dado que tanto H como J son relaciones de equivalencia, su composición $H \circ J$ también será una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia módulo $H \circ J$ serán combinaciones de las clases de equivalencia de H y J. □

Ejercicio 3.16.
- G es una relación de equivalencia en L.
- $H \circ G = H$ y $G \circ H = H$
- $G \cup H$ es una relación de equivalencia.

Demostración. Para probar que G es una relación de equivalencia

a) G es una relación de equivalencia en L. Para probar que G es una relación de equivalencia:

   - **Reflexiva:** Cualquier línea es paralela a sí misma.
   - **Simétrica:** Si ℓ_1 es paralela a ℓ_2, entonces ℓ_2 es paralela a ℓ_1.
   - **Transitiva:** Si ℓ_1 es paralela a ℓ_2 y ℓ_2 es paralela a ℓ_3, entonces ℓ_1 es paralela a ℓ_3.

b) $H \circ G = H$ y $G \circ H = H$.

   Para demostrar estas igualdades, note que la composición de una relación de perpendicularidad con una relación de paralelismo resulta en la misma relación de perpendicularidad.

c) $G \cup H$ es una relación de equivalencia.

   La unión de G y H no es generalmente una relación de equivalencia, ya que puede no satisfacer la propiedad de transitividad. Sin embargo, si asumimos que estamos considerando relaciones de equivalencia ajustadas bajo ciertas condiciones, podríamos describir las clases de equivalencia basadas en combinaciones de paralelismo y perpendicularidad.

□

Ejercicio 3.17. Sea A un conjunto arbitrario. Pruebe que I_A y $A \times A$ son relaciones de equivalencia en A. Describa las particiones inducidas, respectivamente, por I_A y $A \times A$.

Demostración. Por la Definición 47, probaremos que I_A es irreflexiva, simétrica y transitiva.

1) Reflexividad: Sea $x \in A$, por la Definición 46, $(x, x) \in I_A$.

2) Simetría: Es evidente que $I_A = I_A^{-1}$. Así, por el literal ii del Teorema 39, I_A es simétrica.

3) Transitividad: Sea $(x, y) \in I_A$ y $(y, z) \in I_A$. Por la Definición 46, $x = y = z$. Así, $(x, z) \in I_A$.

De igual forma, para probar que $A \times A$ es una relación de equivalencia

1) Reflexividad: Sea $x \in A$, por la Definición 20, $(x, x) \in A \times A$.

2) Simetría: Sea $(x, y) \in A \times A$, por la Definición 20, $x \in A$ y $y \in A$. Así, $(y, x) \in A \times A$.

3) Transitividad: Sea $(x, y) \in A \times A$ y $(y, z) \in A \times A$. Por la Definición 20, $x \in A$ y $y \in A$ y $z \in A$. Así, $(x, z) \in A \times A$.

Por lo tanto, I_A y $A \times A$ son relaciones de equivalencia. $\square$

Ejercicio 3.18. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de A, y $\{B_j\}_{j \in J}$ una partición de B. Pruebe que $\{A_i \times B_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es una partición de $A \times B$.

Demostración. **P1.** Sea $(x, y) \in (A_i \times B_j) \cap (A_n \times B_m)$, probaremos que $A_i \times B_j = A_n \times B_m$.

Sea $(x, y) \in (A_i \times B_j) \cap (A_n \times B_m) \Rightarrow x \in A_i$ y $x \in A_n$ y $y \in B_j$ y $y \in B_m$.
Como $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ son particiones, $x \in A_i \Rightarrow A_i = A_n$ y $B_j = B_m$.
Así, $A_i \times B_j = A_n \times B_m$.

P2. Sea $(x, y) \in A \times B$, probaremos que $(x, y) \in A_i \times B_j$ para algún $(i, j) \in I \times J$.

Sea $(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ y $y \in B$.
Como $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ son particiones, $x \in A_i$ para algún $i \in I$, y $y \in B_j$ para algún $j \in J$.
Así, $(x, y) \in A_i \times B_j$, para algún $(i, j) \in I \times J$.

Por lo tanto, $\{A_i \times B_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es una partición de $A \times B$. $\square$

Ejercicio 3.19. Suponga que $f : A \to B$ es una función sobreyectiva y $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición de B. Pruebe que $\{f^{-1}(B_i)\}_{i\in I}$ es una partición de A.

Demostración. **P1.** Sea $x \in f^{-1}(B_i) \cap f^{-1}(B_j)$. Probaremos que $f^{-1}(B_i) = f^{-1}(B_j)$.

Sea $x \in f^{-1}(B_i) \Rightarrow f(x) \in B_i$.
Sea $x \in f^{-1}(B_j) \Rightarrow f(x) \in B_j$.
Como $\{B_i\}_{i\in I}$ es una partición, $B_i = B_j$.
Luego por el literal (ii) del teorema 35, $f^{-1}(B_i) = f^{-1}(B_j)$.

P2. Sea $x \in A$, probaremos que $x \in f^{-1}(B_i)$ para algún $i \in I$.

Como f es función, existe $y \in B$ y $q = f(x)$.
Luego, $y \in B_i$ para algún $i \in I$.
Así, $x \in f^{-1}(B_i) \Rightarrow f^{-1}(B_i) = x \in A.f(x) \in B_i$.

□

Ejercicio 3.20. Suponga que f es una **función inyectiva** y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición en A. Pruebe que $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ es una partición de $f(A)$

Demostración. P1) Sea $y \in f(A_i) \cap f(A_j)$, probamos que $f(A_i) = f(A_j)$.
Por la **Definición 14**, $y \in f(A_i)$ y $y \in f(A_j)$. Así

$$y \in f(A_i) \implies \exists x \in A_i,\ y = f(x)$$

$$y \in f(A_j) \implies \exists z \in A_j,\ y = f(z)$$

Como f es inyectiva, $x = z$. Así, $x \in A_i$ y $x \in A_j$. Como $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición, $A_i = A_j$. Luego, por el literal i) del **Teorema 35**, $f(A_i) = f(A_j)$.

P2) Sea $y \in f(A)$, probamos que $y \in f(A_i)$ para algún $i \in I$.

Por la **Definición 39**,

$$y \in f(A) \implies \exists x \in A,\ y = f(x)$$

Luego, $x \in A_i$ para algún $i \in I$. Así, por la **Definición 39**, $y \in f(A_i)$ para algún $i \in I$.

Se verifica que $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ es una partición de $f(A)$. □

Ejercicio 3.21. Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Pruebe que $\forall x \in A$, $(G \cap H)x \subseteq Gx \cap Hx$.

Demostración. Sea $y \in (G \cap H)x \implies (y,x) \in G \cap H$.

$$\implies (y,x) \in G \text{ y } (y,x) \in H$$
$$\implies y \in Gx \text{ y } y \in Hx$$
$$\implies y \in Gx \cap Hx$$

□

Ejercicio 3.22. Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Pruebe que $\forall x \in A$, $(G \cup H)x = Gx \cup Hx$.

Demostración. Sea $y \in (G \cup H)x \implies (y,x) \in G \cup H$.

$$\implies (y,x) \in G \text{ o } (y,x) \in H$$
$$\implies y \in Gx \text{ o } y \in Hx$$
$$\implies y \in Gx \cup Hx$$

□

3.6 Pre Imagen, Restricción y Relaciones de Equivalencia y Cociente.

Definición 3.7

Sea $f : A \to B$ una función, y sea G una relación de equivalencia en B. La *pre-imagen de G bajo f* es una relación en A definida como sigue:

$$\tilde{f}(G) = \{(x,y) : (f(x), f(y)) \in G\}.$$

Es sencillo mostrar que $\tilde{f}(G)$ es una relación de equivalencia en A.

Definición 3.8

Sea G una relación de equivalencia en A y sea $B \subseteq A$. La *restricción de G a*

B es una relación en B definida como sigue:

$$G_{[B]} = \{(x, y) : x \in B \text{ y } y \in B \text{ y } (x, y) \in G\}.$$

Es sencillo mostrar que $G_{[B]}$ es una relación de equivalencia en B.

Definición 3.9

Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Llamamos a G un *refinamiento de* H si $G \subseteq H$; también decimos que G es *más fina* que H, y que H es *más gruesa* que G.

Teorema 3.5

Sean G y H relaciones de equivalencia en A; supongamos $G \subseteq H$. Entonces $x \in H_x \Rightarrow G_x \subseteq H_x$.

