École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

presentée par

Sebastian Bartling

Sur la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine et les modèles entier des variétés de Shimura locales

---

dirigée par Laurent Fargues

Soutenue le ? ? mois 20 ? ? devant le jury composé de :

M. Laurent Fargues	Institut de mathématiques de Jussieu-PRG, CNRS	directeur
M. George Pappas	Michigan State University	rapporteur
M$^{\text{me}}$ Wieslawa Niziol	Université Pierre et Marie Curie	présidente (?)
M$^{\text{me}}$ Sophie Morel	ENS Lyon	rapporteure

Table des matières

Für Anna-Ruth Casper

Sebastian Bartling
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (IMJ-PRG)
4 place Jussieu,
Boite Courrier 247
75252 Paris Cedex 5
E-Mail : sebastian.bartling@imj-prg.fr

Résumé: Cette thèse se compose des trois chapitres; ils concernent deux thèmes différents mais reliés: la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine et les modèles entiers des variétés de Shimura locales. Dans le chapitre sur la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine, j'étudie la cohomologie étale des faisceaux constructibles sur la courbe de Fargues-Fontaine algébrique et adique. Dans le cas de $\ell \neq p$-torsion, je montre deux conjectures de Laurent Fargues: $\mathrm{cd}_\ell(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}) \leq 2$ et une comparaison entre la cohomologie étale de la courbe algébrique et adique. Dans le cas $\ell = p$, sous une hypothèse, je montre $H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0$ pour $i \geq 3$ et tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ des $\mathbb{F}_p$-modules sur le site étale de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.
Dans le deuxième chapitre j'étudie l'approche de Bültel-Pappas du problème de construire des espaces de Rapoport-Zink généralisés en utilisant des $\mathcal{G}$-μ-displays. Cette approche est limitée au cas maximal hyperspécial et il faut supposer qu'une condition sur les pentes est vérifiée. Je relie cette approche aux variétés de Shimura locales construites par Scholze. Les résultats principaux sont la représentabilité du diamant de la fibre générique du problème de modules de Bültel-Pappas par le diamant de la variété de Shimura locale. De plus, on construit des modèles entiers pour les tubes dans la variété de Shimura locale.
Dans le dernier chapitre je donne pour $d = 2$ une nouvelle preuve d'un résultat classique dû à Drinfeld de la représentabilité de l'espace de modules des $\mathcal{O}_D$-modules formels spécials par le schéma formel p-adique $\widehat{\Omega}^d_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$. Dans cette preuve, le display de l'objet universel est construit d'une façon explicite.

Abstract: This thesis consists of three chapters; they are concerned with two distinct, but not unrelated topics: the étale cohomology of the Fargues-Fontaine curve and integral models of local Shimura-varieties. In the chapter on the étale cohomology of the Fargues-Fontaine curve, I study constructible sheaves on both the adic and the algebraic Fargues-Fontaine curve. In the case of $\ell \neq p$-torsion sheaves, I verify two conjectures of Laurent Fargues: $\mathrm{cd}_\ell(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}) \leq 2$ and the existence of a comparison between the étale cohomology of the algebraic and the adic Fargues-Fontaine curve. In the case $\ell = p$, under a certain hypothesis, I show that $H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0$ for $i \geq 3$ and any constructible sheaf of $\mathbb{F}_p$-modules on the étale site of the $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.
In the next chapter I study the Bültel-Pappas approach via $\mathcal{G}$-μ- displays to generalized Rapoport-Zink spaces in the unramified, maximal hyperspecial case and under a certain condition on the slopes and relate it to Scholze's local Shimura-varieties. For this, adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays over integral perfectoid rings are compared with Breuil-Kisin-Fargues modules with $\mathcal{G}$-structure. As an application, I show that the diamond of the generic fiber of the Bültel-Pappas moduli problem is representable by the diamond of the local Shimura-variety with maximal hyperspecial level structure and construct canonical integral models of the tubes in the local Shimura-variety.
In the last chapter, I give in the case $d = 2$ an alternative proof of Drinfeld's classical result exhibiting the p-adic formal scheme $\widehat{\Omega}^d_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ as a solution of a moduli problem of p-divisible groups. For this, the display of the universal object is explicitely constructed.

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse consiste en trois chapitres avec deux thèmes différents et j'ai ainsi décidé d'écrire deux introductions différentes. Je commence par l'introduction du chapitre sur la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine ; après j'explique ce que j'ai fait dans le chapitre sur les variétés de Shimura locales.
On fixe un nombre premier p.

1. La cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine

1.1. Motivation - ou comment trouver la courbe de Fargues-Fontaine ? [1] Soit E un corps local non-archimédien, avec corps résiduel de caractéristique p, à $q = p^a$ éléments. Les deux possibilités se présentent :

- E est une extension finie du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, ou
- $E \simeq \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ est un corps des séries de Laurent en une uniformisante choisie π.

On se propose de trouver un objet géométrique X - avec une géométrie suffisamment riche - tel que la catégorie des systèmes locaux des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur X s'identifie à la catégorie des représentations continues du groupe profini $G_E = \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E)$ sur des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules finis, discrets. De plus, on exige que cette correspondance entre des systèmes locaux de torsion sur X et des représentations du groupe G_E identifie la cohomologie sur les deux côtés.
On suppose pour un moment que l'on est dans le cas où $\mathrm{car}(E) = 0$ - sinon, on ne devrait considérer que des G_E-représentations sur des modules qui sont de torsion premier à p.[2] Soient ainsi M un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module fini et $\rho\colon G_E \to \mathrm{GL}(M)$ une action continue donnée. On peut alors considérer la représentation M comme un objet dans le topos des faisceaux sur le site étale de $\mathrm{Spec}(E)$, i.e. $M \in (\widetilde{\mathrm{Spec}(E)})_{\text{ét}}$. La théorie de la cohomologie galoisienne dit

$$H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(E), M) = 0, \tag{1}$$

pour $i \geq 3$. De plus, on a un théorème de dualité dû à Tate-Nakayama : soit $M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le dual de Pontrayagin et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1) = \mathrm{colim}_n\, \mu_n$ le twist de Tate, où $\mu_n \in (\widetilde{\mathrm{Spec}(E)})_{\text{ét}}$ est le faisceau étale des unités n-ièmes. Alors on a

$$H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{2}$$

et le cup-produit induit un accouplement parfait entre groupes finis abéliens

$$H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(E), M) \times H^{2-i}_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(E), M^*(1)) \to H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{3}$$

L'espace X devrait alors avoir 2 comme dimension cohomologique - au moins en ce qui concerne les systèmes locaux - et satisfaire une version de la dualité de Poincaré avec décalage cohomologique 2. Cela fait fortement penser à une surface de Riemann compacte !
Comment peut-on trouver une telle 'surface' ? On a déjà utilisé ci-dessus un objet géométrique qui a trivialement les bonnes propriétés cohomologiques : $\mathrm{Spec}(E)$. Néanmoins, la dimension de Krull de l'espace $\mathrm{Spec}(E)$ est 0 est il est assez difficile de se convaincre qu'un point 'est' une surface de Riemann compacte. De plus, on veut que l'espace X ait une géométrie suffisamment riche pour que la catégorie des fibrés vectoriels soit intéressante. Il faut donc élargir un peu cet espace sans changer son groupe fondamental.

[1] Cette partie est fortement inspirée par l'exposé de Scholze sur la courbe donné dans le cadre de son cours sur la géometrisation de la correspondance de Langlands locale. Néanmoins, il n'utilise pas le lemme de Drinfeld pour la motivation.

[2] Dans le cas $\mathrm{car}(E) = p > 0$, il résulte d'Artin-Schreier que l'on a $\mathrm{cd}_p(E) \leq 1$.

