Tarea 5 ET

Sebastian Alzate Vargas

Febrero 25/2021

Problema 1

Tenemos una observación de una variable aleatoria $f(x|\theta)$ donde $\theta \in \{1, 2, 3\}$.

x	$f(x\|1)$	$f(x\|2)$	$f(x\|3)$
0	1/3	1/4	0
1	1/3	1/4	0
2	0	1/4	1/4
3	1/6	1/4	1/2
4	1/6	0	1/4

Encuentre el mle de θ

Solución 1

Consideremos la siguiente función:

$$1_{\theta=i}(\theta) = \begin{cases} 1 & si \quad \theta = i \\ 0 & si \quad \theta \neq i \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= L(x_0, ..., x_4|\theta) \\
&= f(x_0|\theta) \times ... \times f(x_4|\theta) \\
&= \prod_{i=0}^{4} \left(f(x_i|\theta) 1_{\theta=1}(\theta) + f(x_i|\theta) 1_{\theta=2}(\theta) + f(x_i|\theta) 1_{\theta=3}(\theta) \right)
\end{aligned}
$$

entonces $L(\theta)$ se maximiza cuando cada uno de esos factores toma sus mayores valores. Podemos proceder en cada caso

Cuando $x = 0$, $\max L(\theta|x) = 1/3$ que es en $f(0|1)$, entonces el mle es $\theta = 1$

Cuando $x = 1$, $\max L(\theta|x) = 1/3$ que es en $f(1|1)$, entonces el mle es $\theta = 1$

Cuando $x = 2$, $\max L(\theta|x) = 1/4$ que es en $f(2|2) = f(2|3)$, entonces el mle es $\theta = 2$ ó 3

Cuando $x = 3$, $\max L(\theta|x) = 1/2$ que es en $f(3|3)$, entonces el mle es $\theta = 3$

Cuando $x = 4$, $\max L(\theta|x) = 1/4$ que es en $f(4|3)$, entonces el mle es $\theta = 3$

Problema 2

Tenemos una muestra de tamaño n de un vector aleatorio con distribución:

donde $\alpha > 1$ y $\beta > 0$

$$
P(X < x|\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & \text{if } 0 < x < \beta \\ 1 & \text{if } x > \beta \end{cases}
$$

a. Si conocemos a β, cuál es el mle de α?

Para los puntos b-e, supongamos que conocemos a α

b. Cuál es el mle β?
c. el mle de β es un estadistico suficiente?
d. el mle de β es insesgado?
e. el mle de β es consistente?
f. muestre que la cota inferior de Rao-Cramer para β no se cumple.

Solución a

Tenemos que la función de distribución esta dada por:

$$F_X(x|\alpha,\beta) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \quad \text{para} \;\; 0 < x < \beta$$

Para encontrar la función de densidad podemos derivar la función anterior

$$\begin{aligned}
f_X(x|\alpha,\beta) &= \frac{d}{dx} F_X(x|\alpha,\beta) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \\
&= \alpha \cdot \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$

Ahora, encontremos la funcion likelihood para el parametro α

$$L(\alpha) = \prod f_X(\boldsymbol{x}|\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}$$

la función $\ln L(\alpha)$ esta dada por:

$$\begin{aligned}
\ln L(\alpha) &= \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} \\
&= \ln \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} \\
&= n \ln \frac{\alpha}{\beta} + \ln \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} \\
&= n\ln(\alpha) - n\ln(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} \\
&= n\ln(\alpha) - n\ln(\beta) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) \\
&= n\ln(\alpha) - n\ln(\beta) + (\alpha-1)\left[\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln(\beta)\right]
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a α para encontrar el máximo, obtemos

$$\frac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln(\beta)$$

igualando a cero

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln(\beta) \\
\hat{\alpha} &= \frac{n}{n\ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} \\
\hat{\alpha} &= \frac{n}{n\ln(\beta) - n\overline{\overline{\ln(X)}}} \\
\hat{\alpha} &= \frac{1}{\ln(\beta) - \overline{\overline{\ln(X)}}}
\end{aligned}
$$

Solución b

Tenemos que la función de densidad es igual a: $\frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1}$

Así, la función likelihood para el parámetro β es:

$$
L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x_i^{\alpha-1} = \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}
$$

No podemos encontrar el máximo con su derivada, con respecto a β. Es claro que $L(\beta)$ es una función decreciente ya que $0 < x_i < \beta$, entonces se maximiza al seleccionar β tan pequeño como sea posible, es decir, tiene que ser lo más cercano a una de esas observaciones. Entonces:

$$
\hat{\beta} = \max\{x_1, ..., x_n\} = x_{[n]}
$$

Solución c

Tenemos que

$$
L(\beta) = \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}
$$

Sin perdida de generalidad, supongamos que $x_j = x_{[n]}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
L(\beta) &= \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} \\
&= \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}} \cdot x_j^{\alpha-1} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

Si $g\left(x_{[n]}|\beta\right) = \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}} \cdot x_j^{\alpha-1}$, y $h(\boldsymbol{x}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i^{\alpha-1}$. Entonces,

$$
L(\beta) = g\left(x_{[n]}|\beta\right) \cdot h(\boldsymbol{x})
$$

Asi, $x_{[n]}$ es suficiente para β.

