APUNTES DE MATEMÁTICA - UCE

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

JUAN SEBASTIAN OBANDO PALLO

FOLLETO - CAPÍTULO 1: CLASES Y CONJUNTOS.

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS.

FOLLETO DE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CARRERA DE MATEMÁTICA No. 1 (1)

FOLLETO - CAPÍTULO 1: CLASES Y CONJUNTOS.: LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS.

Sebastian Obando.

Responsable de la Edición: J.S.Obando

Registro de derecho autoral No. *(1)
ISBN: 000-0-00000-000

Publicado en linea,
Quito, Ecuador.

Primera edición: 2024
Primera impresión: 2024

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Clases y Conjuntos

1.1 Construcción de Oraciones.

Definición 1.1: –Proposición.–

Una oración es una afirmación o un enunciado que pueder ser *Verdadero o falso.*

Ejemplo 1.1. (Vea los siguientes ejemplos:)

a. En un e.m completo toda sucesion de Cauchy es convergente (Verdadero)

b. El conjunto vacio no es un conjunto cerrado (Falso)

c. La aplicacion (x,y)$\rightarrow$ (x,y+1) es lineal (Falso)

d. Hola (No es oracion)

Notación: Para referirse a una oracion o proposicion se usara las letras mayusculas P, Q, R, S, etc.....

1.1.1 Conectores Lógicos.

Las oraciones se pueden combinar para obtener otras oraciones más complejas mediante la utilización de los denominados conectores lógicos, siendo los más utilizados: negación "no", conjunción "y", disyunción "o", implicación "si... entonces" y bicondicional "si y solo si".

Definición 1.2: –Negación.–

Se usa el operador "$\neg$" y se asocia a la oración, cambiando el valor de verdad.

P	$\neg P$
V	F
F	V

donde V y F denotan los "valores de verdad", verdadero y falso.

Ejemplo 1.2. ¬¬P No es posible que el conjunto A no tenga elementos, entonces se tiene que P El conjunto A tiene elementos.

Ejemplo 1.3. ¬P El numero x no es entero , entonces se tiene que P El numero X es entero.

Definición 1.3: –Conjunción–

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo 1.4. Es verdad que

P 144 es un numero entero

y

Q 144 es un numero real positivo

Por lo tanto,

$P \wedge Q$ 144 es un numero entero y 144 es un numero real positivo

Es verdad

Ejemplo 1.5. Si

P El conjunto vacio tiene elementos

y

Q Cada elemento de Z es un numero entero, entonces

$P \wedge Q$ Es falso.

Definición 1.4: –Disyunción.–

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 1.6. Dadas las proposiciones

P 12 es primo Falso

Q 17 es primo Verdadero

R 19 es numero compuesto Falso, entonces

$P \vee Q$, es verdadero.

$P \vee Q$, es falso.

$P \vee Q$, es verdadero.

Definición 1.5: –Implicación.–

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo 1.7. La oración

$P \Rightarrow Q$ Si 4 es un entero positivo entonces R es un espacio vectorial, es verdadero pues tanto la oración

P 4 es un entero positivo

y

Q , R es un espacio vectorial, son verdaderas.

Ejemplo 1.8. La oración

$P \Rightarrow Q$ Si $-8 > \pi$, entonces $\det(I) = 10$ es verdadero puesto que

P $-8 > \pi$ es falso.

y

Q $\det(I) = 10$ es falso.

Como se puede observar en los ejemplos 7 y 8,existen oraciones que siendo matematicamente correctas, en el lenguaje corriente resultan bastante raras, sin embargo, la implicacion formal mantiene la propiedad fundamental que se exige en la implicacion , es decir, si $P \Rightarrow Q$ es verdadero,supuesto que P es verdadera, bastara saber que Q es verdadera.

Ciertas oraciones compuestas son verdaderas independientemente de la verdad o falsedad de sus partes componentes; un ejemplo típico es la oración $P \rightarrow P$. Independientemente de si P es verdadera o falsa, $P \rightarrow P$ siempre es verdadera; en otras palabras, no importa qué oración sea P, $P \rightarrow P$ es verdadera. Para referencia futura registramos algunas oraciones que tienen esta propiedad.

Definición 1.6: –Equivalencia.–

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Teorema 1.1

Para todas las oraciones P y Q,

i) $P \Rightarrow P \vee Q$ i)$'Q \Rightarrow P \vee Q$

ii)$P \wedge Q \Rightarrow P$ ii)$'$ $P \wedge Q \Rightarrow Q$

Demostración. i) Queremos demostrar que si P y Q son oraciones cualesquiera, entonces $P \rightarrow (P \vee Q)$ es verdadero; en otras palabras, deseamos demostrar que no importa qué valores de verdad asuman P y Q, $P \rightarrow (P \vee Q)$ siempre es cierto. Para hacer esto, derivamos una tabla de verdad para $P \rightarrow (P \vee Q)$ de la siguiente manera.

P	**Q**	$\mathbf{P \Rightarrow (P \vee Q)}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

La idea básica de la tabla de verdad derivada es la siguiente: en la línea 1, P y Q toman el valor V; así, por 1,3, $P \vee Q$ toma el valor V; ahora, P tiene el valor V y $P \vee Q$ tiene el valor V, entonces, por 1.4, $P \rightarrow (P \vee Q)$ toma el valor V. Hacemos lo mismo para cada línea y encontramos que en cada línea (es decir, para cada posible asignación de valores de verdad a P y Q) $P \rightarrow (P \vee Q)$ tiene el valor V (verdadero). Esto es lo que nos propusimos demostrar.

i)$'$ La tabla de verdad derivada para $Q \rightarrow (P \vee Q)$ es análoga a la de $P \rightarrow (P \vee Q)$; la conclusión es la misma.

ii) Para demostrar que $(P \wedge Q) \rightarrow P$ para todas las oraciones P y Q, derivamos una tabla de verdad para $(P \wedge Q) \rightarrow P$.

P	**Q**	$\mathbf{P \wedge Q \Rightarrow P}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

En cada línea (es decir, para cada posible asignación de valores de verdad a P y Q). $(P \wedge Q) \rightarrow P$ toma el valor V; por tanto, $(P \wedge Q) \rightarrow P$ es verdadera independientemente de la verdad o falsedad de las oraciones que la componen P y Q.

ii)' La tabla de verdad para $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ es análoga a la de $(P \wedge Q) \rightarrow P$, y la conclusión es la misma.

□

Teorema 1.2

Para todas las oraciones P, Q y R,

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R).$$

Demostración. Sean P,Q y R oraciones arbitrarias. Se va a probar que $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$ es verdadera. Se deriva la siguiente tabla de verdad para $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$ como:

El proceso que se sigue es el siguiente, en la linea 1 P,Q y R on verdaderas ,asi $P \rightarrow Q$,$P \rightarrow R$ y $Q \rightarrow R$ son verdaderas por Definicion 5, luego por Definicion 3 $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]$ es verdadera, usando nuevamente Definicion 5 $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$ es verdadera.

P	**Q**	**R**	**P $\Rightarrow$ Q**	**Q $\Rightarrow$ R**	**(P $\Rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\Rightarrow$ R)**	**P $\Rightarrow$ R**	*Tautología.*
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

□

Teorema 1.3

Para todas las oraciones P, Q y R, si $Q \Rightarrow R$ es verdad,

i) $P \vee Q \Rightarrow P \vee R$ es verdad. ii)$P \wedge Q \Rightarrow P \wedge R$ es verdad.

Demostración. Se resolvera el literal,

i) Sean P,Q y R oraciones arbitrarias. Suponiendo que $Q \rightarrow R$ es verdadera, se va a probar que $P \vee Q \rightarrow P \vee R$ es verdadera. Se deriva la siguiente tabla de verdad para $P \vee Q \rightarrow P \vee R$ como: En la linea 6 puesto que $Q \rightarrow R$ es verdadera entonces por la Definicion 5 no se puede considerar que Q es verdadero

P	**Q**	**R**	$\mathbf{P \vee Q}$	$\mathbf{P \vee R}$	$\mathbf{P \vee Q \Rightarrow P \vee R}$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V

y R es falso, al mismo tiempo. Como P,Q,R fueron elegidos arbitrariamente se concluye el resultado. □

Teorema 1.4

Para todas las oraciones P, Q y R, es cierto

i)$P \vee Q \iff Q \vee P$. **i)'**$P \wedge Q \iff Q \wedge P$.

ii)$P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R$. **ii)'**$P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R$.

iii)$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

iii)'$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

iv)$P \vee P \iff P$. **iv)'**$P \wedge P \iff P$.

Demostración. Sean P,Q y R oraciones arbitrarias. Se va a probar que $[P \vee (Q \vee P)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$ es verdadera. Se deriva la siguiente tabla de verdad para $[P \vee (Q \vee P)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$ como:

P	**Q**	**R**	$\mathbf{Q \vee R}$	$\mathbf{P \vee (Q \vee R)}$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

El proceso para realizar la tabal es el siguiente , en la linea 1, las oraciones P,Q,R son verdaderas usando la Definicion 4 , se sigue que $[P \vee Q$ y $[Q \vee P$son verdaderas, usandolo nuevamente se tiene que $[P \vee (Q \vee P)]y[(P \vee Q) \vee R]$ son verdaderas entonces por Definicion 6, se tiene que $[P \vee (Q \vee P)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$ es verdader.Este proceso se sigue de manera similar para las siguientes lineas. Dado que P,Q y R fueron elegidas arbitrariamente se concluye que $[P \vee (Q \vee P)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$ es verdadera.

P	**Q**	**R**	$\mathbf{P \vee Q}$	$\mathbf{(P \vee Q) \vee R}$	$\mathbf{P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R}$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V

$\square$

1.1.2 Ejercicios de la Sección 1.1

Ejercicios

Ejercicio 1.1. 1.Demostrar el Teorema 1.4.

1.Demostrar el Teorema 4.

1. $[P \vee Q] \Leftrightarrow [Q \vee P]$

   Demostración. La disyunción es conmutativa. La tabla de verdad es:

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

   Como se puede observar, las columnas de $P \vee Q$ y $Q \vee P$ son idénticas, por lo tanto, $[P \vee Q] \Leftrightarrow [Q \vee P]$. $\square$

2. $[P \wedge Q] \Leftrightarrow [Q \wedge P]$

   Demostración. La conjunción es conmutativa. La tabla de verdad es:

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Como se puede observar, las columnas de $P \wedge Q$ y $Q \wedge P$ son idénticas, por lo tanto, $[P \wedge Q] \Leftrightarrow [Q \wedge P]$. $\square$

3. $[P \vee (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$

Demostración. La disyunción es asociativa. La tabla de verdad es:

P	Q	R	$P \vee (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \vee R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

Como se puede observar, las columnas de $P \vee (Q \vee R)$ y $(P \vee Q) \vee R$ son idénticas, por lo tanto, $[P \vee (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$. $\square$

4. $[P \wedge (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R]$

Demostración. La conjunción es asociativa. La tabla de verdad es:

P	Q	R	$P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \wedge Q) \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Como se puede observar, las columnas de $P \wedge (Q \wedge R)$ y $(P \wedge Q) \wedge R$ son idénticas, por lo tanto, $[P \wedge (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R]$. $\square$

5. $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$

Demostración. La conjunción distribuye sobre la disyunción. La tabla de verdad es:

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Como se puede observar, las columnas de $P \wedge (Q \vee R)$ y $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ son idénticas, por lo tanto, $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$. □

6. $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

Demostración. La disyunción distribuye sobre la conjunción. La tabla de verdad es:

P	Q	R	$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Como se puede observar, las columnas de $P \vee (Q \wedge R)$ y $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ son idénticas, por lo tanto, $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$. □

7. $[P \vee P] \Leftrightarrow P$

Demostración. La disyunción de una proposición consigo misma es la proposición misma. La tabla de verdad es:

P	$P \vee P$
V	V
F	F

Como se puede observar, la columna de $P \vee P$ es idéntica a la de P, por lo tanto, $[P \vee P] \Leftrightarrow P$. □

8. $[P \wedge P] \Leftrightarrow P$

Demostración. La conjunción de una proposición consigo misma es la proposición misma. La tabla de verdad es:

P	$P \wedge P$
V	V
F	F

Como se puede observar, la columna de $P \wedge P$ es idéntica a la de P, por lo tanto, $[P \wedge P] \Leftrightarrow P$. □

Ejercicio 1.2. Las Leyes de De Morgan se pueden expresar de la siguiente manera:

1. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$
2. $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$

A continuación, demostraremos ambas leyes usando tablas de verdad.

a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Demostración.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Como se puede ver en la tabla, las columnas de $\neg(P \vee Q)$ y $\neg P \wedge \neg Q$ son idénticas. Por lo tanto, $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$. □

b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Demostración.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Como se puede ver en la tabla, las columnas de $\neg(P \wedge Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$ son idénticas. Por lo tanto, $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$. □

Ejercicio 1.3. Los enunciados son:

- **Enunciado a):** Demostrar que $\neg\neg P \Rightarrow P$ es verdadera para cualquier proposición P.
- **Enunciado b):** Demostrar que $P \Rightarrow \neg\neg P$ es verdadera para cualquier proposición P.

a) $\neg\neg P \Rightarrow P$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	$\neg\neg P \Rightarrow P$
V	F	V	V
F	V	F	V

Como se puede ver en la tabla, la columna de $\neg\neg P \Rightarrow P$ es siempre verdadera. Por lo tanto, $\neg\neg P \Rightarrow P$ es una tautología y siempre es verdadera. □

b) $P \Rightarrow \neg\neg P$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	$\neg P$	$\neg\neg P$	$P \Rightarrow \neg\neg P$
V	F	V	V
F	V	F	V

Como se puede ver en la tabla, la columna de $P \Rightarrow \neg\neg P$ es siempre verdadera. Por lo tanto, $P \Rightarrow \neg\neg P$ es una tautología y siempre es verdadera. □

Ejercicio 1.4. Pruebe que las siguientes oraciones son verdaderas para todo P, Q y R.

a) $(P \to Q) \iff (\neg Q \to \neg P)$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Las columnas de $P \to Q$ y $\neg Q \to \neg P$ son idénticas. Por lo tanto, $P \to Q \iff \neg Q \to \neg P$ es verdadero para cualquier P y Q. □

b) $(P \to Q) \iff (\neg P \vee Q)$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Las columnas de $P \to Q$ y $\neg P \vee Q$ son idénticas. Por lo tanto, $P \to Q \iff \neg P \vee Q$ es verdadero para cualquier P y Q. □

c) $(P \to Q) \iff \neg(P \wedge \neg Q)$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

Las columnas de $P \to Q$ y $\neg(P \wedge \neg Q)$ son idénticas. Por lo tanto, $P \to Q \iff \neg(P \wedge \neg Q)$ es verdadero para cualquier P y Q. $\square$

d) $[P \wedge (P \to Q)] \to P$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge (P \to Q)$	$[P \wedge (P \to Q)] \to P$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

La columna de $[P \wedge (P \to Q)] \to P$ es siempre verdadera. Por lo tanto, $[P \wedge (P \to Q)] \to P$ es una tautología. $\square$

e) $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \to Q$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	$[(P \vee Q) \wedge \neg P] \to Q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

La columna de $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \to Q$ es siempre verdadera cuando $(P \vee Q) \wedge \neg P$ es verdadero. Por lo tanto, $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \to Q$ es una tautología. $\square$

Ejercicio 1.5. Probar que las siguientes oraciones son verdaderas para todo P, Q y R.

a) $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$	$P \to R$	*Tautología.*
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La columna final muestra que la proposición es siempre verdadera. □

b) $[(P \to Q) \wedge (R \to Q)] \iff [(P \vee R) \to Q]$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	R	$P \to Q$	$R \to Q$	$(P \to Q) \wedge (R \to Q)$	$P \vee R$	$(P \vee R) \to Q$	$\iff$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

La columna final muestra que las proposiciones son equivalentes. □

c) $[(P \to Q) \wedge (P \to R)] \iff [P \to (Q \wedge R)]$

Tabla de verdad:

Demostración.

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$	$Q \wedge R$	$P \to (Q \wedge R)$	$\iff$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

La columna final muestra que las proposiciones son equivalentes. □

Ejercicio 1.6. Dado que $Q \leftrightarrow R$ es verdadero, probaremos las siguientes equivalencias.

a) $P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$

Demostración. Para demostrar esta equivalencia, utilizaremos tablas de verdad.

Tabla de verdad para $P \vee Q$ y $P \vee R$:

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Como se puede ver en la tabla, las columnas de $P \vee Q$ y $P \vee R$ son idénticas. Por lo tanto, $P \vee Q \leftrightarrow P \vee R$ es verdadero. □

b) $P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R$

Demostración. Para demostrar esta equivalencia, utilizaremos tablas de verdad.

Tabla de verdad para $P \wedge Q$ y $P \wedge R$:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Como se puede ver en la tabla, las columnas de $P \wedge Q$ y $P \wedge R$ son idénticas. Por lo tanto, $P \wedge Q \leftrightarrow P \wedge R$ es verdadero. □

c) $P \to Q \leftrightarrow P \to R$

Demostración. Para demostrar esta equivalencia, utilizaremos tablas de verdad.

Tabla de verdad para $P \to Q$ y $P \to R$:

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

Como se puede ver en la tabla, las columnas de $P \to Q$ y $P \to R$ son idénticas. Por lo tanto, $P \to Q \leftrightarrow P \to R$ es verdadero. □

Ejercicio 1.7. Dado que $P \to Q$ y $R \to S$ son verdaderos, probaremos las siguientes implicaciones.

a) $P \vee R \to Q \vee S$

Demostración. Para demostrar esta equivalencia, utilizaremos tablas de verdad.

Tabla de verdad para $P \vee R \to Q \vee S$:

P	Q	R	S	$P \to Q$	$R \to S$	$P \vee R \to Q \vee S$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Como se puede ver en la tabla, la última columna de $P \vee R \to Q \vee S$ es siempre verdadera. Por lo tanto, $P \vee R \to Q \vee S$ es verdadero. $\square$

b) $P \wedge R \to Q \wedge S$

Demostración. Para demostrar esta equivalencia, utilizaremos tablas de verdad.

Tabla de verdad para $P \wedge R \to Q \wedge S$:

P	Q	R	S	$P \to Q$	$R \to S$	$P \wedge R \to Q \wedge S$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Como se puede ver en la tabla, la última columna de $P \wedge R \to Q \wedge S$ es siempre verdadera. Por lo tanto, $P \wedge R \to Q \wedge S$ es verdadero. $\square$

1.2 CONSTRUCCIÓN DE CLASES.

En esta sección,empieza el desarrollo de teoría de conjuntos axiomática,como toda teoría axiomática se necesita de nociones indefinidas,en este caso se necesita de las palabras clase y relación de pertenencia.

Las nociones indefinidas son palabras que mentalmente se puede dar un significado en forma de imagen pero matemáticamente se debe proceder como "si supiéramos su significado" **Ejemplo:** el punto.

● **Observación.** Si x y A son clases, la expresión $x \in A$se lee "x pertenece a A","x es un elemento de A" o simplemente "x esta en A".Mientras que la expresión $x \notin A$, se lee "x no esta en A".

