École Normale Supérieur de Lyon

Rapport de stage L3

Outis pour l'analyse de grands systèmes aléatoires

Emmanuel Rodriguez
Informatique théorique
Promo 2016-2017

Tuteur : M. Nicolas Gast
Co-encadrante : Mme Florence Perronnin
Chef d'équipe : M.Arnaud Legrand
équipe : POLARIS

29 Mai 2017 — 10 Juillet 2017

Table des matières

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidées lors de la rédaction de ce rapport.

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement mon maître de stage, M. Nicolas Gast, et Mme Florence Perronnin co-encadrante du stage, pour leur accueil, le temps passé ensemble et le partage de leur expertise au quotidien. Grâce aussi à leur confiance j'ai pu m'accomplir totalement dans mes missions. Ce fut une aide précieuse dans les moments les plus délicats.

Je remercie également toute l'équipe POLARIS pour son accueil et tous les bons moments passés ensemble.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage : ma famille, mon ami Vincent Rébiscoul pour avoir partagé le même bureau de stage.

Introduction

On utilise des systèmes aléatoires dans de nombreux domaines de l'informatique comme les réseaux de communication,les systèmes distribués ou les systèmes de calcul… Ces systèmes, utilisés pour étudier et améliorer la performance algorithmique distribuée, sont souvent composés de nombreux objets en interaction, ce qui rend leur analyse exacte difficile.

Nous nous intéresserons dans ce stage à des outils stochiastiques permettant de montrer que pour de nombreux systèmes, la performance d'un système composé de N objets a une limite quand N est grand.
Plus précisément on s'intéressera au cours de ce stage aux chaines de Markov à temps continu, un modèle pouvant s'appliquer à de nombreux problèmes allant de la répartition des tâches dans un réseau à la répartition des vélos dans les systèmes Vélo'v d'une ville. Nous établierons dans un premier temps des outils de calcul s'appliquant à ces systèmes. Un des objectifs principaux de ce stage sera d'implémenter une bibliothèque `python3` générique permettant à l'utilisateur de faire des simulations et des calculs sur ces chaînes de Markov à temps continu. De plus cette bibliothèque nous permettra de valider le modèle mis en place précédemment.

Chapitre 1

Processus de population et bases théoriques

1.1 Chaîne de Markov à temps continu

Lois exponentielles : Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ suit la loi exponentiele de paramètre $\lambda \geq 0$, si sa fonction de répartition est donnée par $F(t) = (1 - e^{-\lambda t})$ sur $\mathbb{R}_+$. (et F(t)=0 sur $\mathbb{R}^*_-$).

Un **processus aléatoire** ou stochastique vise à décrire l'évolution généralement temporelle (ou géométrique) d'une grandeur aléatoire. Formellement il s'agit d'une famille $X = (X_i)\ i \in S$ de fonctions aléatoires X_i , à valeurs réelles, complexes ou vectorielles, sur un espace de probabilité (Ω, F, P) et indicées par un paramètre $i \in S$ où S est un ensemble de référence.

Chaîne de Markov à temps continu : On considère un processus aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, à valeurs dans un ensemble E fini ou dénombrable ayant la propriété suivante, appelée propriété de Markov : pour tous $n \in N,\ 0 \leq t_0 < \ldots < t_{n+1}\ et\ x = x_0, \cdots, x_n, x_{n+1}\ \in E$

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \| X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n) \quad = \quad P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \| X_{t_n} = x_n)$$

lorsque l'événement $\{X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n\}$ est de probabilité non nulle. Le processus $(X_t)\ t \in \mathbb{R}^+$ est alors appelé chaîne de Markov (continue). Si $P(X_{t+s} = y \| X_t = x) = p_s(x, y)$ ne dépend pas de t, on dit alors que $(X_t)\ t \in \mathbb{R}^+$ est une **chaîne de Markov à temps continu**(CMTC) ou **Processus de Markov à saut**.

L'un des principaux aspects de ce type de processus aléatoire est qu'il est sans mémoire, l'avancement ne dépendant que de l'instant présent.

On pourra trouver de plus amples détails dans le document suivant [2].

1.2 Processus de population

Nous reprendrons le modèle établi par Kurtz [4]. Soit $(X^{(N)})$ une CMTC. $X^{(N)}$ représente la **proportion de population** de chaque état. Il existe $L \in \epsilon$, avec $n = card(S)$ et ϵ un ensemble borné de $\mathbb{R}$, et un ensemble de fonctions $\beta_l^{(N)} : \epsilon \to \mathbb{R}^+$ tel que $X^{(N)}$ passe de l'état x à l'état $x + \frac{l}{N}$ avec le taux $N\beta_l^{(N)}$ pour tout $l \in L$.

On définit alors le drift :

$$f^{(N)}(x) = \sum_{l \in L} l\beta_l^{(N)}(x)$$

Le drift représente l'avancement infinitésimal du système.

