Apuntes de Matemática - UCE

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

Juan Sebastian Obando Pallo

FOLLETO - Capítulo 4: Clases Parcialmente Ordenadas.

Lógica y Teoría de Conjuntos.

FOLLETO DE LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS CARRERA DE MATEMÁTICA No. 1 (1)

FOLLETO - Capítulo 4: Clases Parcialmente Ordenadas.: Lógica y Teoría de Conjuntos.

Sebastian Obando.

Responsable de la Edición: J.S.Obando

Registro de derecho autoral No. *(1)
ISBN: 000-0-00000-000

Publicado en linea,
Quito, Ecuador.

Primera edición: 2024
Primera impresión: 2024

© 6-001 2024

Índice general

Capítulo 1

Clases y Conjuntos

https://github.com/Sebastian0142/Apuntes-de-logica

CAPÍTULO 2

FUNCIONES

https://github.com/Sebastian0142/Apuntes-de-logica

Capítulo 3

Relaciones

https://github.com/Sebastian0142/Apuntes-de-logica

Capítulo 4

Clases parcialmente ordenadas.

4.1 Introducción

Exposición de Relación de Orden - MATEMÁTICAS PARA INFORMATICA UNSa.

https://www.youtube.com/watch?v=HoTt-2IG3mc

4.1.1 Conceptos fundamentales y definiciones

Definición 4.1: –(G ordena a A)–

Sea A una clase y G una relación de orden en A. La pareja $\langle A, G\rangle$ es una clase parcialmente ordenada. Se dice que A está ordenada por G, o que G ordena a A. Si A es un conjunto, se dice que $\langle A, G\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Notación 6.

Sea $\langle A, G\rangle$ una clase parcialmente ordenada. Se escribe $x \leq y$ para denotar el hecho de que $(x, y) \in G$. La notación $y \geq x$ tiene el mismo significado que $x \leq y$.

Si $x \in A$ y $x \leq y \in G$, entonces se dice que "x es menor o igual que y".

Se escribe $x < y$ para denotar que $x \leq y$ y $x \neq y$. Se lee "x es estrictamente menor que y".

● **Observación.** Si A es una clase parcialmente ordenada y B una subclase de A, se puede considerar que B está ordenada por la relación de orden definida en A, es decir, si $x \in B$ y $y \in B$, entonces, $x \leq y$ en B si y solo si $x \leq y$ en A.

Definición 4.2: –Orden lexicográfico de $A \times B$)–

Sean A y B clases parcialmente ordenadas. Por orden lexicográfico de $A \times B$, se refiere a la siguiente relación de orden en $A \times B$: si $(a_1, b_1) \in A \times B$ y $(a_2, b_2) \in A \times B$, entonces $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ si y solo si:

$$a_1 < a_2 \quad \text{o} \quad a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2.$$

● **Observación.** El orden lexicográfico se llama así porque imita la forma en que se ordenan las palabras en un diccionario. Por ejemplo, .ºrdenado"precede a "par"porque .º"precede a "p", y çlase"precede a çonjunto"porque "l"precede a .º".

Definición 4.3: –Orden anti-lexicográfico de $A \times B$–

Sean A y B clases parcialmente ordenadas. Por orden anti-lexicográfico de $A \times B$, se refiere a la siguiente relación de orden en $A \times B$: si $(a_1, b_1) \in A \times B$ y $(a_2, b_2) \in A \times B$, entonces $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ si y solo si:

$$b_1 < b_2 \quad \text{o} \quad b_1 = b_2 \text{ y } a_1 \leq a_2.$$

Definición 4.4: –Elementos comparables)–

Sea A una clase parcialmente ordenada. Se dice que x y y son comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$; de lo contrario, se dice que son incomparables.

Definición 4.5: –Clase completamente ordenada–

Sea A una clase parcialmente ordenada y B una subclase ordinaria de A. Si cada dos elementos de B son comparables, entonces se dice que B es una clase completamente ordenada en A, o una clase linealmente ordenada en A o, más comúnmente, una cadena de A.

Definición 4.6: –Completamente ordenada–

Sea A una clase parcialmente ordenada, entonces si cada dos elementos de A son comparables, A se denomina completamente ordenada o linealmente ordenada.

Definición 4.7: –Segmento inicial)–

Sea A una clase parcialmente ordenada y sea $a \in A$. El segmento inicial de A determinado por a es la clase S_a definida por:

$$S_a = \{x \in A : x < a\}.$$

Teorema 4.1
Sea A una clase parcialmente ordenada. Si P es un segmento inicial de A y Q es un segmento inicial de P, entonces Q es un segmento inicial de A. En resumen: Un segmento inicial de un segmento inicial de A, es un segmento inicial de A.

Teorema 4.2: –Corte)–
Si A es una clase parcialmente ordenada, entonces un corte de A es un par (L, U) de subclases no vacías de A con las siguientes propiedades:

1. $L \cap U = \emptyset$ y $L \cup U = A$.
2. Si $x \in L$ y $y \leq x$, entonces $y \in L$.
3. Si $x \in U$ y $y \geq x$, entonces $y \in U$.

● **Observación.** Es conveniente usar gráficos llamados diagramas de líneas para ilustrar definiciones y propiedades de clases parcialmente ordenadas. Los elementos de las clases se representan por puntos; si dos puntos x y y están conectados por una línea, y la línea sube de x a y, esto significa que $x \leq y$.