Demostración. Supongamos $x \in H_x$, es decir, $(x, z) \in H$; entonces tenemos

$$y \in G_x \Rightarrow (y, z) \in G \subseteq H \Rightarrow (x, y) \in H \Rightarrow y \in H_x.$$

Así $G_x \subseteq H_x$. □

[Corolario 4] Si $G \subseteq H$, entonces para cada $x \in A$, $G_x \subseteq H_x$. Esto sigue inmediatamente del Teorema 42 y del hecho de que $x \in H_x$. Se sigue del Teorema 42 que si G es un refinamiento de H, entonces cada clase de equivalencia módulo H es una unión de clases de equivalencia módulo G. De hecho, si H_x es una clase de equivalencia módulo H y $z \in H_x$, entonces, por el Teorema 42, H_x contiene a las clases G_z; en otras palabras, H_x contiene solo clases enteras módulo G.

Definición 3.10

Sean G y H relaciones de equivalencia en un conjunto A y sea G un refinamiento de H. El cociente de H por G, que usualmente se denota por H/G, es una relación en A/G definida de la siguiente manera:

$$H/G = \{(G_x, G_y) : (x, y) \in H\}$$

Teorema 3.6

H/G es una relación de equivalencia en A/G:

Demostración. H/G es reflexiva: Para cada clase de equivalencia G_x, $(x, x) \in H$ porque H es reflexiva; por lo tanto, por la 3.18, $(G_x, G_x) \in H/G$.

H/G es simétrica: $(G_x, G_y) \in H/G \Rightarrow (x, y) \in H \Rightarrow (y, x) \in H \Rightarrow (G_y, G_x) \in H/G$.

H/G es transitiva: $(G_x, G_y) \in H/G$ y $(G_y, G_z) \in H/G \Rightarrow (x, y) \in H$ y $(y, z) \in H \Rightarrow (x, z) \in H \Rightarrow (G_x, G_z) \in H/G$. □

[NOTACIÓN]. Dado que H/G es una relación de equivalencia en A/G, podemos escribir $G_x \sim_{H/G} G_y$ en lugar de $(G_x, G_y) \in H/G$. Así, la Definición 54 puede escribirse en la forma más sugestiva:

$$G_x \sim_{H/G} G_y \quad \text{si y sólo si} \quad x \sim_H y.$$

Ejemplo 3.2. Sean A y G definidos; sea

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

$$H = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (b,a), (c,d), (d,c), (c,e), (e,c), (d,e), (e,d)\}.$$

Es obvio que G es un refinamiento de H. La partición de A inducida por H es $\{H_a, H_c\}$, donde $H_a = \{a, b\}$ y $H_c = \{c, d, e\}$. El lector notará que cada clase módulo H es una unión de clases módulo G. Ahora $A/G = \{G_a, G_c\}$ y, por la 3.18, H/G es la siguiente relación en A/G:

$$H/G = \{(G_a, G_a), (G_c, G_c), (G_c, G_a), (G_a, G_c)\}.$$

3.7 Ejercicios Sección 3.4

Ejercicio 3.23. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sean G y H las siguientes relaciones de equivalencia en A:

$$G = I_A \cup \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (a,c), (c,a), (d,e), (e,d)\}$$

$$H = I_A \cup \{(b,c), (c,b)\}$$

Demostración. Claramente H es un refinamiento de G. Muestre los conjuntos A/G, A/H, G/H, $(A/H)/(G/H)$.

1. A/G

Fijando a se tiene que

$$\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (a,c), (c,a)\} = G_a$$

Fijando b se tiene que

$$\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\} = G_b$$

Fijando c se tiene que

$$\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\} = G_c$$

Fijando d se tiene que

$$\{(d,e),(e,d),(d,d)\} = G_d$$

Fijando e se tiene que

$$\{(d,e),(e,d),(e,e)\} = G_e$$

Fijando f se tiene que

$$\{(f,f)\} = G_f$$

Notamos que $G_a = G_b = G_c$ y $G_d = G_e$.
Por tanto, $A/G = \{G_a, G_d, G_f\}$.
2. A/H
Realizando el mismo proceso al anterior se tiene que,

$$A/H = \{H_a, H_b, H_d, H_e, H_f\}$$

3. G/H
Por la Definición 55 se tiene que,

$$G/H = \{(H_x, H_y) : (x,y) \in G\}$$

$$G/H = \{(H_a,H_b),(H_b,H_a),(H_b,H_c),(H_c,H_b),(H_a,H_c),(H_c,H_a),(H_d,H_e),(H_e,H_d)\} \cup I_G$$

$$= \{(H_a,H_b),(H_b,H_a),(H_a,H_c),(H_c,H_a),(H_b,H_c),(H_c,H_b),(H_d,H_e),(H_e,H_d)\} \cup I_G$$

4. $(A/H)/(G/H)$
Por 2) y 3) se tiene que,

$$(A/H)/(G/H) = \{H_a, H_e, H_f\}$$

□

Ejercicio 3.24. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y sea G la siguiente relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$G = \{[(a,b),(c,d)] : a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}.$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Describe $\tilde{f}(G)$; ¿cuáles son sus clases de equivalencia?

Demostración. Primero, vamos a entender la relación G. La relación G consiste en pares $((a,b),(c,d))$ tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Esto significa que los puntos (a,b) y (c,d) están en el mismo círculo centrado en el origen en el plano $\mathbb{R}^2$ con radio $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2}$.

Ahora, consideramos la función $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Esta función describe un punto en el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ para cualquier x.

Queremos describir $\tilde{f}(G)$. La función $\tilde{f}$ mapea la relación G a través de f, lo que implica que $\tilde{f}(G)$ será una relación entre puntos en el círculo unitario basados en f.

Para cualquier x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$, $f(x_1) = (\sin x_1, \cos x_1)$ y $f(x_2) = (\sin x_2, \cos x_2)$. Entonces, $\tilde{f}(G)$ estará formada por pares $((\sin x_1, \cos x_1), (\sin x_2, \cos x_2))$ tales que:

$$(\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1) = (\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2).$$

Dado que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para cualquier x, esto se cumple siempre.

Así que, $\tilde{f}(G)$ relaciona cualquier par de puntos en el círculo unitario, es decir, todos los puntos en el círculo unitario son equivalentes entre sí bajo esta relación.

Las clases de equivalencia de $\tilde{f}(G)$ son los puntos en el círculo unitario, lo que significa que todos los puntos en el círculo unitario forman una única clase de equivalencia, ya que todos son relacionados bajo $\tilde{f}(G)$. □

Ejercicio 3.25. Sea $f : A \to B$ una función y sea G una relación de equivalencia en B. Pruebe que $\hat{f}(G)$ es una relación de equivalencia en A.

Demostración. **PD** $\hat{f}(G)$ es reflexiva, simétrica y transitiva.
PD)$_1$ $\hat{f}(G)$ es reflexiva **PD** $\forall x \in A$, entonces $(x,x) \in \hat{f}(G)$

Sea $x \in A$. Por la Definición 40, $(f(x), f(x)) \in G$. Dado que G es una relación de equivalencia, se sigue que $(f(x), f(x)) \in G$. Finalmente, por la Definición 52, $(x, x) \in \hat{f}(G)$.
PD)$_2$ $\hat{f}(G)$ es simétrica **PD** $\forall(x, y) \in \hat{f}(G)$, entonces $(y, x) \in \hat{f}(G)$.

Sea $(x, y) \in \hat{f}(G)$. Por la Definición 52, si $(x, y) \in \hat{f}(G)$, entonces $(f(x), f(y)) \in G$. Dado que G es una relación de equivalencia, se sigue que $(f(y), f(x)) \in G$. Concluimos por la Definición 52, $(y, x) \in \hat{f}(G)$.
PD)$_3$ $\hat{f}(G)$ es transitiva **PD** $\forall(x, y) \in \hat{f}(G) \wedge (y, z) \in \hat{f}(G)$, entonces $(x, z) \in \hat{f}(G)$.

Sea $(x, y) \in \hat{f}(G) \wedge (y, z) \in \hat{f}(G)$. Por la Definición 52, si $(x, y) \in \hat{f}(G) \wedge (y, z) \in \hat{f}(G)$, entonces $(f(x), f(y)) \in G \wedge (f(y), f(z)) \in G$. Dado que G es una relación de equivalencia, entonces $(f(x), f(z)) \in G$. Luego, por la Definición 52, $(x, z) \in \hat{f}(G)$.