Definición 1.7: –Clase ó Elemento–
Sea x una clase. Si x es un elemento de alguna clase A,entonces x se llama un *elemento*, es decir $x \in A$.

Ejemplo 1.9. Tenemos:

1. La clase "2" es un elemento de la clase "$\mathbb{R}$" puesto que $2 \in \mathbb{R}$.

2. La clase "I_2" es un elemento de la clase $M_{2\times 2}$ puesto que $I_2 \in M_{2\times 2}$.

● **Observación.** Las letras minúsculas a, b, c, x, y, z.... únicamente se utilizara para referirse a elementos.

Definición 1.8: –Igualdad.–
Sea A y B se define $A = B$ si y sólo si $(\forall c)[A \in C \Rightarrow B \in C \wedge B \in C \Rightarrow A \in C]$.

Axioma 1.1: –Extensión–
Sean A y B clases se dice que A=B si y solo si ,cada eleemnto de A es elemento de B y viceversa.En simbolos
$A = B$ si $x \in A$ si y sólo si $x \in B$.

Definición 1.9: –Subclases.–
Sea A y B clases, definimos $A \subseteq B$ para todo $x \in A$ es un elemento de B, $A \subseteq B$ ssi $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Ejemplo 1.10. Sea $x \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que int(X) es el mayor conjunto abierto contenido en X,es decir, si F es un abierto de X,entonces $F \subset int(X)$.

Teorema 1.5
Para todas las clases A, B y C,
i)$A = A$.
ii)$A = B \Rightarrow B = A$.
iii)$A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$.
iv)$A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.
v) $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Las demostraciones son:
i) $A = A$

Demostración. Por el Axioma 1, un conjunto es igual a sí mismo porque cumple la condición de tener los mismos elementos que sí mismo.

$$A = A.$$

□

ii) $A = B \implies B = A$**.**

Demostración. Supongamos que $A = B$. Según el Axioma 1:

$$\forall x\,(x \in A \iff x \in B).$$

Esto implica que:

$$\forall x\,(x \in B \iff x \in A).$$

Por lo tanto:

$$B = A.$$

□

iii) $A = B$ **y** $B = C \implies A = C$**.**

Demostración. Supongamos que $A = B$ y $B = C$. Según el Axioma 1:

$$\forall x\,(x \in A \iff x \in B).$$

$$\forall x\,(x \in B \iff x \in C).$$

De la transitividad de la equivalencia lógica, obtenemos:

$$\forall x\,(x \in A \iff x \in C).$$

Por lo tanto:

$$A = C.$$

$\square$

iv) $A \subseteq B$ **y** $B \subseteq A \implies A = B$.

Demostración. Supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Esto significa:

$$\forall x\,(x \in A \implies x \in B).$$

$$\forall x\,(x \in B \implies x \in A).$$

Combinando estas dos afirmaciones, obtenemos:

$$\forall x\,(x \in A \iff x \in B).$$

Por el Axioma 1, esto implica que:

$$A = B.$$

$\square$

v) $A \subseteq B$ **y** $B \subseteq C \implies A \subseteq C$**.**

Demostración. Supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Esto significa:

$$\forall x\,(x \in A \implies x \in B).$$

$$\forall x\,(x \in B \implies x \in C).$$

De la transitividad de la implicación, obtenemos:

$$\forall x\,(x \in A \implies x \in C).$$

Por lo tanto:

$$A \subseteq C.$$

$\square$

Axioma 1.2: –Axioma de construcción de clases–
Sea P(x) un enunciado sobre x que pueda expresarse totalmente en términos de los símbolos $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Longrightarrow \quad \Longleftrightarrow \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \leftrightarrow$, signos de agrupación y las variables x,y,z tal que A,B,C... Entonces existe una clase C que consta de todos los elementos x que satisfacen P(X). **La clase C cuya exitencia esta garantizada por el axioma anterior, se designara como:** $C = [x : P(X)]$. En lo que sigue se usara el Axioma 2 para construir nuevas clases de clases dadas.

Definición 1.10: –Unión.–
Sean A y B clases, se define

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Tal que, $x \in A \cup B$ si y solo si $x \in A$ ó $x \in B$.

Definición 1.11: –Intersección.–
Sean A y B clases, se define

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Tal que, $x \in A \cup B$ si y solo si $x \in A$ y $x \in B$.

Definición 1.12: –Universal.–
La clase universal denotada por $\mathcal{U}$ es la clase formada por todos los elementos.

Definición 1.13: –Vacío.–
La clase vacía $\varnothing$ no tiene elementos.

Definición 1.14: –Clases disjuntas.–
Sean A y B son disjuntas si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Definición 1.15: –Complemento.–
$A' = \{x : x \notin A\}$, $x \in A'$ si y sólo si $x \notin A$.

Definición 1.16: –Diferencia.–
Sean A y B clases, la diferencia se denota $A - B = A \cap B'$. Otra forma es $A - B = B' - A'$.

Teorema 1.6
Para todas las clases A,
i) $\varnothing \subseteq A$.
ii) $A \subseteq \mathcal{U}$.

i) $\emptyset \subseteq A$

Demostración. La clase vacía $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto A. Esto se debe a que no hay elementos en la clase vacía que puedan no estar en A. Formalmente:

$$\forall x\,(x \in \emptyset \implies x \in A).$$

Como no hay elementos en $\emptyset$, la implicación $x \in \emptyset \implies x \in A$ es siempre verdadera. Por lo tanto:

$$\emptyset \subseteq A.$$

□

ii) $A \subseteq U$.

Demostración. Cualquier clase A es un subconjunto de la clase universal U. Esto se debe a que U contiene todos los elementos bajo consideración, incluyendo todos los elementos de A. Formalmente:

$$\forall x\,(x \in A \implies x \in U)$$

Dado que U contiene todos los elementos posibles, cualquier elemento x que esté en A también está en U. Por lo tanto:

$$A \subseteq U.$$

□

1.2.1 Ejercicios de la Sección 1.2

Ejercicio 1.8. Dado que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, probaremos las siguientes proposiciones.

a) $A \cup C \subseteq B \cup D$

Demostración. (Implicación).

- Sea $x \in A \cup C$. Por definición de unión, esto significa que $x \in A$ o $x \in C$.
- Como $A \subseteq B$, si $x \in A$, entonces $x \in B$.
- Como $C \subseteq D$, si $x \in C$, entonces $x \in D$.
- Por lo tanto, si $x \in A \cup C$, entonces $x \in B \cup D$.
- Esto demuestra que $A \cup C \subseteq B \cup D$.

$\square$

b) $A \cap C \subseteq B \cap D$

Demostración. (Implicación).

- Sea $x \in A \cap C$. Por definición de intersección, esto significa que $x \in A$ y $x \in C$.
- Como $A \subseteq B$, si $x \in A$, entonces $x \in B$.
- Como $C \subseteq D$, si $x \in C$, entonces $x \in D$.
- Por lo tanto, si $x \in A \cap C$, entonces $x \in B \cap D$.
- Esto demuestra que $A \cap C \subseteq B \cap D$.

$\square$

Ejercicio 1.9. Dado que $A = B$ y $C = D$, probaremos las siguientes igualdades.

a) $A \cup C = B \cup D$

Demostración. (Equivalencia)

- Desde el resultado anterior, sabemos que si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces:

$$A \cup C \subseteq B \cup D$$

- Usando las igualdades $A = B$ y $C = D$:

$$A \cup C \subseteq A \cup C \text{ (trivial)}$$

$$B \cup D = A \cup C$$

- Por lo tanto, $A \cup C = B \cup D$.

□

b) $A \cap C = B \cap D$

Demostración. (Equivalencia)

- Desde el resultado anterior, sabemos que si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces:

$$A \cap C \subseteq B \cap D$$

- Usando las igualdades $A = B$ y $C = D$:

$$A \cap C \subseteq A \cap C \text{ (trivial)}$$

$$B \cap D = A \cap C$$

- Por lo tanto, $A \cap C = B \cap D$.

□

Ejercicio 1.10. Demostraremos que si $A \subseteq B$, entonces $B' \subseteq A'$.

Demostración. (Implicación)

- Sea x un elemento arbitrario de B'. Por definición de B', esto significa que $x \notin B$.
- Dado que $A \subseteq B$, todo elemento de A también está en B. Por lo tanto, si $x \notin B$, entonces x no puede estar en A porque $A \subseteq B$.
- Así, $x \notin A$, lo que significa que $x \in A'$.
- Como x fue un elemento arbitrario de B' y hemos demostrado que $x \in A'$, se concluye que $B' \subseteq A'$.

□

Ejercicio 1.11. Demostraremos que si $A = B$, entonces $A' = B'$.

Demostración. (Contenencias)

- **Demostración de $A' \subseteq B'$:**
  - Sea x un elemento arbitrario de A'. Por definición de A', esto significa que $x \notin A$.
  - Dado que $A = B$, si $x \notin A$, entonces $x \notin B$.

- Por lo tanto, $x \in B'$, ya que $x \notin B$ es la condición para que $x \in B'$.
- Así, cada elemento de A' está en B', lo que implica que $A' \subseteq B'$.

- **Demostración de $B' \subseteq A'$:**
  - Sea x un elemento arbitrario de B'. Por definición de B', esto significa que $x \notin B$.
  - Dado que $A = B$, si $x \notin B$, entonces $x \notin A$.
  - Por lo tanto, $x \in A'$, ya que $x \notin A$ es la condición para que $x \in A'$.
  - Así, cada elemento de B' está en A', lo que implica que $B' \subseteq A'$.

- Combinando ambos resultados, obtenemos que:

$$A' \subseteq B' \text{ y } B' \subseteq A'$$

Por lo tanto, $A' = B'$.

□

Ejercicio 1.12. Demostraremos que si $A = B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

- **Dado:** $A = B$ y $B \subseteq C$.
- **Para probar:** $A \subseteq C$.
  - *Demostración.*

    Sea x un elemento arbitrario de A.

    Dado que $A = B$, si $x \in A$, entonces $x \in B$.

    Como $B \subseteq C$, si $x \in B$, entonces $x \in C$.

    Por lo tanto, $x \in A$ implica $x \in C$.

    Como x fue un elemento arbitrario de A y hemos demostrado que $x \in C$, se concluye que $A \subseteq C$. □

Ejercicio 1.13. Demostraremos que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

- **Dado:** $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.
- **Para probar:** $A \subseteq C$.
- *Demostración.* (Implicación)
  - Sea x un elemento arbitrario de A.

- Dado que $A \subseteq B$, si $x \in A$, entonces $x \in B$.
- Como $B \subseteq C$, si $x \in B$, entonces $x \in C$.
- Por lo tanto, $x \in A$ implica $x \in C$.
- Como x fue un elemento arbitrario de A y hemos demostrado que $x \in C$, se concluye que $A \subseteq C$.

□

Ejercicio 1.14. Los literales vi) y v) ya estan demostrados en el Teorema 1.5

Ejercicio 1.15. ¿Permite el Axioma A2 formar la "clase de todas las clases"? Explica.

Demostración. Si la clase de todas las clases existiera, se podría construir $S = \{x \mid x \text{ es una clase y } x \in x\}$. Esto genera la paradoja. Cabe notar que el Axioma A2 dice que solo se puede construir una clase de los "elementos" que satisfacen la condición $P(x)$.

9. Sea $S = \{x \mid x \in x\}$. Utiliza el argumento de Russell para probar que S no es un elemento. □

Demostración. Supongamos que S es un elemento. Primero, si S es un elemento de S (es decir, $S \in S$), entonces, por la definición de S, se debe cumplir que $S \in S$. Esto implica que S debe estar en una clase distinta de S, ya que, por definición, si $S \in S$, entonces S no puede estar en S.

Es decir, $S \in S$ implica $S \notin S$. Esto lleva a una contradicción, ya que S no puede estar tanto en S como no estar en S al mismo tiempo. Por lo tanto, la suposición inicial de que S es un elemento es falsa.

Esto demuestra que S no es un elemento.

10.Explica por qué la paradoja de Russell y la paradoja de Berry no pueden ser producidas utilizando el Axioma A2. □

Demostración. La paradoja de Berry no puede ser producida, ya que no es posible escribir tal condición — x puede ser descrito en menos de veinte palabras del idioma inglés — utilizando el Axioma A2. Por otro lado, la paradoja de Russell tampoco puede ser producida, ya que su argumento simplemente demuestra que la clase $S = \{x \mid x \in x\}$ no es un elemento. □

1.3 Álgebra de Clases.

Bajo las operaciones unión, intersección y complemento de clases satisfacen ciertas leyes algebraicas de las cuales se puede desarrollar un algebra de clases.

Teorema 1.7
Para cualquier par de clases A y B, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
2. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Demostración. **i)**
1. $A \subseteq A \cup B$:
Queremos demostrar que cada elemento de A también está en $A \cup B$.

Sea x un elemento arbitrario tal que $x \in A$.

Por la definición de la unión de conjuntos:

$$x \in A \implies x \in A \cup B$$

Por lo tanto, $A \subseteq A \cup B$.
2. $B \subseteq A \cup B$:
Queremos demostrar que cada elemento de B también está en $A \cup B$.

Sea x un elemento arbitrario tal que $x \in B$.

Por la definición de la unión de conjuntos:

$$x \in B \implies x \in A \cup B$$

Por lo tanto, $B \subseteq A \cup B$.
ii)
1. $A \cap B \subseteq A$:
Queremos demostrar que cada elemento de $A \cap B$ también está en A.

Sea x un elemento arbitrario tal que $x \in A \cap B$.

Por la definición de la intersección de conjuntos:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \text{ y } x \in B$$

Entonces, si $x \in A \cap B$, se sigue que:

$$x \in A$$

Por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$.
2. $A \cap B \subseteq B$:
Queremos demostrar que cada elemento de $A \cap B$ también está en B.

Sea x un elemento arbitrario tal que $x \in A \cap B$.

Por la definición de la intersección de conjuntos:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \text{ y } x \in B$$

Entonces, si $x \in A \cap B$, se sigue que:

$$x \in B$$

Por lo tanto, $A \cap B \subseteq B$.

□

Teorema 1.8

Para cualquier par de clases A y B, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cup B = B$
2. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$

Demostración. **i) $A \subseteq B$ si y solo si $A \cup B = B$**

- **Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$:**
  - Supongamos que $A \subseteq B$. Entonces, para cualquier $x \in A \cup B$, $x \in B$ porque $A \subseteq B$. Así, $A \cup B \subseteq B$.
  - Dado que $B \subseteq A \cup B$, combinamos las inclusiones para obtener $A \cup B = B$.
- **Si $A \cup B = B$, entonces $A \subseteq B$:**
  - Supongamos que $A \cup B = B$. Para cualquier $x \in A$, $x \in A \cup B$ y por hipótesis $A \cup B = B$, entonces $x \in B$. Esto muestra que $A \subseteq B$.

ii) $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$

- **Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$:**

  - Supongamos que $A \subseteq B$. Entonces, para cualquier $x \in A$, $x \in A \cap B$ porque $x \in B$. Así, $A \subseteq A \cap B$.
  - Dado que $A \cap B \subseteq A$, combinamos las inclusiones para obtener $A \cap B = A$.

- **Si $A \cap B = A$, entonces $A \subseteq B$:**

  - Supongamos que $A \cap B = A$. Para cualquier $x \in A$, dado que $x \in A \cap B$ y $A \cap B = A$, se tiene que $x \in B$. Esto muestra que $A \subseteq B$.

□

Teorema 1.9
Para todas las clases A y B, se cumplen las siguientes leyes:

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$

Demostración. **i)** $A \cup (A \cap B) = A$

- Por el Teorema 8 (ii), tenemos que $A \cap B \subseteq A$.
- Por el Teorema 9 (i), dado que $A \cap B \subseteq A$, se sigue que $A \cup (A \cap B) = A$.

ii) $A \cap (A \cup B) = A$

- Por el Teorema 8 (i), tenemos que $A \subseteq A \cup B$.
- Por el Teorema 9 (ii), dado que $A \subseteq A \cup B$, se sigue que $A \cap (A \cup B) = A$.

□

Teorema 1.10
Para cualquier clase A, se cumple que:

$$(A')' = A$$

Demostración. Para demostrar que $(A')' = A$, procedemos de la siguiente manera:

- Sea x un elemento arbitrario.
  - Si $x \in (A')'$, entonces $x \notin A'$. Por definición de A', esto significa que $x \in A$. Así, $(A')' \subseteq A$.

  - Recíprocamente, si $x \in A$, entonces $x \notin A'$. Por lo tanto, $x \in (A')'$. Así, $A \subseteq (A')'$.

- Combinando ambas inclusiones, tenemos $(A')' = A$.

$\square$

Teorema 1.11
Para todas las clases A y B, se cumplen las siguientes leyes:

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración. **i)** $(A \cup B)' = A' \cap B'$

- **Demostrar que** $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$**:**
  - Supongamos que $x \in (A \cup B)'$. Esto significa que $x \notin A \cup B$.
  - Por la definición de unión, $x \notin A \cup B$ implica que $x \notin A$ y $x \notin B$. Así, $x \in A'$ y $x \in B'$. Por lo tanto, $x \in A' \cap B'$.
- **Demostrar que** $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$**:**
  - Supongamos que $x \in A' \cap B'$. Esto significa que $x \in A'$ y $x \in B'$. Por lo tanto, $x \notin A$ y $x \notin B$.
  - Por la definición de unión, $x \notin A$ y $x \notin B$ implica que $x \notin A \cup B$. Así, $x \in (A \cup B)'$.

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

- **Demostrar que** $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$**:**
  - Supongamos que $x \in (A \cap B)'$. Esto significa que $x \notin A \cap B$.
  - Por la definición de intersección, $x \notin A \cap B$ implica que $x \notin A$ o $x \notin B$. Así, $x \in A'$ o $x \in B'$. Por lo tanto, $x \in A' \cup B'$.
- **Demostrar que** $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$**:**
  - Supongamos que $x \in A' \cup B'$. Esto significa que $x \in A'$ o $x \in B'$. Por lo tanto, $x \notin A$ o $x \notin B$.
  - Por la definición de intersección, $x \notin A$ o $x \notin B$ implica que $x \notin A \cap B$. Así, $x \in (A \cap B)'$.

$\square$

Teorema 1.12
Para todas las clases A, B y C, se cumplen las siguientes leyes:

Leyes Conmutativas

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

Leyes Idempotentes

3. $A \cup A = A$
4. $A \cap A = A$

Leyes Asociativas

5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Leyes Distributivas

7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Teorema 1.13
Para cualquier clase A y la clase universal $\mathcal{U}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
4. $A \cap \mathcal{U} = A$
5. $\mathcal{U} = \mathcal{U}$
6. $\varnothing' = \mathcal{U}$
7. $A \cup A' = \mathcal{U}$
8. $A \cap A' = \varnothing$

1.3.1 Ejercicios de la Sección 1.3

Ejercicio 1.16. Teorema 1.8, literal **2)**

i) $A \cap B \subseteq A$.

Demostración. Queremos demostrar que cada elemento de $A \cap B$ también está en A.

Sea x un elemento arbitrario tal que $x \in A \cap B$.