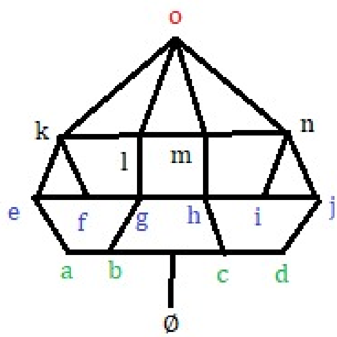
4.2 Ejercicios Sección 4.1

Ejercicio 4.1. Sea $A = \{a, b, c, d\}$; si $\mathscr{P}(A)$ está ordenado por inclusión, dibuja su diagrama de línea.

Demostración.

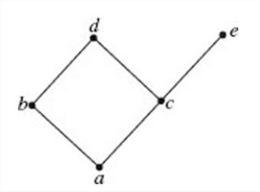
- El conjunto vacío: $\emptyset$
- Los subconjuntos de un elemento: $\{a\} = a$, $\{b\} = b$, $\{c\} = c$, $\{d\} = d$
- Los subconjuntos de dos elementos: $\{a, b\} = e$, $\{a, c\} = f$, $\{a, d\} = g$, $\{b, c\} = h$, $\{b, d\} = i$, $\{c, d\} = j$
- Los subconjuntos de tres elementos: $\{a, b, c\} = k$, $\{a, b, d\} = l$, $\{a, c, d\} = m$, $\{b, c, d\} = n$
- El conjunto completo: $\{a, b, c, d\} = o$

Su diagrama de linea:



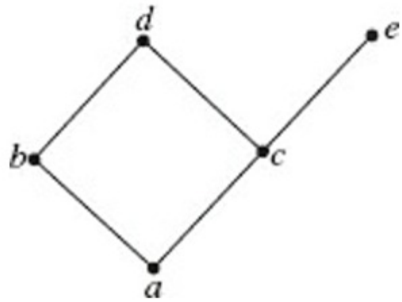
□

Ejercicio 4.2. Sea A la clase parcialmente ordenada definida por el siguiente diagrama. Enumera todas las cadenas de A, todos los segmentos iniciales de A, y todos los cortes de A.

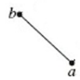


Demostración. **Cadenas de A:** $B = \{a, b, d\}$; $C = \{a, c, d\}$ y $D = \{a, c, e\}$.
Segmentos iniciales de A: $\{a\}$ y $\{b\}$.
Cortes de A: $L_1 = \{a, b, d\}$, $U_1 = \{c, e\}$ y $L_2 = \{b, d\}$, $U_2 = \{a, c, e\}$.

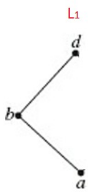
3. Sea A la clase parcialmente ordenada del Ejercicio 2. Dibuja el diagrama de línea para las siguientes clases: la clase de todas las cadenas de A (ordenada por inclusión), la clase de todos los segmentos iniciales de A (ordenada por inclusión), la clase de todos los cortes de A (ordenada por inclusión en el "componente izquierdo" L).
Solución:
Cadenas de A:

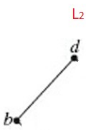


Segmentos iniciales de A:



Cortes de A:





□

> **Ejercicio 4.3.** Sean A y B clases parcialmente ordenadas, sea C una cadena de A, y sea D una cadena de B. Si $A \times B$ está ordenado lexicográficamente (4.1), prueba que $C \times D$ es una cadena de $A \times B$.

Demostración. Sea (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos pares arbitrarios en $C \times D$. Queremos demostrar que estos pares son comparables en el orden lexicográfico.

Dado que $(a_1, b_1) \in C \times D$ y $(a_2, b_2) \in C \times D$, se tiene que $a_1, a_2 \in C$ y $b_1, b_2 \in D$.

1. Dado que C es una cadena en A, para cualesquiera a_1 y a_2 en C, se cumple que $a_1 \leq a_2$ o $a_2 \leq a_1$.

2. Dado que D es una cadena en B, para cualesquiera b_1 y b_2 en D, se cumple que $b_1 \leq b_2$ o $b_2 \leq b_1$.

3. Ahora consideremos los siguientes casos:

- **Caso 1:** Si $a_1 < a_2$, entonces $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ en $A \times B$ por definición del orden lexicográfico. Por lo tanto, (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son comparables.

- **Caso 2:** Si $a_1 = a_2$, entonces necesitamos comparar b_1 y b_2. Como $b_1, b_2 \in D$ y D es una cadena, se cumple que $b_1 \leq b_2$ o $b_2 \leq b_1$. Por lo tanto, $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ o $(a_2, b_2) \leq (a_1, b_1)$ en $A \times B$, haciendo que (a_1, b_1) y (a_2, b_2) sean comparables.

Hemos demostrado que cualquier par de elementos en $C \times D$ son comparables bajo el orden lexicográfico en $A \times B$. Por lo tanto, $C \times D$ es una cadena en $A \times B$. □

Ejercicio 4.4. Sean A y B clases parcialmente ordenadas, y sea $A \times B$ ordenado antilexicográficamente (4.2). Prueba que si (L, U) es un corte de B, entonces $(A \times L, A \times U)$ es un corte de $A \times B$.

Demostración. Para probar que $(A \times L, A \times U)$ es un corte de $A \times B$, debemos mostrar que $A \times L$ es un corte inferior y $A \times U$ es un corte superior de $A \times B$.