Un espace dont le groupe fondamental est trivial est bien sûr $\mathrm{Spec}(F)$, où F est un corps algébriquement clos, et on veut alors jouer avec une expression comme

$$\ll \mathrm{Spec}(E) \times \mathrm{Spec}(F) \gg .$$

Ici on est confronté (au moins) à les deux difficultés majeures :

- Sur quelle base veut-on prendre le produit fibré ?
- Le groupe fondamental change, si on passe à un produit fibré.[3]

Il se trouve qu'il est plus facile de surmonter ces difficultés si on suppose $\mathrm{car}(E) = p > 0$. Dans ce cas là, on peut supposer que F est aussi une extension du corps $\mathbb{F}_q$ et on peut juste prendre le produit fibré au-dessus $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Pour surmonter la deuxième difficulté aussi, on va jouer avec la magie noire du Frobenius : Drinfeld a observé il y a longtemps, que le groupe fondamental des variétés sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ commute aux produits une fois que l'on ajoute un Frobenius 'partiel'. De manière précise (ici je donne la version très générale de l'énoncé de Drinfeld dû à Scholze [**SW20**, Lemma 16.2.6.]) :
Soit F une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_q$ et φ_F le Frobenius de la puissance q-ème du corps F. Soit X un schéma qcqs sur $\mathbb{F}_q$. L'objectif est de comparer $(X)_{\text{fét}}$ et $(X_F)_{\text{fét}}$. Comme la catégorie $(X_F)_{\text{fét}}$ est trop grande, il faut la diminuer un peu ; l'idée brillante de Drinfeld était ainsi de considérer la catégorie suivante :

$$(X_F/(\mathrm{id}_X \times \varphi_F))_{\text{fét}}.$$

Les objets de cette catégorie sont des paires (Y, β), où $Y \to X_F$ est fini étale et

$$\beta\colon Y \simeq (\mathrm{id}_X \times \varphi_F)^* Y$$

est un isomorphisme ; les morphismes sont définis de la façon évidente.

Théorème 1.1. (Drinfeld)
Soit X un schéma qcqs sur $\mathbb{F}_q$ et F une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_q$, alors le changement de base induit une équivalence des catégories

$$(X)_{\text{fét}} \simeq (X_F/(\mathrm{id}_X \times \varphi_F))_{\text{fét}}.$$

À la fin, ce théorème est une conséquence du petit fait suivant : si V est un espace vectoriel de dimension finie sur F et $\varphi_V \colon V \to V$ est un morphisme φ_F-semilinéaire, avec linéarisation bijective, alors $V^{\varphi_V = 1}$ est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de la même dimension que V.
On doit ainsi considérer un objet comme

$$\ll \mathrm{Spec}(E) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}(F)/(\mathrm{id}_F \times \varphi_F)^{\mathbb{Z}} \gg .$$

Malheureusement, ce n'est toujours pas le bon objet : si on forme ce produit fibré dans le monde algébrique, on tombe sur l'expression

$$\mathbb{F}_q(\!(\pi)\!) \otimes_{\mathbb{F}_q} F$$

divisé par le Frobenius.
Sans passer à une complétion il est difficile de donner un bon sens à cet objet. De plus, il n'est pas clair qu'on puisse donner un sens au quotient sans être obligé de considérer les champs. Ce qui sauve la situation est le passage au monde de la géométrie analytique, non-archimédienne, où le produit des deux points - comme $\mathrm{Spa}(E)$ et $\mathrm{Spa}(F)$ - peut être pas quasi-compact !
Soit ainsi F un corps algébriquement clos, complet pour une valeur absolue non-archimédienne, non-triviale, extension du corps $\mathbb{F}_q$. Par le lemme de Krasner l'exemple minimal pour un tel corps F est $\widehat{\overline{\mathbb{F}_q(\!(u)\!)}}$. Le produit

$$\mathrm{Spa}(E, \mathcal{O}_E) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(F, \mathcal{O}_F) \tag{4}$$

existe ainsi comme espace adique au sens de Huber. On peut décrire cet espace effectivement de la façon suivante : Soit $\mathcal{O}_E \simeq \mathbb{F}_q[\![\pi]\!]$ l'anneau des entiers du corps E et on fait le choix d'un élément $\varpi \in F$, tel que $0 < |\varpi|_F < 1$. Un tel élément s'appelle une 'pseudo-uniformisante'. De plus, soit $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers du corps F. Ensuite, on a

$$\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_E) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_F) \simeq \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_F[\![\pi]\!]),$$

[3]Pour un exemple concret on peut considérer $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}$, F une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Alors on a $\mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}), \mathbb{F}_q) = H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_F), \mathbb{F}_q) = H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_F, \mathbb{F}_q)$. Ces deux groupes ne sont pas isomorphes d'après la suite exacte d'Artin-Schreier.

où l'anneau $\mathcal{O}_F[\![\pi]\!]$ porte la topologie $(\pi,\, \varpi)$-adique. Sur le produit (4) qu'on veut calculer, les fonctions π et ϖ sont inversibles, et il faut les inverser sur $\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_F[\![\pi]\!])$ aussi. On tombe ainsi finalement sur l'expression

$$\mathrm{Spa}(E) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(F) = \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_F[\![\pi]\!]) - V(\pi \cdot \varpi),$$

qui est un objet très bien connu dans la géométrie rigide classique : la boule ouverte, épointée sur $\mathrm{Spa}(F)$. Maintenant on est content : cette boule ouverte, épointée est bien de dimension 1 et l'action du groupe $(\mathrm{id}_E \times \varphi_F)^{\mathbb{Z}}$ sur cet espace est proprement discontinue. Finalement, on peut donner un sens à l'espace

$$\ll \mathrm{Spa}(E) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(F)/(\mathrm{id}_F \times \varphi_F)^{\mathbb{Z}} \gg .$$

Il reste à trouver le bon analogue dans le cas $\mathrm{car}(E) = 0$. Dans la géométrie arithmétique il est bien connue qu'en caractéristiques mixtes, il faut remplacer l'anneau des séries formelles par l'anneau des vecteurs de Witt d'une $\mathbb{F}_p$-algèbre parfaite. Par conséquence, il est très naturel de considérer l'espace suivant :

$$\ll (\mathrm{Spa}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) - V(\pi \cdot [\varpi]))/\varphi^{\mathbb{Z}} \gg,$$

où $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est l'anneau des vecteurs de Witt ramifiés de $\mathcal{O}_F$ et $\varphi\colon W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est le Frobenius des vecteurs de Witt ramifiés. Cet espace s'appelle la courbe de Fargues-Fontaine adique.
Le comportement des systèmes locaux sur la courbe de Fargues-Fontaine est ainsi inscrit dans leur construction même et le but du premier chapitre de ma thèse est d'approfondir notre compréhension de la cohomologie étale de cette courbe en considérant aussi les faisceaux constructibles.

1.2. La courbe adique. J'introduis maintenant sérieusement la courbe adique.
L'anneau des vecteurs de Witt ramifiés de $\mathcal{O}_F$ est défini de la façon suivante :

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W(\mathcal{O}_F) \otimes_{W(\mathbb{F}_q)} \mathcal{O}_E.$$

C'est un anneau topologique, complet pour la topologie $(\pi, [\varpi])$-adique ; de fait, il est l'unique (à unique isomorphisme près) $\mathcal{O}_E$-algèbre, π-adique et sans π-torsion, qui relève la $\mathcal{O}_E$-algèbre $\mathcal{O}_F$. Un résultat de base dû à Fargues [**Far15**, Thm. 2.1.] (avec une autre preuve donné par Kedlaya dans [**Ked16**]) dans la théorie dit que l'espace pré-adique

$$Y_{E,F} = \mathrm{Spa}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) - V(\pi \cdot [\varpi])$$

est bien un espace adique (i.e. le pré-faisceau structurel est un faisceau) ; c'est un résultat non-trivial parce que la théorie des espaces adiques souffre du problème fondamental que le pré-faisceau structurel n'est pas toujours un faisceau. La preuve utilise un fait qui sera également très important plus tard : si E_∞ est une extension perfectoïde du corps p-adique E, alors l'espace

$$Y_{E,F} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(E_\infty) =: Y_{E_\infty,F}$$

est perfectoïde et son basculement est donné par :[4]

$$\mathrm{Spa}(E_\infty^\flat) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(F).$$

Scholze a démontré dans sa thèse [**Sch12**] que le pré-faisceau structurel d'un espace perfectoïde est un faisceau. On peut en déduire - après un peu de travail - le résultat cherché : l'idée est d'utiliser un peu d'analyse fonctionnelle p-adique afin de démontrer que l'application naturelle

$$\mathcal{O}_{Y_{E,F}} \to \mathcal{O}_{Y_{E_\infty,F}}$$

est une injection scindée.
On pense à $Y_{E,F}$ comme à un analogue de la boule unité ouverte épointée 'sur F' [5] en caractéristique-mixte. L'importance fondamentale de cet objet vient du fait que cet espace est l'espace de modules des débasculements sur E du corps F ([**FS21**, Prop. II.1.18]).[6] C'est un espace de Stein non-quasi-compact. Plus précisément,

$$Y_{E,F} = \bigcup_{I \subset (0,1) \text{ compact}} \mathrm{Spa}(B_I, B_I^\circ),$$

[4] Si par exemple $E_\infty^\flat \simeq \mathbb{F}_q(\!(t^{1/p^\infty})\!)$ c'est la perfection de la boule ouverte épointée sur F; un objet plus ou moins classique. Le jeu est souvent de passer à un recouvrement perfectoïde de la courbe et appliquer le basculement - ce qui ne change pas la cohomologie étale - pour simplifier la situation.