Por la definición de la intersección de conjuntos:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \text{ y } x \in B$$

Entonces, si $x \in A \cap B$, se sigue que:

$$x \in A$$

Por lo tanto, $A \cap B \subseteq A$, tal que por el Teorema 1.7, se tiene $A \subseteq B$. □

ii)Teorema 1.11, literal 2) $A \cap B \subseteq B$:

Demostración. Queremos demostrar que cada elemento de $A \cap B$ también está en B.

Sea x un elemento arbitrario tal que $x \in A \cap B$.

Por la definición de la intersección de conjuntos:

$$x \in A \cap B \implies x \in A \text{ y } x \in B$$

Entonces, si $x \in A \cap B$, se sigue que:

$$x \in B$$

Por lo tanto, $A \cap B \subseteq B$, tal que por el Teorema 1.7, se tiene $A \subseteq B$. □

Ejercicio 1.17. Teorema 1.11 literal **ii)** $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración. (Contenencias)

- **Demostrar que** $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$
  - Supongamos que $x \in (A \cap B)'$. Esto significa que $x \notin A \cap B$.
  - Por la definición de intersección, $x \notin A \cap B$ implica que $x \notin A$ o $x \notin B$. Así, $x \in A'$ o $x \in B'$. Por lo tanto, $x \in A' \cup B'$.

- **Demostrar que $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$:**
  - Supongamos que $x \in A' \cup B'$. Esto significa que $x \in A'$ o $x \in B'$. Por lo tanto, $x \notin A$ o $x \notin B$.
  - Por la definición de intersección, $x \notin A$ o $x \notin B$ implica que $x \notin A \cap B$. Así, $x \in (A \cap B)'$.

□

Ejercicio 1.18. Teorema **1.12**.

Ley de Conmutatividad $A \cup B = B \cup A$.

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B; \\ &\iff x \in B \vee x \in A; \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$

□

Ley de Conmutatividad $A \cap B = B \cap A$.

Demostración.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \wedge x \in B; \\ &\iff x \in B \wedge x \in A; \\ &\iff x \in B \cap A. \end{aligned}$$

□

Ley Idempotente de la Intersección: $A \cup A = A$.

Demostración. (Equivalencia)

- Por definición de la unión, un elemento x está en $A \cup A$ si y solo si $x \in A$ o $x \in A$.
- Dado que $x \in A \cup A$ implica $x \in A$, entonces $A \cup A \subseteq A$.
- A la inversa, si $x \in A$, claramente $x \in A \cup A$, entonces $A \subseteq A \cup A$.
- Así, $A \cup A = A$.

□

Ley Idempotente de la Intersección: $A \cap A = A$

Demostración. (Equivalencia)

- Por definición de la intersección, un elemento x está en $A \cap A$ si y solo si $x \in A$ y $x \in A$.
- Dado que $x \in A \cap A$ implica $x \in A$, entonces $A \cap A \subseteq A$.
- A la inversa, si $x \in A$, claramente $x \in A \cap A$, entonces $A \subseteq A \cap A$.
- Así, $A \cap A = A$.

$\square$

Ley Distributiva de la Intersección sobre la Unión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Demostración. (Equivalencia)

- Sea x un elemento arbitrario.
- Si $x \in A \cap (B \cup C)$, entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
- Esto significa que $x \in B$ o $x \in C$. Así que, $x \in (A \cap B)$ o $x \in (A \cap C)$, por lo que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Por lo tanto, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Ahora, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.
- Si $x \in A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$. Por lo tanto, $x \in B \cup C$ y así $x \in A \cap (B \cup C)$.
- De manera similar, si $x \in A \cap C$, entonces $x \in A$ y $x \in C$, lo que implica que $x \in B \cup C$ y así $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Por lo tanto, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.
- Conclusión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\square$

Ley Distributiva de la Unión sobre la Intersección: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Demostración. (Equivalencia).

- Sea x un elemento arbitrario.
- Si $x \in A \cup (B \cap C)$, entonces $x \in A$ o $x \in B \cap C$.
- Si $x \in A$, claramente $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$, entonces $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Si $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$. Como $x \in B$ y $x \in C$, claramente $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$. Así, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Por lo tanto, $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Ahora, si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$.
- Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Si $x \in B$ y $x \in C$, entonces $x \in B \cap C$, y por lo tanto $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Así, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.
- Conclusión: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

□

Ejercicio 1.19. Teorema **1.13**.

2. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Demostración. (Equivalencia).

- La propiedad 8 afirma que $A \cap A' = \emptyset$.
- Por definición, el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto, en particular de A.
- Por lo tanto, $A \cap \emptyset \subseteq A \cap A'$.
- Dado que $A \cap A' = \emptyset$, entonces $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.
- También, $A \cap \emptyset$ debe estar contenido en $\emptyset$ porque $\emptyset$ no tiene elementos.
- Conclusión: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

□

4. $A \cap \mathcal{U} = A$.

Demostración. (Equivalencia).

- La propiedad 8 afirma que $A \cap A' = \emptyset$.
- Sabemos que $\mathcal{U}$ es la clase universal y contiene todos los elementos de cualquier clase, incluyendo A y A'.
- Por lo tanto, $A \cap \mathcal{U}$ debe ser el conjunto A porque $\mathcal{U}$ no excluye ningún elemento de A.
- Formalmente, dado que $A \subseteq \mathcal{U}$, se sigue que $A \cap \mathcal{U} = A$.

$\square$

5. $\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Demostración. (Equivalencia).
La propiedad 8 afirma que $A \cap A' = \emptyset$.

- La clase universal $\mathcal{U}$ es la clase que contiene todos los elementos. Por definición, $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$, porque $\mathcal{U}'$ no tiene elementos.
- La intersección de $\mathcal{U}$ con cualquier conjunto complementario debe ser el conjunto vacío, y por la definición de clase universal, esto se cumple.
- Por lo tanto, $\mathcal{U} = \mathcal{U}$ porque no hay contradicción ni cambio en la definición de $\mathcal{U}$.

$\square$

Ejercicio 1.20. Pruebe los siguientes literales.

a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Demostración. Queremos demostrar que $(A \cap B) \cup C$ es igual a $(A \cup C) \cap (B \cup C)$. **Mostrar que** $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C$

- Sea $x \in (A \cap B) \cup C$.
- Entonces, $x \in (A \cap B)$ o $x \in C$.
  - **Caso 1:** $x \in (A \cap B)$
    * Entonces $x \in A$ y $x \in B$.
    * Por lo tanto, $x \in A \cup C$ y $x \in B \cup C$.
    * Así, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
  - **Caso 2:** $x \in C$
    * Entonces $x \in A \cup C$ y $x \in B \cup C$.

        * Así, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

- En ambos casos, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Por lo tanto, $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Mostrar que $A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

- Sea $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- Entonces, $x \in A \cup C$ y $x \in B \cup C$.
    - **Caso 1:** $x \in C$
        * Entonces $x \in (A \cap B) \cup C$.
    - **Caso 2:** $x \notin C$
        * Entonces $x \in A$ y $x \in B$.
        * Por lo tanto, $x \in A \cap B$.
        * Así, $x \in (A \cap B) \cup C$.
- En ambos casos, $x \in (A \cap B) \cup C$. Por lo tanto, $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$.

Por lo tanto, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. □

b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Demostración. Queremos demostrar que $(A \cup B) \cap C$ es igual a $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

- **Mostrar que** $A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$
    - Sea $x \in (A \cup B) \cap C$.
    - Entonces, $x \in A \cup B$ y $x \in C$.
        * **Caso 1:** $x \in A$
            · Entonces $x \in A \cap C$.
            · Así, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
        * **Caso 2:** $x \in B$
            · Entonces $x \in B \cap C$.
            · Así, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
    - En ambos casos, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Por lo tanto, $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- **Mostrar que** $A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup B) \cap C$.

- Sea $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- Entonces, $x \in A \cap C$ o $x \in B \cap C$.
  * **Caso 1:** $x \in A \cap C$
    · Entonces $x \in A$ y $x \in C$.
    · Así, $x \in A \cup B$.
    · Por lo tanto, $x \in (A \cup B) \cap C$.
  * **Caso 2:** $x \in B \cap C$
    · Entonces $x \in B$ y $x \in C$.
    · Así, $x \in A \cup B$.
    · Por lo tanto, $x \in (A \cup B) \cap C$.
- En ambos casos, $x \in (A \cup B) \cap C$. Por lo tanto, $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$.

Por lo tanto, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

□

Ejercicio 1.21. Usando el álgebra de clases , probar que:

a) Probar que:

$$\text{Si } A \cap C = \emptyset, \text{ entonces } A \cap (B \cup C) = A \cap B$$

Demostración. Se prueba por,

- **Lado Izquierdo (LHS):** $A \cap (B \cup C)$
  - Un elemento $x \in A \cap (B \cup C)$ si y solo si:
    * $x \in A$ y $x \in B \cup C$.
    * Por lo tanto, $x \in A \cap (B \cup C)$ significa:
      · $x \in A$ y $x \in B$ o $x \in C$.
- **Lado Derecho (RHS):** $A \cap B$
  - Un elemento $x \in A \cap B$ si y solo si:
    * $x \in A$ y $x \in B$.
- **Equivalencia:**
  - Si $x \in A \cap (B \cup C)$, entonces:

    * Si $x \in A$ y $x \in B \cup C$, entonces x debe estar en B (porque $x \in C$ es imposible debido a $A \cap C = \emptyset$).
    * Por lo tanto, $x \in A$ y $x \in B$, así que $x \in A \cap B$.
  - A la inversa, si $x \in A \cap B$, entonces:
    * $x \in A$ y $x \in B$.
    * Dado que $x \in B \subseteq B \cup C$, $x \in A \cap (B \cup C)$.

Por lo tanto, $A \cap (B \cup C) = A \cap B$.

□

b) Probar que:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } A - B = A$$

Demostración. Se prueba por,

- **Lado Izquierdo :** $A - B$
  - Un elemento $x \in A - B$ si y solo si:
    * $x \in A$ y $x \notin B$.
- **Lado Derecho :** A
  - Un elemento $x \in A$ si y solo si:
    * $x \in A$.
- **Equivalencia:**
  - Si $x \in A - B$, entonces:
    * $x \in A$ y $x \notin B$.
    * Dado que $x \notin B$ ya está incluido en $A - B$, implica directamente que $x \in A$, así que $A - B = A$.
  - A la inversa, si $x \in A$, entonces:
    * Dado que $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$.
    * Por lo tanto, $x \in A - B$, mostrando que $A \subseteq A - B$.

Por lo tanto, $A - B = A$ cuando $A \cap B = \emptyset$.

□

c) Probar que:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ y } A \cup B = C, \text{ entonces } A = C - B$$

Demostración. Se prueba por,

- **Lado Izquierdo :** A
  - Necesitamos mostrar que $A = C - B$.
- **Lado Derecho :** $C - B$
  - Un elemento $x \in C - B$ si y solo si:
    - $x \in C$ y $x \notin B$.
- **Equivalencia:**
  - Si $x \in A$, entonces:
    - Dado que $A \cup B = C$, $x \in C$ y $x \notin B$ (porque $A \cap B = \emptyset$).
    - Por lo tanto, $x \in C - B$, mostrando que $A \subseteq C - B$.
  - A la inversa, si $x \in C - B$, entonces:
    - $x \in C$ y $x \notin B$.
    - Dado que $A \cup B = C$, $x \in A$ (porque $x \notin B$, debe estar en A).

Por lo tanto, $A = C - B$.

□

Ejercicio 1.22.

a) Si $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$:

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

Demostración. Se prueba por,

- Si $x \in A \cap (B - C)$, entonces:
  - $x \in A$ y $x \in B - C$.
  - Por lo tanto, $x \in B$ y $x \notin C$.
  - Así, $x \in A \cap B$ y $x \notin C$, lo que implica $x \in (A \cap B) - C$.
- Si $x \in (A \cap B) - C$, entonces:

- $x \in A \cap B$ y $x \notin C$.
- Por lo tanto, $x \in A$ y $x \in B$, y $x \notin C$.
- Así, $x \in A \cap (B - C)$.

Por lo tanto, $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$. $\square$

b) Si $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$**:**

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

Demostración.

- Si $x \in (A \cup B) - C$, entonces:
  - $x \in A \cup B$ y $x \notin C$.
  - Por lo tanto, $x \in A$ y $x \notin C$, o $x \in B$ y $x \notin C$.
  - Así, $x \in (A - C) \cup (B - C)$.
- Si $x \in (A - C) \cup (B - C)$, entonces:
  - $x \in A - C$ o $x \in B - C$.
  - Por lo tanto, $x \in A$ y $x \notin C$, o $x \in B$ y $x \notin C$.
  - Así, $x \in A \cup B$ y $x \notin C$, lo que implica $x \in (A \cup B) - C$.

Por lo tanto, $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$. $\square$

c) Si $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$**:**

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

Demostración.

- Si $x \in A - (B \cup C)$, entonces:
  - $x \in A$ y $x \notin B \cup C$.
  - Por lo tanto, $x \notin B$ y $x \notin C$.
  - Así, $x \in A - B$ y $x \in A - C$, lo que implica $x \in (A - B) \cap (A - C)$.
- Si $x \in (A - B) \cap (A - C)$, entonces:
  - $x \in A - B$ y $x \in A - C$.
  - Por lo tanto, $x \in A$, $x \notin B$, y $x \notin C$.
  - Así, $x \notin B \cup C$, lo que implica $x \in A - (B \cup C)$.

Por lo tanto, $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$. $\square$

d) Si $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$:

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Demostración.

- Si $x \in A - (B \cap C)$, entonces:
  - $x \in A$ y $x \notin B \cap C$.
  - Por lo tanto, $x \notin B$ o $x \notin C$.
  - Así, $x \in A - B$ o $x \in A - C$, lo que implica $x \in (A - B) \cup (A - C)$.
- Si $x \in (A - B) \cup (A - C)$, entonces:
  - $x \in A - B$ o $x \in A - C$.
  - Por lo tanto, $x \in A$ y $x \notin B$, o $x \in A$ y $x \notin C$.
  - Así, $x \notin B \cap C$, lo que implica $x \in A - (B \cap C)$.

Por lo tanto, $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$. □

Ejercicio 1.23. 8) Se define la operación $+$ sobre clases como:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

Se va a probar que,

a) Probar que:

$$A + B = B + A$$

Demostración. (Equivalencia)

Por definición, $A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

- Similarmente, $B + A = (B - A) \cup (A - B)$.
- Como la unión es conmutativa, tenemos que:

$$(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$$

- Por lo tanto, $A + B = B + A$.

□

b) Probar que:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Demostración. (Equivalencia)

- Primero, calculemos $B + C$:

$$B + C = (B - C) \cup (C - B)$$

- Luego:

$$A + (B + C) = A + [(B - C) \cup (C - B)]$$

- Usando la definición de $+$, obtenemos:

$$A + [(B - C) \cup (C - B)] = [A - [(B - C) \cup (C - B)]] \cup [[(B - C) \cup (C - B)] - A]$$

- Simplificando:

$$A - [(B - C) \cup (C - B)] = (A - (B - C)) \cap (A - (C - B))$$

- Y finalmente:

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

$$A - (C - B) = (A - C) \cup (A \cap B)$$

- Por lo tanto:

$$A + (B + C) = [(A - B) \cap (A \cap C)] \cup [(A - C) \cap (A \cap B)]$$

- Ahora, calculemos $(A + B) + C$:

$$(A + B) + C = [(A - B) \cup (B - A)] + C$$

- Usando la definición de $+$, obtenemos:

$$[(A - B) \cup (B - A)] + C = [[(A - B) \cup (B - A)] - C] \cup [C - [(A - B) \cup (B - A)]]$$

- Simplificando:

$$[(A - B) \cup (B - A)] - C = [(A - B - C) \cup (B - A - C)]$$

- Por lo tanto:

$$(A+B)+C = [(A-B-C)\cup(B-A-C)]\cup[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$$

- Comparando ambos resultados, se verifica que son equivalentes.

$\square$

c) Probar que:

$$A\cap(B+C) = (A\cap B)+(A\cap C)$$

Demostración. (Equivalencia)

- Primero, calculemos $B+C$:

$$B+C = (B-C)\cup(C-B)$$

- Luego:

$$A\cap(B+C) = A\cap[(B-C)\cup(C-B)]$$

- Simplificando:

$$A\cap[(B-C)\cup(C-B)] = [A\cap(B-C)]\cup[A\cap(C-B)]$$

- Ahora calculemos $(A\cap B)+(A\cap C)$:

$$(A\cap B)+(A\cap C) = [(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$$

- Simplificando:

$$(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)-C$$

$$(A\cap C)-(A\cap B) = (A\cap C)-B$$

- Por lo tanto:

$$(A\cap B)+(A\cap C) = [(A\cap B)-C]\cup[(A\cap C)-B]$$

- Comparando ambos resultados, se verifica que son equivalentes.

$\square$

d) Probar que:

$$A + A = \emptyset$$

Demostración. (Equivalencia)

- Por definición:

$$A + A = (A - A) \cup (A - A)$$

- Simplificando:

$$A - A = \emptyset$$

- Por lo tanto:

$$A + A = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

$\square$

e) Probar que:

$$A + \emptyset = A$$

Demostración. (EQuivalencia)

- Por definición:

$$A + \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$$

- Simplificando:

$$A - \emptyset = A$$

$$\emptyset - A = \emptyset$$

- Por lo tanto:

$$A + \emptyset = A \cup \emptyset = A$$

$\square$

Ejercicio 1.24. Probar los siguientes literales.

a) Probar que si $A \cup B = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$.

Demostración. (Implicación)

- Supongamos que $A \cup B = \emptyset$.
- Esto significa que no hay elementos en $A \cup B$. Por definición de unión, $A \cup B$ está vacío si y solo si ambos A y B están vacíos.

- Formalmente:

  - Supongamos que $A \neq \emptyset$. Entonces existe un elemento $x \in A$. Dado que $x \in A$, esto implica que $x \in A \cup B$. Pero esto contradice que $A \cup B = \emptyset$, porque x no debería estar en el conjunto vacío.
  - De manera similar, si $B \neq \emptyset$, entonces existe un elemento $y \in B$. Como $y \in B$, esto implica que $y \in A \cup B$, lo que contradice que $A \cup B = \emptyset$.

- Por lo tanto, tanto A como B deben ser conjuntos vacíos.

$\square$

b) Probar que $A \cap B' = \emptyset$ si y solo si $A \subseteq B$.

Demostración. (Implicaciones)

- **Dirección Directa:**

  - Supongamos que $A \cap B' = \emptyset$.
  - Esto significa que no hay elementos que estén en ambos A y B'.
  - Si $x \in A$, entonces $x \notin B'$ (ya que $A \cap B' = \emptyset$).
  - Por lo tanto, $x \in B$, porque $x \notin B'$ implica que $x \in B$.
  - Por lo tanto, $A \subseteq B$.

- **Dirección Inversa:**

  - Supongamos que $A \subseteq B$.
  - Queremos mostrar que $A \cap B' = \emptyset$.
  - Si $x \in A$, entonces $x \in B$ (ya que $A \subseteq B$).
  - Por lo tanto, $x \notin B'$ (porque B' contiene elementos que no están en B).
  - Por lo tanto, x no puede estar en $A \cap B'$, lo que implica que $A \cap B' = \emptyset$.