1. **Corte inferior:**

Queremos mostrar que $A \times L$ es un corte inferior de $A \times B$. Esto significa que para cualquier par $(a_1, b_1) \in A \times L$ y $(a_2, b_2) \in A \times B$ tal que $(a_1, b_1) \leq_{AL} (a_2, b_2)$, se debe tener que $(a_2, b_2) \in A \times L$.

Supongamos que $(a_1, b_1) \in A \times L$ y $(a_2, b_2) \in A \times B$ tal que $(a_1, b_1) \leq_{AL} (a_2, b_2)$. Esto implica:

$$a_1 < Aa_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq Bb_2).$$

- Si $a_1 <_A a_2$, entonces $(a_2, b_2) \in A \times L$ no depende de b_2. - Si $a_1 = a_2$, entonces $b_1 \leq_B b_2$. Dado que $b_1 \in L$ y L es un corte inferior de B, $b_2 \in L$. Por lo tanto, $(a_2, b_2) \in A \times L$.

Por lo tanto, $A \times L$ es un corte inferior de $A \times B$.

2. **Corte superior:**

Queremos mostrar que $A \times U$ es un corte superior de $A \times B$. Esto significa que para cualquier par $(a_1, b_1) \in A \times B$ y $(a_2, b_2) \in A \times U$ tal que $(a_1, b_1) \leq_{AL} (a_2, b_2)$, se debe tener que $(a_1, b_1) \in A \times U$.

Supongamos que $(a_1, b_1) \in A \times B$ y $(a_2, b_2) \in A \times U$ tal que $(a_1, b_1) \leq_{AL} (a_2, b_2)$. Esto implica:

$$a_1 < Aa_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \leq Bb_2).$$

- Si $a_1 <_A a_2$, entonces $(a_1, b_1) \in A \times U$ no depende de b_1. - Si $a_1 = a_2$, entonces $b_1 \leq_B b_2$. Dado que $b_2 \in U$ y U es un corte superior de B, $b_1 \in U$. Por lo tanto, $(a_1, b_1) \in A \times U$.

Por lo tanto, $A \times U$ es un corte superior de $A \times B$. $\square$

Ejercicio 4.5. Sea A una clase parcialmente ordenada, y sea G una relación de equivalencia en A. Suponga que se cumple la siguiente condición: Si $x \sim z$ y $x \leq y \leq z$, entonces $y \sim z$. Define una relación H en A/G por

$$H = \{(Gx, Gy) : \forall w \in G_x, \exists z \in G_y \text{ tal que } w \leq z\}.$$

Prueba que H es una relación de orden en A/G.

Solución:

1. **Reflexividad:**

Para que H sea reflexiva, debemos mostrar que $(Gx, Gx) \in H$ para todo $Gx \in A/G$.

Consideramos el par (Gx, Gx). Queremos verificar si cumple con la condición de H:

$$\forall w \in G_x, \exists z \in G_x \text{ tal que } w \leq z.$$

Dado que $w \in G_x$ y $z \in G_x$ por definición, $w \leq z$ siempre se cumple si elegimos $z = w$. Así que la condición es satisfecha.

Por lo tanto, $(Gx, Gx) \in H$, y H es reflexiva.

2. **Antisimetría:**

Para que H sea antisimétrica, debemos mostrar que si $(Gx, Gy) \in H$ y $(Gy, Gx) \in H$, entonces $Gx = Gy$.

Supongamos que $(Gx, Gy) \in H$ y $(Gy, Gx) \in H$. Esto implica:

$$\forall w \in G_x, \exists z \in G_y \text{ tal que } w \leq z$$

$$\forall w' \in G_y, \exists z' \in G_x \text{ tal que } w' \leq z'$$

Queremos mostrar que $Gx = Gy$.

Tomemos cualquier $w \in G_x$. Por la primera condición, existe $z \in G_y$ tal que $w \leq z$.

Dado que $(Gy, Gx) \in H$, para el $z \in G_y$, existe $w' \in G_x$ tal que $z \leq w'$. Por transitividad del orden en A, $w \leq w'$ y $z \leq w'$, por lo tanto $w \leq w' \leq z$.

Así, G_x y G_y deben ser iguales, ya que cada elemento de G_x se puede relacionar con un elemento de G_y y viceversa.

Por lo tanto, $Gx = Gy$, y H es antisimétrica.

3. **Transitividad:**

Para que H sea transitiva, debemos mostrar que si $(Gx, Gy) \in H$ y $(Gy, Gz) \in H$, entonces $(Gx, Gz) \in H$.

Supongamos que $(Gx, Gy) \in H$ y $(Gy, Gz) \in H$. Esto implica:

$$\forall w \in G_x, \exists u \in G_y \text{ tal que } w \leq u$$

$$\forall u' \in G_y, \exists z \in G_z \text{ tal que } u' \leq z$$

Queremos verificar que $(Gx, Gz) \in H$. Para esto, tomamos cualquier $w \in G_x$. Por la primera condición, existe $u \in G_y$ tal que $w \leq u$.

Luego, por la segunda condición, para este u, existe $z \in G_z$ tal que $u \leq z$. Por transitividad del orden en A, $w \leq u \leq z$, así que $w \leq z$.

Dado que esto es válido para cualquier $w \in G_x$, concluimos que:

$$\forall w \in G_x, \exists z \in G_z \text{ tal que } w \leq z$$

Por lo tanto, $(Gx, Gz) \in H$, y H es transitiva.