1.3 Approximations

Nous supposerons dans le cadre de ce stage les propositions suivantes :

- $sup_{x\in\epsilon,N\geq 1} \sum_{l\in L} \beta_l^{(N)} \|l\|^2 < \infty$
- $f^{(N)}(x) = f(x) + \frac{\tilde{f}(x)}{N} + O(\frac{1}{N^2})$
- f est deux fois dérivable et $\ddot{f}$ est uniformément continue et bornée.
- $\dot{x} = f(x)$ possède un unique attracteur π exponentiellement stable.

Théorème [5] Soit $h : \epsilon \to \mathbb{R}^+$ deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est uniformément continue. Alors :

$$\lim_{N\to\infty} N\left(E^{(N)}\left[h(X^{(N)})\right] - h(\pi)\right) = \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(\pi)D_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(\pi)W_{ij}$$

Avec :

- $A_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\pi)$
- $(B_j)_{k_1,k_2} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}}(\pi)$
- W l'unique solution de l'équation de Lyapunov suivante $AW + WA^T + Q = 0$
- $D_i = -\sum_j (A^{-1})_{i,j}\left[C_j + \frac{1}{2}\sum_{k_1,k_2}(B_j)_{k_1,k_2}W_{k_1,k_2}\right]$

On a donc $X_i^{(N)} = \pi_i + \frac{D_i}{N} + o(\frac{1}{N})$ lorsque N tend vers l'infini.

On cherchera par la suite à calculer ce coefficient D_i à l'aide du théorème et a vériffier sa validité en calculant ce coefficient par simulation.

Chapitre 2

Réalisation d'une bibliothèque générique

Pour vérifier le modèle étudié j'ai codé une bibliothèque [6] dans le langage `python3` qui permet de simuler une CMTC et de calculer le coefficient en $\frac{1}{N}$, pour une CMTC quelconque.

2.1 Le simulateur

2.1.1 Réalisation

Pour la simulation, nous suivons le schéma suivant :
- recherche de la prochaine transition
- effectuer cette transition
- recommencer tant qu'on a pas atteint le temps limite

Méthode naive : Soit $l \in L$ un vecteur représentant une transition. Cette transition est associée au taux β_l . Le système passe d'un état X à $X + \frac{l}{N}$ avec le taux $N * \beta_l$. On tire la variable aléatoire $expo(N * \beta_l)$ pour obtenir le temps avant cette transition. Avec expo(i) une loi exponentielle de paramètre i. On tire donc une loi exponentielle pour chaque transition puis seule la transition qui a lieu en premier est prise en compte.

Mais il existe une méthode plus rapide et équivalente :

Amélioration : Pour savoir quelle transition aura lieu en premier, on peut plus simplement choisir une transition l avec proba : $\frac{\beta_l}{\sum_{i\in L}\beta_i}$, en tirant juste un réel entre 0 et 1 par exemple. Puis une fois la transition choisie on tire une loi exponentielle de paramètre $\sum_{i\in L}\beta_i$ pour obtenir le temps avant la transition.

Réalisation d'un simulateur J'ai codé en `python3` le simulateur suivant prenant en entrée une chaîne de Markov a temps continu quelconque. La fonction comprend deux options qui sont les deux dernier arguments : on peut fixer la graine qui sert à générer l'aléatoire du module random de `python3`. Ce qui sert à pouvoir refaire la même simulation avec exactement les mêmes conditions. (Il faut alors ajouter l'argument : $fix = 1234$ par exemple)

La seconde option permet d'écrire dans un fichier (dont on précise le nom avec l'argument : $file ='' mon\_fichier.out''$) le tableau de données représentant la simulation effectuée.
La simulation renvoie un doublet `data` :
— `data[0]` le tableau des temps
— `data[1]` la matrice des valeurs des X_i aux différents temps

2.1.2 Exemple d'utilisation : système d'infection SIR

On considère le système suivant :