$\square$

c) Probar que $A + B = \emptyset$ si y solo si $A = B$.

Demostración. (Implicaciones)

- **Dirección Directa:**
  - Supongamos que $A + B = \emptyset$.
  - Por definición, $A + B = (A - B) \cup (B - A)$.
  - Si $A + B = \emptyset$, entonces:
  $$(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$$
  - Esto implica que $A - B = \emptyset$ y $B - A = \emptyset$:
    * $A - B = \emptyset$ significa que $A \subseteq B$.
    * $B - A = \emptyset$ significa que $B \subseteq A$.
  - Por lo tanto, $A = B$ porque $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- **Dirección Inversa:**
  - Supongamos que $A = B$.
  - Queremos mostrar que $A + B = \emptyset$.
  - Si $A = B$, entonces:
  $$A - B = \emptyset \quad \text{y} \quad B - A = \emptyset$$
  - Por lo tanto:
  $$A + B = (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

□

Ejercicio 1.25. Probar los siguientes literales:

a) Probar que:
$$A \cup C = B \cup C \text{ si y solo si } A + B \subseteq C$$

Demostración. **Supongamos que** $A \cup C = B \cup C$.

- Para mostrar: $A + B \subseteq C$.
- Por definición:
$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

- Si $x \in A - B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$. Dado que $A \cup C = B \cup C$, x debe estar en C porque si no, x estaría en $B \cup C$, lo cual es una contradicción.

- Si $x \in B - A$, entonces $x \in B$ y $x \notin A$. De manera similar, dado que $A \cup C = B \cup C$, x debe estar en C.

- Por lo tanto, $A + B \subseteq C$.

Supongamos que $A + B \subseteq C$.

- Para mostrar: $A \cup C = B \cup C$.

- Primero, si $x \in A$:

$$x \in (A - B) \cup (B - A) \cup B$$

Si $x \in A - B$, entonces $x \in C$ porque $A + B \subseteq C$. Entonces, $x \in C$ o $x \in B \cup C$, así que $x \in B \cup C$.

- Si $x \in B$:

$$x \in (A - B) \cup (B - A) \cup A$$

Si $x \in B - A$, entonces $x \in C$ porque $A + B \subseteq C$. Entonces, $x \in C$ o $x \in A \cup C$, así que $x \in A \cup C$.

- Por lo tanto, $A \cup C = B \cup C$.

$\square$

b) Probar que:

$$(A \cup C) + (B \cup C) = (A + B) - C$$

Demostración. (Equivalencia)

- Calcular $(A \cup C) + (B \cup C)$:

$$(A \cup C) + (B \cup C) = ((A \cup C) - (B \cup C)) \cup ((B \cup C) - (A \cup C))$$

- Expande $(A \cup C) - (B \cup C)$:

$$(A \cup C) - (B \cup C) = (A - (B \cup C)) \cup (C - (B \cup C))$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

$$C - (B \cup C) = \emptyset$$

$$(A \cup C) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

- Expande $(B \cup C) - (A \cup C)$:

$$(B \cup C) - (A \cup C) = (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup C))$$

$$B - (A \cup C) = B - A - C$$

$$C - (A \cup C) = \emptyset$$

$$(B \cup C) - (A \cup C) = B - A - C$$

- Combina:

$$(A \cup C) + (B \cup C) = ((A - B) - C) \cup (B - A - C)$$

- Calcular $(A + B) - C$:

$$(A + B) - C = ((A - B) \cup (B - A)) - C$$

$$\begin{aligned} ((A - B) \cup (B - A)) - C &= ((A - B) - C) \cup ((B - A) - C) \\ &= (A - B - C) \cup (B - A - C) \end{aligned}$$

- Por lo tanto:

$$(A \cup C) + (B \cup C) = (A + B) - C$$

□

Ejercicio 1.26. Use el ágebra de clases para probar que $A \subseteq B$ y $C = B - A$, entonces $A = B - C$.

Demostración. Por hipótesis sabemos que $A \subseteq B$ y por el Teorema 8 se tiene que $A \cup B = B$ y por Definición de diferencia $C = B \cap A'$ tal que

$$\begin{aligned} C = B \cap A' &\Rightarrow C \cup A = B \cap A' \cup A \\ &\Rightarrow C \cup A = B \cap \mathcal{U} && \text{;Teorema 13} \\ &\Rightarrow C \cup A = B && \text{;Teorema 13} \end{aligned}$$

Así, usando las hipótesis,

$$\begin{aligned} A \cup B = A \cup C = B &\Rightarrow A \cup C \cap C' = B \cap C' && \text{;Definición de } A \cup C = B \\ &\Rightarrow A = B - C && \text{;Definición de Diferencia.} \end{aligned}$$

□

1.4 Pares Ordenados y Productos Cartesianos.

Definición 1.17: –singleton–

Si a es un elemento, por el **Axioma 2**, $\{a\} = \{x : x = a\}$, contiene un solo elemento.

Definición 1.18: –Par desordenado–

Si a y b eran elementos por **Axioma 2**, $\{a, b\} = \{x : x = a \vee x = b\}$

Definición 1.19: –Par ordenado–

Sea a y b elementos, el par ordenado (a, b) esta definido por
$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
Cabe resaltar que,
$(b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\}$.

Teorema 1.14

Si $\{x, y\} = \{u, v\}$ entonces $[x = u \wedge y = u]$ o $[x = v \wedge y = u]$

Demostración. Se supone que $\{x, y\} = \{u, v\}$; tal que se pueda considerar dos casos, que cumplan $x = y$ ó $x \neq y$.

1. *Caso:* Si $x = y$. Ahora $u \in \{u, v\}$ y $\{u, v\} = \{x, y\}$, por el **Axioma 1**, $u \in \{x, y\}$. Tal que, $u = x$ o $u = y$; en cualquier caso, $u = x = y$. Análogamente, $v = x = y$, se tiene que $u = v = x = y$ tal que como se desea.

2. *Caso:* Si $x \neq y$. Ahora $x \in \{x, y\}$ y $\{x, y\} = \{u, v\}$, además X $\in \{u, v\}$; tal que $x = u$ ó $x = v$. De tal manera que podemos considerar dos casos:

   (a) $x = u$: Ahora $y \in \{x, y\}$, entonces $y \in \{u, v\}$, además $y = u$ ó $y = v$; pero $x = u$.Si $y = u$ entonces $x = y$, cual es imposible porque se asume que $x \neq y$. Por lo tanto $y = v$.

   (b) $x = v$: analogamente al caso $a)$ se intercambian los roles de u y v. Obteniendo $y = u$.

□

Teorema 1.15

Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

Demostración. Suponemos que $(a,b) = (c,d)$; tal que

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}.$$

Por el teroema 14, se tiene que

$$\{a\} = \{c\} \text{ y } \{a,b\} = \{c,d\},$$

ó

$$\{a\} = \{c,d\} \text{ y } \{a,b\} = \{c\};$$

Se considera dos casos,

1. *Caso:* $\{a\} = \{c\}$ y $\{a,b\} = \{c,d\}$. De $\{a\} = \{c\}$ se puede ver que $a = c$. De $\{a,b\} = \{c,d\}$ y el Teorema 14, se puede ver que $a = c$ y $b = d$ ó $a = d$ y $b = c$; en el primer caso, se cumple y en el segun se tiene que $b = c = a = d$.

2. *Caso:* $\{a\} = \{c,d\}$ y $\{a,b\} = \{c\}$. Entonces $c \in \{c,d\}$ y $\{c,d\} = \{a\}$, también $c \in \{a\}$; tal que $c = a$. Analogamente $d = a$. También, $b \in \{a,b\}$ y $\{a,b\} = \{c\}$, también $b \in \{c\}$; entonces $b = c$. Tal que $a = b = c = d$.

□

[Corolario 1 - Orden:] Sea (a,b) y (c,d) pares ordenados. Si $(a,b) = (c,d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

Definición 1.20: –Producto Cartesiano–

Sean A y B clases, para todos los pares ordenados (x,y),
$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge x \in B\}$

Teorema 1.16

Sean A, B y C clases,

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Demostración. Se demostrar por la Definición 8, *Equivalencia ó igualdad*

1.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cap C) &\iff x \in A \wedge y \in B \cap C && \text{; Por la Def.11}\\
&\iff x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C\\
&\iff (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C && \text{; Por la Def.20}\\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) && \text{; Por la Def.11}
\end{aligned}$$

2. Ejercicio 2 *Sección 1.4*

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \wedge y \in B \cup C && \text{; Por la Def.10}\\
&\iff x \in A \wedge y \in B \vee y \in C\\
&\iff (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C && \text{; Por la Def.20}\\
&\iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) && \text{; Por la Def.10}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff x \in A \times B \wedge (x,y) \in B \times C && \text{; Por la Def.11}\\
&\iff x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \wedge y \in D && \text{; Por la Def.20}\\
&\iff x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D) && \text{; Por la Def.11}\\
&\iff (x,y) \in (A \cap B) \times (A \cap C) && \text{; Por la Def.20}
\end{aligned}$$

$\square$

1.4.1 Ejercicios de la Sección 1.4

Ejercicio 1.27. Sea $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y, z\}$. Encontrar $A \times B$, $B \times A$, $C \times (B \times A)$, $(A \cup B) \times C$, $(A \times C) \cup (B \times C)$, $(A \cup B) \times (B \cup C)$.

Resolución: 1. Producto cartesiano $A \times B$:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}.$$

2. Producto cartesiano $B \times A$:

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}.$$

3. Producto cartesiano $C \times (B \times A)$. Primero, calculamos $B \times A$ (ya lo tenemos):

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$$

Ahora, calculamos $C \times (B \times A)$:

$$\begin{aligned} C \times (B \times A) = \{&(x,(1,a)),(x,(1,b)),(x,(1,c)),(x,(1,d)),(x,(2,a)),(x,(2,b)),(x,(2,c)) \\ &,(x,(2,d)),(x,(3,a)),(x,(3,b)),(x,(3,c)),(x,(3,d)),(y,(1,a)),(y,(1,b)), \\ &(y,(1,c)),(y,(1,d)),(y,(2,a)),(y,(2,b)),(y,(2,c)),(y,(2,d)),(y,(3,a)), \\ &(y,(3,b)),(y,(3,c)),(y,(3,d)),(z,(1,a)),(z,(1,b)),(z,(1,c)),(z,(1,d)), \\ &(z,(2,a)),(z,(2,b)),(z,(2,c)),(z,(2,d)),(z,(3,a)),(z,(3,b)),(z,(3,c)), \\ &(z,(3,d))\} \end{aligned}$$

4. Producto cartesiano $(A \cup B) \times C$: Primero, calculamos $A \cup B$:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$$

Ahora, calculamos $(A \cup B) \times C$:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \times C = \{&(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z),(d,x),(d,y), \\ &(d,z),(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z),(3,x),(3,y),(3,z)\} \end{aligned}$$

5. Unión de productos cartesianos $(A \times C) \cup (B \times C)$: Primero, calculamos $A \times C$:

$$A \times C = \{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z),(d,x),(d,y),(d,z)\}$$

Luego, calculamos $B \times C$:

$$B \times C = \{(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z),(3,x),(3,y),(3,z)\}$$

Finalmente, la unión es:

$$\begin{aligned}(A \times C) \cup (B \times C) = \{&(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z),(c,x),(c,y),(c,z),\\ &(d,x),(d,y),(d,z),(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z),(3,x),\\ &(3,y),(3,z)\}\end{aligned}$$

6. Producto cartesiano $(A \cup B) \times (B \cup C)$: Primero, calculamos $B \cup C$:

$$B \cup C = \{1,2,3,x,y,z\}$$

Ahora, calculamos $(A \cup B) \times (B \cup C)$:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times (B \cup C) = \{&(a,1),(a,2),(a,3),(a,x),(a,y),(a,z),(b,1),(b,2),(b,3),(b,x),\\ &(b,y),(b,z),(c,1),(c,2),(c,3),(c,x),(c,y),(c,z),(d,1),(d,2),(d,3),\\ &(d,x),(d,y),(d,z),(1,1),(1,2),(1,3),(1,x),(1,y),(1,z),(2,1),(2,2),\\ &(2,3),(2,x)(2,y),(2,z),(3,1),(3,2),(3,3),(3,x),(3,y),(3,z)\}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.28. Esta resuelto en el Teorema 16 **item 2)**.

Ejercicio 1.29. Probar que $A \times (B - D) = (A \times B) - (A \times D)$.

Demostración. Primero, por la Definición 20,

$$A \times (B - D) = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B - D\}$$

Luego,

$$\begin{aligned}A \times B &= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}\\ A \times D &= \{(a,d) \mid a \in A, d \in D\}\\ (A \times B) - (A \times D) &= \{(a,b) \mid (a,b) \in A \times B \text{ y } (a,b) \notin A \times D\}\end{aligned}$$

Se ve que,

Para $(a,b) \in (A \times B)$, se requiere que $a \in A$ y $b \in B$.

Para $(a,b) \notin (A \times D)$, se requiere que $a \in A$ y $b \notin D$.

Así, $(a,b) \in (A \times B) - (A \times D)$ si y solo si $(a,b) \in A \times B$ y $b \notin D$.

Esto se puede expresar por la Definición 20,

$$(A \times B) - (A \times D) = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B \text{ y } b \notin D\}$$

$\square$

Ejercicio 1.30. Probar que $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (C \times D) && \text{;Por Def 11} \\
&\iff x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D && \text{;Por Def 20} \\
&\iff x \in A \wedge y \in D \wedge x \in C \wedge y \in B && \\
&\iff (x,y) \in (A \times D) \wedge (x,y) \in (C \times B) && \text{;Por Def 20} \\
&\iff (x,y) \in (A \times D) \cap (C \times B) && \text{;Por Def 11}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 1.31. Si A, B y C son clases, probar que:

1. $(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$,
2. $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$
3. $(A \times A) - (B \times C) = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$

1. *Demostración.* (Por contenencias),

   $\Rightarrow$) Sea $(x,y) \in (A \times A) \cap (B \times C)$. Entonces, por definición de intersección, tenemos:

   - $(x,y) \in A \times A \Rightarrow x \in A$ y $y \in A$ - $(x,y) \in B \times C \Rightarrow x \in B$ y $y \in C$

   Por lo tanto, $x \in A \cap B$ y $y \in A \cap C$. Esto implica que:

   $$(x,y) \in (A \cap B) \times (A \cap C)$$

   $\Leftarrow$)Sea $(x,y) \in (A \cap B) \times (A \cap C)$. Entonces, por definición de producto cartesiano, tenemos:

   - $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B$ - $y \in A \cap C \Rightarrow y \in A$ y $y \in C$

   Por lo tanto, $(x,y) \in A \times A$ y $(x,y) \in B \times C$, lo que implica que:

   $$(x,y) \in (A \times A) \cap (B \times C)$$

□

2. *Demostración.* (Por contenencias),
$\Rightarrow$)Demostramos que $(A \times B) - (C \times C) \subseteq [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$.Sea $(x, y) \in (A \times B) - (C \times C)$. Esto significa que:

- $(x, y) \in A \times B$ - $(x, y) \notin C \times C$

Por lo tanto, $x \in A$ y $y \in B$. Si $x \notin C$, entonces $(x, y) \in (A - C) \times B$. Si $y \notin C$, entonces $(x, y) \in A \times (B - C)$. En ambos casos, tenemos que:

$$(x, y) \in [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$$

$\Leftarrow$) Sea $(x, y) \in [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$. Esto significa que:

- Si $(x, y) \in (A - C) \times B$, entonces $x \in A$, $x \notin C$, y $y \in B$. Por lo tanto, $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin C \times C$. - Si $(x, y) \in A \times (B - C)$, entonces $x \in A$, $y \in B$, y $y \notin C$. Nuevamente, tenemos que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin C \times C$.

En ambos casos, se cumple que:

$$(x, y) \in (A \times B) - (C \times C)$$

□

3. *Demostración.* (Por contenencias),
$\Rightarrow$)Sea $(x, y) \in (A \times A) - (B \times C)$. Esto significa que:

- $(x, y) \in A \times A$ - $(x, y) \notin B \times C$

Por lo tanto, $x \in A$ y $y \in A$. Si $x \notin B$, entonces $(x, y) \in (A - B) \times A$. Si $y \notin C$, entonces $(x, y) \in A \times (A - C)$. En ambos casos, tenemos que:

$$(x, y) \in [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$$

$\Leftarrow$) Sea $(x, y) \in [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$. Esto significa que:

- Si $(x, y) \in (A - B) \times A$, entonces $x \in A$, $x \notin B$, y $y \in A$. Por lo tanto, $(x, y) \in A \times A$ y no puede estar en $B \times C$ porque $x \notin B$. - Si $(x, y) \in A \times (A - C)$, entonces $x \in A$, $y \in A$, y $y \notin C$. Nuevamente, tenemos que $(x, y) \in A \times A$ y no puede estar en $B \times C$ porque $y \notin C$.

En ambos casos, se cumple que:

$$(x, y) \in (A \times A) - (B \times C)$$

$\square$

Ejercicio 1.32. Probar que A y Bson disjuntos si y solo si, para toda clase vacía C, $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntos.

Demostración. (Por contencias),
$\Rightarrow$)Supongamos que A y B son disjuntos.

Por definición, A y B son disjuntos si no tienen elementos en común, es decir:

$$A \cap B = \emptyset$$

Ahora, consideremos cualquier clase vacía C. El producto cartesiano $A \times C$ se define como:

$$A \times C = \{(a, c) \mid a \in A \text{ y } c \in C\}$$

Dado que C es la clase vacía, no hay elementos en C, lo que implica que:

$$A \times C = \emptyset$$

De manera similar, para B:

$$B \times C = \{(b, c) \mid b \in B \text{ y } c \in C\} = \emptyset$$

Por lo tanto, tenemos:

$$A \times C = \emptyset \quad \text{y} \quad B \times C = \emptyset$$

Esto implica que:

$$A \times C \cap B \times C = \emptyset$$

Por lo tanto, si A y B son disjuntos, entonces $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntos para cualquier clase vacía C.
$\Leftarrow$) Ahora, supongamos que para toda clase vacía C, $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntos.

Esto significa que:

$$A \times C \cap B \times C = \emptyset$$

para cualquier clase vacía C. En particular, consideremos $C = \emptyset$. Entonces, como hemos visto anteriormente:

$$A \times \emptyset = \emptyset \quad \text{y} \quad B \times \emptyset = \emptyset$$

Por lo tanto, tenemos:

$$A \times \emptyset \cap B \times \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

Esto no proporciona información sobre la relación entre A y B. Sin embargo, si A y B tuvieran algún elemento en común, digamos x, entonces existiría un par (x, c) donde c es un elemento de C. Esto implicaría que:

$$(x, c) \in A \times C \quad \text{y} \quad (x, c) \in B \times C$$

lo que contradice la suposición de que $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntos. Por lo tanto, no puede haber elementos en común entre A y B, lo que implica que:

$$A \cap B = \emptyset$$

$\square$

Ejercicio 1.33. Si A y C son clases no vacías, probar que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ si y sólo si $A \times C \subseteq B \times D$.

Demostración. (Por contencias),
$\Rightarrow$)Ahora, supongamos que para toda clase vacía C, $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntos.

