Tarea 1 - Modelos lineales

Sebastian Alzate Vargas, 502200289

01/28/2021

Problem 1

Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = xe^{-x^2}$, $x > 0$. Encuentre la varianza de X.

Solución

La varianza se define:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

ahora hallemos cada una de esas esperanzas

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot xe^{-x^2}dx$$

integrando por partes con $w = x$ y $du = xe^{-x^2}dx$ tenemos, $dw = dx$ y $u = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$.Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \left(-\frac{1}{2}xe^{-x^2}\right)_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot xe^{-x^2}dx$$

sea $u = -x^2$ entonces $du = -2xdx$ lo que es equivalente $-\frac{du}{2} = xdx$. Así

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\infty} -ue^u \cdot \frac{-du}{2x} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} ue^u du$$

integrando por partes con $w = u$ y $dv = e^u du$ tenemos: $dw = du$ y $v = e^u$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} ue^u du &= \left(\frac{1}{2}ue^u\right)_0^{\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^u du \\
&= \left(\frac{-1}{2}x^2e^{-x^2}\right)_0^{\infty} - \left(\frac{1}{2}e^u\right)_0^{\infty} \\
&= 0 - \left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)_0^{\infty} \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

por último tenemos que,

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16} = \frac{8-\pi}{16} \approx 0.3035$$

Problem 2

Sea $X \sim U[0,1]$ y $Y|X = x \sim U[0,x]$, $0 < y < 1$. Encuentre la covarianza de X y Y.

Solución

La covarianza se define de la siguiente manera,

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Primero hallemos las funciones de distribución.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 k_1 dx = k_1 \Rightarrow k_1 = 1 \\
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)dy = \int_0^x k_2 dy = k_2 x \Rightarrow k_2 = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Ahora hallemos cada uno de los valores esperados de la variable X

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Valores esparados de la variable Y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X = x) &= \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy = \int_0^x y\frac{1}{x}dy = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^x = \frac{x}{2} \\
\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X = x)) &= \mathbb{E}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

por último

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) = \mathbb{E}(X \cdot \mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}\left(X \cdot \frac{X}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Así,

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

Problem 3

Tenemos una muestra $X_1, .., X_n$ que son *iid* $U[0, \theta]$:

0.005, 0.126, 0.582, 0.778, 1.109, 2.495, 2.610, 4.595, 7.926, 8.594

a. Encuentre el mle de θ

b. Pruebe a nivel del 5 si $H_0 : \theta = 10$ vs $H_a : \theta > 10$ usando un test basado en mle.

Solución

a. Como cada variable $X_i \sim U[0, \theta]$, tenemos $f(X_i|\theta) = \dfrac{1}{\theta}$, $i = 1, \cdots, n$. Asi, el m.l.e de θ es:

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= f(X_1, \cdots, X_n|\theta) \\
&= f(X_1|\theta)\cdot f(X_2|\theta)\cdots f(X_n|\theta) \\
&= \frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{\theta}\cdots\frac{1}{\theta} \\
&= \frac{1}{\theta^n}
\end{aligned}$$

La función $L(\theta) = \dfrac{1}{\theta^n}$ es monotona decreciente y la derivada de $L(\theta)$ con respecto a θ es diferente de cero para todo n. De lo cual podemos inferir que $L(\theta)$ es máximo cuando θ disminuye. Entonces el m.l.e de θ es $max(X_1, \cdots, X_n)$. \ \

b. Sea $\alpha = \mathbb{P}(H_0 \; rechazada | H_0 \; verdadera)$.

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_a)} = \frac{\frac{1}{(\theta_0)^n}}{\frac{1}{(max(X_1, \cdots, X_n))^n}} = \left(\frac{max(X_1, \cdots, X_n)}{\theta_0}\right)^n$$

Para la region de rechazo tenemos que:

$$\left(\frac{max(X_1, \cdots, X_n)}{\theta_0}\right)^n < R$$

lo que es equivalente a trabajar

$$\frac{max(X_1, \cdots, X_n)}{\theta_0} < R$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}(H_0 \ rechazada | H_0 \ verdadera) \\
\alpha &= \mathbb{P}\left(\frac{max(X_1,\cdots,X_n)}{\theta_0} < R \mid \theta_0\right) \\
\alpha &= \mathbb{P}\left(max(X_1,\cdots,X_n) < R\theta_0 \mid \theta_0\right) \\
\alpha &= \mathbb{P}(X_1 < R\theta_0, X_2 < R\theta_0, \cdots, X_n < R\theta_0 \mid \theta_0) \\
\alpha &= \mathbb{P}(X_1 < R\theta_0 \mid \theta_0)^n \\
\alpha &= \underbrace{\left[\frac{1}{\theta_0} + \cdots + \frac{1}{\theta_0}\right]^n}_{R\theta_0 - 1 \text{ veces}} \\
\alpha &= \left[\frac{R\theta_0 - 1}{\theta_0}\right]^n \\
\alpha^{\frac{1}{n}} &= \frac{R\theta_0 - 1}{\theta_0}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\theta_0 \alpha^{\frac{1}{n}} + 1}{\theta_0} \\
R &= \frac{(10) \cdot 0.05^{\frac{1}{10}} + 1}{10} \\
R &= 0.84
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\frac{max(X_1,\cdots,X_n)}{10} = \frac{8.594}{10} = 0.8594
$$

Asi, $\dfrac{max(X_1,\cdots,X_n)}{\theta_0} > R$, por lo cual H_0 no se rechaza.