Apuntes de Matemática - UCE

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Juan Sebastian Obando Pallo

FOLLETO - Capítulo 2: Funciones.

Lógica y Teoría de Conjuntos.

FOLLETO DE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CARRERA DE MATEMÁTICA No. 1 (1)

FOLLETO - CAPÍTULO 2: FUNCIONES.: LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS.

Sebastian Obando.

Responsable de la Edición: J.S.Obando

Registro de derecho autoral No. *(1)
ISBN: 000-0-00000-000

Publicado en linea,
Quito, Ecuador.

Primera edición: 2024
Primera impresión: 2024

Índice general

CAPÍTULO 1

CLASES Y CONJUNTOS

https://github.com/Sebastian0142/Apuntes-de-logica

CAPÍTULO 2

FUNCIONES

2.1 IDEA INTUITIVA - INTRODUCCIÓN.

Qué son las funciones de una variable?- BLUE DOT

https://www.youtube.com/shorts/PFLsC0f4Lus

2.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y DEFINICIONES

Definición 2.1: –(Función)–

Sean A y B clases y f una subclase de AXB. Una función de A en B, es una tripleta $\langle f, A, B\rangle$, que cumple las siguientes propiedades:

F_1) $\forall x \in A, \exists y \in B$, talque, $(x,y) \in f$.

F_2) Si $(x,y_1) \in f$ y $(x,y_2) \in f$, entonces, $y_1 = y_2$.

Es común escribir, $f : A \longrightarrow B$ en lugar de $\langle f, A, B\rangle$.

Definición 2.2

Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Si $(x,y) \in f$ se dice que:

i) y es la imagen de x. (Con respecto de f).

ii) x es la pre-imagen de y. (Con respecto de f).

iii) f asigna x a y. (f mapea x a y). Em símbolos, $x \mapsto y$.

Teorema 2.1

Sean A y B clases y f un grafo. Entonces: $f : A \longrightarrow B$ es una función si, y solo si:

i) F_2 se cumple,

ii) $domf = A$,

iii) $ranf \subseteq B$.

Demostración. Sean A y B clases arbitrarias y f un grafo genérico.

a) Primero se supone que, $f : A \longrightarrow B$ es una función, y se va a demostrar i), ii) y iii).

i) Se comprueba de manera directa, pues por hipótesis $f : A \longrightarrow B$ es función.

ii) Se va a demostrar que, $domf = A$, por el literal iv) del Teorema 5, se debe comprobar:

1) $domf \subseteq A$. Por la Definición 9 se debe comprobar que, si $x \in domf$, entonces, $x \in A$.

$$\begin{aligned} Sea\ x \in domf &\Longrightarrow \exists y \ni (x,y) \in f,\ por\ la\ Definicin\ 24 \\ &\Longrightarrow (x,y) \in (AXB),\ pues,\ f \subseteq (AXB) \\ &\Longrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

2) $A \subseteq domf$. Por la Definición 9 se debe comprobar que, si $x \in A$, entonces, $x \in domf$.

$$\begin{aligned} Sea\ x \in A &\Longrightarrow \exists y \ni (x,y) \in f,\ por\ F_1 \\ &\Longrightarrow x \in domf.\ Por\ la\ Definicin\ 24 \end{aligned}$$

De 1) y 2) se concluye que, $domf = A$.

ii) Se va a demostrar que, $ranf \subseteq B$. Por la Definición 9 se debe demostrar que, si $y \in ranf$, entonces, $y \in B$.

$$\begin{aligned} Sea\ y \in ranf &\Longrightarrow \exists x \ni (x,y) \in f,\ por\ la\ Definicin\ 25 \\ &\Longrightarrow (x,y) \in (AXB),\ pues,\ f \subseteq (AXB) \\ &\Longrightarrow y \in B. \end{aligned}$$

b) Ahora se supone que i), ii) y iii) se cumple y vamos a demostrar que $f : A \longrightarrow B$ es una función. Para ello, se demuestra lo siguiente,

i) $f \subseteq (AXB)$. Por la Definición 9, se debe comprobar que si, $(x,y) \in$

f, entonces, $(x,y) \in (AxB)$.

$$\begin{aligned} Sea\ (x,y) \in f &\Longrightarrow x \in donf \wedge y \in ranf, \\ &\Longrightarrow x \in A \wedge y \in B, \\ &\Longrightarrow (x,y) \in (AxB). \end{aligned}$$

ii) F_1, Sea $x \in A$ arbitrario, luego, $x \in domf$. Asi, por la Definición 24, se tiene que, $\exists y \ni (x,y) \in f$.

ii) F_2, se cumple de manera inmedita por el literal i) del Teorema.

Como A y B clases arbitrarias y f un grafo genérico de a) y b) se demuetra el Teorema. □

● **Observación.** Del Teorema 24, se deduce que, si $f : A \longrightarrow B$ es una función, entonces, A es el dominio de f y el rango de f esta contenido en B. Se dice que B es el codominio de $f : A \longrightarrow B$.

Corolario 3. Sean A y B clases y $f : A \longrightarrow B$ una función. Si C es cualquier clase talque $ranf \subseteq C$, entonces, $f : A \longrightarrow C$ es una función.

Demostración. Sean A y B clases arbitrarias. Como $f : A \longrightarrow B$ una función se cumple lo siguiente,

i) F_2 se cumple,

ii) $domf = A$,

iii) $ranf \subseteq B$.

De lo anterior se tiene que, F_2 se cumple, y que $domf = A$, además por hipótesis se tiene que $ranf \subseteq C$. Así, se cumple i), ii) y iii) del Teorema 24, lo que concluye que, $f : A \longrightarrow C$, es función. □

Notación: Sean $f : A \longrightarrow B$ una función y $x \in A$. Se acostumbra a usar el símbolo $f(x)$, para designar la imagen de x, es decir, $y = f(x)$. Así, $y = f(x)$ tiene el mismo significado que $(x,y) \in f$. Además,

F_1) $\forall x \in A, \exists y \in B, y = f(x)$.

F_2) Si $y_1 = f(x)$ y $y_2 = f(x)$, entonces, $y_1 = y_2$.

F_2') Si $x_1 = x_2$, entonces, $f(x_1) = f(x_2)$.

Teorema 2.2

Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ funciones. Entonces, $f = g$, si, y solo si, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ funciones arbitrarias.

i) Primero se supone que $f = g$ y se va a demostrar que, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

$$\begin{aligned} Sea\ x \in A\ tal que\ y = f(x) &\Longrightarrow (x, y) \in f, \\ &\Longrightarrow (x, y) \in g,\ pues\ f = g \\ &\Longrightarrow y = g(x). \end{aligned}$$

Dado que x es arbitrario, se concluye que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

ii) Ahora se va a suponer que, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$, y se va a demostrar que, $f = g$.

$$\begin{aligned} Sea\ (x, y) \in f &\Longleftrightarrow y = f(x), \\ &\Longleftrightarrow y = g(x),\ pues\ f(x) = g(x) \\ &\Longleftrightarrow (x, y) \in g. \end{aligned}$$

De esto se concluye que, $f = g$.

Como $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones arbitrarias de i) y ii) se demuestra el Teorema. $\square$

Definición 2.3: –(Función inyectiva)–

Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice inyectiva si tiene la siguiente propiedad,

INJ. Si $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$, entonces, $x_1 = x_2$.

INJ′. Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $x_1 = x_2$.

Definición 2.4

[(Función sobreyectiva)]Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice sobreyectiva si tiene la siguiente propiedad,

$$SURJ. \forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

Definición 2.5: –(Función biyectiva)–

Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice biyectiva, si, y solo si, es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 2.6: –(Correspondencia 1-1)–

Sean A y B clases. Si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$, se dice que A esta en correspondencia uno a uno con B.

2.2.1 Ejemplo de funciones.

Ejemplo 2.1. –Función Identidad– Sea A una clase, la función identidad en A, se escribe como $I_A : A \longrightarrow A$. Para todo $x \in A$.

$$I_A(x) = x$$

En otras palabras,

$$I_A = \{(x, x) : x \in A\}$$

Es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Ejemplo 2.2. –Función constante– Sea A y B clases. Sea $b \in B$, $K_b : A \longrightarrow B$ tal que

$$K_b(x) = b.$$

Para todo $x \in A$, en otras palabras,

$$K_b = \{(x, b) : x \in A\}$$

No es inyecttiva, ni sobreyectiva.

Ejemplo 2.3. –Función Inclusión– Sea A una clase y B subclase de A. Así $E_B : B \longrightarrow A$, tal que $E_B(x) = x$, para todo $x \in B$.

Ejemplo 2.4. –Función Característica– Sea 2 elementos $\{0, 1\}$. Si A es una clase y $B \subset A$ tal que $C_B : A \longrightarrow 2$ con

$$C_B(x) = \begin{cases} 0 \text{ si} x \in B \\ 1 \text{ si} x \notin B \end{cases}$$

Ejemplo 2.5. –Función Restricción– Sea $f : A \longrightarrow B$ y $C \subseteq A$ tal que $f_{[C]}$:

$C \longrightarrow B$, para toda $x \in C$ tal que

$$f_{[C]}(x) = f(x)$$

En otras palabras

$$f_{[C]} = \{(x,y) : (x,y) \in f \wedge x \in C\}.$$

Teorema 2.3
Si $f : B \cup C \longrightarrow A$ es una función, entonces $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$.

● **Observación.** Tenemos,
$[g \circ f](x) = g(f(x))$ y $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$

Teorema 2.4
Si $f : B \cup C \longrightarrow A$, entonces, $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$.

Demostración. Se supone que, $f : B \cup C \longrightarrow A$, se va a demostrar que, $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$.

$$\begin{aligned}
\textit{Sea } (x,y) \in f &\iff x \in (B \cup C) \wedge y \in \operatorname{ran} f, && \text{;Por Def 33} \\
&\iff (x \in B \vee x \in C) \wedge y \in \operatorname{ran} f, && \text{;Por Def 10} \\
&\iff (x \in B \wedge y \in \operatorname{ran} f) \vee (x \in C \wedge y \in \operatorname{ran} f) && \text{;Por literal v), Teo 4} \\
&\iff (x,y) \in f_{[B]} \vee (x,y) \in f_{[C]}, && \text{;Por Def 33} \\
&\iff (x,y) \in (f_{[B]} \cup f_{[C]}) && \text{;Por Def 10}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que, $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$. □

Teorema 2.5
Sean $f_1 : B \longrightarrow A$ y $f_2 : C \longrightarrow A$ funciones, donde $B \cap C \neq \varnothing$. Si $f = f_1 \cup f_2$, entonces, se cumple lo siguiente:

i) $f : B \cup C \longrightarrow A$ es una función,

ii) $f_1 = f_{[B]}$ y $f_2 = f_{[C]}$.

Demostración. Se supone que, $f = f_1 \cup f_2$, talque, $f_1 : B \longrightarrow A$ y $f_2 : C \longrightarrow A$ son funciones, dónde, $B \cap C \neq \varnothing$. Se va a demostrar:

i) $f : B \cup C \longrightarrow A$ es una función. Por la Definición 32 se debe comprobar lo siguiente:

a) $f \subseteq (B \cup C) \times A$. Por la Definición 9, se debe demostrar que, si $(x,y) \in f$, entonces, $(x,y) \in (B \cup C) \times A$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Sea } (x,y) \in f &\Longrightarrow (x,y) \in (f_1 \cup f_2); \text{Por hipótesis.}\\
&\Longrightarrow (x,y) \in f_1 \vee (x,y) \in f_2; \text{Por Def 10.}\\
&\Longrightarrow (x \in dom f_1 \wedge y \in ran f_1) \vee (x \in dom f_2 \wedge y \in ran f_2),\\
&\Longrightarrow (x \in B \wedge y \in A) \vee (x \in C \wedge y \in A), ; \text{Por ii), iii), Teo 24.}\\
&\Longrightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge y \in A; \text{Por v),Teo 4.}\\
&\Longrightarrow x \in (B \cup C) \wedge y \in A; \text{Por Def 10.}\\
&\Longrightarrow (x,y) \in (B \cup C) \times A.
\end{aligned}
$$

Así, se concluye que, $f \subseteq (B \cup C) X A$.

b) Se demostrará F_1. Es decir, se comprobará que, $\forall x \in (B \cup C), \exists y \in A \ni (x,y) \in f$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Sea } x \in (B \cup C) &\Longrightarrow x \in B \vee x \in C, ; \text{Por Def 10}\\
&\Longrightarrow x \in dom f_1 \vee x \in dom f_2, ; \text{Por ii), Teo 24}\\
&\Longrightarrow \exists y \ni (x,y) \in f_1 \vee \exists y \ni (x,y) \in f_2, ; \text{Por Def 24}\\
&\Longrightarrow \exists y \ni (x,y) \in (f_1 \cup f_2), ; \text{Por Def 10}\\
&\Longrightarrow \exists y \ni (x,y) \in f.
\end{aligned}
$$

Así, F_1, se cumple.

c) Se demostrará F_2. Es decir, se comprobará que, si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, entonces, $y_1 = y_2$. Sean $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, luego, por hipótesis se tiene que, $(x, y_1) \in (f_1 \cup f_2)$ y $(x, y_2) \in (f_1 \cup f_2)$.
Asi, por la Definición 10 se tiene que,
$[(x, y_1) \in f_1 \vee (x, y_1) \in f_2]$ y $[(x, y_2) \in f_1 \vee (x, y_2) \in f_2]$,
Por el literal vi) del Teorema 4, se tiene que,
$\{(x, y_1) \in f_1 \wedge [(x, y_2) \in f_1 \vee (x, y_2) \in f_2]\} \vee \{(x, y_1) \in f_2 \wedge [(x, y_2) \in f_1 \vee (x, y_2) \in f_2]\}$,
Por el literal v) del Teorema 4, se tiene que,
$[(x, y_1) \in f_1 \wedge (x, y_2) \in f_1] \vee [(x, y_1) \in f_1 \wedge (x, y_2) \in f_2]$, ó,
$[(x, y_1) \in f_2 \wedge (x, y_2) \in f_1] \vee [(x, y_1) \in f_2 \wedge (x, y_2) \in f_2]$,
De lo anterior se tiene que,
$[(x, y_1) \in f_1 \wedge (x, y_2) \in f_1]$, entonces, $y_1 = y_2$, pues f_1 es función.
De manera similar, se tiene que,
$[(x, y_1) \in f_2 \wedge (x, y_2) \in f_2]$, entonces, $y_1 = y_2$, pues f_2 es función.