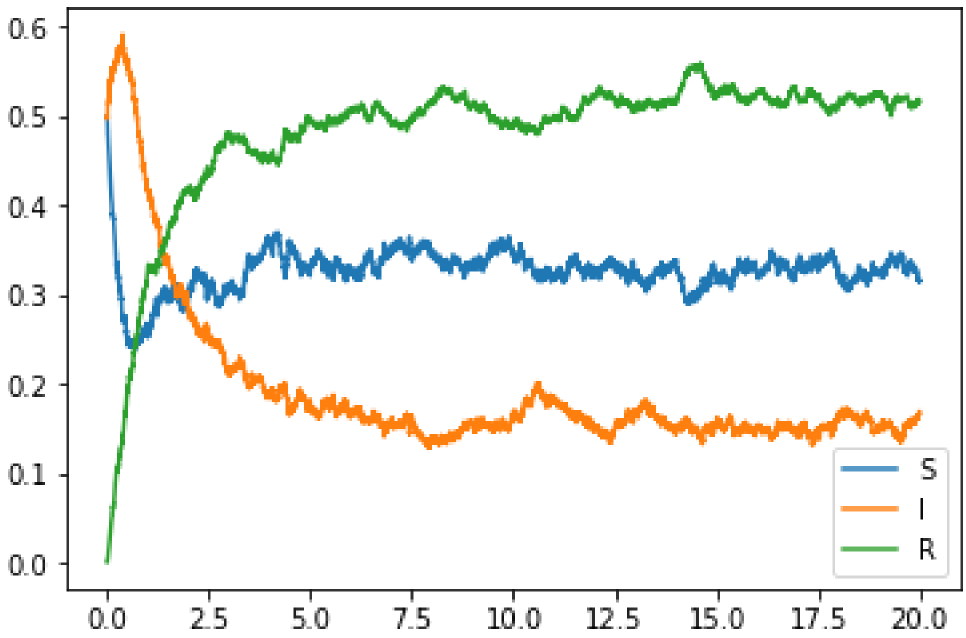
$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow I \;\; taux \;=\; 3x_0x_1 + \frac{x_0}{2} && (2.1)\\
I &\rightarrow R \;\; taux \;=\; x_1 && (2.2)\\
I + R &\rightarrow S \;\; taux \;=\; 2x_1x_2 && (2.3)
\end{aligned}
$$

On note $X = [x_1; x_2; x_3]$ les proportions de S I R :

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{population(S)}{population\ totale}\\
x_1 &= \frac{population(I)}{population\ totale}\\
x_2 &= \frac{population(R)}{population\ totale}
\end{aligned}
$$

On simule cet exemple de la façon suivante avec le simulateur codé précédemment avec comme condition initiale $X_0 = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right]$

```
liste_transitions = [ array(l) for l in [ [-1.,+1.,0.], [0.,-1.,1.],
[2.,-1.,-1.] ] ]

def taux ( i, x):
    if i==0:
        return 3*x[0]*x[1]+0.5*x[0]
    elif i==1:
        return x[1]
    else:
        return 2*x[1]*x[2]

labels=["S","I","R"]
X=array([0.5,0.5,0.])

simu_cmtc(taux,liste_transitions,X,1000,20,"data.out",1234)

data=file_to_array("data.out",3)

for i in range(3):
    plot(data[0],data[1][:,i], label=labels[i])

legend()
show()
```

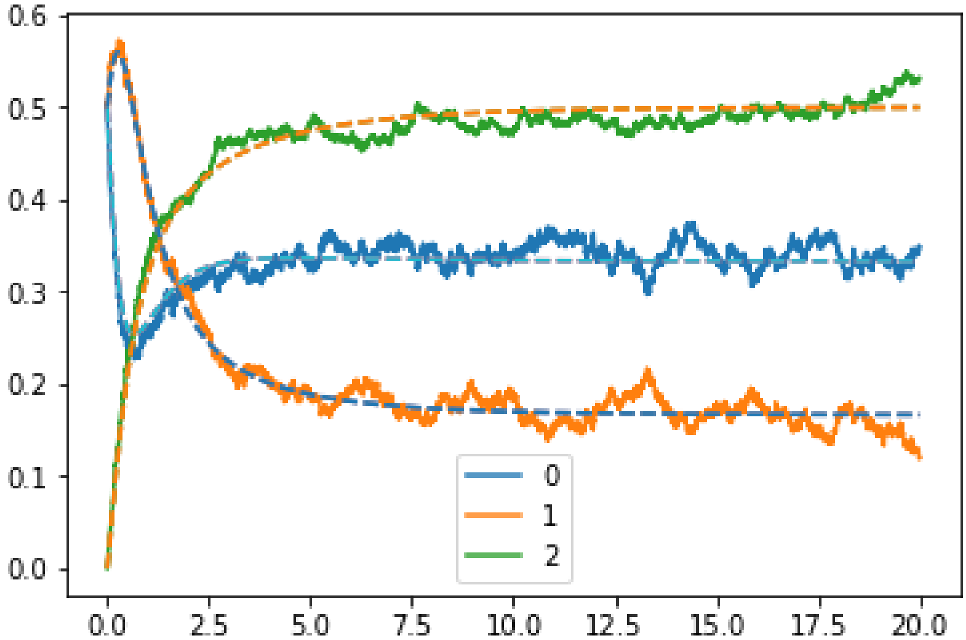


On obtient bien un résultat qui paraît cohérent au premier coup d'œil. Pour vérifier cette simulation on résout l'équation différentielle qui régit ce système :

$$\dot{x} = f(x)$$

La bibliothèque contient une fonction $print\_simu$ qui nous permet de tracer sur la même courbe la simulation et la solution théorique du système. Avec les quelques lignes de code suivantes on obtient :

```
print_simu(taux, liste_transitions ,X,1000,20)
```



On a donc la confirmation que pour ce système la simulation est cohérente avec le résultat théorique. (L'ordre de grandeur et le signe sont équivalents).