[5] Cela n'a pas de sens à strictement parler ; mais si on se permet de passer au diamant associé, on trouve bien un objet qui vit sur $\mathrm{Spa}(F)$, c.f. [**FS21**, Prop. II.1.17].

[6] Cela explique aussi pourquoi cet objet ne pourrait jamais être de type fini sur $\mathrm{Spa}(E)$.

où B_I est 'l'anneau des fonctions holomorphes sur la couronne de rayon I' : plus précisément, on considère

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi]}] = \{ \sum_{n>>-\infty}^{\infty} [x_n]\pi^n \mid x_n \in F, \sup_n |x_n|_F < \infty\}$$

et pour $f = \sum_{n>>-\infty}^{\infty} [x_n]\pi^n \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi]}], \rho \in (0,1)$, on définit la norme de Gauss par la formule suivante :

(5) $$||f||_\rho = \sup_n |x_n|_F \cdot \rho^n.$$

L'anneau topologique B_I est défini comme la complétion de E-Fréchet de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi]}]$ pour la famille des normes de Gauss $\{||.||_\rho\}_{\rho\in I}$. D'après les résultats de Fargues-Fontaine [**FF18**], Kedlaya [**Ked16**], ou - d'un point de vue nouveau - Fargues-Scholze [**FS21**], les B_I sont des E-algèbres de Banach qui sont des anneaux principaux.
Afin de rendre l'espace $Y_{E,F}$ compact par quotient, on considère l'automorphisme de Frobenius

$$\varphi\colon W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F),$$

qui induit une action proprement discontinue du groupe discret $\varphi^{\mathbb{Z}}$ sur l'espace $Y_{E,F}$. Par conséquence, on peut passer au quotient et considérer l'espace adique

$$X^{\mathrm{ad}}_{E,F} = Y_{E,F}/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

Comme évoqué précédemment, c'est la courbe adique de Fargues-Fontaine associée à E et F. Cette courbe veut vraiment être considérée comme une 'courbe propre et lisse sur $\mathrm{Spa}(F)$,' mais cela n'a aucun sens a priori. [7] De plus, on est toujours confronté au problème que l'espace adique $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ n'est pas de type fini sur $\mathrm{Spa}(E)$. Néanmoins, il vérifie des propriétés de finitude 'absolues' assez fortes : d'après un résultat de Kedlaya l'espace $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est fortement noethérien ([**Ked16**, Thm. 4.10]) : en tout cas, on peut bien travailler avec cet objet !

1.3. La courbe algébrique. Comme toute surface de Riemann compacte admet une algébrisation, la courbe adique $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ en admet aussi une : l'idée est de trouver un fibré en droites ample sur $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$, ce qui va donner directement une algébrisation possible. Comme les fibrés en droites sur $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ sont équivalents à des fibrés en droites φ-équivariants sur $Y_{E,F}$, on peut simplement définir le fibré en droites $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}}(1)$ en prenant $\mathcal{O}_{Y_{E,F}}$ sur $Y_{E,F}$ dont la structure φ-équivariante est donnée par $\varphi(f) = \pi^{-1}f$. D'après le résultat de Kedlaya-Liu [**FS21**, Thm. II.2.6], c'est bien un fibré en droites 'ample' et avec un peu de courage on peut donc considérer le schéma suivant :

$$X^{\mathrm{alg}}_{E,F} = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} H^0(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}}(1)^{\otimes n})).$$

Un des résultats principaux du livre ([**FF18**]) de Fargues-Fontaine est ainsi que c'est un E-schéma noethérien, régulier de dimension 1, les corps résiduels des points fermés sont algébriquement clos et leur basculement s'identifie canoniquement à F, ([**FF18**, Thm. 6.5.2]) ; de plus, ils donnent une classification précise des fibrés vectoriels sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$([**FF18**, Thm. 8.2.10.]). Le lien entre la courbe adique et sa version algébrique est le suivant : on peut construire un morphisme d'espaces localement annelés

$$X^{\mathrm{ad}}_{E,F} \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F},$$

qui induit une bijection entre les points fermés $|X^{\mathrm{alg}}_{E,F}|$ et les points classiques $|X^{\mathrm{ad}}_{E,F}|^{\mathrm{cl}}$ et une équivalence de GAGA entre les catégories des fibrés vectoriels (c.f. [**FS21**, Prop. II.2.7.]).

1.4. Le diamant $(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})^\diamond$. Je discute maintenant la perspective des diamants sur la courbe de Fargues-Fontaine.
On considère $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$, la catégorie des espaces perfectoïdes de caractéristique p. Soit $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$, on appelle débasculement de l'espace S une paire $(S^\sharp, \iota)$, où $S^\sharp$ est un espace perfectoïde et $\iota\colon S^{\sharp\flat} \simeq S$. Comme a priori il y a beaucoup des débasculements d'un espace perfectoïd donné, il est mieux de passer à une classe d'équivalence : on déclare que $(S^\sharp, \iota) \sim (S^{\sharp\prime}, \iota')$, s'il existe un isomorphisme $f\colon S^\sharp \simeq S^{\sharp\prime}$, tel que $f^\flat$ rend commutatif le diagramme évident.

[7] On peut en donner un sens approximatif en passant aux diamants : $(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})^\diamond$ n'a pas un morphisme structurel vers $\mathrm{Spa}(F)$, mais son cousin $\mathrm{Div}^1_{E,F}$, qui vérifie $((X^{\mathrm{ad}}_{E,F})^\diamond)_{\text{ét}} \simeq (\mathrm{Div}^1_{E,F})_{\text{ét}}$, a un tel morphisme structurel et $\mathrm{Div}^1_{E,F} \to \mathrm{Spa}(F)$ est un morphisme des diamants propre-ℓ-cohomologiquement lisse.

Soit T un espace adique analytique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p)$. Le diamant associé à l'espace adique analytique T est le faisceau pro-étale donné par

$$T^\diamondsuit \colon \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens},$$

$$T^\diamondsuit(S) = \{(S^\sharp, \iota, f) \mid f \colon S^\sharp \to T\}/\sim .$$

Un diamant admet beaucoup plus de structures que juste celle d'un faisceau pro-étale : c'est l'analogue d'un espace algébrique dans le monde perfectoïde. Scholze a développé la théorie des diamants et leur cohomologie étale dans le manuscrit immense [**Sch22**]. Il y a (au moins) deux raisons pour lesquelles cette théorie des diamants est très importante pour le problème de la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine :

(a) : En passant au diamant d'un espace adique analytique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p)$, on garde toutes les informations topologiques ; par exemple la cohomologie étale ne change pas.

(b) : Les diamants $Y_{E,F}^\diamondsuit$ resp. $(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamondsuit$ admettent des présentations très sympathiques.