4.3 Funciones de conservación de orden e isomorfismos

Definición 4.8: –Función creciente–

Sean A y B clases parcialmente ordenadas; la función $f : A \to B$ es llamada creciente, o que preserva el orden, si satisface la siguiente condición: Para cada dos elementos $x, y \in A$,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Diremos que $f : A \to B$ es estrictamente creciente si satisface la siguiente condición:

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Definición 4.9: –Isomorfismo–

Sean A y B clases parcialmente ordenadas; una función $f : A \to B$ es llamada isomorfismo, si satisface la siguiente condición: Para cada dos elementos $x, y \in A$,

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

Teorema 4.3
Si $f : A \to B$ es un isomorfismo, entonces:

$$x < y \iff f(x) < f(y).$$

Teorema 4.4
Sean A y B clases parcialmente ordenadas y sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Entonces $f : A \to B$ es un isomorfismo si y solo si $f : A \to B$ y $f^{-1} : B \to A$ son funciones crecientes.

Teorema 4.5
Sean A, B y C clases parcialmente ordenadas.

1. La función identidad $I_A : A \to A$ es un isomorfismo.
2. Si $f : A \to B$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : B \to A$ es un isomorfismo.
3. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son isomorfismos, entonces $g \circ f : A \to C$ es un isomorfismo.

Definición 4.10: –A es isomorfo con B–
Si A y B son clases parcialmente ordenadas y existe un isomorfismo de A a B, decimos que A es isomorfo con B.

- **Observación.** Por el Teorema 49, "A es isomorfo con B" ($A \cong B$) es una relación de equivalencia entre clases parcialmente ordenadas.

4.4 Elementos Distinguidos. Dualidad

Definición 4.11
Elemento Mximal y minimal. Es un elemento $m \in A$, donde ninguno de sus elementos de A son estrictamente mayores que m , asi

$$\forall x \in A, x \geq mx = m$$

Así un $n \in A$ es llamado elemento minimal de A si ninguno de los elementos de A son estrictamente menores que n, ens simbolos

$$\forall x \in A, x \leq n \Rightarrow x = n$$

Definición 4.12

Elemento máximo y mínimo. Un elemento $a \in A$ es llamado el mayor elemento de A si $a \geq x$, para cada $x \in A$. Un elemento $b \in A$ es llamado el amnor o minimo elemento de A. si $b \leq x$, para cada $x \in A$.

Definición 4.13

Limite superior e inferior. Sea B un subconjunto de A. Un limite superior de B en A, es $a \in A$ tal que $a \geq x$, para cada $x \in B$.
Limite inferior de B en A. es $b \in A$, tal que $b \leq x$ para cada $x \in B$. *La clase de todos los límites superiores de* B se denota por $v(B)$ y la clase de todos los limites interiores de B se denota por $\lambda(B)$. RECUERDA QUE cuando HABLAMOS DE LÍMITES, SE REFIERE A COTAS.

Definición 4.14

(Supremo $Sup_A B$e infimo$Inf_A B$). Si la clase de las cotas inferiores de B en A tiene un elemento mas grande entonces este elemento se llama la cota inferior mas grande de B en A. Si la clase de todas las cotas superiores de B en A tiene un elemento menor entonces este elemento se llama la menor de las cotas superiores de B en A

Teorema 4.6

Si A tiene un elemento mayor a y B tiene un elemento mayor b y $A \subseteq B$ entonces $a \leq b$.

Definición 4.15

Dual. Si $B \subseteq C$, entonces $\lambda(C) \subseteq \lambda(B)$.

Teorema 4.7

Sea B un subclase de A, entonces $B \subseteq v(\lambda(B))$.

Definición 4.16

Dual. $B \subseteq \lambda(v(B))$

Lema 4.8. Sea B una subclase A y suponga que $\lambda(B)$ tiene un supremo en A.
Entonces B tiene un infimo en A y $inf B = sup \lambda(B)$.

Definición 4.17
Dual. Si $v(B)$ tiene un infimo en A, entonces$B$ tiene un supremo en A y supB=inf$v(B)$.

Definición 4.18
Condicionalmente completo. Sea A una clase parcialmente ordenada Si toda sublcase no vacia de A que esta acotado superiormente tiene un supremo.

● **Observación.** Definición alternativa. A es llamado condicionalmente completo si toda subclase no vacia de A, que esta acotado inferiormente tiene un inf.

Teorema 4.9
Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Cada subclase no vacia de A, que esta acotado superiormente tiene un sup.
2. Cada subclase no vacia de A Qque esta acotada inferiormente tiene un inf.

4.5 Réticulos

Definición 4.19
Reticulo. Sea A una clase parcialmente ordenada. Si cada dobleton $\{x, y\}$ en A tiene un sup y un inf, entonces A se denomina un réticulo.

Lema 4.10. Sea A un réticulo. Sean $a, b, c \in A$ entonces:

- $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$.
- Si $a \leq c$ y $b \leq c$, entonces $a \vee b \leq c$.
- $a \wedge b$ y $a \wedge b \leq b$.
- Si $c \leq a$ y $c \leq b$, entonces $c \leq a \wedge b$.

Teorema 4.11
Sea A un retículo la unión de $\vee$ y el encuentro $\wedge$ tiene las siguientes propiedades:
L1. $x \wedge x = x$ y $x \vee x = x$
L2. $x \wedge y = y \wedge x$ y $x \vee y = y \vee x$
L3.$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ y $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
L4.$(x \vee y) \wedge x = x$ y $(x \wedge y) \vee x = x$.