2.2 Calcul du coefficient en $1/N$

2.2.1 Par simulation

Pour calculer le coefficient en 1/N, on fait la moyenne des points fixes obtenus lors de n simulations, à laquelle on soustrait le point fixe calculé théoriquement : $C = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^{(N)})}{n} - X_0$

Pour calculer le point fixe par simulation on fait une moyenne sur le dernier tiers des termes d'une simulation longue (assez longue pour qu'on atteigne largement le point fixe).

Remarque Le choix de la longueur de la simulation pour qu'on atteigne largement le point fixe est purement arbitraire.

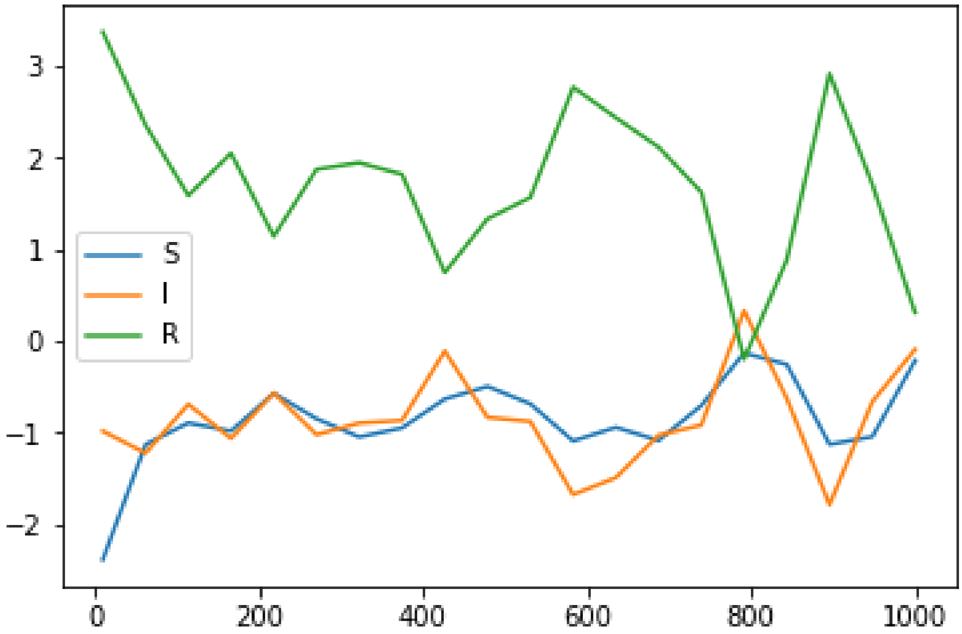
Mais le résultat de C ne correspond pas ! Un autre terme d'erreur en $O(\frac{1}{N})$ est apparu lors du calcul des points fixes par simulation. La moyenne calculée des termes de la simulation ne prend pas en compte le temps entre chaque transition d'où ce terme en $O(\frac{1}{N})$.

Pour y remédier on calcule une moyenne pondérée par le temps entre chaque transition.

Afin de valider ce modèle, on lance le calcul du coefficient sur un grand nombre de simulations et pour des valeurs différentes de N. On trace sur la courbe ci-dessous la moyenne de 100 simulations par point pour atténuer les perturbations dûes à l'aléatoire. Pour chaque simulation le coefficient doit être identique.

```
N=linspace(10,1000,20)
diff=array([[0. for i in N] for j in range(3)])
C_i=array([[0. for i in N] for j in range(3)])
X_0=fixed_point(taux,liste_transitions,3)

for n in range(len(N)):
  for j in range(100):
    data=simu_cmtc(taux,liste_transitions,X,N[n],50)
      for i in range(3):
      diff[i,n]+=(moy_pond(data,int(len(data[1])/2),
                   len(data[1]),i)-X_0[i])/100.
  for i in range(3):
    C_i[i,n]=N[n]*diff[i,n]

for i in range(3):
  plot(N,C_i[i,:])
legend(('S','I','R'))
show()
```

On obtient alors :



On observe un bruit important pour les grandes valeurs de N, ce qui est sûrement dû aux erreurs de calcul sur les réels avec `python3`. On observe donc $x_s = -1$ $x_I = -1$ $x_R = 2$ avec un bruit important pour 100 simulations par point. Le temps de calcul pour ce résultat est d'environ 40 minutes (avec un code non optimisé).

2.2.2 Validation à l'aide du calcul théorique de ce coefficient

On a montré que le coefficient d'erreur en $\frac{1}{N}$ vaut exactement :

$$D_i = \frac{1}{2} * \sum_j ((A^{-1})_{i,j} * \sum_{k_1,k_2} (B_j)_{k_1,k_2} W_{k_1,k_2})$$

Avec :

- $A_{i,j} = Df(x^*)_{i,j}$
- $(B_j)_{k,l} =$
- W est la solution de l'équation de Lyapunov suivante : $AX + XA^T + Q = 0$
- $Q = \sum_{l \in L} Q_l$
- $(Q_l)_{n,m} = -l_n l_m \beta_l(x^*)$

L'implémentation de ce calcul est réalisée à l'aide du module de calcul symbolique de `python3` (Annexe A).