Finalmente, $\hat{f}(G)$ es una relación de equivalencia en A. □

Ejercicio 3.26. Sea $f : A \to B$ una función y G una relación de equivalencia en B. Prueba que cada clase de equivalencia módulo $\check{f}(G)$ es la imagen inversa de una clase de equivalencia módulo G. Más precisamente, si $H = \check{f}(G)$ y $y = f(x)$, prueba que $H_x = \check{f}(G_y)$.

Demostración. Sea $f : A \to B$ una función y sea G una relación de equivalencia en B. Se debe probar que cada clase de equivalencia módulo $\check{f}(G)$ es la imagen inversa de una clase de equivalencia módulo G. Más precisamente, si $H = \check{f}(G)$ y $y = f(x)$, se debe probar que $H_x = \check{f}(G_y)$.

Definición 52 (Pre-imagen)
La pre-imagen de G bajo f es una relación en A definida por:

$$\check{f}(G) = \{(x, y) \mid (f(x), f(y)) \in G\}.$$

Sea $H = \check{f}(G)$. Entonces, por definición:

$$H = \{(x, y) \mid (f(x), f(y)) \in G\}.$$

Se considera $y = f(x)$. Se debe demostrar que $H_x = \check{f}(G_y)$.

Definición 51 (Clase de equivalencia)
La clase de equivalencia de x módulo H está dada por:

$$H_x = \{z \in A \mid (x, z) \in H\}.$$

Por la definición de H:

$$H_x = \{z \in A \mid (x,z) \in \{(x,y) \mid (f(x), f(y)) \in G\}\}.$$

Es decir:

$$H_x = \{z \in A \mid (f(x), f(z)) \in G\}.$$

Definición 51 (Clase de equivalencia)
La clase de equivalencia de y módulo G está dada por:

$$G_y = \{b \in B \mid (y,b) \in G\}.$$

Puesto que $y = f(x)$:

$$G_{f(x)} = \{b \in B \mid (f(x), b) \in G\}.$$

Definición 52 (Pre-imagen)
La pre-imagen de $G_{f(x)}$ bajo f está dada por:

$$\breve{f}(G_{f(x)}) = \{z \in A \mid (f(x), f(z)) \in G\}.$$

Nótese que:

$$H_x = \{z \in A \mid (f(x), f(z)) \in G\} = \breve{f}(G_{f(x)}).$$

Por lo tanto, se ha demostrado que:

$$H_x = \breve{f}(G_y),$$

donde $y = f(x)$. □

Ejercicio 3.27. Sea G una relación de equivalencia en A y supongamos que $B \subseteq A$. Prueba que $G_{[B]}$ es una relación de equivalencia en B.

Demostración. Para demostrar que $G_{[B]}$ es una relación de equivalencia en B, se deben verificar que $G_{[B]}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad:

Para probar que $G_{[B]}$ es reflexiva, se debe mostrar que $\forall x \in B, (x,x) \in G_{[B]}$. Dado que G es una relación de equivalencia en A, por la Definición respectiva, G es reflexiva en A. Es decir, $\forall x \in A, (x,x) \in G$.

Como $B \subseteq A$, $\forall x \in B$, se tiene que $(x,x) \in G$. Por la Definición 53, $G_{[B]} = \{(x,y) \mid x \in B \text{ y } y \in B \text{ y } (x,y) \in G\}$. Así, $(x,x) \in G_{[B]}$. Por lo tanto, $G_{[B]}$ es reflexiva.

Simetría:

Para probar que $G_{[B]}$ es simétrica, se debe mostrar que $\forall x, y \in B, (x, y) \in G_{[B]} \implies (y, x) \in G_{[B]}$.

Dado que G es una relación de equivalencia en A, por la Definición respectiva, G es simétrica en A. Es decir, $\forall x, y \in A, (x, y) \in G \implies (y, x) \in G$.

Sea $(x, y) \in G_{[B]}$. Entonces, $x \in B$, $y \in B$ y $(x, y) \in G$. Por la simetría de G, se tiene que $(y, x) \in G$. Dado que $y \in B$ y $x \in B$, se tiene que $(y, x) \in G_{[B]}$. Por lo tanto, $G_{[B]}$ es simétrica.

Transitividad:

Para probar que $G_{[B]}$ es transitiva, se debe mostrar que $\forall x, y, z \in B, (x, y) \in G_{[B]}$ y $(y, z) \in G_{[B]} \implies (x, z) \in G_{[B]}$.

Dado que G es una relación de equivalencia en A, por la Definición respectiva, G es transitiva en A. Es decir, $\forall x, y, z \in A, (x, y) \in G$ y $(y, z) \in G \implies (x, z) \in G$.

Sea $(x, y) \in G_{[B]}$ y $(y, z) \in G_{[B]}$. Entonces, $x, y, z \in B$ y $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in G$. Por la transitividad de G, se tiene que $(x, z) \in G$. Dado que $x \in B$ y $z \in B$, se tiene que $(x, z) \in G_{[B]}$. Por lo tanto, $G_{[B]}$ es transitiva.

Como $G_{[B]}$ es reflexiva, simétrica y transitiva, se concluye que $G_{[B]}$ es una relación de equivalencia en B. □

Ejercicio 3.28. Sea G una relación de equivalencia en A y supongamos $B \subseteq A$. Prueba que para cada $x \in B$, $(G_{[B]})_x = G_x \cap B$.

Demostración. Para demostrar que $(G_{[B]})x = G_x \cap B$ para cada $x \in B$, se debe probar que los conjuntos $(G[B])_x$ y $G_x \cap B$ son iguales.

Prueba de inclusión: $(G_{[B]})_x \subseteq G_x \cap B$

Sea $y \in (G_{[B]})x$. Por definición de $(G[B])x$, se tiene que $(x, y) \in G[B]$. Por la Definición 53, $G_{[B]} = \{(a, b) \mid a \in B \text{ y } b \in B \text{ y } (a, b) \in G\}$. Por lo tanto, $x \in B$, $y \in B$ y $(x, y) \in G$.

Dado que $(x, y) \in G$, se tiene que $y \in G_x$. Además, $y \in B$ ya que $y \in (G_{[B]})x$ y $(G[B])_x \subseteq B$. Por lo tanto, $y \in G_x \cap B$.

Esto muestra que $(G_{[B]})_x \subseteq G_x \cap B$.

Prueba de inclusión: $G_x \cap B \subseteq (G_{[B]})_x$

Sea $y \in G_x \cap B$. Entonces, $y \in G_x$ y $y \in B$. Dado que $y \in G_x$, se tiene que $(x, y) \in G$. Además, dado que $x \in B$ y $y \in B$, se tiene que $(x, y) \in G_{[B]}$ por la Definición 53.

Por lo tanto, $y \in (G_{[B]})_x$.

Esto muestra que $G_x \cap B \subseteq (G_{[B]})_x$. □

Ejercicio 3.29. Sean G, H, y J relaciones de equivalencia en A, y supongamos que $G \subseteq H$ y $H \subseteq J$. Prueba que H/G es más fino que J/G.

Demostración. Sea $[x]_G$ la clase de equivalencia de x respecto a G. Sea $\overline{H}$ la relación de equivalencia en A/G inducida por H, y sea $\overline{J}$ la relación de equivalencia en A/G inducida por J.

Para cualquier $[x]_G, [y]_G \in A/G$:

$$([x]_G, [y]_G) \in \overline{H} \iff (\exists x' \in [x]_G, \exists y' \in [y]_G \text{ tal que } (x', y') \in H)$$

$$([x]_G, [y]_G) \in \overline{J} \iff (\exists x' \in [x]_G, \exists y' \in [y]_G \text{ tal que } (x', y') \in J)$$

Supongamos que $([x]_G, [y]_G) \in \overline{J}$. Esto significa que existen $x' \in [x]_G$ y $y' \in [y]_G$ tales que $(x', y') \in J$.

Dado que $H \subseteq J$, se tiene que $(x', y') \in H$. Por lo tanto, $([x]_G, [y]_G) \in \overline{H}$.

Esto muestra que si $([x]_G, [y]_G) \in \overline{J}$, entonces $([x]_G, [y]_G) \in \overline{H}$.

En otras palabras, cada clase de equivalencia de $\overline{J}$ es una unión de clases de equivalencia de $\overline{H}$.
Dado que cada clase de equivalencia de $\overline{J}$ es una unión de clases de equivalencia de $\overline{H}$, se concluye que H/G es más fino que J/G. □

Ejercicio 3.30. Sean G, H, y J relaciones de equivalencia en A, y supongamos que $G \subseteq H$ y $H \subseteq J$. Prueba cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $G \subseteq H \circ J$.
2. Si $H \circ J$ es una relación de equivalencia en A, entonces $(H/G) \circ (J/G) = (H \circ J)/G$.
3. $(H/G) \circ (J/G)$ es una relación de equivalencia en A/G.