Je vais expliquer (b) d'une façon plus détaillée : d'abord, on a la formule suivante pour le diamant de l'espace $Y_{E,F}$

$$Y_{E,F}^\diamondsuit = \mathrm{Spd}(E) \times \mathrm{Spa}(F), \tag{6}$$

où $\mathrm{Spd}(E) := \mathrm{Spa}(E)^\diamondsuit$. Cela donne un sens précis au produit absolu

$$\ll \mathrm{Spa}(E) \times \mathrm{Spa}(F) \gg,$$

que l'on a essayé de construire au début de l'introduction. On en déduit la formule

$$(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamondsuit = (\mathrm{Spd}(E) \times \mathrm{Spa}(F))/(\mathrm{id}_E \times \varphi_F)^{\mathbb{Z}}.$$

Une autre présentation de ce diamant, qui sera importante pour le calcul de la cohomologie étale de la courbe, est la suivante :
Soit $E(\mu_{p^\infty})$ l'extension cyclotomique infinie de E, construite en ajoutant à E toutes les racines p-ème de l'unité dans une clôture algébrique de E choisie ; c'est une extension galoisienne infinie. Le caractère cyclotomique identifie le groupe $\mathrm{Gal}(E(\mu_{p^\infty})/E)$ à un sous-groupe ouvert de $\mathbb{Z}_p^*$. Il en résulte un isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(E(\mu_{p^\infty})/E) \simeq \mathbb{Z}_p \times \Delta,$$

où Δ est un groupe fini. Soit $E_\infty = (E(\mu_{p^\infty}))^\Delta$; une extension de Galois infinie de E avec groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}_p$: cette extension s'appelle la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E. La complétion p-adique $\widehat{E_\infty}$ est un corps perfectoïde. Par conséquence, on peut lui appliquer la théorie du corps des normes de Fontaine-Wintenberger [**FW79**] : soit $\mathrm{FW}_E(E_\infty)$ le corps des normes associé ; c'est un corps de valuation discrète de caractéristique p, dont le corps résiduel est isomorphe à celui de E_∞ (et, comme E_∞ est une colimite des extensions totalement ramifiées de E, c'est juste $\mathbb{F}_q$). En particulier, on en déduit un isomorphisme non-canonique entre $\mathrm{FW}_E(E_\infty)$ et $\mathbb{F}_q(\!(t)\!)$. De plus, la théorie du corps des normes dit que le basculement $(\widehat{E_\infty})^\flat$ s'identifie à la perfection complétée de $\mathrm{FW}_E(E_\infty)$, c.f. [**EG21**, Thm. 2.1.6] ; on en déduit que $(\widehat{E_\infty})^\flat$ est non-canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}_q(\!(t^{1/p^\infty})\!)$. Finalement, on trouve la présentation du diamant cherchée :[8]

$$(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamondsuit \simeq (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})/\underline{\mathbb{Z}_p}.$$

Ici le choix de la variable t sur la boule unité ouverte épointée $\mathbb{B}_F^{1,\circ,*}$ sur $\mathrm{Spa}(F)$ correspond au choix d'un isomorphisme $(\widehat{E_\infty})^\flat \simeq \mathbb{F}_q(\!(t^{1/p^\infty})\!)$.

[8] De fait, ce diamant est le quotient de l'espace perfectoïde $(X_{\widehat{E}_\infty,F}^{\mathrm{ad}})^\flat$ par la relation d'équivalence pro-étale donnée par l'action de $\mathbb{Z}_p \simeq \mathrm{Gal}(E_\infty, E) \simeq \mathrm{Gal}(\widehat{E}_\infty/E)$. Car $\widehat{E}_\infty^\flat \simeq \mathbb{F}_q(\!(t^{1/p^\infty})\!)$,

$$(X_{\widehat{E}_\infty,F}^{\mathrm{ad}})^\flat = (\mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty^\flat) \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spa}(F)/\varphi_F^{\mathbb{Z}}),$$

ce qui explique bien l'isomorphisme.

1.5. La cohomologie étale des systèmes locaux. Dans l'article [**Far20a**] Fargues a commencé l'étude de la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine. Il se concentre surtout sur des systèmes locaux et trouve un lien assez intéressant avec la théorie du corps de classes locale de E. Je vais maintenant expliquer ses résultats.
Le début est le calcul crucial du groupe de Brauer de la courbe algébrique :

THÉORÈME 1.2. (Fargues, [**Far20a**, Thm. 2.2]) On a

$$\mathrm{Br}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}) = 0.$$

La preuve est intéressante parce que la théorie du corps de classes apparait d'une façon inattendue : soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$; l'objectif est de tuer $[\mathcal{A}] \in \mathrm{Br}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$. En utilisant le formalisme des filtrations de Harder-Narasimhan, on se réduit au cas où le fibré vectoriel sous-jacent de l'algèbre $\mathcal{A}$ est semi-stable de pente 0. Par la classification des fibrés vectoriels, on sait que la classe $[\mathcal{A}]$ est dans l'image de l'application

$$\mathrm{Br}(E) \to \mathrm{Br}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}).$$

Cette application est de fait constante à la valeur 0 : par la théorie du corps de classes $\mathrm{Br}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et si $1/n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $D_{1/n}$ est une algèbre centrale simple sur E dont l'invariant de Brauer est $1/n \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a

$$D_{1/n} \otimes_E \mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}} \simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}}(\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(1/n)).$$

En utilisant, $\mathrm{Pic}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}) \simeq \mathbb{Z}$, le résultat de Fargues ci-dessus et la suite exacte de Kummer, on trouve

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{E},F}^{\mathrm{alg}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0, \tag{7}$$

pour $i \in \{1, 2\}$ et $X_{\overline{E},F}^{\mathrm{alg}} = X_{E,F}^{\mathrm{alg}} \times_{\mathrm{Spec}(E)} \mathrm{Spec}(\overline{E})$; ce qui implique, en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre,

$$H^i_{\text{ét}}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^i(\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \tag{8}$$

pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Néanmoins, on ne sait pas encore si l'annulation $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{E},F}^{\mathrm{alg}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, pour $i \geq 3$ est vraie ![9] Ici la situation est meilleure pour la courbe adique : d'après le résultat de Fargues-Scholze [**FS21**, Prop. III.2.12.], on peut démontrer cette annulation pour la courbe adique et en déduire un isomorphisme

$$R\Gamma_{\text{ét}}(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq R\Gamma(\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Comme je pense que l'explication de ce fait est instructive je vais la donner dans le cas où $n = p$: le changement de base $X_{\overline{E},F}^{\mathrm{ad}} := X_{E,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{\overline{E}})$ est un espace perfectoïde et il suffit par la suite spectrale de Hochschild-Serre de démontrer qu'on a

$$H^i((X_{\overline{E},F}^{\mathrm{ad}})^\flat, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i > 0$. Soit $K = \mathbb{F}_q(\!(t)\!)$ et $X_{K,F}^{\mathrm{ad}}$ la courbe de Hartl-Pink (=Fargues-Fontaine en caractéristique p). On a donc $(X_{\overline{E},F}^{\mathrm{ad}})^\flat = X_{K,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(K)} \mathrm{Spa}(\widehat{\overline{K}})$. En utilisant que F est par hypothèse algébriquement clos et la courbe est qcqs, on trouve que les groupes de cohomologie $H^i(X_{K,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(K)} \mathrm{Spa}(\widehat{\overline{K}}), \mathcal{O})$ s'annulent pour $i > 0$ (c.f. [**HP04**, Prop. 3.3.]). La suite exacte d'Artin-Schreier implique ainsi

$$H^i(X_{K,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(K)} \mathrm{Spa}(\widehat{\overline{K}}), \mathbb{F}_p) = 0$$

pour $i > 1$. En degré $i = 1$ ce groupe de cohomologie est simplement $\mathrm{Coker}(\mathrm{Frob} - 1 \colon \overline{K} \to \overline{K}) = 0$. Cela prend soin du cas des coefficients constants et on considère maintenant des système locaux :
Je rappelle que la classification des fibrés vectoriels sur la courbe (adique ou algébrique ; par GAGA c'est pareil) implique une équivalence

$$(\mathrm{Spec}(E))_{\text{fét}} \simeq (X_{E,F}^{\mathrm{alg}})_{\text{fét}}$$

([**FF18**, Thm. 8.6.1.]). Autrement dit : tout système local en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules $\mathcal{L}$ sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ vient de la base $\mathrm{Spec}(E)$. Par l'équivalence de GAGA, l'énoncé analogue reste vrai pour la courbe adique. Cette équivalence identifie les complexes de cohomologies :

$$R\Gamma_{\text{ét}}(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{L}) \simeq R\Gamma(\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E), M),$$

[9] Dans le cas où $n = \ell \neq p$ on va démontrer cette annulation dans ce chapitre.

où $M \in \widetilde{\mathrm{Spec}(E)}_{\text{ét}}$ est la représentation de $\mathrm{Gal}(E^{\text{sep}}/E)$ qui correspond à $\mathcal{L}$.
Par conséquence, on peut constater que a courbe adique $X^{\text{ad}}_{E,F}$ satisfait tous les desiderata qu'on a formulés au début de cette introduction.
Comme une autre illustration de ces idées, j'aimerais donner pour des $\mathbb{F}_\ell$-systèmes locaux une preuve purement géométrique de la dualité de Tate-Nakayama en utilisant le diamant $\mathrm{Div}^1_{E,F}$[10] - considéré la première fois par Fargues dans l'article [**Far20b**], où il démontre sa conjecture de géométrisation pour $\mathbb{G}_m$ - et toute la machinerie de Scholze développée dans [**Sch22**].