Cette fonction nous permet donc de calculer le coefficient de manière théorique. Mais les systèmes étudiés ont souvent cette équation de vérifié :

$$\sum_{x \in X} x = 1$$

Le système SIR par exemple vérifie $x_S + x_I + x_R = 1$. On étudie alors n systèmes de dimention 2 et non 3. Il faut donc le préciser à l'entrée de la fonction : $n = 3$ *et* $dim = 2$.

```
theorique(taux , liste_transitions ,3 ,2)
```

On obtient : $D_S = -0.75000000000000111,\ D_I = -0.96428571428571352$ ce qui correspond bien aux valeurs calculées par simulation. On peut en déduire $D_R = 1 - D_S - D_I$. Ce calcul n'a pris que quelques secondes à calculer, comparé aux 40 minutes du résultat approximatif des simulations.

Pour un exemple simple comme le système SIR, on a déjà des problèmes de temps de calcul par simulation. La formule précédente facilite donc grandement le calcul du coefficient en 1/N.

Chapitre 3

Résultats expérimentaux

3.1 Modèle d'infection SIR

L'exemple est détaillé dans le chapitre précédent. Il permet de valider pour cet exemple simple le modèle étudié.

3.2 Bianchi's formula

On s'interésse ici à un modèle [3] pour le protocole 802.11 MAC. On le modélise à l'aide d'une chaine de Markov. On obtient la CMTC aux transitions suivantes :

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow x + e_0 - e_k \; avec \; un \; taux \; q_k x_k \prod_{m=0}^{K} (1 - \frac{q_m}{N})^{Nx_m - e_k} \; for \; k \in \{1...K-1\} \\
x &\rightarrow x + e_{k+1} - e_k \; avec \; un \; taux \; q_k x_k (1 - \prod_{m=0}^{K} (1 - \frac{q_m}{N})^{Nx_m - e_k}) \; for \; k \in \{1...K-1\} \\
x &\rightarrow x + e_0 - e_K \; avec \; un \; taux \; q_K x_K
\end{aligned}$$

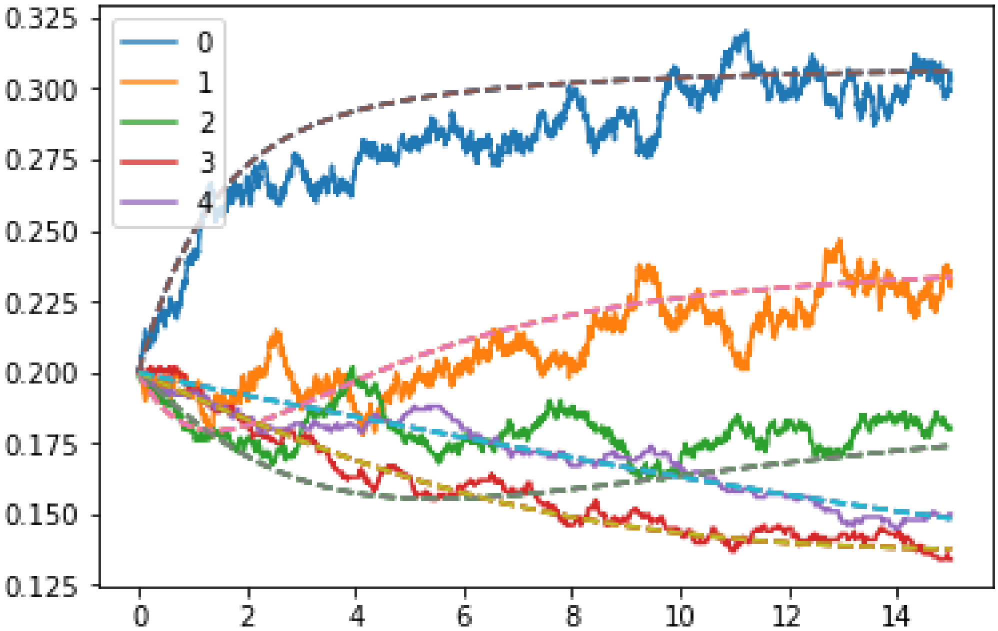
On entre alors le système de la manière suivante dans notre simulateur :

```
N=100
K=5
Var_x=array([sym.symbols('x_{}'.format(i)) for i in range(K)])
#Var_q=array([sym.symbols('q_{}'.format(i)) for i in range(K)])
Var_q=array([2**(-i) for i in range(K)])

def mult_liste(Liste):
    S=1
    for i in Liste:
        S*=i
    return(S)

E=[array([1 if i==j else 0 for j in range(K)]) for i in range(K)]

liste_transitions =[]
taux=[]

liste_transitions.append(E[1]-E[0])
taux.append(Var_q[0]*Var_x[0]*
(1-mult_liste([(1-Var_q[m]/N)**(N*Var_x[m]-(0 if m!=0 else 1))
                                        for m in range(K)])))

for i in range(1,K-1):
    liste_transitions.append(E[0]-E[i])
    taux.append(Var_q[i]*Var_x[i]*
    mult_liste([(1-Var_q[m]/N)**(N*Var_x[m]-(0 if m!=i else 1))
                                        for m in range(K)]))
    liste_transitions.append(E[i+1]-E[i])
    taux.append(Var_q[i]*Var_x[i]*
    (1-mult_liste([(1-Var_q[m]/N)**(N*Var_x[m]-(0 if m!=i else 1))
                                        for m in range(K)])))

liste_transitions.append(E[0]-E[K-1])
taux.append(Var_q[K-1]*Var_x[K-1])

def fct_taux(i,X):
    return sym.lambdify( Var_x,taux[i])(*X)
```