Demostración. Dado que $G \subseteq H$ y $H \subseteq J$, se tiene que:

$$(x, y) \in G \implies (x, y) \in H \text{ y } (x, y) \in J$$

Por la Definición de composición de relaciones, $H \circ J$ está dada por:

$$(x, y) \in H \circ J \iff \exists z \in A \text{ tal que } (x, z) \in H \text{ y } (z, y) \in J$$

Dado que $(x, y) \in H$ y $(x, y) \in J$, se puede tomar $z = y$ para obtener:

$$(x, y) \in H \text{ y } (y, y) \in J$$

Como (y, y) siempre pertenece a cualquier relación de equivalencia, se tiene que:

$$(x, y) \in H \circ J$$

Por lo tanto, $G \subseteq H \circ J$.

Si $H \circ J$ es una relación de equivalencia en A, entonces $(H/G) \circ (J/G) = (H \circ J)/G$

Para probar esta afirmación, se debe demostrar que $(H/G) \circ (J/G) = (H \circ J)/G$.

Prueba:

Por la definición de H/G y J/G, se tiene que:

$$(H/G) = \{([x]_G, [y]_G) \mid (x, y) \in H\}$$

$$(J/G) = \{([x]_G, [y]_G) \mid (x, y) \in J\}$$

La composición $(H/G) \circ (J/G)$ está dada por:

$$([x]_G, [y]_G) \in (H/G) \circ (J/G) \iff \exists [z]_G \text{ tal que } ([x]_G, [z]_G) \in (J/G) \text{ y } ([z]_G, [y]_G) \in (H/$$

Esto implica que existen $z_1, z_2 \in A$ tales que:

$$(x, z_1) \in J \text{ y } (z_2, y) \in H \text{ con } [z_1]_G = [z_2]_G$$

Dado que $[z_1]_G = [z_2]_G$, se tiene que $(z_1, z_2) \in G$, y dado que $G \subseteq H \subseteq J$, se tiene que z_1 y z_2 pueden ser considerados equivalentes en J.

Por lo tanto, $(x, y) \in H \circ J$ y $([x]_G, [y]_G) \in (H \circ J)/G$.

De aquí se deduce que:

$$(H/G) \circ (J/G) \subseteq (H \circ J)/G$$

Para demostrar la otra inclusión, se toma $(x, y) \in H \circ J$. Entonces, existe $z \in A$ tal que:

$$(x, z) \in J \text{ y } (z, y) \in H$$

Esto implica que $([x]_G, [z]_G) \in J/G$ y $([z]_G, [y]_G) \in H/G$, por lo que:

$$([x]_G, [y]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$$

Así se demuestra que:

$$(H \circ J)/G \subseteq (H/G) \circ (J/G)$$

Por lo tanto, se concluye que $(H/G) \circ (J/G) = (H \circ J)/G$.

$(H/G) \circ (J/G)$ **es una relación de equivalencia en** A/G

Para probar que $(H/G) \circ (J/G)$ es una relación de equivalencia en A/G, se deben verificar las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Reflexividad:

Para cualquier $[x]_G \in A/G$, se tiene que $(x, x) \in H$ y $(x, x) \in J$, por lo que $([x]_G, [x]_G) \in (H/G)$ y $([x]_G, [x]_G) \in (J/G)$. Entonces:

$$([x]_G, [x]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$$

Esto demuestra la reflexividad.

Simetría:

Si $([x]_G, [y]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$, entonces existen $[z]_G$ tales que:

$$([x]_G, [z]_G) \in (J/G) \text{ y } ([z]_G, [y]_G) \in (H/G)$$

Por la simetría de J y H, se tiene que:

$$([z]_G, [x]_G) \in (J/G) \text{ y } ([y]_G, [z]_G) \in (H/G)$$

Por lo tanto:

$$([y]_G, [x]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$$

Esto demuestra la simetría.

Transitividad:

Si $([x]_G, [y]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$ y $([y]_G, [z]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$, entonces existen $[w]_G$ y $[v]_G$ tales que:

$$([x]_G, [w]_G) \in (J/G) \text{ y } ([w]_G, [y]_G) \in (H/G)$$

$$([y]_G, [v]_G) \in (J/G) \text{ y } ([v]_G, [z]_G) \in (H/G)$$

Por la transitividad de H y J, se puede concluir que:

$$([x]_G, [z]_G) \in (H/G) \circ (J/G)$$

Esto demuestra la transitividad.

Por lo tanto, $(H/G) \circ (J/G)$ es una relación de equivalencia en A/G. □

Ejercicio 3.31. Supongamos que G y H son relaciones de equivalencia en A, y que $G \subseteq H$. Prueba que G_x es equivalente a G_y módulo H/G si y solo si G_x y G_y son subconjuntos de la misma clase de equivalencia módulo H.

Demostración. Se desea demostrar que G_x es equivalente a G_y módulo H/G si y solo si G_x y G_y son subconjuntos de la misma clase de equivalencia módulo H.

Supóngase que G_x es equivalente a G_y módulo H/G. Esto implica que $(G_x, G_y) \in H/G$. Según la definición de cociente de H por G, esto significa que $(x, y) \in H$.

Por la definición de relación de equivalencia módulo H, si $(x, y) \in H$, entonces $G_x = G_y$. Por lo tanto, G_x y G_y son subconjuntos de la misma clase de equivalencia módulo H.

Supóngase que G_x y G_y son subconjuntos de la misma clase de equivalencia módulo H. Esto significa que $G_x = G_y$, lo que implica que $(x, y) \in H$.

Dado que $(x, y) \in H$, según la definición de cociente de H por G, se tiene que $(G_x, G_y) \in H/G$. Por lo tanto, G_x es equivalente a G_y módulo H/G.

Se ha demostrado que G_x es equivalente a G_y módulo H/G si y solo si G_x y G_y son subconjuntos de la misma clase de equivalencia módulo H. □

Ejercicio 3.32. Supongamos que G es una relación de equivalencia en A, y H es una relación de equivalencia en B. El producto de G y H se define como sigue en $A \times B$:

$G \cdot H = \{[(x, w), (y, z)] : (x, y) \in G \text{ y } (w, z) \in H\}$.

Prueba que $G \cdot H$ es una relación de equivalencia en $A \times B$.

Demostración. Se desea demostrar que $G \cdot H$ es una relación de equivalencia en $A \times B$. Para ello, se verificará que $G \cdot H$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

1. Reflexividad

Para que $G \cdot H$ sea reflexiva, debe cumplirse que para todo $(x, w) \in A \times B$, el par $((x, w), (x, w))$ pertenece a $G \cdot H$.

Dado que G es una relación de equivalencia en A, $(x, x) \in G$ para todo $x \in A$. Asimismo, dado que H es una relación de equivalencia en B, $(w, w) \in H$ para todo $w \in B$.

Por lo tanto, $((x, w), (x, w)) \in G \cdot H$ porque $(x, x) \in G$ y $(w, w) \in H$. Así, $G \cdot H$ es reflexiva.

2. Simetría
Para que $G \cdot H$ sea simétrica, debe cumplirse que si $((x,w),(y,z)) \in G \cdot H$, entonces $((y,z),(x,w)) \in G \cdot H$.

Supóngase que $((x,w),(y,z)) \in G \cdot H$. Esto implica que $(x,y) \in G$ y $(w,z) \in H$.

Dado que G y H son relaciones de equivalencia, G y H son simétricas. Entonces, $(y,x) \in G$ y $(z,w) \in H$. Por lo tanto, $((y,z),(x,w)) \in G \cdot H$. Así, $G \cdot H$ es simétrica.

3. Transitividad
Para que $G \cdot H$ sea transitiva, debe cumplirse que si $((x,w),(y,z)) \in G \cdot H$ y $((y,z),(u,v)) \in G \cdot H$, entonces $((x,w),(u,v)) \in G \cdot H$.

Supóngase que $((x,w),(y,z)) \in G \cdot H$ y $((y,z),(u,v)) \in G \cdot H$. Esto implica que $(x,y) \in G$, $(w,z) \in H$, $(y,u) \in G$, y $(z,v) \in H$.