Por otra parte,
$[(x,y_1) \in f_1 \wedge (x,y_2) \in f_2]$, es falso, pues,
si $(x,y_1) \in f_1$, entonces, $x \in dom f_1 = C$,
si $(x,y_2) \in f_2$, entonces, $x \in dom f_2 = B$
Asi, $x \in (B \cap C)$. Pero por hipótesis,$(B \cap C) = \varnothing$, lo cual es una contradicción.
De manera análoga se tiene que,
$[(x,y_1) \in f_2 \wedge (x,y_2) \in f_1]$, es falso, pues,
si $(x,y_1) \in f_2$, entonces, $x \in dom f_2 = B$,
si $(x,y_2) \in f_1$, entonces, $x \in dom f_1 = C$
Asi, $x \in (B \cap C)$. Pero por hipótesis,$(B \cap C) = \varnothing$, lo cual es una contradicción.
Asi, se tiene lo siguiente:
$y_1 = y_2 \vee F \vee F \vee y_1 = y_2$,
Por lo tanto, se concluye que, $y_1 = y_2$.
Así, F_2, se cumple.

De a), b) y c) se concluye que, $f : B \cup C \longrightarrow A$ es una función.

ii) Se va a demostrar que, $f_1 = f_{[B]}$ y $f_2 = f_{[C]}$.

a) Primero se va a demostrar, que $f_1 = f_{[B]}$. Por el literal iv) del Teorema 5, se debe demostrar que:

1) $f_1 \subseteq f_{[B]}$. Por la Definición 9 se debe demostrar que, si $(x,y) \in f_1$, entonces $(x,y) \in f_{[B]}$.

$$\begin{aligned}
Sea\ (x,y) \in f_1 &\Longrightarrow x \in dom f_1 \wedge y \in ran f_1 && \text{;Por Def 33} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in ran f_1 && \text{;Por literal ii), Teo 24} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in (ran f_1 \cup ran f_2) && \text{;Por Def 26} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in ran(f_1 \cup f_2) && \text{;Por literal ii), Teo 22} \\
&\Longrightarrow x \in B\ y \in ran f && \text{;Por hipótesis} \\
&\Longrightarrow (x,y) \in f_{[B]}.
\end{aligned}$$

2) $f_{[B]} \subseteq f_1$. Por la Definición 9 se debe demostrar que, si $(x,y) \in$

$f_{[B]}$, entonces, $(x,y) \in f_1$.

$$\begin{aligned}
Sea\ (x,y) \in f_{[B]} &\Longrightarrow x \in domf_{[B]} \wedge y \in ranf_{[B]}; \text{Por Def 33} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in ranf_{[B]}; \text{Por literal ii), Teo 24} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in (ranf_{[B]} \cup ranf_{[C]}); \text{Por Def 26} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in ran(f_{[B]} \cup f_{[C]}); \text{Por literal ii),Teo 22} \\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in ranf; \text{Por Teo 26} \\
&\Longrightarrow (x,y) \in f, \\
&\Longrightarrow (x,y) \in (f_1 \cup f_2); \text{Por hipótesis} \\
&\Longrightarrow (x,y) \in f_1 \vee (x,y) \in f_2; \text{Por Def 10}
\end{aligned}$$

(x,y) no puede estar en f_2, pues si $(x,y) \in f_2$, entonces, $x \in C$, pero, $x \in B$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(x,y) \in f_1$.

De 1) y 2), se concluye que, $f_1 = f_{[B]}$.

b) Ahora se va a demostrar, que $f_2 = f_{[C]}$. Por el literal iv) del Teorema 5, se debe demostrar que:

1) $f_2 \subseteq f_{[C]}$. Por la Definición 9 se debe demostrar que, si $(x,y) \in f_2$, entonces $(x,y) \in f_{[C]}$.

$$\begin{aligned}
Sea\ (x,y) \in f_2 &\Longrightarrow x \in domf_2 \wedge y \in ranf_2; \text{Por Def 33} \\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in ranf_2; \text{Por literal ii), Teo 24} \\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in (ranf_1 \cup ranf_2); \text{Por Def 26} \\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in ran(f_1 \cup f_2); \text{Por literal ii), Teo 22.} \\
&\Longrightarrow x \in C\ y \in ranf; \text{Por hipótesis} \\
&\Longrightarrow (x,y) \in f_{[C]}.
\end{aligned}$$

2) $f_{[C]} \subseteq f_2$. Por la Definición 9 se debe demostrar que, si $(x,y) \in$

$f_{[C]}$, entonces, $(x,y) \in f_2$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Sea } (x,y) \in f_{[C]} &\Longrightarrow x \in dom f_{[C]} \wedge y \in ran f_{[C]}; \text{Por Def 33}\\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in ran f_{[C]}; \text{Por literal ii),Teo 24}\\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in (ran f_{[B]} \cup ran f_{[C]}); \text{Por Def 26}\\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in ran(f_{[B]} \cup f_{[C]}); \text{Por literal ii),Teo 22}\\
&\Longrightarrow x \in C \wedge y \in ran f; \text{Por Teo 26}\\
&\Longrightarrow (x,y) \in f,\\
&\Longrightarrow (x,y) \in (f_1 \cup f_2); \text{Por hipótesis}\\
&\Longrightarrow (x,y) \in f_1 \vee (x,y) \in f_2.; \text{Por Def 10}
\end{aligned}
$$

(x,y) no puede estar en f_1, pues si $(x,y) \in f_1$, entonces, $x \in B$, pero, $x \in C$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(x,y) \in f_2$.

De 1) y 2), se concluye que, $f_2 = f_{[C]}$.

De i) y ii) se concluye el Teorema. □

2.2.2 Ejercicios de la Sección 2.2

Ejercicio 2.1. Demuestre que si $f : A \to B$ es una función inyectiva y $C \subseteq A$, entonces $f_[C] : C \to B$ es una función inyectiva.

Demostración. Para demostrar que si $f : A \to B$ es una función inyectiva y $C \subseteq A$, entonces $f[C] : C \to B$ es una función inyectiva, procedemos de la siguiente manera:

- Inyectividad de $f[C]$

  Queremos demostrar que $f[C]$ es inyectiva, es decir, para cualesquiera $x_1, x_2 \in C$, si $f[C](x_1) = f[C](x_2)$, entonces $x_1 = x_2$. Supongamos que $x_1, x_2 \in C$ y que $f[C](x_1) = f[C](x_2)$. Por la definición de $f[C]$, esto implica que:
  $$f(x_1) = f(x_2).$$
  Dado que f es inyectiva en todo A, esto implica que:
  $$x_1 = x_2.$$
  Por lo tanto, hemos demostrado que $f[C](x_1) = f[C](x_2)$ implica $x_1 = x_2$, lo que significa que $f[C]$ es inyectiva.

□

Ejercicio 2.2. Sea A una clase y sea $f = \{(x, y) : x \in A\}$. Demuestre que f es una función biyectiva de A a I_A.

Demostración. Para mostrar que $f = \{(x, (x, x)) : x \in A\}$ es una función biyectiva de A a IA, donde $IA = \{(x, x) : x \in A\}$, necesitamos demostrar que f es tanto inyectiva (uno a uno) como suprayectiva (sobre).

- Inyectividad
  Una función f es inyectiva si diferentes elementos en el dominio A se mapean a diferentes elementos en el codominio IA. Formalmente, f es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

  Consideremos dos elementos x_1 y x_2 en A tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Por la definición de f,

  $$f(x_1) = (x_1, x_1) \quad \text{y} \quad f(x_2) = (x_2, x_2).$$

  Entonces,
  $$(x_1, x_1) = (x_2, x_2).$$

  Para que los pares ordenados sean iguales, ambos componentes deben ser iguales, es decir,
  $$x_1 = x_2.$$

  Por lo tanto, f es inyectiva.

- Sobreyectividad

  Una función f es sobreyectiva si cada elemento en el codominio IA tiene una preimagen en el dominio A. Formalmente, f es sobreyectiva si para cada $y \in IA$, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

  Sea y un elemento arbitrario en IA. Por definición de IA, y es de la forma (a, a) para algún $a \in A$.

  Necesitamos encontrar un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

  Elijamos $x = a$. Entonces,

  $$f(x) = f(a) = (a, a) = y.$$

  Dado que tal x existe para cada $y \in IA$, f es sobreyectiva. Dado que f es tanto inyectiva como sobreyectiva, f es una biyección.

  Por lo tanto, f es una función biyectiva de A a IA.

□

Ejercicio 2.3. Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ funciones. Demuestre que si $f \subseteq g$ entonces $f = g$.

Demostración. Para demostrar que $f = g$, por el Teorema 25, debemos demostrar que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.
Sea $x \in A$, como f es definida por una función $f : A \to B$, entonces $f(x) = y$, que es equivalente a $(x, y) \in f$. Por hipótesis $f \subset g$, por lo tanto$(x, y) \in g$, es decir $g(x) = y$.
Por transitividad, $f(x) = g(x)$.
Como $x \in A$ es arbitrario, se tiene que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.
Por lo tanto $f = g$. □

Ejercicio 2.4. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. El producto de f y g es la función definida de la siguiente manera:

$$[f \cdot g](x, y) = (f(x), g(y)) \quad \text{para cada } (x, y) \in A \times C.$$

Demuestre que $f \cdot g$ es una función de $A \times C$ a $B \times D$. Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces $f \cdot g$ es inyectiva, y si f y g son sobreyectivas, entonces $f \cdot g$ es sobreyectiva. Demuestre que $\mathrm{ran}(f \cdot g) = (\mathrm{ran} f) \times (\mathrm{ran} g)$.

Demostración.
- Demuestre que $f \cdot g$ es una función de $A \times C$ a $B \times D$. Por el Teorema 24 debemos probar que
  i) F_2 se cumple.
  ii) $dom(f \cdot g) = A \times C$.
  iii)$rang(f \cdot g) \subset B \times D$.
  i) Sean $x = (x_1, x_2) \in A \times C$, Si $(f \cdot g)(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = y$ y $(f \cdot g)(x_1, x_2) = (y'_1, y'_2) = y'$.
  Probaremos que $y = y'$, para ello diremos que :
  si $(f \cdot g)(x) = y \Longrightarrow (f \cdot g)(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$
  $\Longrightarrow (f(x_1), g(x_2)) = (y_1, y_2)$
  Por el Teorema 15 se tiene que:

$$y_1 = f(x_1) \Longrightarrow (x_1, y_1) \in f. \quad y \quad y_2 = g(x_2) \Longrightarrow (x_2, y_2) \in g \tag{2.1}$$

  Por otro lado tenemos que :
  si $(f \cdot g)(x) = y \Longrightarrow (f \cdot g)(x_1, x_2) = (y'_1, y'_2)$
  $\Longrightarrow (f(x_1), g(x_2)) = (y'_1, y'_2)$
  Por el Teorema 15 se tiene que:

$$y_1' = f(x_1) \Longrightarrow (x_1, y_1') \in f. \quad y \quad y_2' = g(x_2) \Longrightarrow (x_2, y_2') \in g \tag{2.2}$$

como f y g son funciones y de (1)y (2) se tiene que :

$$y_1 = y_1' \quad \text{y} \quad y_2 = y_2'$$

Así,$y = y'$
ii)$dom(f \cdot g) = A \times C$.
Sea $x \in dom(f \cdot g)$, donde $x = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
x \in dom(f \cdot g) &\Longleftrightarrow \exists y \ni (x, y) \in f \cdot g \\
&\Longleftrightarrow \exists y, (f \cdot g)(x) = y \\
&\Longleftrightarrow (f(x_1), g(x_2)) = (y_1, y_2) \\
&\Longleftrightarrow (f(x_1), g(x_2)) = (y_1, y_2) \\
&\Longleftrightarrow f(x_1) = y_1 \quad y \quad g(x_2) = y_2 \\
&\Longleftrightarrow (x_1, y_1) \in f \quad y \quad (x_2, y_2) \in g \\
&\Longleftrightarrow (x_1, y_1) \in A \times B \quad y \quad (x_2, y_2) \in C \times D \\
&\Longleftrightarrow x_1 \in A \wedge y_1 B \quad y \quad x_2 \in C \wedge y_2 D \\
&\Longleftrightarrow x_1 \in A \quad y \quad x_2 \in C \\
&\Longleftrightarrow (x_1, x_2) \in A \times C \\
&\Longleftrightarrow x \in A \times C
\end{aligned}$$

iii) Ahora probaremos que $rang(f \cdot g) \subset B \times D$
Sea $y = (y_1, y_2) \in f \cdot g$,

$$\begin{aligned}
y \in rang(f \cdot g) &\Longrightarrow \exists x \ni (x, y)(f \cdot g) \\
&\Longrightarrow \exists x, (f \cdot g)(x) = y \\
&\Longrightarrow (f(x_1), g(x_2)) = (y_1, y_2) \\
&\Longrightarrow (x_1, y_1) \in f \quad y \quad (x_2, y_2) \in g \\
&\Longrightarrow (x_1, y_1) \in A \times B \quad y \quad (x_2, y_2) \in C \times D \\
&\Longrightarrow x_1 \in A \wedge y_1 B \quad y \quad x_2 \in C \wedge y_2 D \\
&\Longrightarrow y_1 \in B \quad y \quad y_2 \in D \\
&\Longrightarrow (y_1, y_2) \in B \times D \\
&\Longrightarrow y \in B \times D
\end{aligned}$$

Por i),ii) y iii) f es una fución.

- Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces $f \cdot g$ es inyectiva

□

Ejercicio 2.5. Si $f : B \cup C \to A$ es una función, demuestre que $f = f_{[B]} \cup f_{[c]}$.

Demostración. Para demostrar que $f = f_{[B]} \cup f_{[c]}$, por el literal iv) del Teorema

5, debemos probar qué $f \subset f_{[B]} \cup f_{[c]}$ y $f_{[B]} \cup f_{[c]} \subset f$.

- $f \subset f_{[B]} \cup f_{[c]}$
  Sea $y \in f$,por la Definición existe un $x \in B \cup C$, talque $f(x) = y$, donde tenemos los siguientes casos :
  Si $x \in B$, entonces $f(x) \in f[B]$.
  Si $x \in C$, entonces $f(x) \in f[C]$.
  En ambos casos, $f(x) \in f[B] \cup f[C]$. Por lo tanto, $y \in f[B] \cup f[C]$, lo que implica que $f[B \cup C] \subseteq f[B] \cup f[C]$.

- $f \subseteq f[B \cup C]$
  recoredemos que podemos decir que Sea $y \in f[B] \cup f[C]$. Entonces, $y \in f[B]$ o $y \in f[C]$.
  Si $y \in f[B]$, entonces existe algún $b \in B$ tal que $f(b) = y$. Como $b \in B \subseteq B \cup C$, tenemos $f(b) \in f[B \cup C]$.
  - Si $y \in f[C]$, entonces existe algún $c \in C$ tal que $f(c) = y$. Como $c \in C \subseteq B \cup C$, tenemos $f(c) \in f[B \cup C]$.

  En ambos casos, $y \in f[B \cup C]$, lo que implica que $f[B] \cup f[C] \subseteq f[B \cup C]$.

  Dado que hemos demostrado ambas inclusiones, $f[B \cup C] = f[B] \cup f[C]$.

□

Ejercicio 2.6. Sean $f_1 : A \to B$ y $f_2 : C \to D$ funciones biyectivas, donde $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$. Sea $f = f_1 \cup f_2$; demuestre que $f : A \cup C \to B \cup D$ es una función biyectiva.

Demostración. Para demostrar que $f : A \cup C \to B \cup D$ es una función biyectiva , debemos probar que :

- i) $f : A \cup C \to B \cup D$ sea inyectiva.
  Para demostrar que $f : A \cup C \to B \cup D$ por Definición de función inyectiva
  Sean $x_1, x_2 \in A \cup C$. Si $f(x_1) = f(x_2)$, debemos demostrar que $x_1 = x_2$. Para lo cual dividiremos en los siguientes casos.
  a) Si $x_1, x_2 \in A$. Por el Literal ii) del Teorema 27, tenemos que:
  $f(x_1) = f_1(x_1)$ y $f(x_2) = f_1(x_2)$
  Asi, $f_1(x_1) = f_1(x_2)$. como f_1 es inyectiva, entonces $x_1 = x_2$.
  b) Si $x_1, x_2 \in C$. Por el Literal ii) del Teorema 27, tenemos que:

$f(x_1) = f_2(x_1)$ y $f(x_2) = f_2(x_2)$
Asi, $f_2(x_1) = f_2(x_2)$. como f_2 es inyectiva, entonces $x_1 = x_2$.
c) Si $x_1 \in A$ y $x_2 \in C$ o $x_1 \in C$ y $x_2 \in A$. Estos casos se descartan, ya que $A \cap C = \emptyset$.
Por lo tanto, $f : A \cup C \to B \cup D$ sea inyectiva.

- ii) $f : A \cup C \to B \cup D$ sea sobreyectiva.
  Ahora, probaremos que $f : A \cup C \to B \cup D$ sea sobreyectiva.Sea $y \in B \cup C$, se va demostrar que existe un $x \in A \cup C$ talque $f(x) = y$.
  De igual manera, analizaremos por casos:
  a) Si $y \in B$. Como f_1 es sobreyectiva, existe $x \in A$ talque $f_1(x) = y$.
  Como $x \in Af(x) = f_1(x) = y$.
  b) Si $y \in D$. Como f_2 es sobreyectiva, existe $x \in C$ talque $f_2(x) = y$.
  Como $x \in Cf(x) = f_2(x) = y$.
  c) Si $y \in B \cup C$. No se analiza estos casos ya que $B \cap D = \emptyset$. Por i) y ii)$f : A \cup C \to B \cup D$ es una función biyectiva .

□

Ejercicio 2.7. Sea $f : B \to A$ y $g : C \to A$ funciones, y suponga que $f_{[B \cap C]} = g_{[B \cap C]}$. Si $h = f \cup g$, demuestre que $h : B \cup C \to A$ es una función, $f = h_{[B]}$ y $g = h_{[C]}$.

Demostración. Para demostrar que si $f : B \to A$ y $g : C \to A$ son funciones, y se supone que $f[B \cap C] = g[B \cap C]$, entonces $h = f \cup g$ es una función $h : B \cup C \to A$, y además que $f = h[B]$ y $g = h[C]$, procedemos de la siguiente manera: Para ello utilizaremos Definición de $h = f \cup g$
La función $h = f \cup g$ está definida como:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B, \\ g(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

.
Así, si $x \in B \cap C$, entonces $h(x) = f(x)$ y $h(x) = g(x)$. Dado que $f[B \cap C] = g[B \cap C]$, por hipótesis.Ahora se va aprobar que $h : B \cup C \to A$ y es una función

- Demostración de que $h : B \cup C \to A$ es una función.
  Para que h sea una función, debe estar bien definida, lo que significa que debe asignar un valor único en A a cada $x \in B \cup C$. Si $x \in B \setminus C$, entonces $h(x) = f(x)$. Si $x \in C \setminus B$, entonces $h(x) = g(x)$. Si $x \in B \cap C$,

entonces $f(x) = g(x)$ por la suposición dada, por lo tanto, $h(x)$ toma el mismo valor ya sea que usemos f o g. Por lo tanto, h está bien definida y $h : B \cup C \to A$ es una función.

- $f = h[B]$
  Queremos mostrar que h restringida a B es igual a f, es decir, para todo $x \in B$, $h(x) = f(x)$. Para cualquier $x \in B$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B, \\ g(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

  Dado que $x \in B$, por la definición de h, tenemos $h(x) = f(x)$.Por lo tanto, $h[B] = f$.

- $g = h[C]$
  Queremos mostrar que h restringida a C es igual a g, es decir, para todo $x \in C$, $h(x) = g(x)$. Para cualquier $x \in C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B, \\ g(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

  Dado que $x \in C$, por la definición de h, tenemos $h(x) = g(x)$. Por lo tanto, $h[C] = g$.

□

Ejercicio 2.8. Sea $f : A \to B$ una función; demuestre que f está en correspondencia uno a uno con A. Por un grafo funcional entendemos un grafo que satisface la Condición F2. Así, G es un grafo funcional si y solo si

$$(x, y_1) \in G \text{ y } (x, y_2) \in G \implies y_1 = y_2.$$

Demostración. Para demostrar que $f : A \to B$ es una función en correspondencia uno a uno con A y entender lo que es un grafo funcional que satisface la condición $F2$, procedemos de la siguiente manera:

1. **Definición de inyectividad**:

Una función f es inyectiva si para todos $x_1, x_2 \in A$, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

2. **Demostración de que f está en correspondencia uno a uno con A**:

Esto se refiere a demostrar que f es inyectiva. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ para algunos $x_1, x_2 \in A$. Queremos demostrar que esto implica $x_1 = x_2$.

Por definición de inyectividad, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces necesariamente $x_1 = x_2$. Por lo tanto, f está en correspondencia uno a uno con A.

3. **Definición de un grafo funcional**:

Un grafo funcional G es un conjunto de pares (x, y) tal que cada x en el dominio tiene un único y en el codominio asociado a él, es decir, satisface la condición $F2$:

$$(x, y_1) \in G \text{ y } (x, y_2) \in G \implies y_1 = y_2.$$

4. **Relación entre función inyectiva y grafo funcional**:

Para una función $f : A \to B$, el grafo funcional de f es el conjunto de pares $G = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

La condición $F2$ para G implica que si $(x, y_1) \in G$ y $(x, y_2) \in G$, entonces $y_1 = y_2$. Esto se traduce en que f asigna un único valor $f(x)$ a cada $x \in A$.

5. **Demostración de la condición** $F2$:

Supongamos que $(x, y_1) \in G$ y $(x, y_2) \in G$. Esto significa que $y_1 = f(x)$ y $y_2 = f(x)$. Por lo tanto, $y_1 = y_2$.

Esto muestra que G satisface la condición $F2$, y por lo tanto, G es un grafo funcional. □

Ejercicio 2.9. Si G es un grafo funcional, demuestre que toda subclase de G es un grafo funcional.

Demostración. Para demostrar que si G es un grafo funcional, entonces toda subclase de G es también un grafo funcional, procedemos de la siguiente manera:

1. **Definición de un grafo funcional**:

Un grafo funcional G es un conjunto de pares (x, y) tal que cada x en el dominio tiene un único y en el codominio asociado a él, es decir, satisface la condición $F2$:

$$(x, y_1) \in G \text{ y } (x, y_2) \in G \implies y_1 = y_2.$$

2. **Demostración de que toda subclase de** G **es un grafo funcional**:

Supongamos que G es un grafo funcional y sea G' una subclase de G, es decir, $G' \subseteq G$.

Queremos demostrar que G' también satisface la condición $F2$. Es decir, para todo $(x, y_1) \in G'$ y $(x, y_2) \in G'$, debemos mostrar que $y_1 = y_2$.

Dado que $G' \subseteq G$, cualquier par $(x, y) \in G'$ también pertenece a G. Entonces, si $(x, y_1) \in G'$ y $(x, y_2) \in G'$, también tenemos $(x, y_1) \in G$ y $(x, y_2) \in G$.

Como G es un grafo funcional, por la condición $F2$ para G, sabemos que:

$$(x, y_1) \in G \text{ y } (x, y_2) \in G \implies y_1 = y_2.$$

Por lo tanto, para $(x, y_1) \in G'$ y $(x, y_2) \in G'$, se sigue que $y_1 = y_2$. Esto implica que G' también satisface la condición $F2$.

En consecuencia, G' es un grafo funcional. $\square$

Ejercicio 2.10. Sea G un grafo. Demostrar que G es un grafo funcional si y sólo si para grafos arbitrarios H y J . $(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G)$

Demostración. Queremos demostrar que G es un grafo funcional si y solo si para grafos arbitrarios H y J,

$$(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G).$$

Primero, supongamos que si G es un grafo funcional, entonces $(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G)$

Supongamos que G es un grafo funcional. Tomemos cualquier par $(a, c) \in (H \circ G) \cap (J \circ G)$. Entonces, existe un b tal que:

$$(a, b) \in G \text{ y } (b, c) \in H$$

y

$$(a, b') \in G \text{ y } (b', c) \in J.$$

Dado que G es un grafo funcional, de $(a, b) \in G$ y $(a, b') \in G$, se sigue que $b = b'$. Por lo tanto, tenemos que:

$$(a, b) \in G \text{ y } (b, c) \in H \cap J.$$

Esto implica que $(a, c) \in (H \cap J) \circ G$. Así, hemos demostrado que:

$$(H \circ G) \cap (J$$

Esto implica que $(a, c) \in (H \cap J) \circ G$. Ahora tomemos cualquier par $(a, c) \in (H \cap J) \circ G$. Entonces, existe un b tal que:

$$(a, b) \in G \text{ y } (b, c) \in H \cap J.$$

Esto significa que $(b, c) \in H$ y $(b, c) \in J$. Por lo tanto, tenemos que:

$$(a, c) \in H \circ G \text{ y } (a, c) \in J \circ G.$$

Esto implica que $(a, c) \in (H \circ G) \cap (J \circ G)$. Así, hemos demostrado que:

$$(H \cap J) \circ G \subseteq (H \circ G) \cap (J \circ G).$$

Combinando las dos inclusiones, obtenemos:

$$(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G).$$

Ahora , supongamos que Si $(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G)$, entonces G es un grafo funcional. Supongamos que $(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G)$ para todos los grafos H y J. Queremos demostrar que G es un grafo funcional. Supongamos que $(a, b) \in G$ y $(a, b') \in G$. Definamos $H = \{(b, c)\}$ y $J = \{(b', c)\}$ donde c es un elemento arbitrario.