Puis on entre les conditions initiales et on trace le tout :

```
X=[1/K for i in range(K)]
print_simu(fct_taux,liste_transitions,X,1000,15)
```

On obtient la figure suivante :



Le tracé suit bien la solution de l'équation différentielle qui régit le système. Un simple tracé comme celui-ci met déjà quelques minutes à se faire. Le calcul du coefficient recherché en 1/N est trop long à calculer avec des simulations. Car il nous faudrait un grand nombre de simulations pour obtenir un résultat exploitable.

```
theorique(fct_taux ,liste_transitions ,5 ,4)
```

Le calcul à l'aide de la formule se fait en quelques minutes et on obtient : $D_0 = -0.038851395750410606,\ D_1$ $0.075038237961333909,\ D_2 = 0.0371707741481473424,\ D_3 = -0.016174636251891139$

Ce système converge donc rapidement car les coefficients sont de l'ordre de 10^{-2}.

3.3 Vélo'v

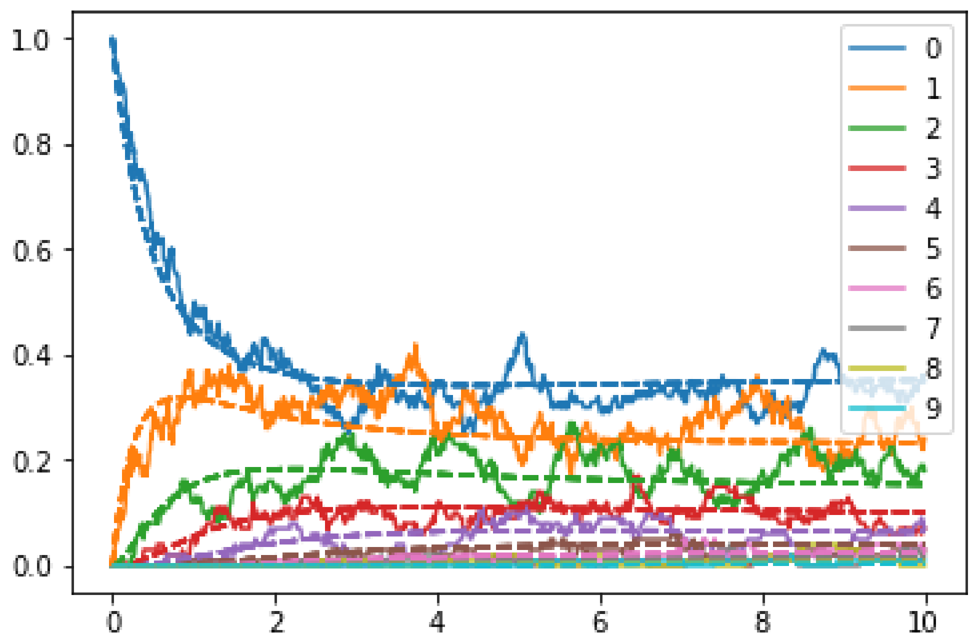
La répartition et l'évolution du nombre de vélos par station de Vélo'v peut facilement se modéliser avec une chaîne de Markov. On peut utiliser un tel modèle décrit dans de document : [1] pour optimiser le nombre de vélos par station par exemple. On entre cette CMTC de la manière suivante dans le simulateur :

```
K=10
N=20
s=3
Lambda=1
Mu=0.5

y=array([sym.symbols('y_{}'.format(i)) for i in range(K)])
E=[array([1 if i==j else 0 for j in range(K)]) for i in range(K)]
liste_transition=[]
taux=[]

for i in range(K-1):
    liste_transition.append(E[i+1]-E[i])
    taux.append(Mu*y[i]*(s-sum([n*y[n] for n in range(K)])))

for i in range(1,K):
    liste_transition.append(E[i-1]-E[i])
    taux.append(Lambda*y[i])

def fct_taux(i,X):
    return(sym.lambdify(y,taux[i])(*X))
```