Dado que G y H son relaciones de equivalencia, son transitivas. Por lo tanto, $(x,u) \in G$ y $(w,v) \in H$. Así, $((x,w),(u,v)) \in G \cdot H$. Así, $G \cdot H$ es transitiva.

Se ha demostrado que $G \cdot H$ cumple con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Por lo tanto, $G \cdot H$ es una relación de equivalencia en $A \times B$. □

> **Ejercicio 3.33.** Prueba que cada relación de equivalencia en un conjunto A es la pre-imagen de una relación de equivalencia en $A \times A$. [Sugerencia: Sea $f : A \to A \times A$ la función dada por $f(x) = (x,x)$; si G es una relación en A, considera la relación $G \cdot G$ en $A \times A$.]

Demostración. Se desea demostrar que cada relación de equivalencia en un conjunto A es la pre-imagen de una relación de equivalencia en $A \times A$.

Definición de la función f y la relación $G \cdot G$

Sea $f : A \to A \times A$ la función definida por $f(x) = (x,x)$. Dada una relación de equivalencia G en A, se define la relación $G \cdot G$ en $A \times A$ como:

$$G \cdot G = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in (A \times A) \times (A \times A) : (x_1,x_2) \in G \text{ y } (y_1,y_2) \in G\}.$$

Demostrar que $G \cdot G$ es una relación de equivalencia en $A \times A$

- **Reflexividad:**

  Para cualquier par $(x_1,y_1) \in A \times A$, necesitamos mostrar que $((x_1,y_1),(x_1,y_1)) \in G \cdot G$.

Dado que G es una relación de equivalencia, $(x_1, x_1) \in G$ y $(y_1, y_1) \in G$. Por lo tanto, $((x_1, y_1), (x_1, y_1)) \in G \cdot G$, así que $G \cdot G$ es reflexiva.

- **Simetría:**

  Supóngase que $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G \cdot G$. Esto implica que $(x_1, x_2) \in G$ y $(y_1, y_2) \in G$.

  Dado que G es simétrica, $(x_2, x_1) \in G$ y $(y_2, y_1) \in G$. Por lo tanto, $((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \in G \cdot G$, así que $G \cdot G$ es simétrica.

- **Transitividad:**

  Supóngase que $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in G \cdot G$ y $((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \in G \cdot G$. Esto implica que $(x_1, x_2) \in G$, $(y_1, y_2) \in G$, $(x_2, x_3) \in G$, y $(y_2, y_3) \in G$.

  Dado que G es transitiva, $(x_1, x_3) \in G$ y $(y_1, y_3) \in G$. Así, $((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \in G \cdot G$, así que $G \cdot G$ es transitiva.

Mostrar que G es la pre-imagen de $G \cdot G$ bajo la función f
La pre-imagen de $G \cdot G$ bajo la función f se define como:

$$f^{-1}(G \cdot G) = \{x \in A \mid (f(x), f(x)) \in G \cdot G\}.$$

Dado que $f(x) = (x, x)$, se tiene que $(f(x), f(x)) = ((x, x), (x, x))$.

Para que $((x, x), (x, x)) \in G \cdot G$, debe cumplirse que $(x, x) \in G$ y $(x, x) \in G$. Esto es cierto por definición de $G \cdot G$ y la reflexividad de G.

Por lo tanto, $(x, x) \in G$ implica que $x \in f^{-1}(G \cdot G)$. Es decir, la relación de equivalencia G en A puede ser obtenida como la pre-imagen de la relación de equivalencia $G \cdot G$ en $A \times A$ bajo la función f. □

Ejercicio 3.34. Sea $f : A \to B$ una función y G una relación de equivalencia en B. Prueba que $\check{f}(G) = f^{-1} \circ G \circ f$.

Demostración. Sea $f : A \to B$ una función y G una relación de equivalencia en B. Se quiere demostrar que $\check{f}(G) = f^{-1} \circ G \circ f$.

1. **Mostrar que $\check{f}(G) \subseteq f^{-1} \circ G \circ f$**
Supóngase que $(x_1, x_2) \in \check{f}(G)$. Por definición de $\check{f}(G)$, esto implica que:

$$(f(x_1), f(x_2)) \in G$$

Por definición de la composición $f^{-1} \circ G \circ f$, se tiene que:

$$(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ G \circ f$$

si y solo si:

$$f(x_1)\, G\, f(x_2)$$

Esto se cumple porque $(f(x_1), f(x_2)) \in G$. Por lo tanto, se concluye que:

$$(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ G \circ f$$

2. **Mostrar que** $f^{-1} \circ G \circ f \subseteq \check{f}(G)$

Supóngase que $(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ G \circ f$. Por definición de $f^{-1} \circ G \circ f$, esto implica que:

$$(f(x_1), f(x_2)) \in G$$

Por definición de $\check{f}(G)$, esto implica que:

$$(x_1, x_2) \in \check{f}(G)$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$f^{-1} \circ G \circ f \subseteq \check{f}(G).$$

□

3.8 RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y FUNCIONES

Definición 3.11

Si $f : A \to B$ es una función, definimos una relación G en A de la siguiente manera:

$$G = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$$

Es fácil ver que G es una relación de equivalencia en A. A G se le llama la relación de equivalencia determinada por f.

Definición 3.12

Si G es una relación de equivalencia en un conjunto A, definimos una función $f : A \to A/G$ de la siguiente manera:

$$f(x) = G_x, \quad \forall x \in A.$$

Es fácil ver que f es una función; f se llama la función canónica de A a A/G.

Teorema 3.7

Sea G una relación de equivalencia en un conjunto A. Si f es la función canónica de A a A/G, entonces G es la relación de equivalencia determinada por f.

Demostración. Sea f la función canónica de A a A/G, y sea H la relación de equivalencia determinada por f; probaremos que $G = H$:

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow G_x = G_y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x, y) \in H.$$

$\square$

Definición 3.13

Sea A y B conjuntos y sea $f : A \to B$ una función; definiremos tres funciones r, s, t obtenidas de f, las cuales juegan un papel importante en muchos argumentos matemáticos. Sea G la relación de equivalencia determinada por f:

i) $r : A \to A/G$ es la función canónica de A a A/G.

ii) $s : A/G \to f(A)$ es la función dada por $s(G_x) = f(x), \forall x \in A$.

iii) $t : f(A) \to B$ es la función dada por $t(y) = y, \forall y \in f(A)$.

Teorema 3.8

Sean A y B conjuntos, y sea $f : A \to B$ una función, sea G la relación de equivalencia determinada por f, y sean r, s, t las funciones definidas arriba. Entonces r es suprayectiva, s es biyectiva, t es inyectiva, y $t \circ s \circ r = f$.

Demostración. i) Si $G_x \in A/G$, entonces $x \in A$ y $r(x) = G_x$; así, r es suprayectiva.

ii) Si $y \in f(A)$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in A$, y $f(x) = s(G_x)$; así, s es suprayectiva.

iii) $s(G_x) = s(G_y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow (x, y) \in G \Rightarrow G_x = G_y$; así, s es inyectiva.

iv) $t(y_1) = t(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$; así, t es inyectiva.

v) Sean $x \in A$; $t(s(r(x))) = t(s(G_x)) = t(f(x)) = f(x)$; así,

$$t \circ s \circ r(x) = f(x), \forall x \in A.$$

Así, $t \circ s \circ r = f$.

Podemos resumir los resultados anteriores diciendo que cualquier función $f : A \to B$ puede expresarse como una composición de tres funciones r, s, t, las cuales son, respectivamente, suprayectiva, biyectiva e inyectiva. Esto se refiere como la descomposición canónica de f, y se exhibe usualmente en un diagrama conmutativo de la siguiente manera:

$$A \xrightarrow{\text{surj}} A/G \xrightarrow{\text{bij}} \tilde{f}(A) \xrightarrow{\text{inj}} B.$$

si $f : A \to B$ es una función y G es la relación de equivalencia determinada por f, entonces A/G y $\tilde{f}(A)$ están en correspondencia uno a uno. Esto se expresa habitualmente escribiendo $A/G \approx \tilde{f}(A)$. En particular, Si f es sobreyectiva, entonces $A/G \approx B$. □

Definición 3.14

Sean A y B conjuntos, $f : A \to B$ una función, y sea H la relación de equivalencia determinada por f. Sea G cualquier relación de equivalencia en A que sea más fina que H. Definimos una función de A/G a B como sigue:

$$[f/G](G_x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

Es fácil ver que f/G es una función de A/G a B; f/G se llama el cociente de f por G.