Esto significa que:

$$A \times C \cap B \times C = \emptyset$$

para cualquier clase vacía C. En particular, consideremos $C = \emptyset$. Entonces, como hemos visto anteriormente:

$$A \times \emptyset = \emptyset \quad \text{y} \quad B \times \emptyset = \emptyset$$

Por lo tanto, tenemos:

$$A \times \emptyset \cap B \times \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

Esto no proporciona información sobre la relación entre A y B. Sin embargo, si A y B tuvieran algún elemento en común, digamos x, entonces existiría un par (x, c) donde c es un elemento de C. Esto implicaría que:

$$(x, c) \in A \times C \quad \text{y} \quad (x, c) \in B \times C$$

lo que contradice la suposición de que $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntos. Por lo tanto, no puede haber elementos en común entre A y B, lo que implica que:

$$A \cap B = \emptyset$$

$\Leftarrow$) Ahora, supongamos que $A \times C \subseteq B \times D$.Queremos demostrar que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$. Demostración de $A \subseteq B$.Sea $a \in A$. Como C es no vacío, elige un elemento $c_0 \in C$. Entonces, $(a, c_0) \in A \times C$. Dado que $A \times C \subseteq B \times D$, tenemos que $(a, c_0) \in B \times D$. Esto implica que $a \in B$ y $c_0 \in D$ para algún $c_0 \in C$. - Como esto es cierto para cualquier $a \in A$, concluimos que $A \subseteq B$.
Demostración de $C \subseteq D$. Sea $c \in C$. Como A es no vacío, elige un elemento $a_0 \in A$. Entonces, $(a_0, c) \in A \times C$. Dado que $A \times C \subseteq B \times D$, tenemos que $(a_0, c) \in B \times D$. Esto implica que $a_0 \in B$ y $c \in D$. Como esto es cierto para cualquier $c \in C$, concluimos que $C \subseteq D$. □

> **Ejercicio 1.34.** Sea A, B, C, D clases no vacías, probar que $A \times B = C \times D$ si y solo si $A = C$ y $B = D$.

Demostración. (Por contencias),
$\Rightarrow$)Ahora, supongamos que $A \times C \subseteq B \times D$.

Queremos demostrar que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$.

Demostración de $A \subseteq B$. Sea $a \in A$. Como C es no vacío, elige un elemento $c_0 \in C$. Entonces, $(a, c_0) \in A \times C$. Dado que $A \times C \subseteq B \times D$, tenemos que $(a, c_0) \in B \times D$. Esto implica que $a \in B$ y $c_0 \in D$ para algún $c_0 \in C$. Como esto es cierto para cualquier $a \in A$, concluimos que $A \subseteq B$. Demostración de $C \subseteq D$: Sea $c \in C$. Como A es no vacío, elige un elemento $a_0 \in A$. Entonces, $(a_0, c) \in A \times C$. Dado que $A \times C \subseteq B \times D$, tenemos que $(a_0, c) \in B \times D$. Esto implica que $a_0 \in B$ y $c \in D$.Como esto es cierto para cualquier $c \in C$, concluimos que $C \subseteq D$.Ahora, supongamos que $A \times C \subseteq B \times D$.

Queremos demostrar que $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$. Demostración de $A \subseteq B$: Sea $a \in A$. Como C es no vacío, elige un elemento $c_0 \in C$. Entonces, $(a, c_0) \in A \times C$. Dado que $A \times C \subseteq B \times D$, tenemos que $(a, c_0) \in B \times D$. Esto implica que $a \in B$ y $c_0 \in D$ para algún $c_0 \in C$. Como esto es cierto para cualquier $a \in A$, concluimos que $A \subseteq B$.

Demostración de $C \subseteq D$: Sea $c \in C$. Como A es no vacío, elige un elemento $a_0 \in A$. Entonces, $(a_0, c) \in A \times C$. Dado que $A \times C \subseteq B \times D$, tenemos que $(a_0, c) \in B \times D$. Esto implica que $a_0 \in B$ y $c \in D$. Como esto es cierto para

cualquier $c \in C$, concluimos que $C \subseteq D$.
$\Leftarrow$) Ahora, supongamos que $A = C$ y $B = D$.
Queremos demostrar que $A \times B = C \times D$.
- Por definición del producto cartesiano, tenemos:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

y

$$C \times D = \{(c, d) \mid c \in C, d \in D\}.$$

- Dado que $A = C$ y $B = D$, podemos sustituir:

$$C \times D = \{(a, b) \mid a \in C, b \in D\} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} = A \times B.$$

$\square$

Ejercicio 1.35. Si A, B y C son cualesquier clase, probar que,

1. $A \times B$ y $A' \times C$ son disjuntas.
2. $B \times A$ y $C \times A'$ son disjuntas.

1. *Demostración.* Sea $(x, y) \in A \times B$. Por definición del producto cartesiano, esto significa que: $x \in A$, $y \in B$.
   Ahora, consideremos un elemento $(x, y) \in A' \times C$. Por definición del producto cartesiano, esto significa que: $x \in A'$ (lo que implica que $x \notin A$), $y \in C$.
   Para que (x, y) pertenezca a la intersección $A \times B \cap A' \times C$, debe cumplir ambas condiciones simultáneamente. Sin embargo, si $x \in A$ (de $A \times B$), no puede ser que $x \in A'$ (de $A' \times C$), ya que A' es el complemento de A. Por lo tanto, no puede existir un par (x, y) que pertenezca a ambos conjuntos.

   Así, concluimos que:
   $$A \times B \cap A' \times C = \emptyset$$

   Por lo tanto, $A \times B$ y $A' \times C$ son disjuntos. $\square$

2. *Demostración.* Sea $(x, y) \in B \times A$. Por definición del producto cartesiano, esto significa que: $x \in B$, $y \in A$.
   Ahora, consideremos un elemento $(x, y) \in C \times A'$. Por definición del producto cartesiano, esto significa que: $x \in C$, $y \in A'$ (lo que implica que $y \notin A$) Para que (x, y) pertenezca a la intersección $B \times A \cap C \times A'$, debe cumplir ambas condiciones simultáneamente. Sin embargo, si $y \in A$ (de

$B \times A$), no puede ser que $y \in A'$ (de $C \times A'$), ya que A' es el complemento de A. Por lo tanto, no puede existir un par (x, y) que pertenezca a ambos conjuntos. Así, concluimos que:

$$B \times A \cap C \times A' = \varnothing$$

Por lo tanto, $B \times A$ y $C \times A'$ son disjuntos. $\square$

Ejercicio 1.36. Probar que $A \times B = \varnothing$, si y sólo si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.

Demostración. (Por contencias),
$\Rightarrow$) Queremos demostrar que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$. Por definición del producto cartesiano, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$. Si $A \times B = \varnothing$, esto significa que no hay pares (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Esto implica que no puede haber ningún elemento en A que se combine con un elemento en B para formar un par. Por lo tanto, al menos uno de los conjuntos debe estar vacío: Si A no está vacío, entonces debe haber al menos un elemento $a \in A$. Pero, dado que $A \times B = \varnothing$, no puede haber un $b \in B$ tal que (a, b) esté en $A \times B$. Esto implica que B debe estar vacío. De manera similar, si B no está vacío, entonces debe haber al menos un elemento $b \in B$, lo que implicaría que A debe estar vacío. Por lo tanto, concluimos que $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.
$\Leftarrow$) Queremos demostrar que $A \times B = \varnothing$.

- Caso 1: Supongamos que $A = \varnothing$. Entonces, por definición del producto cartesiano, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\} = \{(a, b) \mid a \in \varnothing \text{ y } b \in B\} = \varnothing$.

- Caso 2: Supongamos que $B = \varnothing$. Entonces, por definición del producto cartesiano, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\} = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in \varnothing\} = \varnothing$.

En ambos casos, hemos demostrado que si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$, entonces $A \times B = \varnothing$. $\square$

Ejercicio 1.37. Probar que,

1. Si $a = \{b\}$, entonces $b \in a$.
2. $x = y$ si y sólo si $\{x\} = \{y\}$.
3. $x \in a$ si y sólo si $\{x\} \subseteq a$.
4. $\{a, b\} = \{a\}$ si y sólo si $a = b$.

1. *Demostración.* Por definición, si $a = \{b\}$, esto significa que a es el conjunto que contiene exactamente el elemento b. Por la definición de pertenencia a un conjunto, se tiene que $b \in a$. Por lo tanto, hemos demostrado que si $a = \{b\}$, entonces $b \in a$. □

2. *Demostración.* (Por contenencias).
$\Rightarrow$)Supongamos que $x = y$. Entonces, por definición de conjuntos, el conjunto que contiene x es igual al conjunto que contiene y, es decir, $\{x\} = \{y\}$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\{x\} = \{y\}$. Esto significa que ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos. Dado que cada conjunto contiene un solo elemento, podemos concluir que x y y deben ser el mismo elemento. Por lo tanto, $x = y$.Así, hemos demostrado que $x = y$ si y solo si $\{x\} = \{y\}$. □

3. *Demostración.* (Por contenencias).
$\Rightarrow$)Supongamos que $x \in a$. Por definición de pertenencia, esto significa que el elemento x está en el conjunto a. Por lo tanto, el conjunto que contiene x, es decir, $\{x\}$, está contenido en a porque a contiene a x. Así, $\{x\} \subseteq a$. $\Leftarrow$) □

4. *Demostración.* (Por contenencias).
$\Rightarrow$) Supongamos que $x \in a$. Por definición de pertenencia, esto significa que el elemento x está en el conjunto a. Por lo tanto, el conjunto que contiene x, es decir, $\{x\}$, está contenido en a porque a contiene a x. Así, $\{x\} \subseteq a$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\{x\} \subseteq a$. Esto significa que todos los elementos de $\{x\}$ están en a. Dado que $\{x\}$ contiene solo el elemento x, podemos concluir que $x \in a$.Por lo tanto, hemos demostrado que $x \in a$ si y solo si $\{x\} \subseteq a$. □

5. *Demostración.* (Por contenencias).
$\Rightarrow$)Supongamos que $\{a, b\} = \{a\}$. Esto significa que ambos conjuntos contienen exactamente los mismos elementos. El conjunto $\{a\}$ contiene solo el elemento a. Por lo tanto, para que $\{a, b\}$ contenga exactamente los mismos elementos que $\{a\}$, debe ser que b también sea igual a a. Así, $a = b$.
$\Leftarrow$)Supongamos que $a = b$. Entonces, podemos sustituir b por a en el conjunto $\{a, b\}$, lo que nos da $\{a, a\} = \{a\}$. Por lo tanto, $\{a, b\} = \{a\}$. □

Ejercicio 1.38. A continuación la definición alternatica de pares ordenados,

$$(x,y) = \{\{x,\varnothing\},\{y,\{\varnothing\}\}\}.$$

Usando esta definición pruebe que,

$$(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c \wedge b = d.$$

Demostración. Si $(a,b) = (c,d)$, entonces:

$$\{\{a,\varnothing\},\{b,\{\varnothing\}\}\} = \{\{c,\varnothing\},\{d,\{\varnothing\}\}\}$$

Por la propiedad de la igualdad de conjuntos, si dos conjuntos son iguales, deben contener exactamente los mismos elementos. Por lo tanto, los elementos $\{a,\varnothing\}$ y $\{b,\{\varnothing\}\}$ deben ser iguales a los elementos $\{c,\varnothing\}$ y $\{d,\{\varnothing\}\}$ en alguna combinación.
Dado que los conjuntos tienen exactamente dos elementos, podemos considerar dos casos:
Caso 1: $\{a,\varnothing\} = \{c,\varnothing\}$ y $\{b,\{\varnothing\}\} = \{d,\{\varnothing\}\}$
Caso 2: $\{a,\varnothing\} = \{d,\{\varnothing\}\}$ y $\{b,\{\varnothing\}\} = \{c,\varnothing\}$

- **Caso 1:** Si $\{a,\varnothing\} = \{c,\varnothing\}$, entonces a debe ser igual a c (ya que ambos conjuntos contienen el mismo elemento $\varnothing$).Si $\{b,\{\varnothing\}\} = \{d,\{\varnothing\}\}$, entonces b debe ser igual a d (ya que ambos conjuntos contienen el mismo elemento $\{\varnothing\}$).Por lo tanto, en este caso, tenemos que $a = c$ y $b = d$.

- **Caso 2:** Si $\{a,\varnothing\} = \{d,\{\varnothing\}\}$, entonces $a = d$ y $\varnothing = \{\varnothing\}$, lo cual es una contradicción, ya que $\varnothing$ no es igual a $\{\varnothing\}$.

  Por lo tanto, este caso no es posible.

En conclusión, dado que el único caso válido es el Caso 1, hemos demostrado que:

$$(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$$

□

1.5 Grafos.

Definición 1.21: –Grafo–
$G = \{(x,y) : x, y \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$

Definición 1.22
Si G es un grafo, entonces
$G^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in G\}$ ó $G^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in G\}$

Definición 1.23: –Composición–
Sean G y H grafos, tal que $G \circ H = \{(x,y) : \exists z \ni (x,z) \in H \wedge (z,y) \in G\}$

Definición 1.24: –Domino de un Grafo–
Sea G un grafo, tal que *dom*G=$\{x : \exists y \ni (x,y) \in G\}$

Definición 1.25: –Rango de un Grafo–
Sea G un grafo, tal que *ran*G=$\{y : \exists x \ni (x,y) \in G\}$

Teorema 1.17
Si G, H y J son grafos,

1. $(G \circ H) \circ J = G \circ (H \circ J)$.
2. $(G^{-1})^{-1} = G$.
3. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$.

Demostración. Se demuestra cada literal de la siguiente forma,
1)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (G \circ H) \circ J &\iff \exists z \ni (x,z) \in J \wedge (z,y) \in G \circ H && \text{;Por Def.23} \\
&\iff \exists w \wedge \exists z \ni (x,z) \in J \wedge (z,w) \in H \wedge (w,y) \in G && \text{;Por Def.23} \\
&\iff \exists w \ni (x,w) \in H \circ J \wedge (w,y) \in G && \text{;Por Def.11} \\
&\iff (x,y) \in G \circ (H \circ J) && \text{;Por Def.23}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(x,y)\in(G^{-1})^{-1} &\iff (y,x)\in G^{-1} && ;\text{Por Def.22}\\ &\iff (x,y)\in G && ;\text{Por Def.22}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}(x,y)\in(G\circ H)^{-1} &\iff (y,x)\in G\circ H && ;\text{Por Def.22}\\ &\iff \exists z\ni(y,z)\in H\wedge(z,x)\in G && ;\text{Por Def.23}\\ &\iff \exists z\ni(x,z)\in G^{-1}\wedge(z,y)\in H^{-1} && ;\text{Por Def.22}\\ &\iff (x,y)\in H^{-1}\circ G^{-1} && ;\text{Por Def.23}\end{aligned}$$

□

Teorema 1.18
Si G y H son grafos, entonces

1. domG $=ran\ G^{-1}$,
2. $rang$G $=dom\ G^{-1}$,
3. $dom(G\circ H)\subseteq dom\ H$,
4. $ran(G\circ H)\subseteq ran\ G$.

Demostración. Se demuestran los siguientes literales

1.

$$\begin{aligned}x\in dom\mathrm{G} &\iff \exists y\ni(x,y)\in G && ;\text{Por Def.24}\\ &\iff \exists y\ni(y,x)\in G^{-1} && ;\text{Por Def.22}\\ &\iff x\in ran\mathrm{G}^{-1} && ;\text{Por Def.25}\end{aligned}$$

2. Ejercicio 2, *parte I, sección 1.5*

$$\begin{aligned}x\in ran\mathrm{G} &\iff \exists x\ni(x,y)\in G && ;\text{Por Def.25}\\ &\iff \exists x\ni(y,x)\in G^{-1} && ;\text{Por Def.22}\\ &\iff x\in dom\mathrm{G}^{-1} && ;\text{Por Def.25}\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
x \in dom(\mathrm{G} \circ \mathrm{H}) &\Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in (G \circ H) && ;\text{Por Def.24}\\
&\Rightarrow \exists z \ni (x,z) \in H \wedge (z,y) \in G && ;\text{Por Def.23}\\
&\Rightarrow x \in dom\mathrm{H} && ;\text{Por Def.24}
\end{aligned}
$$

4. Ejercicio 2, *parte II, sección 1.5*

$$
\begin{aligned}
x \in ran(\mathrm{G} \circ \mathrm{H}) &\Rightarrow \exists x \ni (x,y) \in (G \circ H) && ;\text{Por Def.25}\\
&\Rightarrow \exists z \ni (x,z) \in H \wedge (z,y) \in G && ;\text{Por Def.23}\\
&\Rightarrow x \in ran\mathrm{G} && ;\text{Por Def.25}
\end{aligned}
$$

□

[Corolario 2] Sea G y H grafos. Si $ran\ H \subseteq dom\ G$, entonces $dom\ G \circ H = dom\ H$.

Demostración. Se va a demostrar que $dom\mathrm{G} \circ \mathrm{H} = H$.
$\Rightarrow$) $dom\mathrm{G} \circ \mathrm{H} \subseteq H$, Se cumple gracias al Teorema 18, literal 3).
$\Leftarrow$) Se va demostrar que $H \subseteq dom\mathrm{G} \circ \mathrm{H}$,

$$
\begin{aligned}
x \in dom\mathrm{G} \circ \mathrm{H} &\Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in H && ;\text{Por Def 24}\\
&\Rightarrow \exists y \exists x \ni (x,y) \in H && ;\text{Por Def 25}\\
&\Rightarrow \exists y \exists x \exists z \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in H && ;\text{Por Def 23 y ran}H \subseteq \text{dom}G.\\
&\Rightarrow \exists y \exists z \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in H && ;\text{Por Def 23 .}\\
&\Rightarrow x \in dom\mathrm{G} \circ \mathrm{H} && ;\text{Por Def 24 .}
\end{aligned}
$$

Por ambas implicaciones se concluye que, $dom\mathrm{G} \circ \mathrm{H} = H$. □

1.5.1 Ejercicios de la Sección 1.5

Ejercicio 1.39. Sea

$$G = \{(b,b),(b,c),(c,c),(c,d)\}$$

y,

$$H = \{(b,a),(c,b),(d,c)\}.$$

Encontrar, $G^{-1}, H^{-1}, G \circ H, H \circ G, (G \circ H)^{-1}, (G \cup H)^{-1}, H^{-1} \circ G$.

Resolución:

1. Inversos de los conjuntos.
Inverso de G (G^{-1}). El inverso de un conjunto de pares ordenados se obtiene intercambiando los elementos de cada par.

$$G^{-1} = \{(b,b),(c,b),(c,c),(d,c)\}$$

Inverso de H (H^{-1}):

$$H^{-1} = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$$

2. Composición de conjuntos.
Composición $G \circ H$. Para calcular $G \circ H$, buscamos pares (x,z) tales que existe un y tal que $(x,y) \in H$ y $(y,z) \in G$.

- Para $(b,a) \in H$:a no está en G, no se puede formar un par.
- Para $(c,b) \in H$: $(b,c) \in G \Rightarrow (c,b)$ se forma.
- Para $(d,c) \in H$: $(c,d) \in G \Rightarrow (d,c)$ se forma.