Entonces, $H \cap J = \varnothing$ si $b \neq b'$ y $(H \cap J) \circ G = \varnothing$. Por otro lado, $H \circ G = \{(a, c)\}$ y $J \circ G = \{(a, c)\}$. Si $b = b'$, tenemos:

$$(H \cap J) \circ G = (H \circ G) \cap (J \circ G) = \{(a, c)\}.$$

Por lo tanto, si $(a, b) \in G$ y $(a, b') \in G$, entonces $b = b'$, demostrando que G es un grafo funcional. □

Ejercicio 2.11. Sea G un grafo funcional. Demostrar que G es inyectivo si y sólo si para grafos arbitrarios J y H . $G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J)$

Queremos demostrar que G es inyectivo si y solo si para grafos arbitrarios H y J,

$$G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J).$$

Demostración. Priemro , vamos a suponer que si G es inyectivo, entonces $G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J)$

Supongamos que G es inyectivo. Tomemos cualquier par $(a, c) \in (G \circ H) \cap (G \circ J)$. Entonces, existe un b tal que:

$$(a, b) \in H \text{ y } (b, c) \in G$$

y

$$(a, b') \in J \text{ y } (b', c) \in G.$$

Dado que G es inyectivo, de $(b, c) \in G$ y $(b', c) \in G$, se sigue que $b = b'$. Por lo tanto, tenemos que:

$$(a, b) \in H \cap J \text{ y } (b, c) \in G.$$

Esto implica que $(a,c) \in G \circ (H \cap J)$. Así, hemos demostrado que:

$$(G \circ H) \cap (G \circ J) \subseteq G \circ (H \cap J).$$

Ahora tomemos cualquier par $(a,c) \in G \circ (H \cap J)$. Entonces, existe un b tal que:

$$(a,b) \in H \cap J \text{ y } (b,c) \in G.$$

Esto significa que $(a,b) \in H$ y $(a,b) \in J$. Por lo tanto, tenemos que:

$$(a,c) \in G \circ H \text{ y } (a,c) \in G \circ J.$$

Esto implica que $(a,c) \in (G \circ H) \cap (G \circ J)$. Así, hemos demostrado que:

$$G \circ (H \cap J) \subseteq (G \circ H) \cap (G \circ J).$$

Combinando las dos inclusiones, obtenemos:

$$G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J).$$

Ahora, suponemos que si $G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J)$, entonces G es inyectivo Supongamos que $G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J)$ para todos los grafos H y J. Queremos demostrar que G es inyectivo. Supongamos que $(x,y_1) \in G$ y $(x,y_2) \in G$. Definamos $H = \{(a,x)\}$ y $J = \{(b,x)\}$ donde $a \neq b$. Entonces, $H \cap J = \varnothing$ si $a \neq b$ y $G \circ (H \cap J) = \varnothing$. Por otro lado, $G \circ H = \{(a,y_1)\}$ y $G \circ J = \{(b,y_2)\}$. Si $y_1 = y_2$, tenemos:

$$G \circ (H \cap J) = (G \circ H) \cap (G \circ J) = \varnothing.$$

Por lo tanto, si $(x,y_1) \in G$ y $(x,y_2) \in G$, entonces $y_1 = y_2$, demostrando que G es inyectivo. □

2.3 Propiedades de funciones compuestas y funciones inversas

Teorema 2.6
Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones, entonces, $g \circ f : A \longrightarrow C$ es función.

Demostración. Se probara i), ii) y iii) del Teorema 24.

i) F_1 se cumple.

ii) F_2: Si $(x,y_1) \in g \circ f$ y $(x,y_2) \in g \circ f \Rightarrow y_1 = y_2$.
Se supone que $(x,y_1) \in g \circ f \wedge (x,y_2) \in g \circ f$, entonces por Definición 23, se tiene:

$$\exists z_1 \ni (x,z_1) \in f \wedge (z_1,y_1) \in g \wedge \exists z_2 \ni (x,z_2) \in f \wedge (z_2,y_2) \in g$$

$$\underbrace{(x_1,z_1) \in f \wedge (x,z_2) \in f}_{z_1 = z_2} \wedge \underbrace{(z_1,y_1) \in g \wedge (z_2,y_2) \in g}_{y_1 = y_2}$$

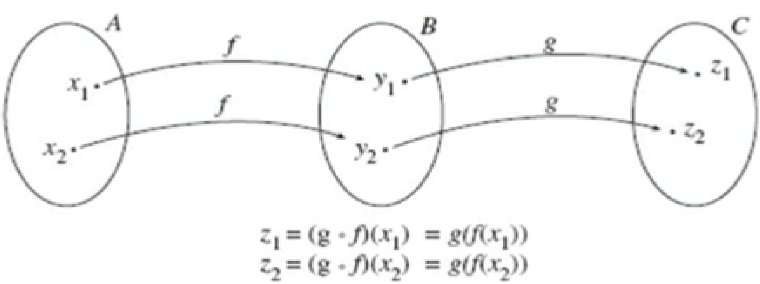
iii) Sea

$$\begin{aligned}
y \in rang \circ f &\Longrightarrow \exists \widetilde{x} \ni (\widehat{x},y) \in g \circ f, \text{Definición 25}\\
&\Longrightarrow \exists k \ni ((\widehat{x},k) \in f \wedge (k,y) \in g), \text{ Definición 23}\\
&\Longrightarrow \exists k \ni (\widehat{x},k) \in f \wedge \exists k \ni (x,y) \in g\\
&\Longrightarrow \exists k \ni (k,y) \in g\\
&\Longrightarrow y \in rang.\\
\Longrightarrow \text{Sea} y \in rang &\Longrightarrow \exists x \ni (x,y) \in g, \text{Definición 25}\\
&\Longrightarrow (x,y) \in B \times C, \text{g} \subseteq B \times C\\
&\Longrightarrow x \in B \wedge y \in C\\
&\Longrightarrow y \in C, \text{Teorema 1, literal ii).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $g \circ f$ por i), ii) y iii)

$\square$

● **Observación.** $[g \circ f] = g(f(x))$



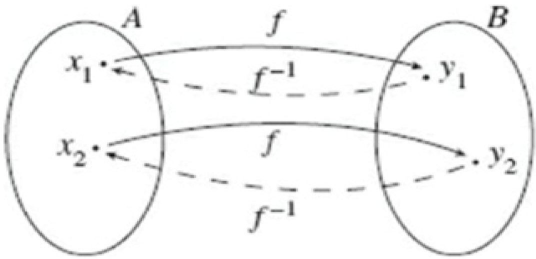
Se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
z_1 &= (g \circ f)(x_!) = g(f(x_1))\\
z_{''} &= (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)))
\end{aligned}$$

Definición 2.7

Sea una función $f : A \longrightarrow B$ se dice invertible si $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es una función.

● **Observación.** Sea una función $f : A \longrightarrow B$ y sobreyectiva entonces $y = f(x)$ si y solo si $x = f^{-1}(y)$.



Teorema 2.7

Si $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva entonces $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es biyectiva.

Demostración. Se usa el **Teorema 24, literal ii)** $domf = A$ y por la Definición de función sobreyectiva $ranf = B$ tal que por el **literal ii) del Teorema 18**, se tiene que:

$$A = domf = ranf^{-1} \Longrightarrow ranf^{-1} = A$$
$$B = ranf = domf^{-1} \Longrightarrow domf^{-1} = B.$$

Ahora, se va a probar que f^{-1} es una función (es decir, cumple F_2, $x \in A$ entonces $f^{-1}(x)$ es unica). Sea $x_1, x_2 \in A$, $y \in B$ tal que

$$\begin{aligned}(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} &\Longrightarrow (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f, \text{por Definición 22}\\ &\Longrightarrow x_1 = x_2, \text{por Definición 33.}\end{aligned}$$

Luego, por el **literal i) del Teorema 24**, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ es una función.
Segundo, se va a probar que f^{-1} es inyectiva. Sea $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ entonces:

$$\begin{aligned}&(y_1, x) \in f^{-1} \wedge (y_2, x) \in f^{-1}\\ &\qquad\Longrightarrow (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f, \text{por Definición 22}\\ &\qquad\Longrightarrow y_1 = y_2.\end{aligned}$$

Finalmente, f^{-1} satisface la inyectividad y por lo visto anteriormente sabemos

que $ranf^{-1} = A$ se puede decir que es sobreyectiva por definición.
Concluimos, que f^{-1} satisface la **Definición 35**. □

Teorema 2.8
Si $f : A \longrightarrow B$ es invertible, entonces $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Demostración. Sea f invertible, tal que se tiene f^{-1} una función. Partimos usando el **literal ii) del Teorema 21**, $domf^{-1} = B$, seguido usamos el **literal i) del Teorema 12**;

$$B = domf^{-1} = ranf \text{ entonces } ranf = B,$$

por la **Definición 35**, se tiene que f es sobreyectiva.
Por consiguiente, se va a probar que f es inyectiva.
Sean $x_1, x_2 \in A, y \in B$,

$$\begin{aligned}(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f &\Longrightarrow (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}, \text{Definicion 22}\\ &\Longrightarrow x_1 = x_2, F_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es biyectiva. □

● **Observación.** Sea $f : A \longrightarrow B$ invertible si y solo si es biyectiva además si $f : A \longrightarrow B$ es invertible entonces $f^{-1} : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Teorema 2.9
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función invertible entonces:

i. $f^{-1} \circ f = I_A$

i. $f \circ f^{-1} = I_B$

Demostración.

i. $f^{-1} \circ f = I_A$
Sea $(x, y) \in f^{-1} \circ f$ por **Definición 23**

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow \exists z \in (x, z) \in f \wedge (z, y) \in f^{-1}\\ &\Longleftrightarrow (x, z) \in f \wedge (y, z) \in f, \text{por } \textbf{Definición 22}\\ &\Longleftrightarrow x = y \text{f inyectiva}\end{aligned}$$

Además, $f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ es función por el **Teorema 28**, asi $dom(f^{-1} \circ f) = A, x \in A$, es decir, $(x, x) \in I_A$.
Por el **Axioma 1**, se concluye $f^{-1} \circ f = I_A$.

ii. $f \circ f^{-1} = I_B$
Como $f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ es función, $domf \circ f^{-1} = B$.Sea $(x,y) \in f \circ f^{-1}$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists z \ni (x,z) \in f^{-1} \wedge (z,y) \in f \text{ por } \textbf{Definición 23} \\
&\iff (x,z) \in f \wedge (z,y) \in f \\
&\iff x = y \text{ pues f es función.}
\end{aligned}$$

asi, $(x,x) \in f \circ f^{-1}, x \in B \iff (x,x) \in I_B$.
Por **Axioma 1**, se concluye $f \circ f^{-1} = I_B$.

□

Teorema 2.10
Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow A$ funciones. Si $g \circ F = I_A$ y $f \circ g = I_B$ entonces f es biyectiva (invertible) y $g = f^{-1}$.

Demostración.

i) Primero se va a probar que f es inyectiva

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)), \text{por } F_2 \\
&\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2), \text{por Representación gráfica 1} \\
&\Longrightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2), \text{por hipótesis} \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2.
\end{aligned}$$

ii) Ahora, probaremos que f es sobreyectiva.
Sea $y \in B$ arbitrario, entonces:

$I_B(y) = y$ y como $(f \circ g)(y) = f(g(y))$, por hipótesis y Representación gráfica.
$y = f(g(y))$, se sabe que por la Observación 1 $g(y) = x$ entonces $y = f(x)$.

iii) Finalmente, se va a probar que $g = f^{-1}$.

$$\begin{aligned}
x = g(y) &\Longrightarrow f(x) = f(g(y)) \\
&\Longrightarrow (f \circ g)(x) = I_B(y), \text{por hipótesis} \\
&\Longrightarrow f(x) = y, \text{por Observación 2} \qquad \Longrightarrow x = f^{-1}, f(x) = y \text{ sii } x = f^{-1}(y)
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
x = f^{-1} &\Longrightarrow y = f(x), \forall y \in B \qquad \Longrightarrow g(y) = g(f(x)) = [g \circ f](x) \\
&= I_A(x) = x
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$f^{-1}(y) = g(y), \text{ por el Teorema 25, implica que } f^{-1} = g.$$

□

Teorema 2.11
Sea $f : A \longrightarrow B$ una función f es inyectiva si y solo si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$.

Demostración.

i) Primero, se sume que existe $y : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$
PD) f es inyectiva.
Sea $x_1, x_2 \in A$ tales que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Se tiene que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, por F_2 para g

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &I_A(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &.x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por la cual, f es inyectiva.

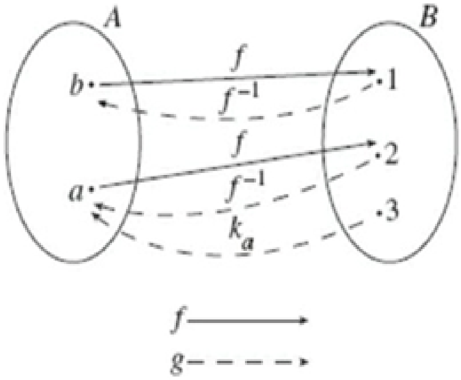
ii) Se supone, f es inyectiva.
PD) $\exists g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$. Sea $C = ranf$.
Entonces, $f : A \longrightarrow C$ es una función sobreyectiva $\widehat{f}$ es invertible y $\widehat{f^{-1}}$ es una función.
Sea $a \in A$, arbitrario pero fijo y se define

$$k_a : B - C \longrightarrow A \text{ tal que } k_A(y) = a, \forall y \in B - C.$$

Tomando $g = f^{-1} \cup k_a : B \longrightarrow A$, de modo que,
Sea $y \in B$

$$\text{Si } y \in ran(f), \text{ existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y \text{ entonces } g(y) = x.$$
$$\text{Si } y \notin ranf, \text{ entonces } g(y) = a.$$

Sea $x \in A$ entonces $(g \circ f)(x) = g)f(x))$, por composición. Como $f(x) \in A \Longrightarrow (g \circ f)(x) = x = I_A(x)$.



Sea $y \in B$ tal que $f(x) = y \in C$. Como f es inyectiva sobre C, $x = f^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= f^{-1}(y) \\ &= x \\ &\Rightarrow g \circ f = I_A.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.12

Sean $f_A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ y $g \circ f : A \longrightarrow C$ funciones.

i) Si f y g son inyectivas, $g \circ f$ es inyectiva.

ii) Si f y g son sobreyectivas, $g \circ f$ es sobreyectiva.

iii) Si f y g son biyectivas, $g\ circf$ es biyectiva.