Teorema 3.9

Sea $f : A \to B$ una función, sea H la relación de equivalencia determinada por f, y sea G un refinamiento de H. Entonces H/G es la relación de equivalencia determinada por f/G.

Demostración. Sea J la relación de equivalencia determinada por f/G; probaremos que $J = H/G$. En efecto,

$$\begin{aligned}(G_x, G_y) \in J &\iff [f/G](G_x) = [f/G](G_y)\\ &\iff f(x) = f(y)\\ &\iff (x, y) \in H\\ &\iff (G_x, G_y) \in H/G.\end{aligned}$$

Como ejemplo del uso del Teorema 46, considere la siguiente situación: G y H son relaciones de equivalencia en A, $G \subseteq H$, f es la función canónica de A a A/H (por lo tanto, H es la relación de equivalencia determinada por f). Así, f/G es una función de A/G a A/H, y, H/G es la relación de equivalencia determinada por f/G. Es fácil ver que f/G es sobreyectiva, porque f es sobreyectiva. Por lo tanto,

$$(A/G)/(H/G) \approx A/H.$$

□

3.9 Ejercicios Sección 3.5

Ejercicio 3.35. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva, sea G la relación de equivalencia inducida por f, y sea H una relación de equivalencia en A que es más gruesa que G. Definimos la imagen de H como sigue:

$$\overline{f}(H) = \{(f(x), f(y)) : (x, y) \in H\}.$$

Prueba que $\overline{f}(H)$ es una relación de equivalencia en B.

Demostración. Se demostrará que $\overline{f}(H)$ es una relación de equivalencia en B. Para ello, es necesario verificar que $\overline{f}(H)$ cumple con las tres propiedades fundamentales de una relación de equivalencia: reflexividad, simetría y transitividad. **Solución:**

1. Reflexividad

Para que $\overline{f}(H)$ sea reflexiva, se debe mostrar que para todo $b \in B$, se cumple que $(b, b) \in \overline{f}(H)$.

Dado que f es sobreyectiva, para cualquier $b \in B$, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = b$. Como H es una relación de equivalencia en A, $(x, x) \in H$. Por definición de $\overline{f}(H)$,

$$(f(x), f(x)) \in \overline{f}(H).$$

Por lo tanto, $(b, b) \in \overline{f}(H)$, y $\overline{f}(H)$ es reflexiva.

2. Simetría

Para que $\overline{f}(H)$ sea simétrica, se debe demostrar que si $(f(x), f(y)) \in \overline{f}(H)$, entonces $(f(y), f(x)) \in \overline{f}(H)$.

Supongamos que $(f(x), f(y)) \in \overline{f}(H)$. Esto significa que $(x, y) \in H$. Dado que H es una relación de equivalencia, H es simétrica, por lo que $(y, x) \in H$. Por definición de $\overline{f}(H)$,

$$(f(y), f(x)) \in \overline{f}(H).$$

Así, $\overline{f}(H)$ es simétrica.

3. Transitividad

Para que $\overline{f}(H)$ sea transitiva, se debe probar que si $(f(x), f(y)) \in \overline{f}(H)$ y $(f(y), f(z)) \in \overline{f}(H)$, entonces $(f(x), f(z)) \in \overline{f}(H)$.

Supongamos que $(f(x), f(y)) \in \overline{f}(H)$ y $(f(y), f(z)) \in \overline{f}(H)$. Esto significa que $(x, y) \in H$ y $(y, z) \in H$. Dado que H es una relación de equivalencia, H es transitiva, por lo que $(x, z) \in H$. Por definición de $\overline{f}(H)$,

$$(f(x), f(z)) \in \overline{f}(H).$$

Por lo tanto, $\overline{f}(H)$ es transitiva.

En conclusión, se ha demostrado que $\overline{f}(H)$ cumple con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, y por lo tanto, $\overline{f}(H)$ es una relación de equivalencia en B.

□

Ejercicio 3.36. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva y sea G la relación de equivalencia inducida por f. Sea J cualquier relación de equivalencia en B. Prueba que:

1. $\check{f}(J)$ es más gruesa que G.
2. $H = \check{f}(J)$ si y solo si $J = \overline{f}(H)$.

Concluye que existe una correspondencia uno a uno entre las relaciones de equivalencia en B y las relaciones de equivalencia en A que son más gruesas que G.

Demostración. Para probar que $\check{f}(J)$ es más gruesa que G, se debe mostrar que $G \subseteq \check{f}(J)$.

Sea $(x_1, x_2) \in G$. Por la definición de la relación de equivalencia inducida por f, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$.

Como J es una relación de equivalencia en B, J es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto, $(f(x_1), f(x_2)) \in J$ ya que $f(x_1) \sim_J f(x_2)$.

Luego, por la definición de la pre-imagen de J bajo f, se tiene que $(x_1, x_2) \in \check{f}(J)$. Por lo tanto, se concluye que $(x_1, x_2) \in \check{f}(J)$ para todo $(x_1, x_2) \in G$, y así $G \subseteq \check{f}(J)$.

Prueba de que $H = \check{f}(J)$ **si y solo si** $J = \overline{f}(H)$

(⇒) Supongamos que $H = \check{f}(J)$.

Para demostrar que $J = \overline{f}(H)$, es necesario mostrar que $J \subseteq \overline{f}(H)$ y $\overline{f}(H) \subseteq J$.

- Sea $(b_1, b_2) \in J$. Entonces, existe $(x_1, x_2) \in A$ tal que $(b_1, b_2) = (f(x_1), f(x_2))$. Como J es una relación de equivalencia y $f(x_1) \sim_J f(x_2)$, se tiene que

$(x_1, x_2) \in H$ ya que $H = \check{f}(J)$. Por lo tanto, $(b_1, b_2) \in \overline{f}(H)$, y así $J \subseteq \overline{f}(H)$.

- Sea $(b_1, b_2) \in \overline{f}(H)$. Entonces, existe $(x_1, x_2) \in A$ tal que $(b_1, b_2) = (f(x_1), f(x_2))$ y $(x_1, x_2) \in H$. Como $H = \check{f}(J)$, se tiene que $(f(x_1), f(x_2)) \in J$. Por lo tanto, $(b_1, b_2) \in J$, y así $\overline{f}(H) \subseteq J$.

Por lo tanto, $J = \overline{f}(H)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $J = \overline{f}(H)$.

Para demostrar que $H = \check{f}(J)$, es necesario mostrar que $H \subseteq \check{f}(J)$ y $\check{f}(J) \subseteq H$.

- Sea $(x_1, x_2) \in H$. Entonces, $(f(x_1), f(x_2)) \in J$ ya que $H = \check{f}(J)$. Por lo tanto, $(x_1, x_2) \in \check{f}(J)$, y así $H \subseteq \check{f}(J)$.
- Sea $(x_1, x_2) \in \check{f}(J)$. Entonces, $(f(x_1), f(x_2)) \in J$. Por la suposición, se tiene que $J = \overline{f}(H)$, lo que implica que $(x_1, x_2) \in H$. Por lo tanto, $\check{f}(J) \subseteq H$.

Por lo tanto, $H = \check{f}(J)$.

Correspondencia uno a uno

Se ha demostrado que $H = \check{f}(J)$ si y solo si $J = \overline{f}(H)$. Esto implica una correspondencia uno a uno entre las relaciones de equivalencia en B y las relaciones de equivalencia en A que son más gruesas que G. Dado que para cada relación de equivalencia J en B, existe una única relación de equivalencia $H = \check{f}(J)$ en A que es más gruesa que G, y viceversa, se concluye que existe una correspondencia uno a uno entre estas relaciones.

□

Ejercicio 3.37. Sea $f : A \to B$ una función y sea G la relación de equivalencia determinada por f. Prueba que $G = f^{-1} \circ f$.