Proposition 1.3. Soit $\mathcal{L}$ un $\mathbb{F}_\ell$-système local sur $X^{\text{ad}}_{E,F}$. L'accouplement naturel

$$R\Gamma(X^{\text{ad}}_{E,F},\, \mathcal{L}) \times R\Gamma(X^{\text{ad}}_{E,F}, \mathbb{D}(\mathcal{L})) \to H^2(X^{\text{ad}}_{E,F},\, \mathbb{F}_\ell(1)) \simeq \mathbb{F}_\ell$$

est parfait, où

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) = R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathbb{F}_\ell(1)[2]).$$

Démonstration. Je vais simplement esquisser la preuve parce que ce résultat n'est pas utile par la suite.
On rappelle d'abord qu'il y a une équivalence entre les sites étales $(X^{\text{ad}}_{E,F})_{\text{ét}} \simeq (\mathrm{Div}^1_{E,F})_{\text{ét}}$ (c.f. la preuve de [**Far20b**, proposition 3.1] pour le cas 'absolu'). Il en résulte que le $\mathbb{F}_\ell$-système local $\mathcal{L}$ correspond à un unique $\mathbb{F}_\ell$-système local $\mathcal{G}$ sur le diamant $\mathrm{Div}^1_{E,F}$. Dans cette situation

$$R\Gamma(X^{\text{ad}}_{E,F},\, \mathcal{L}) \simeq R\Gamma(\mathrm{Div}^1_{E,F},\, \mathcal{G}).$$

Cette formule est une géométrisation du fait suivant : soit M un $\mathbb{F}_\ell$-module fini, équipé avec une action continue du groupe $\mathrm{Gal}(E^{\text{sep}}/E)$ et soit $\mathrm{W}_E \subset \mathrm{Gal}(E^{\text{sep}}/E)$ le groupe de Weil du corps E.
Alors on a[11]

$$H^i_{\text{cts}}(\mathrm{W}_E,\, M) \simeq H^i_{\text{cts}}(\mathrm{Gal}(E^{\text{sep}}/E),\, M).$$

On peut ainsi travailler avec le diamant $\mathrm{Div}^1_{E,F}$. L'avantage de cette réécriture est qu'il y a un bon sens à dire que $\mathrm{Div}^1_{E,F}$ est propre et lisse, de dimension 1 sur $\mathrm{Spa}(F)$: le morphisme structurel

$$f\colon\, \mathrm{Div}^1_{E,F} \to \mathrm{Spa}(F)$$

est un morphisme propre entre diamants, qui est ℓ-cohomologiquement lisse. En utilisant la présentation

$$\mathrm{Div}^1_{E,F} \simeq (\mathrm{BC}_F(\mathcal{O}(1)) - \{0\}\}/\underline{E^*},$$

[**Far20b**, Prop. 2.12.] et le résultat [**Sch22**, Prop. 24.2.], qui explique comment calculer le complexe dualisant sur un tel quotient, on trouve

$$Rf^!\mathbb{F}_\ell \simeq \mathbb{F}_\ell(1)[2].$$

Cette expression du complexe dualisant permet ainsi de conclure la preuve. ☐

Le cas des systèmes locaux compris on se tourne vers les faisceaux constructibles : l'étude de la cohomologie des faisceaux constructibles est le thème principal de ce chapitre.

1.6. Les résultats. Fargues a énoncé dans le même article ([**Far20a**]) deux conjectures sur le comportement des faisceaux constructibles sur la courbe. D'abord j'expliquerai ces conjectures :
Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $X^{\text{alg}}_{E,F}$. En utilisant le fait que l'espace adique $X^{\text{ad}}_{E,F}$ est fortement noethérien[12], on peut construire un morphisme entre les sites étales

$$u\colon\, (X^{\text{ad}}_{E,F})_{\text{ét}} \to (X^{\text{alg}}_{E,F})_{\text{ét}}.$$

La première conjecture de Fargues dit qu'on peut comparer la cohomologie étale de $\mathcal{F}^{\text{ad}} := u^*(\mathcal{F})$ à celle de $\mathcal{F}$, i.e.

Conjecture 1.4. (Fargues, [**Far20a**, Conjecture 3.11.]) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $X^{\text{alg}}_{E,F}$, alors on a pour tout $i \geq 0$,

$$H^i(X^{\text{alg}}_{E,F},\, \mathcal{F}) \simeq H^i(X^{\text{ad}}_{E,F},\, \mathcal{F}^{\text{ad}}).$$

La deuxième conjecture est une conjecture d'annulation :

[10] Pour le plaisir, je rappelle ici que la courbe de Fargues-Fontaine n'est pas comme n'importe quelle courbe classique : le problème de modules des diviseurs de Cartier effectifs relatifs de degré 1 n'est pas isomorphe à la courbe elle-même !

[11] On compare ici la cohomologie du groupe $\mathbb{Z}$ et $\widehat{\mathbb{Z}}$ sur des $\mathbb{F}_\ell$-modules finis.

[12] De fait, cela implique que je peux simplement citer des résultats de Huber directement !

Conjecture 1.5. (Fargues, [**Far20a**, Conjecture 3.9.]) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$, alors on a

$$H^i(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathcal{F}) = 0,$$

pour $i \geq 3$.

Voici mon résultat concernant ces conjectures :

Théorème 1.6. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$.

(a) : Si $n = \ell \neq p$, les deux conjectures sont vraies.

(b) : Si $n = p$, alors la conjecture de comparaison implique la conjecture d'annulation, si une hypothèse technique est vérifiée. Plus précisément, soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_p$-module étale constructible sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$, alors

$$H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0$$

pour $i \geq 3$, si une hypothèse technique est vérifiée.

Remarque 1. Soit U un ouvert algébrique dans $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$. Alors on suppose qu'on peut écrire

$$U^{\mathrm{ad}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

où $U_n \subset U^{\mathrm{ad}}$ sont des ouverts affinoïdes, tels que $U_n \subseteq U_{n+1}$, l'image de l'application de restriction res: $\mathcal{O}(U_{n+1}) \to \mathcal{O}(U_n)$ est dense et si E_∞ sur E est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E, les

$$U_n \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$$

sont affinoïdes perfectoïdes. J'appelle un tel espace adique un espace pré-perfectoïde Stein.[13] C'est l'hypothèse technique que je dois supposer malheureusement en ce moment, parce que je ne sais pas comment la démontrer. Le lecteur trouve dans la remarque 13 plus de détails sur cette hypothèse.

1.7. Plan de la preuve dans le cas $\ell \neq p$. L'idée de la preuve est de démontrer des résultats d'annulation pour la courbe algébrique et adique séparément et en déduire la conjecture de comparaison ci-dessus.

L'observation initiale est simplement qu'il n'est pas difficile (c.f. prop. 3.1) de démontrer qu'on a

$$\mathrm{cd}_\ell(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 2.$$

Comme évoqué avant, la cohomologie étale d'un espace adique analytique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p)$ ne change pas si on passe au diamant associé. Il faut ainsi déterminer la ℓ-dimension cohomologique du diamant spatial $(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\lozenge$. Ensuite on peut utiliser la présentation du diamant

$$(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\lozenge \simeq (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})/\underline{\mathbb{Z}_p},$$

qui est sympathique parce que le pro-p groupe $\mathbb{Z}_p$ ne contribue pas à la ℓ-dimension cohomologique (ici $\ell \neq p$ est crucial évidemment) et il faut simplement calculer

$$\mathrm{cd}_\ell(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}).$$

Ici on utilise soit des résultats de Berkovich soit de Scholze, pour borner la ℓ-dimension cohomologique des corps résiduels des points maximaux par 1 pour déduire la borne $\mathrm{cd}_\ell(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \leq 2$ cherchée.