Demostración. i. Sean f y g funciones inyectivas, se va a probar que $g \circ f$ es inyectiva. Sea $x_1, x_2 \in A$,

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva entonces $f(x_1) = f(X_2)$, ahora como f es inyectiva, entonces $x_1 = x_2$.

ii. Sean f y g funciones sobreyectivas, se va a probar que $g \circ f$ es sobreyectiva.
Sea $y \in C$, se va aprobar que existe $x \in A$, $(g \circ f)(x) = y$, $y \in C$, como g es sobreyectiva existe $z \in B$ tal que, $g(z) = y$, $z \in B$, como f es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = z$, asi $g(f(x)) = y$.
Luego, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = y$, de la **Definición 35**. Se concluye que $g \circ f$ es sobreyectiva.

iii. Sean f y g funciones biyectivas, se va a probar que $g \circ f$ es biyectiva.
f y g biyectivas de la **Definición 36**, f y g son inyectivas y sobreyectivas, como f, g son inyectivas por **(i)**, se tiene que $g \circ f$ es inyectiva, como f, g son sobreyectivas, por **(ii)** se tiene que $g \circ f$ es sobreyectiva, de la **Definición 36**, se concluye que $g \circ f$ es biyectiva.

□

2.3.1 Ejercicios de la Sección 2.3

Ejercicio 2.12. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Demostrar que $I_B \circ f = f$ y $I_A \circ f = f$.

Demostración. Sea $I_B : B \longrightarrow B$ y $f : A \longrightarrow B$, usando el teorema 28 es función, entonces:
Sea $x \in A$ y $y = f(x)$, mediante la observación 3 y observación 2 , se tiene que $y = f(x)$.
Así,

$$[I_B \circ f] = I_B(f(x))$$

Luego,

$$I_B(y) = y = f(x)$$

tomando en cuenta el Teorema 25 $[I_B \circ f] = I_B(f(x))$ si y solo si $I_B \circ f = f$ de manera igual forma se hace con $I_A \circ f = f$. □

Ejercicio 2.13. Supongamos que $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones. Demostrar que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva; probar que si $g \circ f$es sobreyectiva, entonces g es inyectiva. Concluir que si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones.

- Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva
  Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Para demostrar que f es inyectiva,

tomemos $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Debemos demostrar que $a_1 = a_2$.

Dado que $g \circ f$ es inyectiva, si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Por lo tanto,

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

Como $g \circ f$ es inyectiva, se sigue que $a_1 = a_2$. Por lo tanto, f es inyectiva.

- Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva
  Supongamos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Para demostrar que g es sobreyectiva, tomemos cualquier $c \in C$. Debemos encontrar un $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Dado que $g \circ f$ es sobreyectiva, para cada $c \in C$, existe un $a \in A$ tal que $g(f(a)) = c$. Sea $b = f(a)$. Entonces, $b \in B$ y

  $$g(b) = g(f(a)) = c$$

  Por lo tanto, g es sobreyectiva.

- Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva
  Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces es tanto inyectiva como sobreyectiva. De la parte 1, sabemos que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. De la parte 2, sabemos que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva. Por lo tanto, si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

□

Ejercicio 2.14. Ponga un ejemplo para demostrar que lo contrario de la última afirmación del Ejercicio 2 no se cumple.

Demostración. Para mostrar que lo contrario de la afirmación "si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es suryectiva"no se cumple, debemos encontrar un ejemplo donde f sea inyectiva y g sea suryectiva, pero $g \circ f$ no sea biyectiva.

Tomemos los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, y $C = \{X, Y\}$.

Definamos las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de la siguiente manera:

$$f(1) = a, \quad f(2) = b$$

$$g(a) = X, \quad g(b) = X, \quad g(c) = Y$$

La inyectividad de f: - f es inyectiva porque diferentes elementos en A (1 y 2) son mapeados a diferentes elementos en B (a y b).

La sobreyectividad de g: - g es sobreyectiva porque cada elemento en C (X y Y) tiene al menos un preimagen en B: X tiene preimagenes a y b, Y tiene preimagen c. Asi, la composición $g \circ f$:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = X$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = X$$

y verificamos la biyectividad de $g \circ f$: - $g \circ f$ no es inyectiva porque $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(2) = X$. - $g \circ f$ no es sobreyectiva porque no hay ningún elemento en A que se mapee a Y en C. Aunque f es inyectiva y g es sobreyectiva, la composición $g \circ f$ no es biyectiva. Por lo tanto, este ejemplo muestra que lo contrario de la afirmación no se cumple. □

Ejercicio 2.15. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Supongase que $y = f(x)$ si y solo si $x = g(y)$. Demuestre que f es invertible y que $g = f^{-1}$

Demostracion

Tenemos que demostrar que f es invertible y que $g = f^{-1}$
Primero por el Teorema 32 observamos

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) && \forall x \in A \\ &= g(y) && \text{por hipótesis} \\ &= x && \text{por hipótesis} \\ &= I_A \end{aligned}$$

Ahora, de la misma manera para

$$\begin{aligned} f \circ g(y) &= f(g(y)) && \forall y \in B \\ &= f(x) && \text{por hipótesis} \\ &= y && \text{por hipótesis} \\ &= I_B \end{aligned}$$

Como $f \circ g = I_A$ y $g \circ f = I_B$, po el Teorema 32 f es biyectiva y por la observacion del Teorema 30 se tiene que f es invertible y $g = f^{-1}$

Ejercicio 2.16. Sean $g : B \to C$ y $h : B \to C$ funciones. Supongase que $g \circ f = h \circ f$ para toda función $f : A \to B$. Demuestre que $g = h$

Demostración

Por el Teorema 25 se tiene que

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= h\circ f(x) && \forall x\in A \\ g(f(x)) &= h(f(x)) && \text{Teorema 28} \\ g(y) &= h(y) && \text{Corolario 3} \end{aligned}$$

Como $y \in B$ fue tomado arbitrario se concluye que $g = h$.

Ejercicio 2.17. Supongase que $g : A \to B$ y $h : A \to B$ son funciones. Sea C un conjunto con mas de un elemento; supongase que $f \circ g = f \circ h$ para toda función $f : B \to C$. Demuestre que $g = h$.

Demostración

Dado que C tiene más de un elemento, podemos elegir dos elementos distintos c_1 y c_2 en C.
Por contradicción suponemos que $g(x) \neq h(x)$ para algún $x \in A$.
Dado que $g(x) \neq h(x)$, existen $y_1 = g(x)$ y $y_2 = h(x)$ tales que $y_1 \neq y_2$.
Sea $f : B \to C$ una función

$$f(y_1) = c_1 \quad \text{y} \quad f(y_2) = c_2$$

y para cualquier $y \neq y_1, y_2$, definimos f arbitrariamente, ya que solo nos interesa distinguir entre y_1 y y_2.
Por hipotesis

$$f(g(x)) = f(h(x)) \text{ para todo } x \in A.$$

En particular, para el x tal que $g(x) = y_1$ y $h(x) = b_2$, tenemos:

$$f(g(x)) = f(y_1) = c_1 \quad \text{y} \quad f(h(x)) = f(y_2) = c_2.$$

Esto lleva a la igualdad:

$$c_1 = c_2,$$

lo cual es una contradicción porque c_1 y c_2 fueron elegidos para ser distintos.
Por lo tanto, hemos demostrado que $g = h$.

Ejercicio 2.18. Sea $f : B \to C$ una función. Demuestre que f es inyectiva si y solo si, para cada par de funciones $g : A \to B$ y $h : A \to B$, $f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$.

Demostracion

$\Rightarrow$)Si f es inyectiva, entonces $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.

Supongamos que f es inyectiva. Queremos demostrar que $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$ para cualquier par de funciones $g, h : A \to B$.
Supongamos que $f \circ g = f \circ h$.

$$f(g(a)) = f(h(a)) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Como f es inyectiva, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

$$f(g(a)) = f(h(a)) \implies g(a) = h(a) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por lo tanto, $g(a) = h(a)$ para todo $a \in A$, es decir, $g = h$.
Esto demuestra que f inyectiva implica $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.

$\Leftarrow$)Si $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ para cualquier par de funciones $g, h : A \to B$, entonces f es inyectiva.

Supongamos que para cada par de funciones $g, h : A \to B$, $f \circ g = f \circ h \implies g = h$. Queremos demostrar que f es inyectiva.
Supongamos, por el contrario, que f no es inyectiva.

$$\text{Entonces existen } x_1, x_2 \in B \text{ tales que } x_1 \neq x_2 \text{ y } f(x_1) = f(x_2).$$

Definimos dos funciones $g, h : A \to B$ tales que:

$$g(a) = x_1 \quad \text{para todo } a \in A, h(a) = x_2 \quad \text{para todo } a \in A.$$

Observamos que $f \circ g = f \circ h$:

$$f(g(a)) = f(x_1) \quad \text{y} \quad f(h(a)) = f(x_2) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Como $f(x_1) = f(x_2)$, se sigue que:

$$f(g(a)) = f(h(a)) \quad \text{para todo } a \in A.$$

Sin embargo, $g \neq h$, ya que, $x_1 \neq x_2$:

$$g(a) = x_1 \quad \text{y} \quad h(a) = x_2 \quad \text{para todo } a \in A.$$

Esto contradice nuestra suposición de que $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ para cualquier par de funciones $g, h : A \to B$.
Por lo tanto, f debe ser inyectiva.

Ejercicio 2.19. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre que f es sobreyectiva si y solo si, para cada par de funciones $g : B \to C$ y $h : B \to C$, $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

Demostracion

$\Rightarrow$)Si f es sobreyectiva, entonces $g \circ f = h \circ f \implies g = h$ para cada $g, h : B \to$

C
Supongamos que f es sobreyectiva. Queremos demostrar que para cada $g, h : B \to C$, si $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$.
Sea $b \in B$.
Dado que f es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Supongamos que $g \circ f = h \circ f$.
Entonces, $g(f(a)) = h(f(a))$ para todo $a \in A$.
En particular, $g(b) = h(b)$ porque $f(a) = b$. Como b es arbitrario en B, se sigue que $g(b) = h(b)$ para todo $b \in B$. Por lo tanto, $g = h$.
$\Leftarrow$)Si $g \circ f = h \circ f \implies g = h$ para cada $g, h : B \to C$, entonces f es sobreyectiva.
Supongamos que para cada par de funciones $g, h : B \to C$, si $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$. Queremos demostrar que f es sobreyectiva.
Supongamos, por el contrario, que f no es sobreyectiva.
Entonces, existe algún $b_0 \in B$ tal que no hay $a \in A$ con $f(a) = b_0$.
Definimos dos funciones $g, h : B \to C$ de la siguiente manera:

$$g(b) = \begin{cases} c_1 & \text{si } b = b_0, \\ c_0 & \text{si } b \neq b_0, \end{cases}$$
$$h(b) = c_0 \text{ para todo } b \in B,$$

donde c_0 y c_1 son dos elementos distintos en C.
Entonces, para todo $a \in A$, dado que $f(a) \neq b_0$, se tiene:

$$g(f(a)) = c_0 = h(f(a)).$$

Así, $g \circ f = h \circ f$.
Sin embargo, $g \neq h$ porque $g(b_0) = c_1 \neq c_0 = h(b_0)$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.
Por lo tanto, nuestra suposición de que f no es sobreyectiva debe ser falsa. Así, f es sobreyectiva.

Ejercicio 2.20. Sean $f : A \to C$ Y $f : A \to B$ funciones. Demuestre que existe una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$ si y solo si $\forall x \in A$,

$$g(x) = g(y) \Longrightarrow f(x) = f(y)$$

Demuestre que h es única.

Demostracion

Sean $f : A \to C$ y $g : A \to B$ funciones. Queremos demostrar que existe una función $h : B \to C$ tal que $f = h \circ g$ si y solo si para todo $x, y \in A$,

$$g(x) = g(y) \implies f(x) = f(y),$$

y que h es única.

Existencia

Supongamos que para todo $x, y \in A$, $g(x) = g(y) \implies f(x) = f(y)$. Definimos una función $h : B \to C$ por:

$$h(b) = f(x) \text{ para cualquier } x \in A \text{ tal que } g(x) = b.$$

Esta definición es válida porque, por hipótesis, $f(x)$ es constante en cada conjunto $g^{-1}(b)$. Entonces, para todo $x \in A$, tenemos:

$$h(g(x)) = f(x),$$

por lo que $f = h \circ g$.

Unicidad

Supongamos que existe una función $h' : B \to C$ tal que $f = h' \circ g$. Para cada $b \in B$, tomamos un $x \in A$ tal que $g(x) = b$. Entonces,

$$h(b) = f(x) \text{ y } h'(b) = f(x).$$

Por lo tanto, $h(b) = h'(b)$ para todo $b \in B$, y así $h = h'$.

> **Ejercicio 2.21.** Sean $f : C \to A$ y $f : B \to A$ funciones, y supongamos que g es biyectiva. Demuestre que existe $h : C \to B$ tal que $f = g \circ h$ si y solo si $ranf \subseteq rang$. Demuestre que h es única.

Demostracion

Sean $f : C \to A$ y $f : B \to A$ funciones, y supongamos que g es biyectiva. Demostremos que existe una función $h : C \to B$ tal que $f = g \circ h$ si y solo si ran $f \subseteq$ ran g. Demostraremos que h es única.