Por lo tanto:

$$G \circ H = \{(c,b),(d,c)\}$$

Composición $H \circ G$: Buscamos pares (x,z) tales que existe un y tal que $(x,y) \in G$ y $(y,z) \in H$.

- Para $(b,b) \in G$:$(b,a) \in H \Rightarrow (b,a)$ se forma.
- Para $(b,c) \in G$:$(c,b) \in H \Rightarrow (b,b)$ se forma.
- Para $(c,c) \in G$:$(c,b) \in H \Rightarrow (c,b)$ se forma.
- Para $(c,d) \in G$: d no está en H, no se puede formar un par.

Por lo tanto:

$$H \circ G = \{(b,a),(b,b),(c,b)\}$$

3. Inverso de la composición
Inverso de $G \circ H$ ($(G \circ H)^{-1}$).
Intercambiamos los elementos de cada par en $G \circ H$.

$$(G \circ H)^{-1} = \{(b,c),(c,d)\}$$

4. Unión y su inverso.
Unión $G \cup H$:

$$G \cup H = \{(b,b),(b,c),(c,c),(c,d),(b,a),(c,b),(d,c)\}$$

Inverso de la unión ($(G \cup H)^{-1}$). Intercambiamos los elementos de cada par en $G \cup H$.

$$(G \cup H)^{-1} = \{(b,b),(c,b),(c,c),(d,c),(a,b),(b,c)\}$$

5. Composición del inverso de H con G.
Composición $H^{-1} \circ G$: Buscamos pares (x,z) tales que existe un y tal que $(x,y) \in G$ y $(y,z) \in H^{-1}$.

- Para $(b,b) \in G$:$(b,a) \in H^{-1} \Rightarrow (b,a)$ se forma.
- Para $(b,c) \in G$:$(c,b) \in H^{-1} \Rightarrow (b,b)$ se forma.
- Para $(c,c) \in G$:$(c,b) \in H^{-1} \Rightarrow (c,b)$ se forma.
- Para $(c,d) \in G$, pero d no está en H^{-1}, no se puede formar un par.

Por lo tanto:

$$H^{-1} \circ G = \{(b,a),(b,b),(c,b)\}$$

En resumen,

1. $G^{-1} = \{(b,b),(c,b),(c,c),(d,c)\}$
2. $H^{-1} = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$
3. $G \circ H = \{(c,b),(d,c)\}$
4. $H \circ G = \{(b,a),(b,b),(c,b)\}$
5. $(G \circ H)^{-1} = \{(b,c),(d,c)\}$
6. $H^{-1} \circ G = \{(b,a),(b,b),(c,b)\}$

Ejercicio 1.40. Esta resuelto en el Teorema 18, *literales 2) y 4)*.

Ejercicio 1.41. Esta resuelto en el Corolario 2.

Ejercicio 1.42. Si G, H y J son grafos, probar que:

1. $(H \cup J) \circ G = (H \circ G) \cup (J \circ G)$,
2. $(G - H)^{-1} = G^{-1} - H^{-1}$,
3. $G \circ (H \cap J) \subseteq (G \circ H) \cap (G \circ J)$,
4. $(G \circ H) - (G \circ J) \subseteq G \circ (H - J)$.

1. *Demostración.* Por definición de la composición de grafos, tenemos que:

$$(H \circ G) = \{(x, z) \mid \exists y \text{ tal que } (x, y) \in H \text{ y } (y, z) \in G\}$$

$$(J \circ G) = \{(x, z) \mid \exists y \text{ tal que } (x, y) \in J \text{ y } (y, z) \in G\}$$

Ahora, consideremos $(H \cup J) \circ G$:

$$(H \cup J) \circ G = \{(x, z) \mid \exists y \text{ tal que } (x, y) \in (H \cup J) \text{ y } (y, z) \in G\}$$

Por la definición de unión de conjuntos, tenemos que:

$$(x, y) \in (H \cup J) \Rightarrow (x, y) \in H \text{ o } (x, y) \in J$$

Por lo tanto, si $(x, y) \in H$, entonces existe un z tal que $(y, z) \in G$, lo que implica que $(x, z) \in (H \circ G)$. Similarmente, si $(x, y) \in J$, entonces $(x, z) \in (J \circ G)$.

Así, concluimos que:

$$(H \cup J) \circ G = (H \circ G) \cup (J \circ G)$$

□

2. *Demostración.* Por definición, el conjunto $G - H$ contiene todos los pares en G que no están en H. Entonces, el inverso de $G - H$ es:

$$(G - H)^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in (G - H)\}$$

Esto significa que:

$$(G - H)^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G \text{ y } (x, y) \notin H\}$$

Por otro lado, el inverso de G es:

$$G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$$

Y el inverso de H es:

$$H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in H\}$$

Por lo tanto, $G^{-1} - H^{-1}$ es:

$$G^{-1} - H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G\} - \{(y,x) \mid (x,y) \in H\}$$

Esto significa que:

$$G^{-1} - H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G \text{ y } (x,y) \notin H\}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$(G - H)^{-1} = G^{-1} - H^{-1}$$

$\square$

3. *Demostración.* Por definición, el conjunto $G - H$ contiene todos los pares en G que no están en H. Entonces, el inverso de $G - H$ es:

$$(G - H)^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in (G - H)\}$$

Esto significa que:

$$(G - H)^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G \text{ y } (x,y) \notin H\}$$

Por otro lado, el inverso de G es:

$$G^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G\}$$

Y el inverso de H es:

$$H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in H\}$$

Por lo tanto, $G^{-1} - H^{-1}$ es:

$$G^{-1} - H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G\} - \{(y,x) \mid (x,y) \in H\}$$

Esto significa que:

$$G^{-1} - H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G \text{ y } (x,y) \notin H\}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$(G - H)^{-1} = G^{-1} - H^{-1}$$

□

4. *Demostración.* Por definición, el conjunto $G - H$ contiene todos los pares en G que no están en H. Entonces, el inverso de $G - H$ es:

$$(G - H)^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in (G - H)\}$$

Esto significa que:

$$(G - H)^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G \text{ y } (x,y) \notin H\}$$

Por otro lado, el inverso de G es:

$$G^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G\}$$

Y el inverso de H es:

$$H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in H\}$$

Por lo tanto, $G^{-1} - H^{-1}$ es:

$$G^{-1} - H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G\} - \{(y,x) \mid (x,y) \in H\}$$

Esto significa que:

$$G^{-1} - H^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G \text{ y } (x,y) \notin H\}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$(G - H)^{-1} = G^{-1} - H^{-1}$$

□

Ejercicio 1.43. Si G y H son grafos, probar que,

1. $(G \cap H)^{-1} = G^{-1} \cap H^{-1}$.
2. $(G \cup H)^{-1} = G^{-1} \cup H^{-1}$.

1. *Demostración.* Por definición, el inverso de un conjunto de pares ordenados se obtiene intercambiando los elementos de cada par.
   Inverso de $G \cap H$:

$$(G \cap H)^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in (G \cap H)\}$$

Por la definición de intersección, tenemos que:

$$(x, y) \in (G \cap H) \Rightarrow (x, y) \in G \text{ y } (x, y) \in H$$

Por lo tanto:

$$(y, x) \in G^{-1} \text{ y } (y, x) \in H^{-1}$$

Esto implica que:

$$(y, x) \in G^{-1} \cap H^{-1}$$

Así que:

$$(G \cap H)^{-1} \subseteq G^{-1} \cap H^{-1}$$

- Ahora, probemos la otra inclusión:

$$(y, x) \in G^{-1} \cap H^{-1} \Rightarrow (y, x) \in G^{-1} \text{ y } (y, x) \in H^{-1}$$

Esto significa que:

$$(x, y) \in G \text{ y } (x, y) \in H$$

Por lo tanto:

$$(x, y) \in (G \cap H)$$

Así que:

$$G^{-1} \cap H^{-1} \subseteq (G \cap H)^{-1}$$

Con ambas inclusiones, concluimos que:

$$(G \cap H)^{-1} = G^{-1} \cap H^{-1}$$

□

2. *Demostración.* Inverso de $G \cup H$:

$$(G \cup H)^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in (G \cup H)\}$$

Por la definición de unión, tenemos que:

$$(x, y) \in (G \cup H) \Rightarrow (x, y) \in G \text{ o } (x, y) \in H$$

Esto implica que:
- Si $(x, y) \in G$, entonces $(y, x) \in G^{-1}$.
- Si $(x, y) \in H$, entonces $(y, x) \in H^{-1}$.

Por lo tanto:

$$(y, x) \in G^{-1} \text{ o } (y, x) \in H^{-1}$$

Esto implica que:

$$(y, x) \in G^{-1} \cup H^{-1}$$

Así que:

$$(G \cup H)^{-1} \subseteq G^{-1} \cup H^{-1}$$

- Ahora, probemos la otra inclusión:

$$(y, x) \in G^{-1} \cup H^{-1} \Rightarrow (y, x) \in G^{-1} \text{ o } (y, x) \in H^{-1}$$

Esto significa que. Si $(y, x) \in G^{-1}$, entonces $(x, y) \in G$. - Si $(y, x) \in H^{-1}$, entonces $(x, y) \in H$.

Por lo tanto:

$$(x, y) \in (G \cup H)$$

Así que:

$$G^{-1} \cup H^{-1} \subseteq (G \cup H)^{-1}$$

□

Ejercicio 1.44. Si G, H, J y K son grafos probar que,

1. Si $G \subseteq H$ y $J \subseteq K$, entonces $G \circ J \subseteq H \circ K$.
2. $G \subseteq H$ si y sólo si $G^{-1} \subseteq H^{-1}$.

1. *Demostración.* Por definición, la composición de dos grafos G y J se define como:

$$G \circ J = \{(x, z) \mid \exists y \text{ tal que } (x, y) \in G \text{ y } (y, z) \in J\}$$

Dado que $G \subseteq H$, esto significa que cualquier par $(x, y) \in G$ también está en H. De manera similar, dado que $J \subseteq K$, cualquier par $(y, z) \in J$ también está en K.

Ahora, tomemos un par $(x, z) \in G \circ J$. Por la definición de composición, existe un y tal que:

$$(x, y) \in G \quad \text{y} \quad (y, z) \in J$$

Dado que $(x, y) \in G$ y $G \subseteq H$, tenemos que:

$$(x, y) \in H$$

Y dado que $(y, z) \in J$ y $J \subseteq K$, tenemos que:

$$(y, z) \in K$$

Por lo tanto, (x, z) se puede escribir como:

$$(x, z) \in H \circ K$$

Esto implica que:

$$G \circ J \subseteq H \circ K$$

$\square$

2. *Demostración.* (Por contenencias).
$\Rightarrow$)Por definición, la composición de dos grafos G y J se define como:

$$G \circ J = \{(x, z) \mid \exists y \text{ tal que } (x, y) \in G \text{ y } (y, z) \in J\}$$

Dado que $G \subseteq H$, esto significa que cualquier par $(x, y) \in G$ también está en H. De manera similar, dado que $J \subseteq K$, cualquier par $(y, z) \in J$ también está en K.

Ahora, tomemos un par $(x, z) \in G \circ J$. Por la definición de composición, existe un y tal que:

$$(x, y) \in G \quad \text{y} \quad (y, z) \in J$$

Dado que $(x, y) \in G$ y $G \subseteq H$, tenemos que:

$$(x, y) \in H$$

Y dado que $(y, z) \in J$ y $J \subseteq K$, tenemos que:

$$(y, z) \in K$$

Por lo tanto, (x, z) se puede escribir como:

$$(x, z) \in H \circ K$$

Esto implica que:

$$G \circ J \subseteq H \circ K$$

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que $G^{-1} \subseteq H^{-1}$. Esto significa que cualquier par $(y, x) \in G^{-1}$ también está en H^{-1}. Por la definición de inverso, esto implica que:

$$(x, y) \in H$$

Dado que $(y, x) \in G^{-1}$ implica que $(x, y) \in G$, podemos concluir que:

$$(x, y) \in H$$

Por lo tanto, $G \subseteq H$. $\square$

Ejercicio 1.45. Si A, B y C son clases, probar que:

1. $(A \times B)^{-1} = B \times A$
2. Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $(A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$.
3. Si A y B son disjuntos, entonces $(A \times B) \circ (A \times B) = \varnothing$.
4. Si $B \neq \varnothing$, entonces $(B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$.

1. *Demostración.* Ahora supongamos que $G^{-1} \subseteq H^{-1}$. Esto significa que cualquier par $(y, x) \in G^{-1}$ también está en H^{-1}. Por la definición de inverso, esto implica que:

$$(x,y) \in H$$

Dado que $(y,x) \in G^{-1}$ implica que $(x,y) \in G$, podemos concluir que:

$$(x,y) \in H$$

Por lo tanto, $G \subseteq H$. □

2. *Demostración.* La composición de dos relaciones R y S se define como:

$$R \circ S = \{(x,z) \mid \exists y \text{ tal que } (x,y) \in R \text{ y } (y,z) \in S\}$$

En este caso, consideramos $R = A \times B$ y $S = A \times B$. Entonces:

$$(A \times B) \circ (A \times B) = \{(a_1, b_1) \mid \exists b_2 \text{ tal que } (a_1, b_2) \in A \times B \text{ y } (b_2, b_3) \in A \times B\}$$

Esto implica que:

(a) $a_1 \in A$

(b) $b_2 \in B$

(c) $b_3 \in B$

Dado que b_2 es un elemento de B y $A \cap B \neq \varnothing$, podemos elegir b_2 tal que $b_2 \in A$. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$(A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$$

□

3. *Demostración.* Si A y B son disjuntos, esto significa que:

$$A \cap B = \varnothing$$

Al considerar la composición $(A \times B) \circ (A \times B)$, tenemos:

$$(A \times B) \circ (A \times B) = \{(a_1, b_3) \mid \exists b_2 \text{ tal que } (a_1, b_2) \in A \times B \text{ y } (b_2, b_3) \in A \times B\}$$

Sin embargo, dado que b_2 debe ser un elemento de B y b_3 también debe ser un elemento de B, y dado que A y B son disjuntos, no hay ningún elemento b_2 que pueda ser simultáneamente un elemento de A y de B. Por lo tanto, no existe tal b_2, lo que implica que:

$$(A \times B) \circ (A \times B) = \varnothing$$

$\square$

4. *Demostración.* Consideremos la composición $(B \times C) \circ (A \times B)$:

$$(B \times C) \circ (A \times B) = \{(a, c) \mid \exists b \text{ tal que } (a, b) \in A \times B \text{ y } (b, c) \in B \times C\}$$

Esto implica que:

(a) $a \in A$

(b) $b \in B$

(c) $c \in C$

Dado que $(a, b) \in A \times B$ significa que $a \in A$ y $b \in B$, y $(b, c) \in B \times C$ significa que $b \in B$ y $c \in C$, podemos concluir que:

$$(B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$$

$\square$

Ejercicio 1.46. Sea G y H grafos, probar que

1. Si $G \subseteq A \times B$, entonces $G^{-1} \subseteq B \times A$.

2. Si $G \subseteq A \times B$ y $H \subseteq B \times C$, entonces $H \circ G \subseteq A \times C$.

1. *Demostración.* Por definición, el producto cartesiano $A \times B$ se define como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Es decir:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Dado que $G \subseteq A \times B$, esto significa que cada par $(x, y) \in G$ tiene la forma (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B$.

El inverso de G, denotado como G^{-1}, se define como el conjunto de pares ordenados donde se intercambian los elementos de cada par en G:

$$G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$$

Dado que $(x, y) \in G$ implica que $x \in A$ y $y \in B$, al invertir el par, obtenemos (y, x) donde $y \in B$ y $x \in A$. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$G^{-1} \subseteq B \times A$$

□

2. *Demostración.* Por definición, el producto cartesiano $A \times B$ se define como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Es decir:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Dado que $G \subseteq A \times B$, esto significa que cada par $(x, y) \in G$ tiene la forma (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B$.

El inverso de G, denotado como G^{-1}, se define como el conjunto de pares ordenados donde se intercambian los elementos de cada par en G:

$$G^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$$

Dado que $(x, y) \in G$ implica que $x \in A$ y $y \in B$, al invertir el par, obtenemos (y, x) donde $y \in B$ y $x \in A$. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$G^{-1} \subseteq B \times A$$

□

Ejercicio 1.47. Si G y H son grafos probar que,

1. $dom\mathrm{G} \cup \mathrm{H} = (dom\mathrm{G}) \cup (dom\mathrm{H})$,

2. $ran\mathrm{G} \cup \mathrm{H} = (ran\mathrm{G}) \cup (ran\mathrm{H})$,

3. $dom\mathrm{G} - dom\mathrm{H} \subseteq dom(\mathrm{G} - \mathrm{H})$,

4. $ran\mathrm{G} - ran\mathrm{H} \subseteq ran(\mathrm{G} - \mathrm{H})$.

1. *Demostración.* Por definición, el dominio de un grafo G, denotado como $\operatorname{dom} G$, es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados en G. Es decir:

$$\operatorname{dom} G = \{x \mid (x, y) \in G \text{ para algún } y\}$$

De manera similar, para el grafo H:

$$\operatorname{dom} H = \{x \mid (x, y) \in H \text{ para algún } y\}$$

Ahora, consideremos el dominio de la unión de los grafos G y H:

$$\operatorname{dom}(G \cup H) = \{x \mid (x, y) \in (G \cup H) \text{ para algún } y\}$$

Por la definición de unión, tenemos que:

$$(x, y) \in (G \cup H) \Rightarrow (x, y) \in G \text{ o } (x, y) \in H$$

Esto implica que:

$$\operatorname{dom}(G \cup H) = \{x \mid (x, y) \in G \text{ o } (x, y) \in H\}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{dom}(G \cup H) = \operatorname{dom} G \cup \operatorname{dom} H$$

□

2. *Demostración.* Por definición, el rango de un grafo G, denotado como $\operatorname{ran} G$, es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados en G. Es decir:

$$\operatorname{ran} G = \{y \mid (x, y) \in G \text{ para algún } x\}$$

De manera similar, para el grafo H:

$$\operatorname{ran} H = \{y \mid (x, y) \in H \text{ para algún } x\}$$

Ahora, consideremos el rango de la unión de los grafos G y H:

$$\operatorname{ran}(G \cup H) = \{y \mid (x, y) \in (G \cup H) \text{ para algún } x\}$$

Por la definición de unión, tenemos que:

$$(x, y) \in (G \cup H) \Rightarrow (x, y) \in G \text{ o } (x, y) \in H$$

Esto implica que:

$$\operatorname{ran}(G \cup H) = \{y \mid (x, y) \in G \text{ o } (x, y) \in H\}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{ran}(G \cup H) = \operatorname{ran} G \cup \operatorname{ran} H$$

□

3. *Demostración.* Por definición, $G - H$ es el conjunto de pares que están en G pero no en H. Es decir:

$$G - H = \{(x, y) \mid (x, y) \in G \text{ y } (x, y) \notin H\}$$

Ahora, consideremos un elemento $x \in \operatorname{dom} G - \operatorname{dom} H$. Esto significa que:

$$x \in \operatorname{dom} G \quad \text{y} \quad x \notin \operatorname{dom} H$$

Por lo tanto, existe un y tal que $(x, y) \in G$. Dado que $x \notin \operatorname{dom} H$, no hay ningún par $(x, z) \in H$. Esto implica que:

$$(x, y) \in G - H$$

Por lo tanto, $x \in \operatorname{dom}(G - H)$. Así que:

$$\operatorname{dom} G - \operatorname{dom} H \subseteq \operatorname{dom}(G - H)$$

□

4. *Demostración.* Por definición, $G - H$ es el conjunto de pares que están en G pero no en H. Es decir:

$$G - H = \{(x, y) \mid (x, y) \in G \text{ y } (x, y) \notin H\}$$

Ahora, consideremos un elemento $y \in \operatorname{ran} G - \operatorname{ran} H$. Esto significa que:

$$y \in \operatorname{ran} G \quad \text{y} \quad y \notin \operatorname{ran} H$$

Por lo tanto, existe un x tal que $(x, y) \in G$. Dado que $y \notin \operatorname{ran} H$, no hay ningún par $(z, y) \in H$. Esto implica que:

$$(x, y) \in G - H$$

Por lo tanto, $y \in \operatorname{ran}(G - H)$. Así que:

$$\operatorname{ran} G - \operatorname{ran} H \subseteq \operatorname{ran}(G - H)$$

□

Ejercicio 1.48. Sea G grafos y sea B una subclase con el dominio de G. Por la *Restricción* de G de B, significa.

$$G_{[B]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in B\}$$

Probar que,

1. $G_{[B]} = G \cap (B \times ran\mathrm{G})$,
2. $G_{[B \cup C]} = G_{[B]} \cup G_{[C]}$,
3. $G_{[B \cap C]} = G_{[B]} \cap G_{[C]}$,
4. $(G \circ H)_{[B]} = G \circ H_{[B]}$.