En ce qui concerne la courbe algébrique, il faut démontrer

$$\mathrm{cd}_\ell(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}) \leq 2.$$

L'idée de la preuve donnée dans la proposition 3.5 est de démontrer $\mathrm{cd}_\ell(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})) \leq 1$, où $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$ est le corps de fonctions de la courbe algébrique. Cette borne sur la ℓ-dimension cohomologique du corps de fonctions est démontrée dans la proposition 3.2 et elle implique la borne cherchée - c'est une application soit de la pureté absolue, soit du fait que tous les corps résiduels des points fermés du schéma $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ sont algébriquement clos (ici on utilise par exemple l'hypothèse que F est algébriquement clos).

On note que même si on travaille sur la courbe algébrique ici et bien qu'on ne sache pas si la conjecture de comparaison est vraie, on va réduire l'annulation cherchée à l'énoncé suivant concernant la courbe adique : pour tous les points maximaux $x \in X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$, on a $\mathrm{cd}_\ell(\kappa(x)) \leq 1$.

[13] L'adjectif 'pré-perfectoïde' est là seulement pour une raison peu sympathique : on ne sait pas démontrer qu'un ouvert affinoïde dans un espace perfectoïde est affinoïde perfectoïde...

Pour contrôler la ℓ-dimension cohomologique du corps $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$ il se trouve qu'on doit contrôler la partie de ℓ-torsion dans le groupe de Brauer des revêtements ramifiés :

Définition 1. On appelle revêtement ramifié de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ une paire (X', π) où X' est un schéma noethérien, régulier de dimension 1 et $\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ est un morphisme fini, plat, qui est fini étale au-dessus d'un ouvert dense de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$.

Les revêtements ramifiés vont jouer un rôle important dans tout ce chapitre. On trouve ainsi facilement - en utilisant encore une fois la pureté absolue - que pour démontrer $\mathrm{cd}_\ell(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})) \leq 1$ il suffit de démontrer $\mathrm{Br}(X')[\ell] = 0$ pour tous les revêtements ramifiés.
Si

$$\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$$

est un revêtement ramifié, on peut en définir une adification $\pi^{\mathrm{ad}}\colon X'^{\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ et on démontre une équivalence de GAGA (proposition 2.2) :

$$\mathrm{Fib}(X') \simeq \mathrm{Fib}(X'^{\mathrm{ad}}).$$

De fait, parce que les morphismes π et π^{ad} sont tous les deux finis localement libres, il est possible de déduire cette équivalence de l'équivalence GAGA connue (c.f. [**FS21**, Prop. II.2.7.]). Par GAGA les algèbres d'Azumaya s'identifient sur X' et X'^{ad} et l'annulation $\mathrm{Br}(X')[\ell] = 0$ est donc équivalent à $\mathrm{Br}(X'^{\mathrm{ad}})[\ell] = 0$. On déduit (c.f. lemme 3.4) cet énoncé d'annulation du fait que

$$H^2_{\text{ét}}(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{G}_m)[\ell] = 0.$$

Cette égalité est finalement un corollaire de la borne suivante : pour tous les points maximaux $x \in X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$, on a $\mathrm{cd}_\ell(\kappa(x)) \leq 1$.
Maintenant j'explique comment on peut déduire de ces résultats d'annulation la conjecture de comparaison : dans un premier temps on utilise que tout faisceau constructible sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ admet une inclusion dans le poussé en avant d'un faisceau constant sur un revêtement ramifié (plus un petit facteur qui ne pose pas de problème), pour réduire la comparaison au cas des faisceaux constants sur des revêtements ramifiés (lemme 2.1). Soit $\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ un tel revêtement ramifié. D'après les résultats d'annulation que l'on vient d'expliquer, on a

$$H^i(X', \mathbb{F}_\ell) = H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_\ell) = 0,$$

pour $i \geq 3$. Il suffit alors d'identifier les groupes de cohomologie en degrés $i = 0, 1, 2$. Pour $i = 0, 1$ c'est un corollaire de l'équivalence de GAGA pour des revêtements ramifiés (c.f. la preuve de la proposition 2.15). Pour $i = 2$, l'idée est la suivante : si on savait que le groupe de Brauer cohomologique de l'espace adique X'^{ad} est isomorphe au groupe de Brauer défini en utilisant les algèbres d'Azumaya, on pourrait utiliser la suite exacte de Kummer et GAGA pour en déduire

$$H^2(X', \mu_\ell) \simeq H^2(X'^{\mathrm{ad}}, \mu_\ell^{\mathrm{ad}}).$$

Il faut ainsi démontrer que l'injection canonique

$$\mathrm{Br}(X'^{\mathrm{ad}}) \hookrightarrow H^2(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}} =: \mathrm{Br}'(X'^{\mathrm{ad}})$$

est un isomorphisme (lemme 2.10). On rappelle que l'on peut écrire l'espace adique $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ comme réunion de deux ouverts affinoïdes avec intersection affinoïde : on utilise l'écriture

$$X_{E,F}^{\mathrm{ad}} = Y_{[1,q]}/Y_{[1,1]} \sim Y_{[q,q]};$$

si on pose $\rho = (q-1)/2$, alors les deux affinoïdes sont $Y_{[1,\rho]}$ et $Y_{[\rho,q]}$ avec intersection $Y_{[\rho,\rho]}$. Comme le morphisme $\pi^{\mathrm{ad}}\colon X'^{\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ est fini, l'espace X'^{ad} est aussi la réunion des deux ouverts affinoïdes U, V dont l'intersection $U \cap V$ reste affinoïde.
Soit maintenant $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ un espace adique affinoïde fortement noethérien sur E. On observe (lemme 2.12) l'isomorphisme

$$\mathrm{Br}(\mathrm{Spa}(A, A^+)) \simeq \mathrm{Br}'(\mathrm{Spa}(A, A^+)).$$

Ici on utilise deux résultats difficiles : un résultat de comparaison pour la cohomologie étale pour des espaces affinoïdes fortement noethériens, démontré par Huber dans [**Hub96**], qui implique

$$H^2(\mathrm{Spec}(A), \mu_n) \simeq H^2(\mathrm{Spa}(A, A^+), \mu_n^{\mathrm{ad}})$$

et un résultat de Gabber [**Gab81**] qui identifie le groupe de Brauer au groupe de Brauer cohomologique pour tout schéma affine.

On considère ensuite une classe de cohomologie $c \in \mathrm{Br}'(X'^{\mathrm{ad}})$. D'après la dernière étape on sait que les restrictions $c \mid_U$ et $c \mid_V$ sont induites par des algèbres d'Azumaya. L'objectif est ainsi de recoller ces algèbres d'Azumaya ; parce qu'elles ne sont pas vraiment isomorphes sur l'intersection $U \cap V$ le recollement est un peu délicat. Pour cette étape, on utilise des faisceaux tordus, localement libres et on suit la résolution du problème analogue pour les schémas donné par Lieblich (c.f. [**Lie04**, section 2.2.3.]) dans sa thèse.