Existencia de h

Supongamos que ran $f \subseteq$ ran g. Esto significa que para cada $y \in$ ran f, existe algún $x \in C$ tal que $f(x) = y$. Dado que g es biyectiva, para cada $y \in$ ran f, existe un único $z \in B$ tal que $g(z) = y$. Definimos $h : C \to B$ como:

$$h(x) = g^{-1}(f(x)) \text{ para cada } x \in C.$$

Para cualquier $x \in C$,

$$f(x) = g(h(x)),$$

por lo tanto,

$$f = g \circ h.$$

Unicidad de h

Supongamos que existe una función $h' : C \to B$ tal que $f = g \circ h'$. Para cada $x \in C$,

$$f(x) = g(h'(x)).$$

Como g es biyectiva, la función h que definimos es única porque para cada $x \in C$, $h(x)$ y $h'(x)$ deben ser iguales. Por lo tanto, $h = h'$.

Ejercicio 2.22. Sea $f : A \to B$ una función, y sea $C \subseteq A$. Demuestre que $f_{[C]} = f \circ E_C$, donde E_C es la función de inclusión C en A.

Demostracion

Sea $f : A \to B$ una función, y sea $C \subseteq A$. Demostremos que $f_{[C]} = f \circ E_C$, donde $E_C : C \to A$ es la función de inclusión.

La función $f_{[C]}$ denota la restricción de f al conjunto C, definida por:

$$f_{[C]}(x) = f(x) \text{ para todo } x \in C.$$

La función de inclusión $E_C : C \to A$ es definida por:

$$E_C(x) = x \text{ para todo } x \in C.$$

Para cada $x \in C$,

$$(f \circ E_C)(x) = f(E_C(x)) = f(x).$$

Así,

$$f_{[C]}(x) = f(x) = (f \circ E_C)(x).$$

Por lo tanto, $f_{[C]} = f \circ E_C$.

2.4 Imagen directa e imagen inversa bajo funciones

Definición 2.8: –Imagen directa–

Sea $f : A \to B$ una función y C cualquier subclase de A. La imagen directa de C bajo f, denotada por $\bar{f}(C)$, es la subclase de B definida por:
$$\bar{f}(C) = \{y \in B : \exists x \in C \ni y = f(x)\}$$

Definición 2.9: –Imagen inversa–

Sea $f : A \to B$ una función y D cualquier subclase de B. La imagen inversa de D bajo f, denotada por $\check{f}(D)$, es la subclase de A definida por:

$$\check{f}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

Notación: Si $\{a\}$ y $\{b\}$ son singletones, se notará por $\bar{f}(a)$ en lugar de $\bar{f}(\{a\})$ y $\check{f}(b)$ en lugar de $\check{f}(\{b\})$.

Teorema 2.13

Sea $f : A \to B$ una función:

i) Sean $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$. Si $C = D$, entonces $\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$.

ii) Sean $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$. Si $C = D$, entonces $\check{f}(C) = \check{f}(D)$.

Demostración. Sean A y B clases, C y D subclases de A. Sea $f : A \to B$ una función.

i) Supongamos que $C = D$, entonces

$$\begin{aligned} y \in \bar{f}(C) &\iff \exists x \in C \ni y = f(x) && \text{por Definición 39} \\ &\iff \exists x \in D \ni y = f(x) && \text{por hipótesis} \\ &\iff y \in \bar{f}(D) && \text{por Definición 39.} \end{aligned}$$

ii) Supongamos que $C = D$, entonces

$$\begin{aligned} x \in \check{f}(C) &\iff f(x) \in C && \text{por Definición 40} \\ &\iff f(x) \in D && \text{por hipótesis} \\ &\iff x \in \check{f}(D) && \text{por Definición 40.} \end{aligned}$$

Observación:
1.$\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$ no siempre implica que $C = D$.
Ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \tag{2.3}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 \tag{2.4}$$

Basta considerar $C = \mathbb{R}^+$ y $D = \mathbb{R}^-$.
2. $\check{f}(C) = \check{f}(D)$ no siempre implica que $C = D$. □

Teorema 2.14
Sean A y B conjuntos y sea $f : A \to B$ una función, entonces:

i) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ es una función.

ii) $\check{f} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ es una función.

Demostración. Se mostrará que $\bar{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ es una función.

i)**F2** Si $\bar{f}(C) = D_1$ y $\bar{f}(C) = D_2$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } C \in \mathcal{P}(A) &\Rightarrow C \subseteq A && \text{definición de partes de } A\\
&\Rightarrow C \subseteq A \text{ y } C \subseteq A && \text{por viii), Teorema 4}\\
&\Rightarrow C = C && \text{por i), Teorema 5)}\\
&\Rightarrow f(C) = f(C) && \text{Teorema 35}\\
&\Rightarrow D_1 = D_2
\end{aligned}$$

ii) **dom** $f = \mathcal{P}(A)$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } C \in \text{dom } f &\Leftrightarrow \exists D \ni (C, D) \in f && \text{Definición 24}\\
&\Leftrightarrow D = f(C)\\
&\Leftrightarrow D = \{y \in B : \exists x \in C \ni y = f(x)\} && \text{Definición 38}\\
&\Leftrightarrow C \subseteq A\\
&\Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) && \text{Definición 32}
\end{aligned}$$

iii) **ran** $f \subseteq \mathcal{P}(B)$

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } C \in \text{ran } f &\Rightarrow \exists C \ni (C, D) \in f && \text{Definición 25}\\
&\Rightarrow D = f(C) &&\\
&\Rightarrow D = \{y \in B : \exists x \in C \ni y = f(x)\} && \text{Definición 38}\\
&\Rightarrow D \subseteq B && \text{Definición 38}\\
&\Rightarrow D \in \mathcal{P}(B) && \text{Definición 32}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.15: –Teorema 37–
Sea $f : A \to B$ una función, sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subclases de A y $\{D_i\}_{i\in I}$ una familia de subclases de B. Entonces:

i) $f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$

ii) $\check{f}\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) = \bigcup_{i\in I} \check{f}(D_i)$

iii) $\check{f}\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) = \bigcap_{i\in I} \check{f}(D_i)$

Demostración. (Por Literales)
i) Demostración de la propiedad usando doble contenencia

Para demostrar esta propiedad, se muestra la doble contenencia por Definición 9. Consideremos un y arbitrario. Así:

$$
\begin{aligned}
y \in f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) &\iff \exists x \in \bigcup_{i\in I} C_i \text{ tal que } y = f(x) && \text{Definición 39}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, \exists x \in C_j \text{ tal que } y = f(x) && \text{Definición 27}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, y \in f(C_j) && \text{Definición 39}\\
&\iff y \in \bigcup_{i\in I} f(C_i) && \text{Definición 27}
\end{aligned}
$$

ii) Demostración de la propiedad usando doble contenencia
Para demostrar esta propiedad, se muestra la doble contenencia por Definición

9. Consideremos un x arbitrario:

$$\begin{aligned}
x \in \check{f}\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) &\iff f(x) \in \bigcup_{i\in I} D_i && \text{Definición 40}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, f(x) \in D_j && \text{Definición 28}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, x \in \check{f}(D_j) && \text{Definición 40}\\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I} \check{f}(D_i) && \text{Definición 28}
\end{aligned}$$

iii) Demostración de la propiedad usando doble contenencia. Para demostrar esta propiedad, se muestra la doble contenencia por Definición 9. Consideremos un x arbitrario:

$$\begin{aligned}
x \in \check{f}\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i\in I} D_i && \text{Definición 40}\\
&\iff \forall j \in I, f(x) \in D_j && \text{Definición 28}\\
&\iff \forall j \in I, x \in \check{f}(D_j) && \text{Definición 40}\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} \check{f}(D_i) && \text{Definición 28}
\end{aligned}$$

Puesto que los elementos fueron arbitrarios, se concluye para todo elemento de sus respectivos conjuntos.
Nota Es importante resaltar que se cumple para f:

$$\bar{f}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \bar{f}(C_i)$$

Pero no se cumple la contención en el otro sentido. □

2.4.1 Ejercicios de la Sección 2.4

> **Ejercicio 2.23.** Supongamos que $f : A \to B$ es una función, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.
> a) Demuestre que $C \subseteq \check{f}[\bar{f}(C)]$. b) Demuestre que $\bar{f}[\check{f}(D)] \subseteq D$

Demostración:
a) Demostrar que $C \subseteq \check{f}[\bar{f}(C)]$
Sea $x \in C$.
Por la Definición 39

$$f(x) \in \bar{f}(C).$$

Por la Definición 40

$$\check{f}[\bar{f}(C)] = \{x \in A : f(x) \in \bar{f}(C)\}.$$

Como $f(x) \in \bar{f}(C)$, entonces $x \in \check{f}[\bar{f}(C)]$.
Dado que $x \in C$ fue arbitrario, se concluye que $C \subseteq \check{f}[\bar{f}(C)]$.

b) Demostrar que $\bar{f}[\check{f}(D)] \subseteq D$
Sea $y \in \bar{f}[\check{f}(D)]$.
Por la Definición 39, existe un $x \in \check{f}(D)$ tal que $y = f(x)$:

$$\bar{f}[\check{f}(D)] = \{y \in B : \exists x \in \check{f}(D) \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Por la Definición 40, el conjunto $\check{f}(D)$ está compuesto por los elementos de A tales que $f(x) \in D$:

$$\check{f}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Por lo tanto, si $x \in \check{f}(D)$, entonces $f(x) \in D$.
Como $y = f(x)$ y $x \in \check{f}(D)$, entonces $f(x) \in D$.
Por lo tanto, $y \in D$.
Como $y \in \bar{f}[\check{f}(D)]$ fue arbitrario, se concluye que $\bar{f}[\check{f}(D)] \subseteq D$.

> **Ejercicio 2.24.** Supongamos que $f : A \to B$ es una función, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.
> a) Si f es inyectiva, demuestre que $C = \check{f}[\bar{f}(C)]$
> b) Si f es sobreyectiva, demuestre que $D = \bar{f}[\check{f}(D)]$

Demostración:
a) Si f es inyectiva, demostrar que $C = \check{f}[\bar{f}(C)]$
Por el inciso a) de la demostración anterior, ya sabemos que:

$$C \subseteq \check{f}[\bar{f}(C)].$$

Ahora demostraremos que $\check{f}[\bar{f}(C)] \subseteq C$.
Sea $x \in \check{f}[\bar{f}(C)]$.
Por la Definición 40, tenemos que $f(x) \in \bar{f}(C)$.
Por la Definición 39, esto significa que existe algún $x' \in C$ tal que $f(x) = f(x')$.
Dado que f es inyectiva y $f(x) = f(x')$, debemos tener $x = x'$.
Como $x' \in C$, se sigue que $x \in C$.
Dado que $x \in \check{f}[\bar{f}(C)]$ fue arbitrario, se concluye que $\check{f}[\bar{f}(C)] \subseteq C$.

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$C = \check{f}[\bar{f}(C)].$$

b) Si f es sobreyectiva, demostrar que $D = \bar{f}[\check{f}(D)]$
Por el inciso (b) de la demostración anterior, ya sabemos que:

$$\bar{f}[\check{f}(D)] \subseteq D.$$

Ahora demostraremos que $D \subseteq \bar{f}[\check{f}(D)]$.
Sea $y \in D$.
Por Definición 35, existe algún $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
Como $y \in D$, tenemos que $x \in \check{f}(D)$.
Por la Definición 39, $y = f(x)$ y $x \in \check{f}(D)$, se sigue que $y \in \bar{f}[\check{f}(D)]$.
Dado que $y \in D$ fue arbitrario, se concluye que $D \subseteq \bar{f}[\check{f}(D)]$.
Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$D = \bar{f}[\check{f}(D)].$$

Ejercicio 2.25. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre lo siguiente:
a) Sea $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$; si f es inyectiva, entonces $\bar{f}(C) = \bar{f}(D) \Longrightarrow C = D$.

Demostración
Supongamos que f es inyectiva y que $\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$.

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in C &\Rightarrow f(x) \in \bar{f}(C) & \\
&\Rightarrow f(x) \in \bar{f}(D) & \text{Por hipotesis} \\
&\Rightarrow \exists y \in D \ni f(x) = f(y) & \text{Definición 39} \\
&\Rightarrow x = y & \text{Por hipotesis} \\
&\Rightarrow x \in D & \\
&\Rightarrow C \subseteq D &
\end{aligned}$$

De manera similar, podemos demostrar que $D \subseteq C$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } x \in D &\Rightarrow f(x) \in \bar{f}(D) && \\
&\Rightarrow f(x) \in \bar{f}(C) && \text{Por hipotesis} \\
&\Rightarrow \exists y \in C \ni f(x) = f(y) && \text{Definición 39} \\
&\Rightarrow x = y && \text{Por hipotesis} \\
&\Rightarrow x \in C && \\
&\Rightarrow D \subseteq C &&
\end{aligned}$$

Combiniendo ambas inclusiones, obtenemos $C = D$.
b) Sea $C \subseteq B$ y $D \subseteq B$; si f es sobreyectiva, entonces $\check{f}(C) = \check{f}(D) \implies C = D$.

Demostración
Supongamos que f es sobreyectiva y que $\check{f}(C) = \check{f}(D)$.

$$\begin{aligned}
\text{Sea } y \in C &\Rightarrow x \in \check{f}(C) && \text{Por Definición 40} \\
&\Rightarrow x \in \check{f}(D) && \text{Por hipotesis} \\
&\Rightarrow f(x) \in D && \text{Por Definición 40} \\
&\Rightarrow y \in D && \\
&\Rightarrow C \subseteq D &&
\end{aligned}$$

De manera similar, podemos demostrar que $D \subseteq C$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } y \in D &\Rightarrow x \in \check{f}(D) && \text{Por Definición 40} \\
&\Rightarrow x \in \check{f}(C) && \text{Por hipotesis} \\
&\Rightarrow f(x) \in C && \text{Por Definición 40} \\
&\Rightarrow y \in C && \\
&\Rightarrow D \subseteq C &&
\end{aligned}$$

Combiniendo ambas inclusiones, obtenemos $C = D$.