1. *Demostración.* Por definición, la restricción de G a B se define como:

$$G_{[B]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in B\}$$

Ahora, consideremos el conjunto $B \times \mathrm{ran} G$:

$$B \times \mathrm{ran} G = \{(x, y) : x \in B \text{ y } y \in \mathrm{ran} G\}$$

donde $\text{ran}G = \{y : (x, y) \in G \text{ para algún } x\}$.

La intersección $G \cap (B \times \text{ran}G)$ consiste en los pares (x, y) que están en G y que también cumplen que $x \in B$ y $y \in \text{ran}G$. Esto se puede expresar como:

$$G \cap (B \times \text{ran}G) = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in B \wedge y \in \text{ran}G\}$$

Dado que $y \in \text{ran}G$ significa que existe un x' tal que $(x', y) \in G$, podemos concluir que:

$$G_{[B]} = G \cap (B \times \text{ran}G)$$

□

2. *Demostración.* Por definición, la restricción de G a $B \cup C$ es:

$$G_{[B \cup C]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in (B \cup C)\}$$

Esto significa que x puede pertenecer a B o a C. Por lo tanto, podemos escribir:

$$G_{[B \cup C]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge (x \in B \text{ o } x \in C)\}$$

Esto se puede descomponer en dos partes:

$$G_{[B \cup C]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in B\} \cup \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in C\}$$

que es precisamente:

$$G_{[B \cup C]} = G_{[B]} \cup G_{[C]}$$

□

3. *Demostración.* Por definición, la restricción de G a $B \cap C$ es:

$$G_{[B \cap C]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in (B \cap C)\}$$

Esto significa que x debe pertenecer tanto a B como a C. Por lo tanto, podemos escribir:

$$G_{[B \cap C]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge (x \in B \text{ y } x \in C)\}$$

Esto se puede descomponer en dos partes:

$$G_{[B \cap C]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in B\} \cap \{(x, y) : (x, y) \in G \wedge x \in C\}$$

que es precisamente:

$$G_{[B\cap C]} = G_{[B]} \cap G_{[C]}$$

□

4. *Demostración.* La composición de dos grafos G y H se define como:

$$G \circ H = \{(x,z) : \exists y \text{ tal que } (x,y) \in G \text{ y } (y,z) \in H\}$$

Ahora, consideremos la restricción de la composición a B:

$$(G \circ H)_{[B]} = \{(x,z) : (x,z) \in (G \circ H) \wedge x \in B\}$$

Esto significa que existe un y tal que:

$$(x,y) \in G \text{ y } (y,z) \in H$$

y $x \in B$.

Por otro lado, la restricción de H a B es:

$$H_{[B]} = \{(y,z) : (y,z) \in H \wedge y \in B\}$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$G \circ H_{[B]} = \{(x,z) : \exists y \text{ tal que } (x,y) \in G \text{ y } (y,z) \in H_{[B]}\}$$

Esto implica que:

$$(G \circ H)_{[B]} = G \circ H_{[B]}$$

□

Ejercicio 1.49. Sea G un grafo y sea B una subclase con el dominio de G. Usando el símbolo $G(B)$ se designa para la clase,

$$G(B) = \{y : \exists x \in B \ni (x,y) \in G\}$$

Probar que,

1. $G(B) = ran\mathrm{G}_{[B]}$,
2. $G(B \cup C) = G(B) \cup G(C)$,
3. $G(B \cap C) = G(B) \cap G(C)$,
4. Si $B \subseteq C$, entonces $G(B) \subseteq G(C)$.

1. *Demostración.* Por definición, $G(B)$ es el conjunto de todos los y tales que existe un $x \in B$ tal que $(x, y) \in G$. Es decir:

$$G(B) = \{y : \exists x \in B \text{ tal que } (x, y) \in G\}$$

Por otro lado, la restricción de G a B, denotada como $G_{[B]}$, se define como:

$$G_{[B]} = \{(x, y) : (x, y) \in G \text{ y } x \in B\}$$

El rango de $G_{[B]}$, denotado como $\text{ran}G_{[B]}$, es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares en $G_{[B]}$:

$$\text{ran}G_{[B]} = \{y : \exists x \text{ tal que } (x, y) \in G_{[B]}\}$$

Dado que $(x, y) \in G_{[B]}$ implica que $(x, y) \in G$ y $x \in B$, podemos concluir que:

$$\text{ran}G_{[B]} = \{y : \exists x \in B \text{ tal que } (x, y) \in G\} = G(B)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$G(B) = \text{ran}G_{[B]}$$

□

2. *Demostración.* Por definición, tenemos:

$$G(B \cup C) = \{y : \exists x \in (B \cup C) \text{ tal que } (x, y) \in G\}$$

Esto significa que y está relacionado con algún x que pertenece a B o a C. Por lo tanto, podemos descomponerlo en dos partes:

$$G(B \cup C) = \{y : \exists x \in B \text{ tal que } (x, y) \in G\} \cup \{y : \exists x \in C \text{ tal que } (x, y) \in G\}$$

Esto se traduce a:

$$G(B \cup C) = G(B) \cup G(C)$$

□

3. *Demostración.* Por definición, tenemos:

$$G(B \cap C) = \{y : \exists x \in (B \cap C) \text{ tal que } (x, y) \in G\}$$

   Esto significa que y está relacionado con algún x que pertenece tanto a B como a C. Por lo tanto, podemos descomponerlo en dos partes:

$$G(B \cap C) = \{y : \exists x \in B \text{ tal que } (x, y) \in G \text{ y } \exists x \in C \text{ tal que } (x, y) \in G\}$$

   Esto se traduce a:

$$G(B \cap C) = G(B) \cap G(C)$$

□

4. *Demostración.* Si $B \subseteq C$, esto significa que todos los elementos de B también están en C. Por lo tanto, si y pertenece a $G(B)$, existe un $x \in B$ tal que $(x, y) \in G$.

   Dado que $B \subseteq C$, también tenemos que $x \in C$. Por lo tanto, y también pertenece a $G(C)$:

$$G(B) = \{y : \exists x \in B \text{ tal que } (x, y) \in G\} \subseteq \{y : \exists x \in C \text{ tal que } (x, y) \in G\} = G(C)$$

□

1.6 Generalización de Unión e Intersección.

Definición 1.26: –Familia indexada–

Sea I un conjunto de índices. Una familia de clases $\{A_i\}_{i\in I}$ es un grado G cuyo dominio es I. Para todo $i \in I$, se define

$$\{A_i\}_{i\in I} := \{x : (i,x) \in G\}.$$

Definición 1.27

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ son familias indexadas de clases. La unión de clases A_i,

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists j \in I \ni x \in A_j\}.$$

Definición 1.28

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ son familias indexadas de clases. La intersección de clases A_i,

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

● **Observación.** Otro tipo de notación para la unión e intersección generalizada es, $\mathcal{A}$ una clase de clases, entonces:

1. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{para algún } A \in \mathcal{A}\}$.
2. $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{para algún } A \in \mathcal{A}\}$.

Teorema 1.19

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de clases.

1. Si $A_i \subseteq B$, para todo $i \in I$, entonces $\cup_{i\in I} A_i \subseteq B$
2. Si $B \subseteq A_i$, para todo $i \in I$, entonces $B \subseteq \cap_{i\in I} A_i$

Demostración. Se demuestra cada literal.

1. Suponemos que $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$; ahora por la Definición 27, si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$, pero $A_j \subseteq B$, también $x \in B$. Por lo tanto
$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B.$$
2. Ejercicio 1, *Sección 1.6*
Suponemos que $B \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, ahora por la Definición 28 si

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, entonces $x \in A_j$ para todo $i \in I$ y por hipótesis $B \subseteq A_j$ con $x \in B$. Por tanto,

$$B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i.$$

□

Teorema 1.20: *–Leyes D'Morgan generalizadas–*

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de clases.

1. $(\bigcup_{i \in I} A_i)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$
2. $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

Demostración. Se demuestra cada literal,

1.

$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)' &\iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff \forall i \in I, x \notin A_i && \text{;Por Def 27} \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i' && \text{;Por Def. Complemento} \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i' && \text{;Por Def 28} \end{aligned}$$

2. Ejercicio 2, *Sección 1.6*

$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)' &\iff x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \\ &\iff \exists j \in I, x \notin A_j && \text{;Por Def 28} \\ &\iff \exists j \in I, x \in A_j' && \text{;Por Def. Complemento} \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i' && \text{;Por Def 27} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.21

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ y$\{B_j\}_{j \in J}$ familias de clases indexadas, entonces:

1. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap ((\bigcup_{j \in J} B_j)) = (\bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$.
2. $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup ((\bigcap_{j \in J} B_j)) = (\bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j)$.

Demostración. Se demuestra cada literal,
1)

$$
\begin{aligned}
x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} A_j) &\iff x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{j\in J} A_j \\
&\iff x \in A_h \text{ para algún } h \in I \wedge x \in B_k \text{ Para algún } k \in J \\
&\iff x \in A_h \cap B_k \text{ Para algún}(h,k) \in I \times J \\
&\iff x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j).
\end{aligned}
$$

2) Ejercicio 3, *Sección 1.6*

$$
\begin{aligned}
x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} A_j) &\iff x \in \bigcap_{i\in I} A_i \vee x \in \bigcap_{j\in J} A_j \\
&\iff x \in A_h \text{ Para toda } h \in I \vee x \in B_k \text{ Para todo } k \in J \\
&\iff x \in A_h \cup B_k \text{ Para todo}(h,k) \in I \times J \\
&\iff x \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.22

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ son familias de grafos, entonces

1. $\text{dom}(\bigcup_{i\in I} G_i) = \bigcup_{i\in I}(\text{dom } G_i)$.
2. $\text{ran}(\bigcup_{i\in I} G_i) = \bigcup_{i\in I}(\text{ran } G_i)$.

Demostración. Se demuestra cada literal,
1)

$$
\begin{aligned}
x \in \text{dom}(\bigcup_{i\in I} G_i) &\iff \exists y \ni (x,y) \in \bigcup_{i\in I} G_i && \text{;Por la Def.24} \\
&\iff \exists y \ni (x,y) \in G_j \text{ para algún } j \in I && \text{;Por la Def.27} \\
&\iff x \in dom\text{G}_j\text{para algún } j \in I && \text{;Por la Def.24} \\
&\iff x \in (\bigcup_{i\in I}(dom\text{G}_i)) && \text{;Por la Def.27}
\end{aligned}
$$

2) Ejercicio 4, *Sección 1.6*

$$
\begin{aligned}
y \in \operatorname{ran}\Big(\bigcup_{i\in I} G_i\Big) &\iff \exists x \ni (x,y) \in \bigcup_{i\in I} G_i && \text{;Por la Def.25}\\
&\iff \exists x \ni (x,y) \in G_j \text{ para algún } j \in I && \text{;Por la Def.27}\\
&\iff y \in ran\mathrm{G}_j \text{para algún } j \in I && \text{;Por la Def.24}\\
&\iff y \in \Big(\bigcup_{i\in I}(ran\mathrm{G}_i)\Big) && \text{;Por la Def.27}
\end{aligned}
$$

□

1.6.1 Ejercicios de la Sección 1.6

Ejercicio 1.50. **Literal ii)**, Teorema 19.

Ejercicio 1.51. **Literal ii)**, Teorema 20.

Ejercicio 1.52. **Literal ii)**, Teorema 21.

Ejercicio 1.53. **Literal ii)**, Teorema 22.

Ejercicio 1.54. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de clases indexadas en I. Suponga que $\forall i \in I$, $A_i \subseteq B$, probar que.

1. $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$
2. $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$

1. *Demostración.* Sea $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Entonces, por definición de la unión, existe un índice $j \in I$ tal que $x \in A_j$.

   Dado que $A_j \subseteq B_j$ por hipótesis, tenemos que $x \in B_j$.

   Por lo tanto, $x \in \bigcup_{i\in I} B_i$.

   Hemos demostrado que:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \implies x \in \bigcup_{i\in I} B_i$$

   Esto implica que:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$$

$\square$

2. *Demostración.* Sea $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Entonces, por definición de la intersección, para todo índice $i \in I$, se cumple que $x \in A_i$.

   Dado que $A_i \subseteq B_i$ por hipótesis, tenemos que $x \in B_i$ para todo $i \in I$.

   Por lo tanto, $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$.

   Hemos demostrado que:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \implies x \in \bigcap_{i\in I} B_i$$

Esto implica que:

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$$

□

Ejercicio 1.55. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias de clases indexadas, probar que

1. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$
2. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$

1. *Demostración.* Sea $(x, y) \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$. Entonces, por definición del producto cartesiano:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{y} \quad y \in \bigcap_{j\in J} B_j$$

Por definición de la intersección:

$$x \in A_i \quad \forall i \in I \quad \text{y} \quad y \in B_j \quad \forall j \in J$$

Esto implica que:

$$(x, y) \in A_i \times B_j \quad \forall (i, j) \in I \times J$$

Por lo tanto:

$$(x, y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

Hemos demostrado que:

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \subseteq \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

Ahora, sea $(x, y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$. Entonces, por definición de la intersección:

$$(x, y) \in A_i \times B_j \quad \forall (i, j) \in I \times J$$

Esto implica que:

$$x \in A_i \quad \forall i \in I \quad \text{y} \quad y \in B_j \quad \forall j \in J$$

Por lo tanto:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{y} \quad y \in \bigcap_{j\in J} B_j$$

Esto implica que:

$$(x,y) \in \big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcap_{j\in J} B_j\big)$$

Hemos demostrado que:

$$\bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \subseteq \big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcap_{j\in J} B_j\big)$$

Por lo tanto:

$$\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

□

2. *Demostración.* Sea $(x,y) \in \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$. Entonces, por definición del producto cartesiano:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{y} \quad y \in \bigcup_{j\in J} B_j$$

Por definición de la unión:

$$\exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i \quad \text{y} \quad \exists j \in J \text{ tal que } y \in B_j$$

Esto implica que:

$$(x,y) \in A_i \times B_j \quad \text{para algún } (i,j) \in I \times J$$

Por lo tanto:

$$(x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

Hemos demostrado que:

$$\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \times \big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

Ahora, sea $(x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$. Entonces, por definición de la unión:

$$\exists (i,j) \in I \times J \text{ tal que } (x,y) \in A_i \times B_j$$

Esto implica que:

$$x \in A_i \quad \text{y} \quad y \in B_j \quad \text{para algún } (i,j) \in I \times J$$

Por lo tanto:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{y} \quad y \in \bigcup_{j \in J} B_j$$

Esto implica que:

$$(x,y) \in \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \times \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big)$$

Hemos demostrado que:

$$\bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \subseteq \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \times \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big)$$

Por lo tanto:

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \times \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$$

□

Ejercicio 1.56. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias de clases indexadas, Suponga que para todo $i \in I$, existe $j \in J$ tal que $B_j \subseteq A_i$. Probar que,

$$\bigcap_{i \in J} B_j \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$$

Demostración. Sea $x \in \bigcap_{j\in J} B_j$. Entonces, por definición de la intersección:

$$x \in B_j \quad \forall j \in J$$

Dado que para todo $i \in I$, existe $j \in J$ tal que $B_j \subseteq A_i$, tenemos que:

$$x \in B_j \implies x \in A_i \quad \text{para algún } j \in J$$

Por lo tanto:

$$x \in A_i \quad \forall i \in I$$

Esto implica que:

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i$$

Hemos demostrado que:

$$x \in \bigcap_{j \in J} B_j \implies x \in \bigcap_{i \in I} A_i$$

Esto implica que:

$$\bigcap_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$$

$\square$

Ejercicio 1.57. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ familias de clases indexadas, probar que

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{j \in J}[A_i - B_j]\right)$
2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I}\left(\bigcup_{j \in J}[A_i - B_j]\right)$

1. *Demostración.* Sea $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$. Entonces:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{y} \quad x \notin \bigcup_{j \in J} B_j$$

Por definición de la unión:

$$\exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i \quad \text{y} \quad \forall j \in J, x \notin B_j$$

Esto implica que:

$$x \in A_i \quad \text{y} \quad x \notin B_j \quad \forall j \in J$$

Por lo tanto:

$$x \in A_i - B_j \quad \forall j \in J$$

Esto implica que:

$$x \in \bigcap_{j \in J}(A_i - B_j)$$

Por lo tanto:

$$x \in \bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{j \in J}[A_i - B_j]\right)$$

Hemos demostrado que:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) - \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \subseteq \bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{j \in J}[A_i - B_j]\right)$$

Ahora, sea $x \in \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}[A_i - B_j]\right)$. Entonces:

$$\exists i \in I \text{ tal que } x \in \bigcap_{j\in J}(A_i - B_j)$$

Esto implica que:

$$x \in A_i - B_j \quad \forall j \in J$$

Por lo tanto:

$$x \in A_i \quad \text{y} \quad x \notin B_j \quad \forall j \in J$$

Esto implica que:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{y} \quad x \notin \bigcup_{j\in J} B_j$$

Por lo tanto:

$$x \in \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) - \big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$$

Hemos demostrado que:

$$\bigcup_{i\in I}\big(\bigcap_{j\in J}[A_i - B_j]\big) \subseteq \big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) - \big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)$$

Por lo tanto:

$$\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) - \big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{i\in I}\big(\bigcap_{j\in J}[A_i - B_j]\big)$$

□

2. *Demostración.* Para demostrar la igualdad,

$$\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}[A_i - B_j]\right).$$

Vamos a probar las dos inclusiones:
Primero, probemos que,

$$\bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j \subseteq \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}[A_i - B_j]\right).$$

Sea x un elemento en el lado izquierdo de la igualdad, entonces $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$, lo que significa que x pertenece a la intersección

de todos los conjuntos A_i pero no pertenece a la intersección de todos los conjuntos B_j.
Por lo tanto, x pertenece a cada A_i, lo que implica que x pertenece al conjunto de unión $\bigcup_{j\in J}[A_i - B_j]$ para cada $i \in I$. Por lo tanto,

$$x \in \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}[A_i - B_j].\right)$$

Ahora, probemos que $\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}[A_i - B_j]\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i - \bigcap_{j\in J} B_j$.
Sea x un elemento en el lado derecho de la igualdad. Entonces, x pertenece a la intersección de las uniones de $A_i - B_j$ y por lo tanto, pertenece a $A_i - B_j$ para cada i y j. Esto implica que x pertenece a cada A_i pero no pertenece a cada B_j, lo que significa que x está en la intersección de todos los A_i y no en la intersección de todos los B_j. Por lo tanto, hemos demostrado que,

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}[A_i - B_j]\right)$$

. □

Ejercicio 1.58. Se dice que $\{B_i\}_{i\in I}$ esta *Cubierta* de A, si $A \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. Supongamos que $\{B_i\}_{i\in I}$ y $\{C_j\}_{j\in J}$ son dos *Cubiertas* distintas de A. Probar que la familia $\{(B_i \cap C_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ es una *Cubierta* de A.

