1 AGOSTO

INTRODUCCIÓN

Control digital → Discreto / Señales \ Sistemas

Estándar digital = solo 2 valores de voltajes diferentes (alto / bajo)
Estados

Analógica = Puede tomar cualquier valor dentro del rango

¿Por qué control digital?

✓ Exactitud
✓ Costos
✓ Errores de implementación
✓ Flexibilidad
✓ Velocidad

- CONVERSIÓN ANÁLOGA A DIGITAL

✓ Procedimiento de conversión

1) Muestreo : • Medir valores de voltaje cada cierto tiempo
• Se mide como el número de veces que se mide en 1 segundo, por lo tanto la unidad es Hz.

2) Cuantización: Almacenar los valores que se tomaron en cada muestra

3) Codificación: A valores almacenados ponerles, asignarles valores binarios
• Definir con cuantos bits (que) vamos a trabajar el código

Ej: Señal analógica: 0,3 v

- Bits representación: 2 bits
- $2^2 = 4$ posibles símbolos
- Rango analógico: $3 - 0 = 3v$
- Representación: $\frac{3}{4} = 0{,}75v$

VOLTAJE	BINARIO
0	00
0,75	01
1,5	10
2,25	11

✓ MÉTODOS DE CONVERSIÓN

Existen 2 métodos de conversión

- Resistencias ponderadas
- Red en escalera R - 2R

✓ Módelos matemáticos

- Zero order Hold (ZOH)

4
22 AGOSTO

ESTABILIDAD SISTEMA DISCRETO

✓ ESTABILIDAD ABSOLUTA

✓ ESPACIO LAPLACE VS Z

equivalencia en el plano z

$$z = e^{Ts}$$

Expresando

$$s = \sigma + j\omega$$

$\sigma > 0$ Inestable $z = e^{\sigma T}$

$$\lim_{\sigma \to 0} e^{\sigma T} = 1$$

$$\lim_{\sigma \to \infty} e^{\sigma T} = \infty$$

$\sigma = 0$ Marginalmente inestable

EJERCICIO

✓ $G(z) = \dfrac{-0.075997z + 0.0101}{z^2 - 1,5804z + 0.6238}$

$$z = \frac{1,5804 \pm \sqrt{1,5804^2 - 4(0,6238)}}{2}$$

$z_1 = 0,76$

$z_2 = 0,81$

Zeros

$z = \dfrac{-0,0101}{-0,075997} = 0,13$

✓ ESTABILIDAD ASINTÓTICA

✓ ARREGLO DE JURY

CONDICIONES

- $z^5 + 2,6z^4 - 0,56z^3 - 2,05z^2 + 0,0775z + 0,35 =$

$1 > 0$

$0,35 < 1$

z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	z^5
0,35	0,0775	-2,05	-0,56	2,6	1
1	2,6	-0,56	-2,05	0,0775	0,35

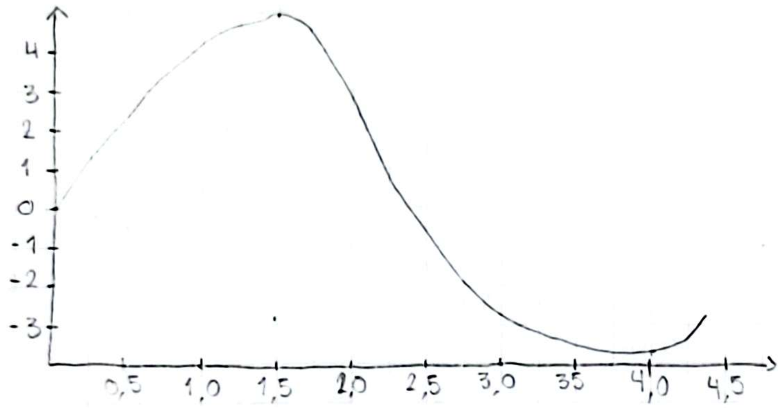
✓ Verificar estable o inestable

- $z^5 + 2,6z^4 - 0,56z^3 - 2,05z^2 + 0,0775z + 0,35$
  - $1 > 0$
  - $0,35 < 1$
  - $P|_{z=1} = (1)^5 + 2,6(1)^4 - 0,56(1)^3 - 2,05(1)^2 + 0,0775(1) + 0,35 = 1,41 > 0$ ✓
  - $P|_{z=-1} = -1 + 2,6 + 0,56 - 2,05 - 0,0775 + 0,35 = 0,38 > 0$ x