Ejercicio 2.26. Sea $f : A \to B$ una función. Demostrar lo siguiente:
a) Si f es inyectiva, entonces $\check{f} \circ \bar{f}$ es biyectiva.

Demostración
Supongamos que f es inyectiva. Queremos demostrar que $\check{f} \circ \bar{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ es una función biyectiva, donde $\mathcal{P}(A)$ denota el conjunto potencia de A.

Inyectividad: Sea $C, D \subseteq A$ tales que $(\check{f} \circ \bar{f})(C) = (\check{f} \circ \bar{f})(D)$.
Por definición de $\check{f} \circ \bar{f}$, tenemos $\check{f}(\bar{f}(C)) = \check{f}(\bar{f}(D))$.
Esto implica que $\{a \in A \mid f(a) \in \{f(c) \mid c \in C\}\} = \{a \in A \mid f(a) \in \{f(d) \mid d \in D\}\}$.
Dado que f es inyectiva, $f(a) = f(b)$ implica $a = b$, lo cual implica que $C = D$.
Por lo tanto, $\check{f} \circ \bar{f}$ es inyectiva.

Sobreyectividad: Sea $E \subseteq A$. Queremos encontrar un subconjunto $C \subseteq A$ tal que $(\check{f} \circ \bar{f})(C) = E$.
Definamos $C = E$. Entonces, $(\check{f} \circ \bar{f})(C) = \check{f}(\bar{f}(E))$.
Por definición de $\check{f}$ y $\bar{f}$, tenemos $\check{f}(\bar{f}(E)) = \{a \in A \mid f(a) \in \{f(e) \mid e \in E\}\} = E$.
Por lo tanto, $\check{f} \circ \bar{f}$ es sobreyectiva.
Dado que $\check{f} \circ \bar{f}$ es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva.
b) Si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f} \circ \check{f}$ es biyectiva.
Demostración
Supongamos que f es sobreyectiva. Queremos demostrar que $\bar{f} \circ \check{f} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ es una función biyectiva, donde $\mathcal{P}(B)$ denota el conjunto potencia de B.

Inyectividad: Sea $C, D \subseteq B$ tales que $(\bar{f} \circ \check{f})(C) = (\bar{f} \circ \check{f})(D)$.
Por definición de $\bar{f} \circ \check{f}$, tenemos $\bar{f}(\check{f}(C)) = \bar{f}(\check{f}(D))$.
Esto implica que $\{f(a) \mid a \in \{a \in A \mid f(a) \in C\}\} = \{f(a) \mid a \in \{a \in A \mid f(a) \in D\}\}$.
Dado que f es sobreyectiva, $f(a) \in C$ implica $a \in \check{f}(C)$ y $f(a) \in D$ implica $a \in \check{f}(D)$.
Por lo tanto, $C = D$.
Esto muestra que $\bar{f} \circ \check{f}$ es inyectiva.

Sobreyectividad: Sea $E \subseteq B$. Queremos encontrar un subconjunto $C \subseteq B$ tal que $(\bar{f} \circ \check{f})(C) = E$.
Definamos $C = E$. Entonces, $(\bar{f} \circ \check{f})(C) = \bar{f}(\check{f}(E))$.
Por definición de $\check{f}$ y $\bar{f}$, tenemos $\bar{f}(\check{f}(E)) = \{f(a) \mid a \in \{a \in A \mid f(a) \in E\}\} = E$.
Por lo tanto, $\bar{f} \circ \check{f}$ es sobreyectiva.
Dado que $\bar{f} \circ \check{f}$ es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva.

Ejercicio 2.27. Supongamos que $f : A \to B$ es una función; sea $C \subseteq A$.
a) Demuestre que $\bar{f}\{\check{f}[\bar{f}(C)]\} = \bar{f}(C)$.

Demostración

Queremos demostrar que $\bar{f}\{\check{f}[\bar{f}(C)]\} = \bar{f}(C)$.
Por la Definición 39, tenemos:

$$\check{f}[\bar{f}(C)] = \{a \in A \mid f(a) \in \bar{f}(C)\}.$$

Esto significa que $\check{f}[\bar{f}(C)]$ es el conjunto de todos los elementos de A cuya imagen bajo f está en $\bar{f}(C)$.
Consideremos la imagen de este conjunto bajo f:

$$\bar{f}\{\check{f}[\bar{f}(C)]\} = \{f(a) \mid a \in \check{f}[\bar{f}(C)]\}.$$

Esto significa que estamos tomando todos los $a \in A$ tales que $f(a) \in \bar{f}(C)$ y luego tomando la imagen de estos a bajo f.
Pero, si $a \in \check{f}[\bar{f}(C)]$, entonces $f(a) \in \bar{f}(C)$. Es decir, $f(a)$ es algún $f(c)$ para $c \in C$. Por lo tanto:

$$\{f(a) \mid a \in \check{f}[\bar{f}(C)]\} = \{f(c) \mid c \in C\} = \bar{f}(C).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $\bar{f}\{\check{f}[\bar{f}(C)]\} = \bar{f}(C)$.
b) Utilice el resultado a) para demostrar que $\bar{f} \circ \check{f} \circ \bar{f} = \bar{f}$.
Demostración
Queremos demostrar que $\bar{f} \circ \check{f} \circ \bar{f} = \bar{f}$.
Sea $C \subseteq A$. Aplicamos el resultado de la parte (a):

$$\bar{f}\{\check{f}[\bar{f}(C)]\} = \bar{f}(C).$$

Por definición de composición de funciones, tenemos:

$$(\bar{f} \circ \check{f} \circ \bar{f})(C) = \bar{f}(\check{f}(\bar{f}(C))).$$

Pero de la parte a), sabemos que:

$$\bar{f}(\check{f}(\bar{f}(C))) = \bar{f}(C).$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $\bar{f} \circ \check{f} \circ \bar{f} = \bar{f}$.

Ejercicio 2.28. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre lo siguiente:
a) Si f es inyectiva, entonces $\bar{f}$ es inyectiva.

Demostración

Supongamos que f es inyectiva. Queremos demostrar que $\bar{f}$ es inyectiva, es decir, si $\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$ para $C, D \subseteq A$, entonces $C = D$.
Supongamos que $\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$.
Esto significa que:

$$\{f(a) \mid a \in C\} = \{f(a) \mid a \in D\}.$$

Dado que f es inyectiva, no hay dos elementos diferentes en A que se mapeen al mismo elemento en B. Por lo tanto, los elementos de C deben coincidir con los elementos de D.
Es decir, $C = D$.Por lo tanto, hemos demostrado que si f es inyectiva, entonces $\bar{f}$ es inyectiva.
b) Si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es sobreyectiva.
Demostración
Supongamos que f es sobreyectiva. Queremos demostrar que $\bar{f}$ es sobreyectiva, es decir, para cualquier $E \subseteq B$, existe un $C \subseteq A$ tal que $\bar{f}(C) = E$.
Sea $E \subseteq B$.
Como f es sobreyectiva, para cada $y \in E$, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
Definimos $C = \check{f}(E) = \{a \in A \mid f(a) \in E\}$.
Entonces, la imagen de C bajo f es:

$$\bar{f}(C) = \{f(a) \mid a \in C\} = E.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es sobreyectiva.
c) Si f es biyectiva, entonces $\bar{f}$ es biyectiva.
Demostración
Supongamos que f es biyectiva. Queremos demostrar que $\bar{f}$ es biyectiva, es decir, $\bar{f}$ es tanto inyectiva como sobreyectiva.
Inyectividad:
Ya hemos demostrado en la parte a) que si f es inyectiva, entonces $\bar{f}$ es inyectiva.
Sobreyectividad:
Ya hemos demostrado en la parte b) que si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es sobreyectiva.
Dado que f es tanto inyectiva como sobreyectiva (es decir, biyectiva), $\bar{f}$ también es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, $\bar{f}$ es biyectiva.

> **Ejercicio 2.29.** Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre lo siguiente: a) Si f es inyectiva, entonces $\check{f}$ es inyectiva.

Demostración

Supongamos que f es inyectiva. Queremos demostrar que $\check{f}$ es inyectiva, es decir, si $\check{f}(C) = \check{f}(D)$ para $C, D \subseteq B$, entonces $C = D$.
Supongamos que $\check{f}(C) = \check{f}(D)$.
Esto significa que:

$$\{a \in A \mid f(a) \in C\} = \{a \in A \mid f(a) \in D\}.$$

Dado que f es inyectiva, $f(a)$ toma valores distintos para diferentes $a \in A$. Entonces, la única forma en que las preimágenes bajo f pueden ser iguales es que los conjuntos de imágenes sean iguales.
Es decir, $C = D$.
Por lo tanto, hemos demostrado que si f es inyectiva, entonces $\check{f}$ es inyectiva.
b) Si f es sobreyectiva, entonces $\check{f}$ es sobreyectiva.

Demostración

Supongamos que f es sobreyectiva. Queremos demostrar que $\check{f}$ es sobreyectiva, es decir, para cualquier $E \subseteq A$, existe un $C \subseteq B$ tal que $\check{f}(C) = E$.
Sea $E \subseteq A$.
Dado que f es sobreyectiva, cada elemento de B es la imagen de al menos un elemento de A.
Definimos $C = f(E)$, donde $f(E) = \{f(a) \mid a \in E\}$.
Entonces, la preimagen de C bajo f es:

$$\check{f}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\} = \{a \in A \mid f(a) \in f(E)\}.$$

Dado que $f(a) \in f(E)$ si y solo si $a \in E$, tenemos:

$$\check{f}(C) = E.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si f es sobreyectiva, entonces $\check{f}$ es sobreyectiva.
c) Si f es biyectiva, entonces $\check{f}$ es biyectiva.

Demostración

Supongamos que f es biyectiva. Queremos demostrar que $\check{f}$ es biyectiva, es decir, $\check{f}$ es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Inyectividad:

Ya hemos demostrado en la parte (a) que si f es inyectiva, entonces $\check{f}$ es inyectiva.
Sobreyectividad:
Ya hemos demostrado en la parte (b) que si f es sobreyectiva, entonces $\check{f}$ es sobreyectiva.
Dado que f es tanto inyectiva como sobreyectiva (es decir, biyectiva), $\check{f}$ también es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto, $\check{f}$ es biyectiva.

Ejercicio 2.30. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre que

$$\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D)$$

para cada par de subclases $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$ si y solo si f es inyectiva.

Demostración
$\Rightarrow$)Si f es inyectiva, entonces $\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D)$ para cada $C, D \subseteq A$.
Supongamos que f es inyectiva. Queremos demostrar que para cada $C, D \subseteq A$:

$$\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D).$$

1.Sea $x \in \bar{f}(C \cap D)$. Entonces, existe $a \in C \cap D$ tal que $f(a) = x$.
Dado que $a \in C \cap D$, se sigue que $a \in C$ y $a \in D$. Por lo tanto, $f(a) \in \bar{f}(C)$ y $f(a) \in \bar{f}(D)$, es decir, $x \in \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D)$.
Entonces, hemos demostrado que:

$$\bar{f}(C \cap D) \subseteq \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D).$$

2.Sea $x \in \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D)$. Entonces, $x \in \bar{f}(C)$ y $x \in \bar{f}(D)$. Por lo tanto, existen $a_1 \in C$ y $a_2 \in D$ tales que $f(a_1) = x$ y $f(a_2) = x$.
Dado que f es inyectiva, $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$. Llamemos a este valor común a. Entonces, $a \in C$ y $a \in D$, por lo que $a \in C \cap D$.
Así, $x = f(a)$ para algún $a \in C \cap D$, lo que implica que $x \in \bar{f}(C \cap D)$.
Entonces, hemos demostrado que:

$$\bar{f}(C) \cap \bar{f}(D) \subseteq \bar{f}(C \cap D).$$

Por lo tanto, si f es inyectiva, se cumple que:

$$\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D).$$

$\Leftarrow$) Si $\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D)$ para cada $C, D \subseteq A$, entonces f es inyectiva.

Supongamos que para cada par de subclases $C, D \subseteq A$:

$$\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(C) \cap \bar{f}(D).$$

Queremos demostrar que f es inyectiva.
Supongamos, por el contrario, que f no es inyectiva.
Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \neq a_2$ y $f(a_1) = f(a_2) = x$ para algún $x \in B$.
Definimos dos conjuntos C y D en A tales que $a_1 \in C$ y $a_2 \in D$:

$$C = \{a_1\}, \quad D = \{a_2\}.$$

Entonces $C \cap D = \emptyset$.
Aplicamos la condición dada:

$$\bar{f}(C \cap D) = \bar{f}(\emptyset) = \emptyset,$$

$$\bar{f}(C) = \{x\}, \quad \bar{f}(D) = \{x\},$$

$$\bar{f}(C) \cap \bar{f}(D) = \{x\}.$$

Hemos obtenido:

$$\emptyset \neq \{x\}.$$

Esto contradice nuestra suposición de que f no es inyectiva.
Por lo tanto, f debe ser inyectiva.