Solución d

Primero hallemos la función de distribución de $X_{[n]}$

$$\begin{aligned}
F_{X_{[n]}}(x) &= P(X_{[n]} \leq x) \\
&= P(\max\{X_1, \cdots, X_n\} \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \\
&= \left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{n} \\
&= \left(\frac{x}{\beta}\right)^{n\alpha}
\end{aligned}$$

Entonces, podemos derivar para encontrar su función de distribución

$$\begin{aligned}
f_{X_{[n]}}(x) &= \frac{d}{dx}\left[F_{X_{[n]}}(x)\right] \\
&= n\alpha\left(\frac{x}{\beta}\right)^{n\alpha-1} \cdot \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}} x^{n\alpha-1}
\end{aligned}$$

Asi, su valor esperado es igual a:

$$\begin{aligned}
E(X_{[n]}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_{[n]}}(x)dx \\
&= \int_{0}^{\beta} x \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}} x^{n\alpha-1}dx \\
&= \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}}\left[\frac{x^{n\alpha+1}}{n\alpha+1}\right]\Big|_0^{\beta} \\
&= \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}}\left[\frac{\beta^{n\alpha+1}}{n\alpha+1}\right] \\
&= \frac{n\alpha}{n\alpha+1}\beta
\end{aligned}$$

Entonces, $X_{[n]}$ no es insesgado.

Solución e

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left(|X_{[n]} - \beta| \leq \epsilon\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} P\left(\beta - \epsilon \leq X_{[n]} \leq \beta + \epsilon\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \left(F_{X_{[n]}}(\beta+\epsilon) - F_{X_{[n]}}(\beta-\epsilon)\right) \\
=& \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{n\alpha}\right) \\
=& 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{n\alpha} \\
=& 1 - 0 \text{ , pues } 0 < x < \beta \\
=& 1
\end{aligned}$$

Entonces, $X_{[n]}$ es consistente.

Solución f

Hallemos la varianza de $X_{[n]}$.

$$\begin{aligned}
E[X_{[n]}^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_{[n]}}(x)dx \\
&= \int_0^{\beta} x^2 \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}} x^{n\alpha-1}dx \\
&= \int_0^{\beta} \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}} x^{n\alpha+1}dx \\
&= \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}} \left[\frac{x^{n\alpha+2}}{n\alpha+2}\right]_0^{\beta} \\
&= \frac{n\alpha}{\beta^{n\alpha}} \left[\frac{\beta^{n\alpha+2}}{n\alpha+2}\right] \\
&= \frac{n\alpha}{n\alpha+2}\beta^2
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
var(X_{[n]}) &= E[X_{[n]}^2] - E[X_{[n]}]^2 \\
&= \frac{n\alpha}{n\alpha+2}\beta^2 - \left(\frac{n\alpha}{n\alpha+1}\beta\right)^2 \\
&= \left(\frac{n\alpha}{n\alpha+2} - \left(\frac{n\alpha}{n\alpha+1}\right)^2\right)\beta^2
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\beta}E\left[X_{[n]}\right] &= \frac{d}{d\beta}\left[\frac{n\alpha}{n\alpha+1}\beta\right] \\
&= \frac{n\alpha}{n\alpha+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\beta) &= E\left(\left(\frac{d}{d\beta}ln(\alpha x^{\alpha-1}\beta^{-\alpha})\right)^2\right) \\
&= E\left(\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
var(X_{[n]}) &\geq \frac{\left(\frac{d}{d\beta}E\left[X_{[n]}\right]\right)^2}{nI(\beta)} \\
\left(\frac{n\alpha}{n\alpha+2} - \left(\frac{n\alpha}{n\alpha+1}\right)^2\right)\beta^2 &\geq \frac{\left(\frac{n\alpha}{n\alpha+1}\right)^2}{n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}
\end{aligned}$$

Sean $n = 1, \alpha = 2, \beta = 1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{6} - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) &\geq \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{1}\right)^2} \\ \left(\frac{2}{75}\right) &\geq \frac{2}{25} \\ 25 &\geq 75\end{aligned}$$

Lo cual es imposible. Por tanto, la desigualdad de Rao-Cramer para β no se cumple