Demostración. Para probar que la familia $\{(B_i \cap C_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ es una *Cubierta* de (A).
Primero debemos demostrar que $A \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(B_i \cap C_j)$.
Dado que $\{B_i\}_{i\in I}$ y $\{C_j\}_{j\in J}$ son dos *Cubiertas* distintas de A, entonces se tiene que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ y $A \subseteq \bigcup_{j\in J} C_j$.
Ahora, para probar que $\{(B_i \cap C_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ es una *Cubierta* de A, observemos que para cualquier par (i,j) en $I \times J$, se tiene que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ y $A \subseteq \bigcup_{j\in J} C_j$. Por lo tanto, (A) también está contenido en $(B_i \cap C_j)$.
Esto implica que cada elemento de A está en al menos uno de los conjuntos $B_i \cap C_j$ para cada par (i,j) en $I \times J$. Por lo tanto, hemos demostrado que $\{(B_i \cap C_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ es una *Cubierta* de A. □

Ejercicio 1.59. sea $a = \{u, v, w\}$, $b = \{w, x\}$, $c = \{w, y\}$, $r = \{a, b\}$, $s = \{b, c\}$ y $p = \{r, s\}$. Encontrar las clases, $\cup(\cup p), \cap(\cap p), \cup(\cap p), \cap(\cup p)$.

Resolución. Dado:

- $a = \{u, v, w\}$,
- $b = \{w, x\}$,
- $c = \{w, y\}$,
- $r = \{a, b\}$ que es $\{u, v, w, x\}$,
- $s = \{b, c\}$ que es $\{w, x, y\}$,
- $p = \{r, s\}$ que es $\{u, v, w, x, y\}$.

Ahora, calculemos las siguientes operaciones:

- $\cup(\cup p)$: $\cup p = \{u, v, w, x, y\}$, $\cup(\{u, v, w, x, y\}) = \{u, v, w, x, y\}$. Implicando que $\cup(\cup p) = \{u, v, w, x, y\}$.
- $\cap(\cap p)$: $\cap p = \{u, v, w, x, y\}$, $\cap(\{u, v, w, x, y\}) = \{u, v, w, x, y\}$. Entonces, $\cap(\cap p) = \{u, v, w, x, y\}$.
- $\cup(\cap p)$: $\cap p = \{u, v, w, x, y\}$, $\cup(\{u, v, w, x, y\}) = \{u, v, w, x, y\}$. Por tanto, $\cup(\cap p) = \{u, v, w, x, y\}$.
- $\cap(\cup p)$: $\cup p = \{u, v, w, x, y\}$, $\cap(\{u, v, w, x, y\}) = \{u, v, w, x, y\}$. Por lo cual, $\cap(\cup p) = \{u, v, w, x, y\})$.

Por lo tanto, las respuestas son las siguientes:

$$\cup(\cup p) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$\cap(\cap p) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$\cup(\cap p) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$\cap(\cup p) = \{u, v, w, x, y\}$$

Ejercicio 1.60. Probar que $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{A})$.
Donde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$son las uniones de los elementos.

Demostración. Para demostrar la igualdad $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son uniones de elementos, seguiremos estos pasos:
Notamos que $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ implica la intersección de todos los elementos en la unión de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Por lo tanto, cualquier elemento en esta intersección debe estar en todos los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ o a $\mathcal{B}$.

Observamos que $(\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$ implica la intersección de los elementos que están en la intersección de $\mathcal{A}$ y en la intersección de $\mathcal{B}$. Esto significa que cualquier elemento en esta intersección debe estar en todos los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ y también en todos los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{B}$.
Para demostrar que estos dos conjuntos son iguales, debemos probar las dos inclusiones:
Mostrar $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq (\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$: Tomamos un elemento x que está en $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Esto significa que x está en todos los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ o a $\mathcal{B}$, lo que implica que x está en $\cap\mathcal{A}$ y en $\cap\mathcal{B}$. Por lo tanto, x está en la intersección de $\cap\mathcal{A}$ y en la intersección de $\cap\mathcal{B}$, lo que implica que $x \in (\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$.
Mostrar $\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B}) \subseteq \cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$: Tomamos un elemento y que está en $(\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$. Esto significa que (y) está en la intersección de $\mathcal{A}$ y en la intersección de $\mathcal{B}$. Por lo tanto,y está en todos los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ y a $\mathcal{B}$, lo que implica que y está en $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.
Al demostrar ambas inclusiones, hemos probado que $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$. □

Ejercicio 1.61. Probar que,

1. Si $A \in \mathcal{B}$, entonces $A \subseteq \cup\mathcal{B}$ y $\cap\mathcal{B} \subseteq A$.
2. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ si y solo si $\cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$.
3. Si $\varnothing \in \mathcal{A}$, entonces $\cap\mathcal{A} = \varnothing$.

1. *Demostración.* Así,
   $\Rightarrow$) Para demostrar que $A \subseteq \cup\mathcal{B}$, notamos que si (A) es un elemento de la familia $\mathcal{B}$, entonces A está contenido en al menos uno de los conjuntos de $\mathcal{B}$. Por lo tanto, todos los elementos de A también pertenecen a la unión de todos los conjuntos en $\mathcal{B}$, lo que implica $A \subseteq \cup\mathcal{B}$.
   $\Leftarrow$) Para demostrar que $\cap\mathcal{B} \subseteq A$, si A es un elemento de la familia $\mathcal{B}$, entonces $\cap\mathcal{B}$ es un subconjunto de A ya que la intersección de todos los conjuntos en $\mathcal{B}$ no puede contener elementos fuera de A. □

2. *Demostración.* Demostrar $\cup\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$: Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces todos los elementos de los conjuntos de $\mathcal{A}$ están contenidos en los conjuntos de $\mathcal{B}$. Por lo tanto, la unión de $\mathcal{A}$ también estará contenida en la unión de $\mathcal{B}$. □

3. *Demostración.* Demostrar que $\cap\mathcal{A} = \varnothing$: Si el conjunto vacío está en $\mathcal{A}$, entonces la intersección de todos los conjuntos en $\mathcal{A}$ será el conjunto vacío, ya que no habrá elemento común a todos los conjuntos en $\mathcal{A}$. □

1.7 Conjuntos.

Hay dos tipos de clases: Conjuntos y clases propias.

Definición 1.29
Si $X \in Y$ para alguna clase Y, entonces X es un conjunto.
Si $X \notin Y$ para cualquier clase Y, entonces X es una clase propia.

Axioma 1.3
Todo subconjunto de un conjunto es un conjunto.

Axioma 1.4
$\varnothing$ es un conjunto.

Axioma 1.5
Si a y b son conjuntos, entonces $\{a, b\}$ es un conjunto.

Definición 1.30
Sea A un conjunto; por el conjunto potencia de A entendemos la clase de todos los subconjuntos de A. En símbolos, el conjunto potencia de A es la clase

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Note que por el Axioma A3, $\mathcal{P}(A)$ es la clase de todos los conjuntos B que satisfacen $B \subseteq A$.

Ejemplo 1.11. Si $A = \{a, b\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Axioma 1.6
Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de conjuntos, entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es un conjunto.

Axioma 1.7
Si A es un conjunto, entonces el conjunto potencia de A es un conjunto.

Axioma 1.8
Si A es cualquier conjunto, existe un elemento $a \in A$ tal que $a \cap A = \varnothing$.

Teorema 1.23
Si A y B son conjuntos, entonces $A \times B$ es un conjunto.

Demostración. Sean A y B conjuntos. Por el Axioma A6, $A \cup B$ es un conjunto; por el Axioma A7, $\mathcal{P}(A \cup B)$ es un conjunto; y finalmente, por el Axioma A7 de nuevo, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ es un conjunto. Demostraremos que $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, y se seguirá, por el Axioma A3, que $A \times B$ es un conjunto.

Sean $(x,y) \in A \times B$. Por la *Definición 1.29*, $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$. Ahora $x \in A \cup B$, entonces $\{x\} \subseteq A \cup B$, así $\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. De manera similar, $y \in A \cup B$ y $y \in A \cup B$, entonces $\{x,y\} \subseteq A \cup B$, así $\{x,y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Hemos demostrado que $\{x\}$ y $\{x,y\}$ son elementos de $\mathcal{P}(A \cup B)$, por lo tanto,

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B);$$

se sigue que

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

es decir,

$$(x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

□

1.7.1 Ejercicios de la Sección 1.7

Ejercicio 1.62. Si A y B son conjuntos, probar que $A - B$ Y $A + B$ son conjuntos.

Demostración. Por el Ejercicio 8 de la Sección 1.3, se define,

- $A + B := (A - B) \cup (B - A)$
- $A - B := A \cap B'$

Primero por el **Axioma 6** y la hipótesis de A y B son conjuntos, entonces B' es conjunto y $A \cap B'$ es conjunto, y por la Definición de diferencia se tiene que $A - B$ es un conjunto, análogamente para $B - A$.
Finalmente $A - B$ ó $B - A$ es un conjunto por el **Axioma 6** $(A - B) \cup (B - A)$ es un conjunto y por Definición de la hipótesis $A + B := (A - B) \cup (B - A)$ es un conjunto. □

Ejercicio 1.63. Si A es una clase propia y $A \subseteq B$, demuestra que B es una clase propia. Concluye que la unión de dos clases propias es una clase propia.

Demostración. Sea $A \subset B$ si y solo si $A \cup B = B$ como A es clase propia, se va a demostrar que $A \cup B$ es clase propia.
Entonces, para alguna X calase tal que $A \notin X$, en particular podemos tomar la clase que no tiene ningún elemento en A y $A \subset B$ es clase también entonces $b \notin X$, por lo tanto $A \cup B$ es clase propia. □

Ejercicio 1.64. Demuestra que la çlase Russellz la clase universal son clases propias. [*Pista*: Usa el resultado del Ejercicio 8, Conjunto de Ejercicios 1.2.]

Demostración. Recordemos la clase de Russell se define de la siguiente manera:

Sea S una clase cualquiera, $S = \{x : x \notin x\}$.

S clase propia $\Longrightarrow$ para todo c talque $S \notin C$, por Definición 29,

$\Longrightarrow$ para todo c talque $(x \notin x) \notin C$,

por la Definición de clase de Russell,

$\Longrightarrow \varnothing \notin C$

Por el Axioma 4 ,S es una clase propia. Ahora, sea U una clase propia $\Longrightarrow$ para todo c talque $U \notin C$. Por la Definición 12, la clase universal es una clase propia. □

Ejercicio 1.65. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de conjuntos. Demuestra que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y se va a demostrar que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto, es decir
Por el Axioma 3 y por la Definición 30, $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i$, por la Definición 27.
Sea $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longrightarrow$ para todo $j \in I, X \in A_i$, donde A_j es una clase.
Luego, por el Axioma 4 $\{A_i\}_{i\in I}$ es una clase. Así, usando la Definición 30, concluimos que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un conjunto □

Ejercicio 1.66. Sea G un grafo. Demuestra que si G es un conjunto, entonces dom G y ran G son conjuntos. [*Pista*: Demuestra que tanto dom G como ran G son subconjuntos de $\bigcup\bigcup G$.]

Demostración. Para todo $(x,y) \in G$,$\bigcup G = \{\{x\},\{x,y\},...\}$ y $\bigcup(\bigcup G) = \{x,y,....\}$.
Sea $x \in domG$, entonces $x \in \bigcup(\bigcup G)$y sea $y \in rangG$,entonces $y \in \bigcup(\bigcup G)$.Luego por el Axioma 6, $\bigcup(\bigcup G)$ es un conjunto .Porlo tanto,por el Axioma 3, $domG$y $ranG$ son conjuntos. □

Ejercicio 1.67. Sea $r = \{a,b\}$, $s = \{b,c\}$, $p = \{r,s\}$. Encuentra los conjuntos $\mathcal{P}(r)$, $\mathcal{P}(s)$, y $\mathcal{P}(\cup_p)$.

- $\mathcal{P}(r)$,
  $\mathcal{P}(r) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
- $\mathcal{P}(s)$,
  $\mathcal{P}(s) = \{\emptyset,\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{\{a,b\}\},\{\{a\},\{a,b\}\},$
  $\{\{b\},\{a,b\}\},\{\{a\},\{b\}\},\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\{\emptyset\},$
  $\{\{\emptyset\},\{a\}\},\{\{\emptyset\},\{b\}\},\{\{\emptyset\},\{a,b\}\},\{\{\emptyset\},\{b\}$
  $,\{a,b\}\},\{\{\emptyset\},\{a\},\{a,b\}\},\{\{\emptyset\},\{b\},\{a\}\},\{\{\emptyset\},\{b\},\{a\},\{a,b\}\}\}$
- $\mathcal{P}(\cup_p)$
  $\mathcal{P}(\cup_p) = \cup_p = \{r\} \cup \{s\} = \{a,b,r,s,c\}$
  $= \{\emptyset,\{a,b,r,s,c\},\{a\},\{b\},\{s\},\{r\},\{c\},\{a,b\},\{a,r\},\{a,s\},\{a,c\}$
  $,\{b,r\},\{b,s\},\{b,c\},\{r,a\},\{r,s\},\{s,a\},\{s,b\},\{s,r\},\{s,c\},\{c,a\},\{c,b\},$
  $\{c,r\},\{a,b,r\},\{a,b,s\},\{a,b,c\},\{b,r,s\},\{b,r,c\},,\{a,r,s\},\{a,r,c\},\{a,s,c\},\{b,s,c\}\}$

Ejercicio 1.68. Sean A y B conjuntos, demuestra lo siguiente:

1. $A \subseteq B$ si y solo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
2. $A = B$ si y solo si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

3. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

4. $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

5. $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$.

Demostración.

- $A \subseteq B$ si y solo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
  Primero supongamos que $A \subset B$ PD) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
  Sea $C \in \mathcal{P}(A) \Longrightarrow C \subset A$, por Definición 31
  $\Longrightarrow C \subset B$, por hipótesis,
  $\Longrightarrow C \in \mathcal{P}(B)$, por Definición 31.
  Ahora suponemos que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ PD) $A \subset B$
  Sabemos que por la Definición 31 tenemos que :
  $C \in \mathcal{P}(A) \Longrightarrow C \subset A$ y $c \in \mathcal{P}(B) \Longrightarrow C \subset B$
  Entonces por hipótesis tenemos que $A \subset B$

- $A = B$ si y solo si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
  Primero supongamos que $A = B$ PD) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
  sea $C \in \mathcal{P}(A) \Longrightarrow C \subset A$, por Definición 31
  $\Longrightarrow C \subset B$, por hipótesis,
  $\Longrightarrow C \in \mathcal{P}(B)$, por Definición 31.
  Ahora suponemos que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ PD) $A = B$
  Sabemos que por la Definición 31 tenemos que :
  $C \in \mathcal{P}(A) \Longrightarrow C \subset A$ y $c \in \mathcal{P}(B) \Longrightarrow C \subset B$
  Entonces por hipótesis y Teorema 7 tenemos que $C \subset A$ y $C \subset B \Longrightarrow A \subset B$.

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
  $c \in \mathcal{P}(A \cap B) \Longleftrightarrow C \subset A \cap B$
  $\Longleftrightarrow C \subset A \wedge C \subset B$
  $\Longleftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B)$
  $\Longleftrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

- $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
  $c \in \mathcal{P}(A \cup B) \Longrightarrow C \subset A \cup B$
  $\Longrightarrow C \subset A \vee C \subset B$
  $\Longrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \vee C \in \mathcal{P}(B)$
  $\Longrightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

- $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$.
  Primero supongamos que $A \cap B = \emptyset$ y vamos a desmotara que $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$.
  Sea $$\begin{aligned} C \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff C \in \mathcal{P}(A) \wedge C \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff C \subset A \wedge C \subset B \\ &\iff C \subset A \cap B \\ &\iff C\emptyset \\ &\iff \{\emptyset\} \end{aligned}$$
  . Ahora suponemos que $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$ y se va a demostrar que $A \cap B = \emptyset$.
  Por Reducción al absurdo supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe un $x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B$
  Pero por hipótesis tenemos que $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$, es decir que
  $$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cap B) \subset \emptyset \wedge \emptyset \subset \mathcal{P}(A \cap B) &\implies \emptyset \subset A \cap B \\ &\implies \emptyset \subset A \wedge \emptyset \subset B \end{aligned}$$
  Donde contradice la Definición de clase vacía, por lo tanto $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$ entonces $A \cap B = \emptyset$
  Se concluye que $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $\mathcal{P}(A \cap B) = \emptyset$.

□

Ejercicio 1.69. Si A y B son conjuntos, prueba lo siguiente:

1. $\bigcup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.
2. $\bigcap \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.
3. Si $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ entonces $A \in B$.

Demostración.

- $\bigcup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.
  Sea $$\begin{aligned} x \in \bigcup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B}) &\iff x \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) \text{ para algún } \mathcal{P}(\mathcal{B}) \in \mathcal{B} \\ &\iff x \in C \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) \\ &\iff x \in (C \subset \mathcal{P}(\mathcal{B})) \\ &\iff x \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

- $\bigcap \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.
  Supongamos que $B = \{a, b\}$, es un conjunto por el Axioma 5, entonces al usar al definición de partes de un conjunto se tiene que
  $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{a, b, \{a, b\}, \emptyset\}$
  Ahora por la Definicion 28 se tiene que $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall j \in I, x \in A_j\}$
  Entonces $\bigcap \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$

- Si $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ entonces $A \in B$.
  Sea $C \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \Longrightarrow C \subset A$
  $\Longrightarrow (C \subset A) \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$, por hipótesis,
  $\Longrightarrow (C \subset A) \subset B$
  $\Longrightarrow A \in B$

$\square$

Ejercicio 1.70. Exhibe los conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$