1.8. Plan de la preuve du résultat conditionnel dans le cas $\ell = p$. Dans le cas $\ell = p$, je n'arrive qu'à démontrer le résultat très faible Théorème 1.3, (b). J'explique la preuve (donnée dans la proposition 3.6) : d'abord on utilise la méthode de la trace pour ramener l'énoncé

$$H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0,$$

où $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{F}_p$-module constructible sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ et $i \geq 3$, à

$$H^i(X', j_!'^{\mathrm{ad}}(\mathbb{F}_p)) = 0,$$

où $i \geq 3$, $\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ est un revêtements ramifié de degré premier à p, normalisation d'un revêtement étale $V \to U \subseteq X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$. On note $j'\colon V \to X'$ et $i'\colon Z' \to X'$ l'inclusion du fermé complémentaire. Après passage au monde adique, on peut résumer la situation dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V^{\mathrm{ad}} \arrow[r, "j'^{\mathrm{ad}}"] \arrow[d, "\dot{\pi}^{\mathrm{ad}}"] & X'^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\pi^{\mathrm{ad}}"] & Z'^{\mathrm{ad}} \arrow[l, "i'^{\mathrm{ad}}"'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j^{\mathrm{ad}}"] & X_{E,F}^{\mathrm{ad}} & Z^{\mathrm{ad}}. \arrow[l, "i^{\mathrm{ad}}"'] \end{tikzcd}$$

Si l'hypothèse technique dans la remarque 6 est vérifiée, l'ouvert adique U^{ad} serait un espace pré-perfectoïde Stein et on en déduit $H^i(V^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0$, pour $i \geq 3$. Maintenant on analyse le complexe de cohomologie du faisceau $j_!'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p$ en utilisant le triangle exact suivant :

$$(j'^{\mathrm{ad}})_!\mathbb{F}_p \longrightarrow Rj_*'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p \longrightarrow i_*'^{\mathrm{ad}}i'^{\mathrm{ad}*}Rj_*'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p \xrightarrow{+1} .$$

Il faut par conséquence démontrer que le complexe

$$i_*'^{\mathrm{ad}}i'^{\mathrm{ad}*}Rj_*'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p$$

n'a pas de cohomologie en degrés $i \geq 2$.
Ce problème est analysé en utilisant le $\underline{\mathbb{Z}_p}$-recouvrement pro-étale perfectoïde

$$X'^{\mathrm{ad}\Diamond} \times_{\mathrm{Spd}(E)} \mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty) \to X'^{\mathrm{ad}\Diamond},$$

où E_∞ est encore la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique du corps E. Ensuite on vérifie la formule suivante :

$$R\Gamma(Z'^{\mathrm{ad}}, i'^{\mathrm{ad}*}Rj_*'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_W R\Gamma(W - Z'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = R\Gamma(\mathbb{Z}_p, \operatorname*{colim}_{\widetilde{W}} R\Gamma(\widetilde{W} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p)),$$

ici la première colimite porte sur les voisinages ouverts, qcqs de Z'^{ad} et la deuxième sur les voisinages ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants $\widetilde{W} \subset (X'^{\mathrm{ad}\Diamond})_\infty$ de $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$.
Le problème principal est que $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ et le point clé pour répondre à cette difficulté est le suivant : L'extension E_∞ de E est de la forme $E_\infty = \bigcup_n E_n$, où les corps E_n sont des extensions galoisiennes avec groupe de Galois $G_n = \mathrm{Gal}(E_n/E) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. La $\mathbb{Z}_p$-représentation

$$\operatorname*{colim}_{\widetilde{W}} H^j(\widetilde{W} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p)$$

a la forme suivante : il existe un isomorphisme entre $\mathbb{Z}_p = \lim_n G_n$-représentations

$$\operatorname*{colim}_{\widetilde{W}} H^j(\widetilde{W} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{G_n}(M_n^{(j)}),$$

où $M_n^{(j)}$ sont des $\mathbb{F}_p$-modules discrets, munis de l'action triviale de G_n : ils dépendent de j et forment un système direct, i.e. on a une application $M_n^{(j)} \to M_{n+1}^{(j)}$. Ensuite, on vérifie que la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie d'une représentation du groupe $\mathbb{Z}_p$ de la forme

$$\operatorname*{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{G_n}(M_n^{(j)})$$

est triviale en utilisant le lemme de Shapiro. Comme l'inclusion $U^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ est certainement 'localement de Stein'[14], on peut en déduire (c.f. lemme 3.10) l'énoncé d'annulation suivant

$$\underset{\widetilde{W}}{\mathrm{colim}} H^i(\widetilde{W} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$. Cela permet de conclure.

Remarque 2. Est-ce qu'on peut axiomatiser cette preuve pour démontrer plus généralement un résultat de pureté d'une immersion Zariski-fermée entre espaces rigides lisses sur un corps p-adique avec des $\mathbb{F}_p$-coefficients ? Ce qui manque est évidemment l'analyse de $R^1 j_* \mathbb{F}_p$.

1.9. Questions et conjectures. Voici quelques questions qui sont peut-être intéressantes :

1.9.1. *Faisceaux Zariski-constructibles et le problème d'extension de Riemann pour la courbe.* Il n'est pas difficile de démontrer que l'on a[15]

$$\mathrm{cd}_p(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 3.$$

Dans mon approche pour contrôler la p-dimension cohomologique de la courbe algébrique, on n'a travaillé qu'avec des faisceaux sur la courbe adique $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ qui sont 'algébriques'. On peut poser la question suivante :

Question 1.7. Est-ce qu'on peut trouver un faisceaux constructible (dans le sens de Huber [**Hub96**, Def. 2.7.2.]) de $\mathbb{F}_p$-modules $\mathcal{F}$ sur l'espace adique $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$, tel que

$$H^3(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}) \neq 0?$$

C'est une question intéressante parce que l'intuition que $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ est 'une surface de Riemann compacte' prédit que de fait $\mathrm{cd}_p(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 2$.
Par exemple, on peut commencer à analyser cette question dans le cas d'un faisceau constructible de la forme $j_! \mathbb{F}_p$, où

$$j\colon Y_{[1,\rho]} \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{ad}} = Y_{[1,q]}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}.$$

On considère ainsi le tiré en arrière au niveau infini :

$$j_\infty\colon Y_{[1,\rho],\infty} \hookrightarrow X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}}.$$

Ici on note $Y_{[1,\rho],\infty} = Y_{[1,\rho]} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ et $X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}} = X_{E,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$. En utilisant $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ et $\mathrm{cd}_p(X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 2$, on voit facilement

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^2(X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}}, j_{\infty!}\mathbb{F}_p)) \simeq H^3(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, j_! \mathbb{F}_p).$$

Je rappelle que $X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}\flat} = (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})$. On considère aussi la décomposition ouverte/fermée

$$A_{[1,\rho],F}^{\mathrm{perf}} \xrightarrow{k} (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \xleftarrow[i]{} A_{(\rho,q],F}^{\mathrm{perf}}.$$

Cette décomposition implique la suite exacte courte suivante

$$k_! \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow i_* \mathbb{F}_p.$$

Les espaces $X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}\flat}$ et $A_{(\rho,q],F}$ sont connexes et il en résulte que $H^0(k_!\mathbb{F}_p) = H^1(k_!\mathbb{F}_p) = 0$ par la suite exacte longe en cohomologique induite par la suite exacte courte ci-dessus. Parce que $H^2(X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}\flat}, \mathbb{F}_p) = 0$, cette suite exacte longue est de fait la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow H^1(X_{E_\infty,F}^{\mathrm{ad}\flat}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^1(A_{(\rho,q],F}^{\mathrm{perf}}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(k_!\mathbb{F}_p) \longrightarrow 0.$$

Cela est une suite exacte courte des $\mathbb{Z}_p$-modules discrets et en appliquant la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie on peut en déduire une suite exacte longue. Il en résulte qu'on a une surjection

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^1(A_{(\rho,q],F}^{\mathrm{perf}}, \mathbb{F}_p)) \twoheadrightarrow H^1(\mathbb{Z}_p, H^2(k_!\mathbb{F}_p)).$$

[14] Cela veut simplement dire qu'on peut trouver un voisinage affinoïde W de Z^{ad} tel que $W - Z^{\mathrm{ad}}$ est un espace de Stein. C'est évident en utilisant l'uniformisation $X_{E,F}^{\mathrm{ad}} = Y_{[1,q]}/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

[15] Voici l'argument : On utilise la présentation $(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamond = (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})/\underline{\mathbb{Z}_p}$; car $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$, la suite spectrale de Hochschild-Serre implique qu'il suffit de démontrer que $\mathrm{cd}_p(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \leq 2$. Cela résulte de la formule [**Sch22**, Prop. 21.11], qui est aussi valide pour $\ell = p$, des faits que $\dim_{\mathrm{Krull}} |\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}| = 1$ et que $\mathrm{cd}_p(M) \leq 1$, où M est un corps de caractéristique p.