Il ne nous reste plus qu'à choisir une distribution initiale et à tracer l'évolution.

```
X=[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
print_simu(fct_taux,liste_transition,X,100,10)
```

On obtient alors la courbe suivante :



```
X=[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
theorique(fct_taux, liste_transition ,K,K-1)
```

On obtient alors :
$D_0 = -0.10292176084411847$,
$D_1 = 0.039044474621688807$,
$D_2 = 0.064763975313775535$,
$D_3 = 0.048762058614485009$,
$D_4 = 0.023866044952782651$,
$D_5 = 0.0026126914878858844$,
$D_6 = -0.01170356394907981$,
$D_7 = -0.019540234122908881$,
$D_8 = -0.022526472856673283$

On obtient un coefficient de l'ordre du centième, ce qui est relativement faible. Le système converge donc très rapidement.

Chapitre 4

Organisation du stage

4.1 Projet GitHub

Le travail effectué pendant la durée du stage est contenu dans un projet GitHub[6] contenant :

4.1.1 Bibliothèque `python3`

L'ensemble du code est rassemblé dans une bibliothèque `python3` qui contient les fonctions suivantes dont l'utilisation est détaillée précédemment :

- $simu\_ctmc(fct\_taux, liste\_transition, X_0, N, temps\_final,'mon\_fichier.out', fix\_seed)$ simule notre CMTC.
- $file\_to\_array('mon\_fichier.out', len(X))$ permet de récupérer les données que l'on a précédemment stockées dans un fichier.
- $fixed\_point(taux, liste\_transition, n)$ renvoie un vecteur des points fixes du système calculé à l'aide de la `odeint` de `python3`.
- $theorique(taux, liste_transition, n, dim)$ calcule le coefficient d'erreur en $1/N$ de manière théorique.

4.1.2 Notebook d'exemples

Ce fichier `ipython` contient les exemples étudiés pendant le stage et peut donc servir de notice pour l'utilisation du simulateur et des autres fonctions de calcul.

4.2 Outils utilisés

4.2.1 Ubuntu 17.04

Le travail a été effectué sous la version 17.04 d'Ubuntu. Les commandes d'installation fournies ci-dessous fonctionnent avec un système Debiane à jour.

4.2.2 Org-mode dans emacs

Au cours de ce stage j'ai découvert org, un modude que l'on peut greffer à emacs, qui sert à écrire un journal de bord de manière simple et propre. Cet outil permet entre autre de générer un pdf propre du journal de bord, d'y lier des fichiers, des réferences… Cet outil est très riche et permet donc un suivi du travail efficace.

```
sudo apt-get install emacs25 org-mode ess r-base auctex
```

4.2.3 Jupyter-notebook

Le notebook Jupyter est une façon simple et lisible de coder en `python3` à l'aide des fichiers `ipython` qui sont de la programmation littérale. Cet outil permet d'exécuter des parties de code rapidement et indépendemment des autres. Ainsi que de glisser des commentaires de façon propre et rapide. Le fichier `ipython` conserve aussi les sorties renvoyées par le code comme les graphiques et autres.

```
sudo apt-get install jupiter-notebook ipython3 ipython3-notebook
```

4.2.4 Bibliothèque `python3`

Dans le code écrit, j'utilise les fonctions suivantes de `python3` :

```python
from random import random, seed, expovariate
from pylab import array
from numpy import linspace, zeros
from matplotlib.pyplot import *
import sympy as sym
from scipy.integrate import odeint
from scipy.linalg import solve_lyapunov
from numpy.linalg import inv
```

Il est alors nécessaire de les installer précédemment pour pouvoir utiliser la bibliothèque.

```
sudo apt-get install python3-random python3-pylab python3-numpy
python3-matplotlib python3-sympy python3-scipy
```

Conclusion

Au cours de ce stage nous avons codé une bibliothèque générique `python3` qui nous a permi d'une part à valider certains résultats étudiés au cours de ce stage et d'autre part à montrer que le calcul de la constante D_i, nous permetant d'optimiser les systèmes étudiés et à mieux les comprendre, est laborieux par simulation. Alors que ce calcul peut s'effectuer de manière plus rapide, pour les exemples étudiés, à l'aide du théorème provenant des travaux de Nicolas Gast. Les outils développés au cours de ce stage ont été conçus pour être génériques et faciles d'utilisations. Pouvant ainsi être réutilisés sans trop de difficultés pour des recherches futures.