Teorema 4.12
Sea A una clase en la que se definen dos operaciones $\vee$ y $\wedge$ que tienen las operaciones L1 a l4. Se definen una reticulación en A, que se denotara por el símbolo $\leq$, como sigue

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

Entonces $\leq$ es una relación de orden en A y A es un reticulo.

Definición 4.20
B es un reticulo de A. Sea A un reticulo y B una subclase de A. Si $x \in B$ se llama reticulo de A si:

$$x \in BY\ y \in B \Rightarrow x \vee y \in BY\ X \wedge y \in B$$

Definición 4.21
Algebra booleana. Se define como un reticulo de A que cumple:
L5. Existe elemento $0 \in A$ y un elemento $1 \in A$ tal que para cada $x \in A$ se tiene que

$$x \vee 0 = x$$

y

$$x \wedge 1 = 1$$

L6. Para cada $x \in A$ existe un elemento $x' \in A$ tal que

$$x \vee x' = 1$$

y

$$x \wedge x' = 0$$

L7. Para cada $x, y, z \in A$ se cumple:

- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Definición 4.22
Reticulo completo. Sea A una clase parcialmente ordenada. Se llama reticulo completo si cada sublcase de A tiene un sup. Alternaticamente A se denomina como un reticulo completo, si cada subclase de A tiene un inf.

Teorema 4.13
Sea A una calse parcialemtne ordenada , se cumple que:

- Cada subclase de A tiene un sup.
- Cada sublase de A tiene un inf.

4.6 Clases completamente ordenadas.Buen Orden de clases.

Definición 4.23
Sea A una clase parcialmente ordenada. Se dice que A está totalmente ordenada si cada par de elementos de A son comparables.

Teorema 4.14
Sea $f : A \to B$ una función, donde A es una clase totalmente ordenada y B es una clase parcialmente ordenada. Si $f : A \to B$ es biyectiva y creciente, es un isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $f(x) \leq f(y)$; dado que x y y son comparables, o bien $x \leq y$ o $y < x$. Si $y < x$, entonces $f(y) < f(x)$; pero $f(y) = f(x)$ implicaría que $y = x$, por lo que debemos tener $f(y) < f(x)$. Esto es contrario a nuestra suposición, por lo tanto $x \leq y$. □

Definición 4.24
Sea A una clase parcialmente ordenada. Se dice que A está bien ordenada si cada subclase no vacía de A tiene un elemento mínimo.

● **Observación.** Si A está bien ordenada, entonces A está completamente ordenada.

● **Observación.** Si A está bien ordenada, entonces A es condicionalmente completa.

Definición 4.25
Sea A una clase parcialmente ordenada, y supongamos que $a \in A$. Un elemento $b \in A$ se llama el sucesor inmediato de a si $a < b$ y no existe ningún elemento $c \in A$ tal que $a < c < b$.

● **Observación.** Si A es una clase bien ordenada, entonces cada elemento de A (con excepción del mayor elemento de A, si existe) tiene un sucesor inmediato. De hecho, si $x \in A$ y x no es el mayor elemento de A, entonces la clase $T = \{y \in A : y > x\}$ es no está vacía, por lo tanto T tiene un elemento mínimo, que es evidentemente el sucesor inmediato de x.

Definición 4.26
Sea A una clase parcialmente ordenada; definimos una *sección* de A como una subclase $B \subseteq A$ con la siguiente propiedad:

$$\forall x \in A, \quad \text{si } y \in B \quad \text{y} \quad x \leq y \quad \text{entonces } x \in B.$$

Teorema 4.15
Sea A una clase bien ordenada; B es una sección de A si y solo si $B = A$ o B es un segmento inicial de A.

Demostración. **i)** Si $B = A$ o B es un segmento inicial de A, entonces, evidentemente, B es una sección de A.

ii) Por el contrario, supongamos que B es una sección de A; si $B = A$, hemos terminado; por lo tanto, supongamos que $B \neq A$, es decir, $A - B \neq \emptyset$. Dado que A es una clase bien ordenada, $A - B$ tiene un elemento mínimo que denotamos por m; demostraremos que $B = S_m$

$$x \in S_m \Rightarrow x \in m \Rightarrow x \in B$$

(dado que m es el elemento mínimo de $A - B$); por el contrario, supongamos que $x \in B$: si $m \leq x$, entonces $m \in B$ esto contradice nuestra elección de m; por lo tanto, $x < m$, así que $x \in S_m$.

□

Teorema 4.16

(Principio de Inducción Transfinita). Sea A una clase bien ordenada, y sea $P(x)$ una afirmación que es verdadera o falsa para cada elemento $x \in A$; supongamos que se cumple la siguiente condición:

Ind. Si $P(y)$ es verdadera para cada $y < x$, entonces $P(x)$ es verdadera.

En ese caso, $P(x)$ es verdadera para cada elemento $x \in A$.