TRANSFORMADA Z DE ADELANTOS Y ATRASOS

✓ Muestreo en términos matemáticos

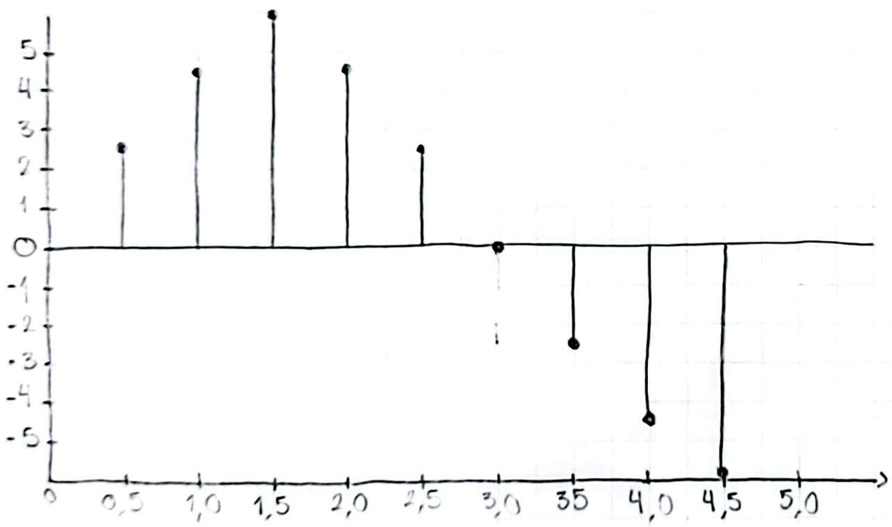
- Si se tiene una Función F(t) continua y se quiere expresar matemáticamente el equivalente discreto es de la siguiente manera



$F(t) \to$ CONTINUA

$y(t) = 5\,\text{sen}\,(1,04t)$

EQUIVALENTE



$T = 0,5$ Seg

✓ REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE LOS SISTEMAS

• ECUACIÓN EN DIFERENCIA

$$b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \ldots + b_0 u(k-n) = y(k) + a_{n-1} y(k-1) + \ldots$$
$$+ a_0 y(k-n)$$

• "u" es la entrada y "y" es la salida

• Al igual que con las ecuaciones diferenciales las ecuaciones en diferencias representan el comportamiento dinámico de un sistema en términos de sus señales de entrada y salida.

✓ CARACTERISTICAS

• Pueden ser homogeneas, lineales, invariantes en el tiempo.

• $y(x+2) + 0{,}8y(k+1) + 0{,}07y(k)\, u(k) = 0$ -> Lineal, invariante en el tiempo, no invariable.

• $y(k+4) + \operatorname{sen}(0{,}4k)\, y(k+1) + 0{,}3y(k) = 0$ -> Lineal, Variante en el tiempo, homogenea.

• $y(k+1) = -0{,}1\,(y(k))^2$ -> No lineal, invariante en el tiempo, homogenea.

✓ SOLUCIÓN A ESTAS ECUACIONES

Se solucionan por dos enfoques

- Métodos itérativos.
- Transformada Z.

• SOLUCIÓN POR MÉTODOS ITÉRATIVOS

Ej: $y(k) = 1/3\,(-2y(k-1) + y(k-2) + 2u(k-1) - 3u(k-2))$

Condi. Ini: $y(-2) = 1;\ y(-1) = -2;\ u(k) \begin{cases} 1;\ k = 0,1,2,3\ldots \\ 0;\ k<0 \end{cases}$

$k = 0$

$y(0) = 1/3\,(-2(-2) + 1 + 2(0) - 3(0)) = 5/3$

√ TRANSFORMADA Z

- La solución numérica da los valores de "y".
- Es la contraparte de la transformada de Laplace, tienen características diferentes

Laplace $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Z

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st}\,dt \qquad\qquad Z\{F(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)Z^{-k}$$

√ SOLUCIÓN A ECUACIONES CON DIFERENCIAS POR TRANSFORMADA Z

PASOS :

- Aplicar transformada Z a la ecuación.
- Despejar variable desconocida o salida del sistema.
- Aplicar transformada Z inversa Z^{-1}

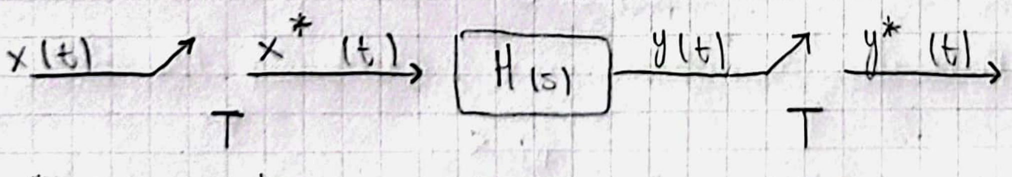
√ TRANSFORMADAS Z IMPORTANTES EN CONTROL

Términos tipo:

$$F(k+n) \quad o \quad F(k-n)$$

n es el número de muestra que se desplaza a la función.