Annexe A

Bibliothèque python3

```
from random import random,seed,expovariate
from pylab import array
from numpy import linspace,zeros
from matplotlib.pyplot import *
import sympy as sym
from scipy.integrate import odeint
from scipy.linalg import solve_lyapunov
from numpy.linalg import inv


def simu_cmtc(taux,L,X,N,time,file="",fix=-1):
    n=len(X)
    nb_trans=len(L)
    t=0

    if fix!=-1:
        seed(fix)

    if file!="":
        data=open(file,"w")
    else:
        data=[[0],[X]]

    while t<time:
        a=random()

        L_poids=array([taux(i,X) for i in range(nb_trans)])
        S=sum(L_poids)

        cumul=0
        for i in range(nb_trans):
            tmp=cumul + L_poids[i]/S
            if a < tmp:
```

```
                l=i
                break
            cumul=tmp

        X = X+(1./N)*L[l]
        if max(L_poids)==0:
            break

        expo=expovariate(N*S)
        t+=expo

        if file=="":
            data[0].append(t)
            data[1].append(X[:])
        else:
            data.write(str(t)+" ")

            for i in range(n):
                data.write(str(X[i])+" ")
            data.write('\n')

    if file=="":
        data[1] = array(data[1])
        return(data)
    else:
        data.close()
        return(0)


def file_to_array(file,n):
    fichier=open(file,"r")
    texte=fichier.read()

    tmp=texte.split( )
    tmp=[tmp[i].split(' ',1) for i in range(len(tmp))]
    data=[[],[]]
    for i in range(int(len(tmp)/(n+1))):
        data[0].append(float(tmp[i*(n+1)][0]))
        data[1].append([float(x[0]) for x in tmp[i*(n+1)+1:i*(n+1)+n+1]])
    data[1]=array(data[1])
    return(data)



def fixed_point(taux,liste_transitions,n):
    number_transitions = len(liste_transitions)
```

```
    def drift(x):
        return (sum([liste_transitions[i]*taux(i,x)
                         for i in range(number_transitions)],0))

    X0 = zeros(n)
    X0[0] = 1
    t = linspace(0,1000,1000)
    x = odeint( lambda x,t : drift(x), X0, t)
    #figure()
    #plot(x)
    #show()
    return(x[-1,:])


def theorique(taux,liste_transitions,n,dim):
    number_transitions = len(liste_transitions)
    X_0 = fixed_point(taux,liste_transitions,n)

    Var=array([sym.symbols('x_{}'.format(i)) for i in range(n)])

    #print(len(X_0))
    f_x=array([0 for i in range(n)])
    for i in range(number_transitions):
        f_x = f_x + liste_transitions[i]*taux(i,Var)

    if dim==n-1:
        for i in range(n):
            f_x[i]=f_x[i].subs(Var[-1],1-sum(array([Var[i]
                                              for i in range(n-1)]))))

    A=array([[sym.lambdify(Var ,sym.diff(f_x[i],Var[j]))(*[X_0[k]
                for k in range(n)])
              for j in range(dim)]
             for i in range(dim)])

    B=array([[[[sym.lambdify(Var,sym.diff(f_x[j],Var[k],Var[l]))
(*[X_0[i] for i in range(n)])
               for l in range(dim)]
              for k in range(dim)]
             for j in range(dim)])

    Q=array([[0. for i in range(dim)] for j in range(dim)])

    for l in range(number_transitions):
        Q += array([[liste_transitions[l][p]*liste_transitions[l][m]
*taux(l,X_0)
```

```
                        for m in range(dim)]
                      for p in range(dim)])



    W = solve_lyapunov(A,Q)

    A_inv=inv(A)

    C=[ 0.5*sum([A_inv[i][j]*sum(array([[B[j][k_1][k_2]*W[k_1][k_2]
                                                   for k_2 in range(dim)]
                                                 for k_1 in range(dim)]))
                  for j in range(dim)])
       for i in range(dim)]
    for i in range(len(C)):
        C[i]=sum(C[i])
    return(C)

def print_simu(taux, liste_transition ,X,N,time, fix=-1):
    data=simu_cmtc(taux, liste_transition ,X,N,time,"",fix)
    K=len(X)
    for i in range(K):
        plot(data[0],data[1][:,i],label=str(i))
    def drift(x):
        return (sum([liste_transition[i]*taux(i,x)
                        for i in range(len(liste_transition))],0))

    t = linspace(0,time,1000)

    for i in range(K):
        x = odeint( lambda x,t : drift(x), X, t)
        plot(t,x,'--')
    legend()
    show()
```

Bibliographie

[1] Nicolas Gast Christine Fricker. Incentives and redistribution in homogeneous bike-sharing systems with stations of finite capacity. 2014.

[2] Hervé Guiol. Processus aléatoires. 2015/2016.

[3] Y. Jiang J.-w. Cho, J.-Y. Le Boudec. On the asymptotic validity of the decoupling assumption for analyzing 802.11 mac protocol. *IEEE Transactions on Information Theory 58.11*, 2012.

[4] Thomas G Kurtz. Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump markov processes. 1970.

[5] Benny Van Houdt Nicolas Gast. A refined mean field approximation.

[6] Emmanuel Rodriguez. Random system simulation and calculs . *https ://github.com/manurod/Random-system-simulation-and-calculs*, 2017-09-07.