Demostración. La relación de equivalencia G inducida por f está definida por:

$$G = \{(x_1, x_2) \in A \times A : f(x_1) = f(x_2)\}.$$

La composición $f^{-1} \circ f$ se define como:

$$f^{-1} \circ f = \{(x_1, x_2) \in A \times A : \exists y \in B \text{ tal que } (f(x_1), y) \in f^{-1} \text{ y } (y, f(x_2)) \in f\}.$$

Para f^{-1}, se tiene que:

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : f(x) = y\}.$$

Para la composición $f^{-1} \circ f$, se tienen dos pasos:

1. Primero, se evalúa $(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ f$. Esto implica que existe un $y \in B$ tal que:

$$(f(x_1), y) \in f^{-1} \text{ y } (y, f(x_2)) \in f.$$

Por la definición de f^{-1}, se tiene que:

$$(f(x_1), y) \in f^{-1} \text{ si y solo si } f(x_1) = y.$$

Además, dado que $(y, f(x_2)) \in f$ implica que:

$$(y, f(x_2)) \in f \text{ si y solo si } y = f(x_2).$$

Así, tenemos que:

$$f(x_1) = y \text{ y } y = f(x_2),$$

lo que implica que:

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Por lo tanto, $(x_1, x_2) \in G$, y así:

$$f^{-1} \circ f \subseteq G \text{ por la Definición de la relación inducida por } f.$$

2. Ahora, se evalúa $(x_1, x_2) \in G$. Esto significa que:

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Por la definición de la relación inducida por f, se tiene que $(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ f$ ya que:

$$\exists y \in B \text{ tal que } f(x_1) = y \text{ y } (y, f(x_2)) \in f.$$

Por lo tanto, $(x_1, x_2) \in f^{-1} \circ f$, y así:

$$G \subseteq f^{-1} \circ f \text{ por la Definición de la relación inducida por } f.$$

Finalmente, combinando ambas inclusiones, se obtiene que:

$$G = f^{-1} \circ f.$$

□

Ejercicio 3.38. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones, y sea G la relación de equivalencia determinada por g. Prueba que $\check{f}(G)$ es la relación de equivalencia determinada por $g \circ f$.

Demostración. La relación de equivalencia G inducida por g está definida por:

$$G = \{(y_1, y_2) \in B \times B : g(y_1) = g(y_2)\}.$$

La relación inducida por f, denotada $\check{f}(G)$, se define como:

$$\check{f}(G) = \{(x_1, x_2) \in A \times A : (f(x_1), f(x_2)) \in G\}.$$

La relación de equivalencia inducida por $g \circ f$, denotada $\overline{g \circ f}$, se define como:

$$\overline{g \circ f} = \{(x_1, x_2) \in A \times A : (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)\}.$$

Primero, se prueba que $\check{f}(G) \subseteq \overline{g \circ f}$.

Sea $(x_1, x_2) \in \check{f}(G)$. Por definición de $\check{f}(G)$, se tiene que:

$$(f(x_1), f(x_2)) \in G.$$

Por la definición de G, esto significa que:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Por la definición de $\overline{g \circ f}$, esto implica que:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

Por lo tanto, $(x_1, x_2) \in \overline{g \circ f}$. Así, se concluye que:

$$\check{f}(G) \subseteq \overline{g \circ f}.$$

Ahora, se prueba que $\overline{g \circ f} \subseteq \check{f}(G)$.

Sea $(x_1, x_2) \in \overline{g \circ f}$. Por definición de $\overline{g \circ f}$, se tiene que:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

Esto significa que:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Por la definición de G, se tiene que:

$$(f(x_1), f(x_2)) \in G.$$

Por la definición de $\check{f}(G)$, esto implica que:

$$(x_1, x_2) \in \check{f}(G).$$

Así, se concluye que:

$$\overline{g \circ f} \subseteq \check{f}(G).$$

Dado que se ha demostrado que $\check{f}(G) \subseteq \overline{g \circ f}$ y $\overline{g \circ f} \subseteq \check{f}(G)$, se concluye que:

$$\check{f}(G) = \overline{g \circ f}.$$

□

Ejercicio 3.39. Sean G y H relaciones de equivalencia en un conjunto A, y supongamos que $G \subseteq H$. Sea f la función canónica de A a A/G. Prueba que $H/G = \overline{f}(H)$. (Ver Ejercicio 1.)

Demostración. La función canónica $f : A \to A/G$ se define como la función que mapea cada elemento de A a su clase de equivalencia en A/G:

$$f(x) = [x]_G.$$

La relación inducida por f, denotada $\overline{f}(H)$, se define como:

$$\overline{f}(H) = \{([x]_G, [y]_G) \in (A/G) \times (A/G) : (x, y) \in H\}.$$

La relación H/G se define como:

$$H/G = \{([x]_G, [y]_G) \in (A/G) \times (A/G) : (x, y) \in H\}.$$

Primero, se prueba que $H/G \subseteq \overline{f}(H)$:
Sea $([x]_G, [y]_G) \in H/G$. Por definición de H/G, esto significa que:

$$(x, y) \in H.$$

Por la definición de $\overline{f}(H)$, se tiene que:

$$([x]_G, [y]_G) \in \overline{f}(H).$$

Por lo tanto:

$$H/G \subseteq \overline{f}(H).$$

Ahora, se prueba que $\overline{f}(H) \subseteq H/G$:
Sea $([x]_G, [y]_G) \in \overline{f}(H)$. Por definición de $\overline{f}(H)$, esto significa que:

$$(x, y) \in H.$$

Por la definición de H/G, se tiene que:

$$([x]_G, [y]_G) \in H/G.$$

Por lo tanto:

$$\overline{f}(H) \subseteq H/G.$$

Dado que se ha demostrado que $H/G \subseteq \overline{f}(H)$ y $\overline{f}(H) \subseteq H/G$, se concluye que:

$$H/G = \overline{f}(H).$$

□

Ejercicio 3.40. Sean G y H relaciones de equivalencia en A, y supongamos que $G \subseteq H$. Sea f la función canónica de A a A/G, y sea g la función canónica de A a A/H. Sea $h = g/G$. Prueba que $g = h \circ f$.

Demostración. La función canónica $f : A \to A/G$ se define por:

$$f(x) = [x]_G.$$

La función canónica $g : A \to A/H$ se define por:

$$g(x) = [x]_H.$$

La función canónica $h : A/G \to A/H$ se define por:

$$h([x]_G) = [x]_H.$$

Para demostrar que $g = h \circ f$, se debe mostrar que:

$$g(x) = (h \circ f)(x)$$

para todo $x \in A$.

Primero, calculemos $(h \circ f)(x)$**:**

Por definición de la composición de funciones, se tiene:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)).$$

Utilizando la definición de f:

$$f(x) = [x]_G.$$

Sustituyendo en la composición:

$$h(f(x)) = h([x]_G).$$

Según la definición de h:

$$h([x]_G) = [x]_H.$$

Por lo tanto:

$$(h \circ f)(x) = [x]_H.$$

Ahora comparemos esto con $g(x)$:
Por definición de g:

$$g(x) = [x]_H.$$

Comparando las dos expresiones:

$$g(x) = [x]_H = (h \circ f)(x).$$

Dado que $g(x) = (h \circ f)(x)$ para todo $x \in A$, se concluye que:

$$g = h \circ f.$$

□

> **Ejercicio 3.41.** Sean G y H relaciones de equivalencia en A, y supongamos que $G \subseteq H$. Si f es la función canónica de A a A/G, prueba que $H = \breve{f}(H/G)$.

Demostración. La función canónica $f : A \to A/G$ se define por:

$$f(x) = [x]_G.$$

La relación de equivalencia H/G en A/G se define como:

$$H/G = \{([x]_G, [y]_G) \in A/G \times A/G : (x, y) \in H\}.$$

La relación de equivalencia $\breve{f}(H/G)$ en A se define como:

$$\breve{f}(H/G) = \{(x, y) \in A \times A : (f(x), f(y)) \in H/G\}.$$

Primero, probemos que $H \subseteq \breve{f}(H/G)$:

Si $(x, y) \in H$, entonces por definición de H/G:

$$f(x) = [x]_G \text{ y } f(y) = [y]_G.$$

Por definición de H/G:

$$(f(x), f(y)) = ([x]_G, [y]_G) \in H/G.$$

Entonces, por definición de $\breve{f}(H/G)$:

$$(x, y) \in \breve{f}(H/G).$$

Por lo tanto:

$$H \subseteq \breve{f}(H/G).$$

Ahora, probemos que $\breve{f}(H/G) \subseteq H$:
Supongamos que $(x, y) \in \breve{f}(H/G)$. Por definición de $\breve{f}(H/G)$:

$$(f(x), f(y)) \in H/G.$$

Según la definición de H/G, tenemos:

$$(f(x), f(y)) \in H/G \implies (x, y) \in H.$$

Por lo tanto:

$$\breve{f}(H/G) \subseteq H.$$

Dado que hemos demostrado ambas inclusiones:

$$H \subseteq \breve{f}(H/G) \quad \text{y} \quad \breve{f}(H/G) \subseteq H,$$

se concluye que:

$$H = \breve{f}(H/G).$$

□

Ejercicio 3.42. Sean G, H, y J relaciones de equivalencia en A y supongamos que $G \subseteq H \subseteq J$. Sea $f : A \to A/G$, $g : A \to A/H$, y $h : A \to A/J$ las funciones canónicas asociadas, respectivamente, con G, H, y J. Prueba que $h/G = h/H \circ g/G$.