Demostración. Supongamos que $P(x)$ no es verdadera para cada $x \in A$; entonces la clase $\{y \in A : P(y) \text{ es falsa}\}$ no está vacía; por lo tanto, , tiene un elemento mínimo m. Ahora, $P(x)$ es verdadera para cada $x < m$, por lo que, según Ind, $P(m)$ es verdadera; pero elegimos m como el elemento mínimo de $\{y \in A : P(y) \text{ es falsa}\}$, así que $P(m)$ es falsa. Esta contradicción prueba que $P(x)$ debe ser verdadera para cada $x \in A$. □

4.7 Ejercicios Sección 4.5

Ejercicio 4.6. **Sea A una reticulación; si $a \in A$, sea $I_a = \{x \in A : x \leq a\}$. Demuestra que I_a es una subreticulación de A.**

Demostración. Primero, $I_a \subseteq A$. Ahora, sean x e y elementos de I_a. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \leq y$. Entonces,

$$x \vee y = y \in I_a \quad \text{y} \quad x \wedge y = x \in I_a$$

Por lo tanto, I_a es una subreticulación de A. □

Ejercicio 4.7. **Sea A una reticulación y sean $x, y, z \in A$. Demuestra que si $x \leq z$, entonces $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$.**

Demostración. Nota que

$$x \leq x \vee y \Rightarrow x \leq (x \vee y) \wedge z$$

y

$$(y \wedge z) \leq y \leq (x \vee y) \Rightarrow (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

Por lo tanto,

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

. □

Ejercicio 4.8. **Sea A un conjunto parcialmente ordenado; demuestra que la clase de todos los subconjuntos convexos de A es una reticulación completa.**

Demostración. Sea A un conjunto parcialmente ordenado, es decir, un conjunto A equipado con una relación de orden parcial $\leq$. Definimos la clase $\mathcal{C}$ como el conjunto de todos los subconjuntos convexos de A. Nuestro objetivo es demostrar que $\mathcal{C}$ forma una reticulación completa.

Un subconjunto $C \subseteq A$ se denomina convexo si para cualesquiera $x, y \in C$ y para cualquier $z \in A$ tal que $x \leq z \leq y$, se tiene que $z \in C$.

Una reticulación es completa si cualquier colección de subconjuntos tiene una unión y una intersección, y estas operaciones resultan en subconjuntos que también pertenecen a la reticulación. Además, cualquier subconjunto de la reticulación debe tener un mínimo y un máximo.

Consideremos una colección arbitraria de subconjuntos convexos $\{C_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{C}$. Vamos a demostrar que la intersección $\bigcap_{i\in I} C_i$ también pertenece a $\mathcal{C}$.

Sean $x, y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Por definición de intersección, x y y están en cada C_i. Dado que cada C_i es convexo, para cualquier $z \in A$ tal que $x \leq z \leq y$, se tiene que $z \in C_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $z \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Esto demuestra que $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo.

La intersección de cualquier colección de subconjuntos convexos es un subconjunto convexo, por lo que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intersección.

Ahora, consideremos dos subconjuntos convexos C_1 y C_2. Vamos a examinar si su unión $C_1 \cup C_2$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Tomemos $x, y \in C_1 \cup C_2$ y un elemento $z \in A$ tal que $x \leq z \leq y$. Si x y y pertenecen al mismo subconjunto convexo (es decir, ambos están en C_1 o ambos en C_2), entonces z estará en ese subconjunto convexo debido a la propiedad convexa de C_1 o C_2. Sin embargo, si x y y pertenecen a subconjuntos convexos diferentes (uno en C_1 y el otro en C_2), z podría no estar en $C_1 \cup C_2$, ya que $C_1 \cup C_2$ no necesariamente conserva la propiedad convexa.

La unión de dos subconjuntos convexos no siempre es convexo, por lo que $\mathcal{C}$ no es cerrada bajo uniones arbitrarias.

Hemos demostrado que la clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos convexos de un conjunto parcialmente ordenado A es cerrada bajo intersección, pero no necesariamente bajo uniones arbitrarias. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ forma una reticulación, pero no es una reticulación completa en el sentido general, ya que no cumple con la condición de estar cerrada bajo uniones arbitrarias. $\square$

4.8 Isomorfismos entre clases bien ordenadas.

Lema 4.17. Sea A una clase bien ordenada, y sea f un isomorfismo de A a una subclase de A. Entonces,

$$x \leq f(x), \quad \forall x \in A.$$

Demostración. Supongamos, por el contrario, que la clase $P = \{x \in A : x > f(x)\}$ no está vacía, y sea a el elemento mínimo de P; por lo tanto, en particular, $f(a) < a$. Ahora tenemos que

$$f(F(a)) < f(a) < a,$$

entonces $f(a) \in P$, lo cual es imposible porque a es el elemento mínimo de P. Por lo tanto, $P = \emptyset$, y se ha demostrado el lema. □

Lema 4.18. Sea A una clase bien ordenada. No existe un isomorfismo de A a una subclase de un segmento inicial de A.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que f es un isomorfismo de A a una subclase de un segmento inicial S_a de A. Así $a \leq f(a)$, por lo que $f(a) \notin S_a$; esto es imposible, ya que el rango de f se supone que es una subclase de S_a. Por lo tanto, una función f del tipo que supusimos no puede existir. □

Corolario 4.19. Ninguna clase bien ordenada es isomorfa a un segmento inicial de sí misma.

Lema 4.20. Sean A y B clases bien ordenadas. Si A es isomorfa a un segmento inicial de B, entonces B no es isomorfa a ninguna subclase de A.