Ejercicio 2.31. Suponga que $f : A \to B$ es una función, $C \subseteq B$ y $D \subseteq B$. Demuestre que

$$\check{f}(C - D) = \check{f}(C) - \check{f}(D).$$

Demostración

Por Definición 40 y Definición 16

$$\check{f}(C - D) = \{x \in A \mid f(x) \in C \text{ y } f(x) \notin D\}.$$

Por Definición 40

$$\check{f}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}.$$

y

$$\check{f}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Definición 16
$$\check{f}(C) - \check{f}(D) = \{x \in \check{f}(C) \mid x \notin \check{f}(D)\}.$$

Reescribiendo con las definiciones de las preimágenes:

$$\check{f}(C) - \check{f}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in C \text{ y } f(x) \notin D\}.$$

Comparamoslos resultados:

$$\check{f}(C - D) = \{a \in A \mid f(a) \in C \text{ y } f(a) \notin D\}$$

$$\check{f}(C) - \check{f}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in C \text{ y } f(a) \notin D\}$$

Ambas expresiones son equivalentes, por lo tanto:

$$\check{f}(C - D) = \check{f}(C) - \check{f}(D).$$

Ejercicio 2.32. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestre cada una de las siguientes:
a)Si $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$, entonces $\bar{f}(C) - \bar{f}(D) \subseteq \bar{f}(C - D)$.

Demostración
Por definición, $\bar{f}(C) = \{f(x) \mid x \in C\}$ y $\bar{f}(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.
Consideremos un elemento $y \in \bar{f}(C) - \bar{f}(D)$. Esto significa que $y \in \bar{f}(C)$ y $y \notin \bar{f}(D)$.
Por la definición de $\bar{f}$, existe un $x \in C$ tal que $f(x) = y$.
Además, $y \notin \bar{f}(D)$ implica que no hay $x' \in D$ tal que $f(x') = y$.
Por lo tanto, $x \in C$ y $x \notin D$, es decir, $x \in C - D$.
Esto implica que $y \in \bar{f}(C - D)$, ya que $y = f(x)$ y $x \in C - D$.
Así, $\bar{f}(C) - \bar{f}(D) \subseteq \bar{f}(C - D)$.
b)$\bar{f}(C) - \bar{f}(D) \subseteq \bar{f}(C - D)$ para cada par de subclases $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$ si y solo si f es inyectiva.
Supongamos que f es inyectiva.
Consideremos $b \in \bar{f}(C) - \bar{f}(D)$. Esto significa que $b \in \bar{f}(C)$ y $b \notin \bar{f}(D)$.
Existe un $a \in C$ tal que $f(a) = b$.
No existe ningún $a' \in D$ tal que $f(a') = b$.
Por la inyectividad de f, el $a \in C$ que satisface $f(a) = b$ no puede estar en D.
Por lo tanto, $a \in C - D$.
Así, $b \in \bar{f}(C - D)$.
Esto muestra que $\bar{f}(C) - \bar{f}(D) \subseteq \bar{f}(C - D)$ si f es inyectiva.

2.5 Imagen directa e imagen inversa bajo funciones

Definición 2.10: –Imagen directa–

Sea $f : A \to B$ una función y C cualquier subclase de A. La imagen directa de C bajo f, denotada por $\bar{f}(C)$, es la subclase de B definida por:

$$\bar{f}(C) = \{y \in B : \exists x \in C \ni y = f(x)\}$$

Definición 2.11: –Imagen inversa–

Sea $f : A \to B$ una función y D cualquier subclase de B. La imagen inversa de D bajo f, denotada por $\check{f}(D)$, es la subclase de A definida por:

$$\check{f}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

Notación: Si $\{a\}$ y $\{b\}$ son singletones, se notará por $\bar{f}(a)$ en lugar de $\bar{f}(\{a\})$ y $\check{f}(b)$ en lugar de $\check{f}(\{b\})$.

Teorema 2.16

Sea $f : A \to B$ una función:

i) Sean $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$. Si $C = D$, entonces $\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$.

ii) Sean $C \subseteq A$ y $D \subseteq A$. Si $C = D$, entonces $\check{f}(C) = \check{f}(D)$.

Demostración. Sean A y B clases, C y D subclases de A. Sea $f : A \to B$ una función.

i) Supongamos que $C = D$, entonces

$$\begin{aligned} y \in \bar{f}(C) &\Longleftrightarrow \exists x \in C \ni y = f(x) && \text{por Definición 39} \\ &\Longleftrightarrow \exists x \in D \ni y = f(x) && \text{por hipótesis} \\ &\Longleftrightarrow y \in \bar{f}(D) && \text{por Definición 39.} \end{aligned}$$

ii) Supongamos que $C = D$, entonces

$$\begin{aligned} x \in \check{f}(C) &\Longleftrightarrow f(x) \in C && \text{por Definición 40} \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in D && \text{por hipótesis} \\ &\Longleftrightarrow x \in \check{f}(D) && \text{por Definición 40.} \end{aligned}$$

□

● **Observación.** **1.**$\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$ no siempre implica que $C = D$.

Ejemplo 2.6.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \tag{2.5}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 \tag{2.6}$$

Basta considerar $C = \mathbb{R}^+$ y $D = \mathbb{R}^-$.
2. $\check{f}(C) = \check{f}(D)$ no siempre implica que $C = D$.

Teorema 2.17
Sean A y B conjuntos y sea $f : A \to B$ una función, entonces:

i) $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ es una función.

ii) $\check{f} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ es una función.

Demostración. Se mostrará que $\bar{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ es una función.

i)**F2** Si $\bar{f}(C) = D_1$ y $\bar{f}(C) = D_2$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } C \in \mathcal{P}(A) &\Rightarrow C \subseteq A && \text{definición de partes de } A\\
&\Rightarrow C \subseteq A \text{ y } C \subseteq A && \text{por viii), Teorema 4}\\
&\Rightarrow C = C && \text{por i), Teorema 5)}\\
&\Rightarrow f(C) = f(C) && \text{Teorema 35}\\
&\Rightarrow D_1 = D_2
\end{aligned}$$

ii) **dom** $f = \mathcal{P}(A)$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } C \in \text{dom } f &\Leftrightarrow \exists D \ni (C, D) \in f && \text{Definición 24}\\
&\Leftrightarrow D = f(C)\\
&\Leftrightarrow D = \{y \in B : \exists x \in C \ni y = f(x)\} && \text{Definición 38}\\
&\Leftrightarrow C \subseteq A\\
&\Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) && \text{Definición 32}
\end{aligned}$$

iii) **ran** $f \subseteq \mathcal{P}(B)$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } C \in \text{ran } f &\Rightarrow \exists C \ni (C, D) \in f && \text{Definición 25}\\
&\Rightarrow D = f(C)\\
&\Rightarrow D = \{y \in B : \exists x \in C \ni y = f(x)\} && \text{Definición 38}\\
&\Rightarrow D \subseteq B && \text{Definición 38}\\
&\Rightarrow D \in \mathcal{P}(B) && \text{Definición 32}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.18: –Teorema 37–

Sea $f : A \to B$ una función, sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de subclases de A y $\{D_i\}_{i\in I}$ una familia de subclases de B. Entonces:

i) $f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$

ii) $\check{f}\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) = \bigcup_{i\in I} \check{f}(D_i)$

iii) $\check{f}\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) = \bigcap_{i\in I} \check{f}(D_i)$

Demostración. (Por Literales)
i) Demostración de la propiedad usando doble contenencia

Para demostrar esta propiedad, se muestra la doble contenencia por Definición 9. Consideremos un y arbitrario. Así:

$$\begin{aligned}
y \in f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) &\iff \exists x \in \bigcup_{i\in I} C_i \text{ tal que } y = f(x) && \text{Definición 39}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, \exists x \in C_j \text{ tal que } y = f(x) && \text{Definición 27}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, y \in f(C_j) && \text{Definición 39}\\
&\iff y \in \bigcup_{i\in I} f(C_i) && \text{Definición 27}
\end{aligned}$$

ii) Demostración de la propiedad usando doble contenencia
Para demostrar esta propiedad, se muestra la doble contenencia por Definición

9. Consideremos un x arbitrario:

$$\begin{aligned}
x \in \check{f}\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) &\iff f(x) \in \bigcup_{i\in I} D_i && \text{Definición 40}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, f(x) \in D_j && \text{Definición 28}\\
&\iff \text{para algún } j \in I, x \in \check{f}(D_j) && \text{Definición 40}\\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I} \check{f}(D_i) && \text{Definición 28}
\end{aligned}$$

iii) Demostración de la propiedad usando doble contenencia. Para demostrar esta propiedad, se muestra la doble contenencia por Definición 9. Consideremos un x arbitrario:

$$\begin{aligned}
x \in \check{f}\left(\bigcap_{i\in I} D_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i\in I} D_i && \text{Definición 40}\\
&\iff \forall j \in I, f(x) \in D_j && \text{Definición 28}\\
&\iff \forall j \in I, x \in \check{f}(D_j) && \text{Definición 40}\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} \check{f}(D_i) && \text{Definición 28}
\end{aligned}$$

Puesto que los elementos fueron arbitrarios, se concluye para todo elemento de sus respectivos conjuntos.
Nota Es importante resaltar que se cumple para f:

$$\bar{f}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \bar{f}(C_i)$$

Pero no se cumple la contención en el otro sentido. □

2.5.1 Ejercicios de la Sección 2.5- Tomados en Exámen.

Ejercicio 2.33. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_{i\in I}\}$ familia de clases pruebe los siguientes literales:

- $\prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{j\in J} B_j = \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$
- $\prod_{i\in I} A_i \cup \prod_{j\in J} B_j = \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$

$$i)\prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{j\in J} B_j = \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$$

Demostración. (Implicaciones)
$\Leftarrow$) La notación $\prod_{i\in I} A_i$ representa el conjunto de todas las funciones $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$ para cada $i \in I$. De manera similar, $\prod_{j\in J} B_j$ es el conjunto de funciones $g : J \to \bigcup_{j\in J} B_j$ tal que $g(j) \in B_j$ para cada $j \in J$.

La intersección $\prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{j\in J} B_j$ consiste en las funciones $h : I \cup J \to \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j$ que cumplen:
$h(i) \in A_i$ para cada $i \in I$
$h(j) \in B_j$ para cada $j \in J$

$\Rightarrow$) El producto $\prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$ consiste en las funciones $k : I \times J \to \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$ tal que $k(i,j) \in A_i \cap B_j$ para cada par (i,j).

Inclusión: Si $h \in \prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{j\in J} B_j$, entonces para cada $(i,j) \in I \times J$, $h(i) \in A_i$ y $h(j) \in B_j$. Por lo tanto, $h(i) \in A_i \cap B_j$, lo que implica que $h \in \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$.

Inclusión inversa: Si $k \in \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$, entonces para cada $i \in I$, $k(i,j) \in A_i \cap B_j$ para cada $j \in J$. Esto significa que $k(i) \in A_i$ y $k(j) \in B_j$, lo que implica que $k \in \prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{j\in J} B_j$.

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{j\in J} B_j = \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$$

□

$$ii)\prod_{i\in I} A_i \cup \prod_{j\in J} B_j = \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$$

Demostración. (Implicaciones)
$\Leftarrow$) La unión $\prod_{i\in I} A_i \cup \prod_{j\in J} B_j$ consiste en las funciones que son de la forma $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ o $g : J \to \bigcup_{j\in J} B_j$.

$\Rightarrow$) El producto $\prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$ consiste en las funciones $h : I \times J \to \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$ tal que $h(i,j) \in A_i \cup B_j$ para cada par (i,j).

Inclusión: Si $f \in \prod_{i\in I} A_i$, entonces para cada $i \in I$, $f(i) \in A_i$. Por lo tanto, para cada $(i,j) \in I \times J$, $f(i) \in A_i \cup B_j$, lo que implica que $f \in \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$. Similarmente, si $g \in \prod_{j\in J} B_j$, se puede demostrar que $g \in \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$.

Inclusión inversa: Si $h \in \prod_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$, entonces para cada (i,j), $h(i,j) \in A_i \cup B_j$. Esto significa que para cada $i \in I$, existe un j tal que $h(i,j) \in A_i$ o $h(i,j) \in B_j$, lo que implica que h puede ser representado como una función en $\prod_{i\in I} A_i$ o en $\prod_{j\in J} B_j$.

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\prod_{i\in I} A_i \cup \prod_{j\in J} B_j = \prod_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$

□

Ejercicio 2.34. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de clases para cualquier $i \in I$, Sea B_i subclases de A_i. Probar que:

$$\bigcap_{i\in I} \hat{P}_i(B) = \prod_{i\in I} B_i.$$

donde $\hat{P}_i(B)$ es la imagen inversa de la función proyección.

Demostración. Se parte con $\bigcap_{i\in I} \hat{P}_i(B) \subseteq \prod_{i\in I} B_i$

Supongamos que $x \in \bigcap_{i\in I} \hat{P}_i(B)$. Esto significa que para cada $i \in I$, $x \in \hat{P}_i(B)$. Por la definición de la imagen inversa, esto implica que $P_i(x) \in B$ para cada $i \in I$.

Dado que x es un elemento de $\prod_{i\in I} A_i$, podemos escribir $x = (x_j)_{j\in I}$. Entonces, para cada $i \in I$, tenemos que $x_i \in B_i$ (ya que $P_i(x) = x_i$). Por lo tanto, $x \in \prod_{i\in I} B_i$.

Se va mostrar que $\prod_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap_{i\in I} \hat{P}_i(B)$

Ahora, supongamos que $x \in \prod_{i\in I} B_i$. Esto significa que para cada $i \in I$, $x_i \in B_i$. Por la definición de la imagen inversa, esto implica que $P_i(x) = x_i \in B$ para cada $i \in I$.

Por lo tanto, $x \in \hat{P}_i(B)$ para cada $i \in I$, lo que implica que $x \in \bigcap_{i\in I} \hat{P}_i(B)$.

Hemos demostrado que:

$$\bigcap_{i\in I} \hat{P}_i(B) = \prod_{i\in I} B_i.$$

□