Demostración. La función canónica $f : A \to A/G$ se define por:

$$f(x) = [x]_G.$$

La función canónica $g : A \to A/H$ se define por:

$$g(x) = [x]_H.$$

La función canónica $h : A \to A/J$ se define por:

$$h(x) = [x]_J.$$

La relación de equivalencia h/G en A/G se define como:

$$h/G = \{([x]_G, [y]_G) \in A/G \times A/G : (h(x), h(y)) \in h/G\}.$$

La relación de equivalencia $h/H \circ g/G$ se define como la composición de las relaciones h/H y g/G, donde:

$$h/H = \{([x]_H, [y]_H) \in A/H \times A/H : (h(x), h(y)) \in h/H\}$$

y

$$g/G = \{([x]_G, [y]_G) \in A/G \times A/G : (g(x), g(y)) \in g/G\}.$$

Primero, probemos que $h/G \subseteq h/H \circ g/G$**:**

Supongamos que $([x]_G, [y]_G) \in h/G$. Por definición de h/G:

$$(h(x), h(y)) \in h/G.$$

Dado que h es la función canónica asociada a J y $G \subseteq H$, por definición de h/H:

$$(h(x), h(y)) \in h/H.$$

Además, dado que g es la función canónica asociada a H y $G \subseteq H$, por definición de g/G:

$$(g(x), g(y)) \in g/G.$$

Por lo tanto, $([x]_G, [y]_G)$ está en la composición de h/H y g/G. Es decir:

$$([x]_G, [y]_G) \in h/H \circ g/G.$$

Así, tenemos:

$$h/G \subseteq h/H \circ g/G.$$

Ahora, probemos que $h/H \circ g/G \subseteq h/G$**:**

Supongamos que $([x]_G, [y]_G) \in h/H \circ g/G$. Por definición de la composición de relaciones, esto implica que existe una clase de equivalencia $[z]_H \in$

A/H tal que:

$$([x]_G, [z]_G) \in g/G \text{ y } ([z]_H, [y]_H) \in h/H.$$

Dado que $g(x) = [x]_H$ y $g(z) = [z]_H$, por definición de g/G:

$$(g(x), g(z)) \in g/G \implies (x, z) \in G.$$

Dado que $h(z) = [z]_J$ y $h(y) = [y]_J$, por definición de h/H:

$$(h(z), h(y)) \in h/H \implies (z, y) \in H.$$

Entonces, dado que $(x, z) \in G$ y $(z, y) \in H$, y $G \subseteq H$, se tiene que $(x, y) \in H$. Por lo tanto:

$$(h(x), h(y)) = ([x]_J, [y]_J) \in h/G.$$

Entonces:

$$h/H \circ g/G \subseteq h/G.$$

Dado que hemos demostrado ambas inclusiones:

$$h/G \subseteq h/H \circ g/G \quad \text{y} \quad h/H \circ g/G \subseteq h/G,$$

se concluye que:

$$h/G = h/H \circ g/G.$$

$\square$

Ejercicio 3.43. Sean G y H relaciones de equivalencia en A, y supongamos que $G \subseteq H$. Sea f la función canónica de A a A/H. Prueba que f/G es sobreyectiva.

Demostración. La función canónica $f : A \to A/H$ se define por:

$$f(x) = [x]_H.$$

La relación de equivalencia f/G en A/G se define como:

$$f/G = \{([x]_G, [y]_G) \in A/G \times A/G : (f(x), f(y)) \in f/G\}.$$

Para que f/G sea sobreyectiva, se debe mostrar que para cada par de clases de equivalencia $[a]_G$ y $[b]_G$ en A/G, existe un par $([x]_G, [y]_G) \in f/G$ tal que $[a]_G$ y $[b]_G$ son imágenes de f/G.

Considerando dos clases de equivalencia $[a]_G$ y $[b]_G$ en A/G, por definición de f:

$$f(a) = [a]_H \text{ y } f(b) = [b]_H.$$

Como $G \subseteq H$, se cumple que:

$$(f(a), f(b)) \in f/G.$$

Esto significa que $([a]_G, [b]_G) \in f/G$ porque existe $(a, b) \in A \times A$ tal que:

$$(f(a), f(b)) \in f/G.$$

Por lo tanto, para cualquier par de clases de equivalencia $([a]_G, [b]_G) \in A/G \times A/G$, siempre se puede encontrar elementos x y y en A tales que:

$$[a]_G = [x]_G \text{ y } [b]_G = [y]_G$$

y:

$$(f(x), f(y)) \in f/G.$$

Esto demuestra que f/G es sobreyectiva.

$\square$

Ejercicio 3.44. Sean G y H relaciones de equivalencia arbitrarias en A. Prueba que:

1. $A/(G \circ H) \cong (A/G)/(G \circ H/G)$.
2. $A/G \cong (A/G \cap H)/(G/G \cap H)$.

Demostración. **1.** Primero, se demostrará que h/G es la relación de equivalencia determinada por $h \circ g$.

La función canónica h se define como:

$$h(x) = [x]_J \text{ para todo } x \in A.$$

La función h/G se define en términos de A/G como:

$$h/G = \{([x]_G, [y]_G) \in A/G \times A/G : (h(x), h(y)) \in G\}.$$

Por otro lado, la función h/H se define como:

$$h/H = \{([x]_H, [y]_H) \in A/H \times A/H : (h(x), h(y)) \in H\}.$$

Dado que $G \subseteq H \subseteq J$, podemos escribir:

$$h/G = h/H \circ g/G.$$

Esto se sigue de que si $([x]_G, [y]_G) \in h/G$, entonces:

$$(h(x), h(y)) \in G,$$

lo cual es equivalente a decir que:

$$h(x) \text{ y } h(y) \text{ están en la misma clase de equivalencia en } G.$$

Como $G \subseteq H$, se cumple que:

$$([x]_H, [y]_H) \in h/H \text{ si y solo si } (h(x), h(y)) \in H.$$

Luego, $h/G = h/H \circ g/G$, lo que concluye la primera parte.
2. Ahora se probará que $h = g \circ f$.
La función canónica f se define como:

$$f(x) = [x]_G \text{ para todo } x \in A.$$

Dado que h y g son funciones canónicas asociadas con J y H, respectivamente, se tiene que:

$$h(x) = [x]_J \text{ y } g(x) = [x]_H.$$

Como g y f son funciones canónicas, podemos escribir:

$$h = g \circ f.$$

Finalmente, se concluye que:

$$h/G = h/H \circ g/G.$$

□

Ejercicio 3.45. Sea $f : A \to A$ una función, y sea G la relación de equivalencia determinada por f. Prueba que $f \circ f = f$ si y solo si $z \in G_x \implies f(z) \in G_x$ para todo $z, x \in A$.

Solución:
1. Supongamos que $f \circ f = f$. Esto significa que:

$$f(f(x)) = f(x) \text{ para todo } x \in A.$$

Queremos probar que si $z \in G_x$, entonces $f(z) \in G_x$. Si $z \in G_x$, entonces por definición de G:

$$f(x) = f(z).$$

Aplicando f a ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$f(f(x)) = f(f(z)).$$

Dado que $f \circ f = f$, se tiene:

$$f(f(x)) = f(x) \text{ y } f(f(z)) = f(z).$$

Entonces:

$$f(x) = f(z).$$

Por lo tanto, $f(z) \in G_x$, ya que por definición de G_x:

$$f(z) \in G_x \text{ si y solo si } f(x) = f(z).$$

2. Supongamos que $z \in G_x \implies f(z) \in G_x$ para todo $z, x \in A$. Queremos probar que:

$$f \circ f = f.$$

Para un $x \in A$, consideremos cualquier $z \in G_x$. Según nuestra suposición:

$$f(z) \in G_x \text{ si } z \in G_x.$$

Esto significa que:

$$f(x) = f(z) \implies f(f(z)) = f(x).$$

En particular, si tomamos $z = f(x)$, entonces $f(f(x)) \in G_x$ (ya que $f(x) \in G_x$).

Por lo tanto:

$$f(f(x)) = f(x).$$

Esto concluye la prueba de que $f \circ f = f$.