Demostración. Sea $f : A \to S_b$ un isomorfismo de A a un segmento inicial de B. Supongamos que existe un isomorfismo $g : B \to C$ donde $C \subseteq A$. Obviamente, $g : B \to A$ es una función; dado que $g : B \to A$ y $f : A \to S_b$ son ambos inyectivos y crecientes, su composición $f \circ g : B \to S_b$ es inyectiva y creciente; es decir, $f \circ g$ es un isomorfismo de B a su rango, que es una subclase de S_b. Sin embargo, esto es imposible; por lo tanto, el isomorfismo g que se asumió no puede existir. □

Teorema 4.21
Sean A y B clases bien ordenadas; exactamente uno de los siguientes tres casos debe ser verdadero:

i) A es isomorfa a B.

ii) A es isomorfa a un segmento inicial de B.

iii) B es isomorfa a un segmento inicial de A.

Demostración. Comenzamos demostrando que lo siguiente se cumple en cualquier clase bien ordenada X:

I. Sean S_x y S_y segmentos iniciales de X; si $x < y$, entonces S_x es un segmento inicial de S_y.

De hecho, si $x < y$, entonces claramente $S_x \subseteq S_y$; además, S_x es una sección de S_y, pues

$$[u \in S_x \ \text{ y } \ v \leq u] \Rightarrow v \leq u < x \Rightarrow v \in S_x;$$

Así, por el Lema (nota que $S_x \neq S_y$ porque $x \neq y$), concluimos que S_x es un segmento inicial de S_y.

Ahora, sean A y B clases bien ordenadas, y sea C la siguiente subclase de A:

$$C = \{x \in A : \exists r \in B \ni S_x \approxeq S_r\}.$$

Si $x \in C$, no hay más de un $r \in B$ tal que $S_x \approxeq S_r$; pues supongamos que $S_x \approxeq S_r$ y $S_x \approxeq S_t$, donde $r \neq t$, digamos que $r < t$. Por el punto I, S_r es un segmento inicial de S_t; pero $S_r \approxeq S_x \approxeq S_t$, y esto es imposible según el Corolario 4; por lo tanto, para cada $x \in C$, el elemento $r \in B$ tal que $S_x \approxeq S_r$ es único. Denotemos el único $r \in B$ correspondiente a x por $F(x)$; así, $F : C \to B$ es una función. En particular, si $D = \text{ran}(F)$, entonces $F : C \to D$ es una función; demostraremos a continuación que $F : C \to D$ es un isomorfismo.

F es inyectiva. Supongamos que $F(u) = F(v) = r$, es decir, $S_u \approxeq S_r \approxeq S_v$. Si $u \neq v$, digamos que $u < v$, entonces por el punto I, S_u es un segmento inicial de S_v, y esto es imposible según el Corolario 4. Concluimos que $u = v$.

F es creciente. Supongamos que $u \leq v$, donde $F(u) = r$ y $F(v) = t$; por lo tanto, $S_u \approxeq S_r$ y $S_v \approxeq S_t$. Supongamos que $t < r$, entonces por el punto I, S_t es un segmento inicial de S_r; ahora $S_u \subseteq S_v$, por lo que

a) S_v es isomorfo a un segmento inicial de S_r, y

b) S_r es isomorfo a una subclase de S_v.

Esto es imposible , por lo que concluimos que $r \leq t$, es decir, $F(u) \leq F(v)$. Por lo tanto, , $F : C \to D$ es un isomorfismo.

A continuación, mostraremos que C es una sección de A; es decir, dado $c \in C$ y $x < c$, demostraremos que $x \in C$. Si $F(c) = r$, entonces $S_c \approxeq S_r$, es decir, existe un isomorfismo $g : S_c \to S_r$. Es un ejercicio sencillo demostrar que

$$g_{[S_x]} : S_x \to S_{g(x)}$$

es un isomorfismo. Así, $S_x \approxeq S_{g(x)}$, por lo que $x \in C$. Un argumento análogo muestra que D es una sección de B. Así que, según el Teorema 56, nuestro teorema se probará si podemos demostrar que lo siguiente es falso:

C es un segmento inicial de A, y D es un segmento inicial de B.

En efecto, supongamos que lo anterior es cierto: digamos $C = S_x$ y $D = S_r$; hemos demostrado que $F : C \to D$ es un isomorfismo, es decir, $C \approxeq D$, por lo que $S_x \approxeq S_r$. Pero entonces $x \in C$, es decir, $x \in S_x$, lo cual es absurdo. Esto prueba que necesariamente se cumple una de las condiciones (i), (ii) o (iii). □

Corolario 4.22. Sea A una clase bien ordenada; toda subclase de A es isomórfica con A o con un segmento inicial de A.

Demostración. Si B es una subclase de A, entonces B está bien ordenada; por lo tanto, s $B \approxeq A$, o B es isomorfa con un segmento inicial de A, o A es isomorfa con un segmento inicial de B. Para probar nuestro resultado, debemos mostrar que el último caso no puede ocurrir; de hecho, supongamos que ocurre: entonces, , B no es isomorfa con ninguna subclase de A. Pero $B \approxeq B$ y B es subclase de A, así que tenemos una contradicción; por lo tanto, el último caso no puede ocurrir. □

4.9 Ejercicios - Sección 4.6

Ejercicio 4.9. Sea A un conjunto totalmente ordenado. Demuestra que el conjunto de todas las secciones de A (ordenado por inclusión) es totalmente ordenado.