√ FUNCIÓN TRANFERENCIA PULSO



$x^*(t)$ y $y^*(t)$ son las señales $x(t)$ y $y(t)$ muestreadas.

Ej

$$3y(k) + 2y(k-1) - y(x-2) = 2u(k-1) - 3u(k-2)$$

$$3y(z) + 2z^{-1}(y(z) + y(-1)z) - z^{-2}(y(z) + y(-1)z + y(-2)$$

$$z^{2}) = 2z^{-1}u(z) - 3z^{-2}u(z)$$

$$Y(z) = \frac{U(z)\,(2z^{-1} - 3z^{-2})}{3 + 2z^{-1} - z^{-2}} + \cancel{\frac{-2y(-1) + y(-1)z^{-1} + y(-2)}{3 + 2z^{-1} - z^{-2}}}$$

Condiciones iniciales 0

IMP

✓ Programar función transferencia = Atrasos

✓ Analizar y diseñar controlador = Adelantos

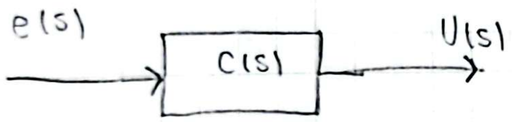
SEMANA 3

✓ DISCRETIZACIÓN DE CONTROLADORES ANALÓGICOS

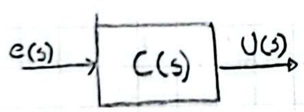
Buscar equivalencia entre espacio Laplace y espacio Z

✓ MÉTODO INVARIANZA AL IMPULSO

$U(s) = C(s) * 1 = C(s)$



✓ METODO INVARIANZA AL PASO



Sabiendo que la transformada z de una función paso es $Z\{e(t)\} = \frac{z}{z-1}$

Se pueden igualar las transformadas inversas

$u(k) = u(t)$ $\quad Z^{-1}\left\{C(z)\frac{z}{z-1}\right\} = L^{-1}\left\{C(s)\frac{1}{s}\right\}$

✓ METODO EULER ADELANTE

La aproximación discreta de la derivada es: $\frac{d}{dkT}(kT) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$

Se sabe: $L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = sX(s)$

Al aplicar la transformada Z: $Z\left\{\frac{x(k+1) - x(k)}{T}\right\} = \frac{zX(z) - X(z)}{T} = \frac{z-1}{T}X(z)$

Obtenemos $sX(s) \approx \frac{z-1}{T}X(z)$ $\quad s \approx \frac{z-1}{T}$

✓ METODO EULER ATRAS

La aproximación discreta de la derivada es $\frac{d}{dkT} x(kT) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T}$

Se sabe $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} x(t)\right\} = sX(s)$ → Al aplicar la transformada Z:

$$Z\left\{\frac{x(k) - x(k-1)}{T}\right\} = \frac{X(z) - z^{-1} X(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} X(z)$$

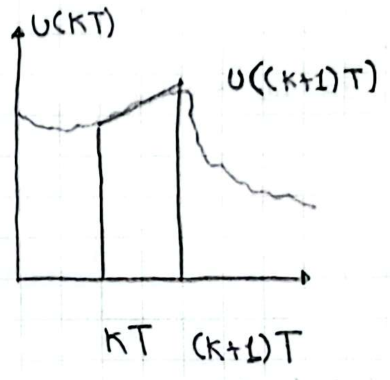
Obtenemos: $sX(s) \approx \frac{1 - z^{-1}}{T} X(z)$

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz}$$

✓ METODO TRAPEZOIDAL

La equivalencia es: $s = \frac{\frac{2}{T}(z-1)}{z+1}$

O también: $z = \frac{1 + \frac{Ts}{2}}{1 - \frac{Ts}{2}}$



✓ TEOREMA DE MUESTREO

Teorema de muestreo de Nyquist

- Explica la relación entre la velocidad de muestreo y la frecuencia de la señal media. La velocidad de muestreo fs debe ser mayor que el doble de la componente de frecuencia más alta en la señal

- Esta frecuencia se conoce como frecuencia de Nyquist

$$f_s > 2f_N$$