Para probar que el conjunto de todas las secciones de un conjunto totalmente ordenado A, ordenado por inclusión, también es totalmente ordenado, se tiene que

Demostración. Sea S_a y S_b dos secciones en $\mathcal{S}$. Por definición, estas secciones son:

$$S_a = \{x \in A \mid x \leq a\}$$

y

$$S_b = \{x \in A \mid x \leq b\}.$$

Para mostrar que $\mathcal{S}$ está totalmente ordenado, debemos probar que para cualquier par de secciones S_a y S_b, se cumple que $S_a \subseteq S_b$ o $S_b \subseteq S_a$.

Consideremos los dos casos siguientes:

1. Caso 1: $a \leq b$

   Si $a \leq b$, entonces para cualquier $x \in A$, si $x \leq a$, también se cumple que $x \leq b$. Por lo tanto, $S_a \subseteq S_b$.

2. Caso 2: $b \leq a$

   Si $b \leq a$, entonces para cualquier $x \in A$, si $x \leq b$, también se cumple que $x \leq a$. Por lo tanto, $S_b \subseteq S_a$.

Dado que siempre se cumple que $S_a \subseteq S_b$ o $S_b \subseteq S_a$, podemos concluir que $\mathcal{S}$ está totalmente ordenado bajo el orden de inclusión.

Hemos demostrado que el conjunto de todas las secciones de un conjunto totalmente ordenado A, ordenado por inclusión, también forma un conjunto totalmente ordenado. □

Ejercicio 4.10. Sea A una clase totalmente ordenada y sea $\{L, U\}$ una partición de A. Demuestra que (L, U) es una partición de A si y sólo si $\forall x \in L$ y $\forall y \in U$, $x \leq y$.

Para demostrar que (L, U) es una partición de A si y sólo si para todo $x \in L$ y para todo $y \in U$, se cumple que $x \leq y$

$L \cup U = A$ (la unión de L y U cubre todo A). $L \cap U = \emptyset$ (la intersección de L y U es el conjunto vacío).

Un conjunto totalmente ordenado A es un conjunto en el que cualquier par de elementos x, y cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Demostración. Si (L, U) es una partición de A, entonces para todo $x \in L$ y para todo $y \in U$, se cumple que $x \leq y$.

Supongamos que (L, U) es una partición de A. Esto significa que: $L \cup U = A$ $L \cap U = \emptyset$

Queremos probar que para cualquier $x \in L$ y $y \in U$, se cumple que $x \leq y$.

Dado que A es totalmente ordenado, para cualquier par de elementos x y y en A, se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$. Consideramos los dos casos posibles:

1. Caso 1: Si $x \leq y$, entonces estamos en la situación deseada.
2. Caso 2: Supongamos que $y \leq x$. Debido a que L y U son disjuntos ($L \cap U = \emptyset$) y cubren todo A, x y y no pueden estar en ambos subconjuntos. Por lo tanto, si $y \leq x$ y $y \in U$, entonces x no puede estar en L, lo que contradice la hipótesis de que (L, U) es una partición (ya que esto implicaría que $x \in U$, y $x \in L$ simultáneamente). Por lo tanto, $y \leq x$ no puede ocurrir, y así $x \leq y$ debe ser cierto.

Si para todo $x \in L$ y $y \in U$, se cumple que $x \leq y$, entonces (L, U) es una partición de A.

Supongamos que para todo $x \in L$ y $y \in U$, se cumple que $x \leq y$. Queremos probar que (L, U) es una partición de A.

Para la unión: Dado que L y U cubren todos los elementos de A, esto implica que $L \cup U = A$. Si $x \in A$, entonces $x \in L$ o $x \in U$, porque L y U cubren A.

Para la intersección: Supongamos por contradicción que existe algún elemento que está en la intersección de L y U. Esto significaría que $x \in L$ y $x \in U$, y dado que para todo $x \in L$ y $y \in U$, se cumple que $x \leq y$, también se debe tener $x \leq x$, que es trivial. Sin embargo, por la hipótesis de que L y U son disjuntos, esto es una contradicción. Por lo tanto, $L \cap U = \emptyset$.

Así, hemos demostrado que si para todo $x \in L$ y $y \in U$, se cumple que $x \leq y$, entonces (L, U) es una partición de A.

Hemos demostrado ambas direcciones: que (L, U) es una partición de A si y sólo si para todo $x \in L$ y $y \in U$, se cumple que $x \leq y$. □

Ejercicio 4.11. Sea A una clase parcialmente ordenada; demuestra que B es una sección de A si y sólo si $(B, A \setminus B)$ es una partición de A.

Demostración. (Implicaciones)
$\Rightarrow$) Supongamos que B es una sección de A. Es decir

$$\forall x \in A, \quad y \in B \quad \text{y} \quad x \leq y, \Rightarrow x \in B.$$

Primero, es obvio que:

$$B \cup (A \setminus B) = A$$

y

$$B \cap (A \setminus B) = \emptyset.$$

Si $x \in B$ y $y \leq x$, entonces $y \in B$ por nuestra suposición. Ahora supongamos que

$$x \in A \setminus B$$

y

$$y \geq x.$$

Entonces, si $y \in B$, por nuestra suposición, $x \in B$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $x \in A \setminus B$. Por lo tanto, $y \in A \setminus B$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $(B, A \setminus B)$ es una partición de A. Entonces, para cualquier $x \in A$

$$y \in B \quad \text{y} \quad y \geq x \Rightarrow x \in B.$$

Así, B es una sección de A. $\square$