Le noyau de cette surjection s'identifie à l'image de $H^1(\mathbb{Z}_p,\, H^1(X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F},\, \mathbb{F}_p))$. On observe

$$H^1(\mathbb{Z}_p,\, H^1(X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F},\, \mathbb{F}_p)) = H^2(X^{\mathrm{ad}}_{E,F},\, \mathbb{F}_p).$$

Si on suppose de plus que $\mu_p \subset E$, ce dernier groupe de cohomologie s'identifie à $\mathbb{F}_p$.
Maintenant on analyse $H^1(\mathbb{Z}_p,\, H^1(A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F},\, \mathbb{F}_p))$. D'abord, on observe

$$H^1(\mathbb{Z}_p,\, H^1(A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F},\, \mathbb{F}_p)) = H^2(Y_{(\rho,q]},\, \mathbb{F}_p).$$

L'espace $Y_{(\rho,q]}$ admet un recouvrement de Stein

$$Y_{(\rho,q]} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_{[\rho_n,q]}.$$

Cela implique la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{R}^1 \lim\nolimits_n H^1(Y_{[\rho_n,q]},\, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(Y_{(\rho,q]},\, \mathbb{F}_p) \longrightarrow \lim\nolimits_n H^2(Y_{[\rho_n,q]},\, \mathbb{F}_p) \longrightarrow 0.$$

Sous quelques hypothèses on peut vérifier que la dernière limite s'annule :

Lemma 1.8. *On suppose que le corps de fonctions $E(X^{alg}_{E,F})$ est de dimension cohomologique 1 et $\mu_p \subset E^*$. Alors on a*

$$H^i(Y_I,\, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$ et $I \subset (0,1)$ une intervalle compacte, tel que $\varphi(Y_I) \cap Y_I = \emptyset$.

Démonstration. Il suffit d'expliquer l'annulation pour $i = 2$.
Soit $t \in B^{\varphi=\pi}$, tel que t s'annule pas dans Y_I. D'après un résultat de Fargues-Fontaine ([**FF18**, Prop. 7.9.1.]) l'inclusion canonique $B_e = (B[1/t])^{\varphi=1} \hookrightarrow B_I$ est d'image dense. Soit

$$A_e = \{f \in B_e \colon ||f||_I \leq 1\}.$$

On a $A_e[1/\pi] = B_e$. D'après le résultat de comparaison de Huber [**Hub96**, Corollary 3.2.2], on a

$$H^i(Y_I,\, \mathbb{F}_p) = H^i(\mathrm{Spec}(A^h_e[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p).$$

Ici $A^h_e = \mathrm{colim}_{A_e\to A'_e} A'_e$ est la hensélisation de A_e le long de π, i.e. la colimite porte sur tous les $A_e \to A'_e$ étale, tel que $A_e/\pi \simeq A'_e/\pi$. Par compatibilité de la cohomologie étale aux colimites filtrantes, on a

$$H^i(\mathrm{Spec}(A^h_e[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_{A_e\to A'_e} H^i(\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p).$$

On affirme que $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi])) = 0$. C'est ici que l'on doit utiliser l'hypothèse que $\mathrm{cd}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) = 1$. De fait, $\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi])$ est un schéma noethérien de dimension 1, qui est régulier. Soient $\{C_i\}_{i\in I}$ les composantes connexes. Il y en a un nombre fini et elles sont aussi les composantes irréductibles. Chaque C_i est le spectre d'un anneau de Dedekind. Il suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(C_i) = 0$ et pour cela il suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_i))) = 0$, parce que pour un schéma régulier intègre S, avec point générique η_S, de dimension 1 on a une injection

$$\mathrm{Br}(S) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\kappa(\eta_S)).$$

Le morphisme induit $C_i \to \mathrm{Spec}(B_e)$ est toujours étale. L'image U est un ouvert et parce que B_e est un anneau principal l'ouvert U est affine. Le morphisme $C_i \to U = \mathrm{Spec}(R)$ est étale et surjectif entre schémas affines. Il correspond ainsi à une injection sur les anneaux et est donc dominant. On observe $\mathrm{Frac}(B_e) = \mathrm{Frac}(R)$ et que l'extension $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_i))$ de $\mathrm{Frac}(B_e)$ est finie. On a donc $\mathrm{Br}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_i))) = 0$, parce que $\mathrm{cd}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) = 1$.
En utilisant la suite exacte de Kummer, on déduit de l'hypothèse $\mu_p \subset E^\times$ l'isomorphisme

$$H^2(\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi]))_{[p]}.$$

Maintenant, on affirme

$$\operatorname*{colim}_{A_e\to A'_e} \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi])) = \mathrm{Pic}(B_I) = 0,$$

ce qui finit la preuve.
D'abord, on utilise la compatibilité de la cohomologie étale aux colimites filtrantes

$$\operatorname*{colim}_{A_e\to A'_e} \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A'_e[1/\pi])) = H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(A^h_e[1/\pi]),\, \mathbb{G}_m).$$

On observe que A_e^h est sans π-torsion et $\widehat{A}_e$ aussi est sans π-torsion. On peut donc appliquer le résultat de Bouthier-Česnavičius [**BC20**, Thm. 2.3.3. (c)] à $G = \mathbb{G}_m$ et le morphisme

$$(A_e^h, \pi) \to (\widehat{A}_e, \pi)$$

et en déduire

$$\mathrm{Pic}(A_e^h[1/\pi]) \simeq \mathrm{Pic}(\widehat{A}_e[1/\pi]).$$

Comme $B_e \hookrightarrow B_I$ est d'image dense, on a $\widehat{A}_e[1/\pi] = B_I$. On conclut en utilisant que B_I est un anneau principal. □

La question à la fin est la suivante

Question 1.9. Dans la situation ci-dessus, est-ce qu'on a

$$\mathrm{R}^1 \lim_n H^1(Y_{[\rho_n, q]}, \mathbb{F}_p) = 0?$$

Une autre question dans cette direction est la suivante :

Question 1.10. Est-ce qu'on a

$$H^2(Y_{(\rho,q]}, \mu_p) \neq 0?$$

Par l'analogie entre $Y_{E,F}$ et la boule ouverte unité épointée $\mathbb{B}_C^{\circ,1,*}$, où C est un corps non-archimedien et algébriquement clos, il est probable que cette question à une réponse positive si le corps F n'est pas sphériquement clos. Peut on par exemple adapter les résultats de la section [**CDN21**, Prop. A.2.] ?
En ce qui concerne les faisceaux Zariski-constructibles je me pose la question suivante :

Question 1.11. (Riemann extension) Soit $j\colon U \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ une immersion ouverte de Zariski[16]. Par GAGA pour la courbe, U est l'adification d'un ouvert algébrique $U' \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$. Est-ce qu'on a une équivalence de catégories

$$(U')_{\text{fét}} \simeq (U)_{\text{fét}}?$$

Le problème crucial ici est bien sûr de démontrer que tout recouvrement fini étale $V \to U$ s'étend à un recouvrement ramifié $X' \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$.

Si la dernière question avait une réponse positive, on pourrait en déduire que la catégorie des faisceaux Zariski-constructibles sur $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ est équivalente à celle des faisceaux constructibles sur $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$. On pourrait utiliser mon approche pour la p-dimension cohomologique de la courbe alors pour démontrer l'annulation de la cohomologie étale pour des $\mathbb{F}_p$-modules Zariski-constructibles.

1.9.2. *Dualité de Verdier.*

Question 1.12. Soit $\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ un revêtement ramifié. Le tiré en arrière le long du morphisme ([**FF18**, section 6.7.])

$$\operatorname*{colim}_I \mathrm{Spec}(B_I) \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$$

donne alors un recouvrement ramifié $Y' \to Y_{E,F}$. Est-ce que le morphisme de diamants localement spatiaux

$$f'\colon Y'^{\lozenge} \to \mathrm{Spa}(F)$$

est ℓ-cohomologiquement lisse ? Est-ce qu'on a

$$Rf'^{!}\mathbb{F}_\ell \simeq \mathbb{F}_\ell(1)[2]?$$

Il est très probable que si la réponse à cette question est positive et j'arrive finalement à démontrer la conjecture de comparaison de Fargues, on pourrait démontrer la conjecture [**Far20a**, Conjecture 3.12]. Il est aussi très intéressant de considérer le cas $\ell = p$. Je pourrait imaginer que les travaux de Lucas Mann sont relevant.

[16]Cela veut simplement dire que le complémentaire fermé est un fermé de Zariski.

1.9.3. *Le corps $E(X_{E,F}^{alg})$ est-il (C1) ?* Fargues a aussi posé la conjecture suivante :

Conjecture 1.13. (Fargues)
Le corps de fonctions de la courbe algébrique $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$ est $(C1)$.

Une résolution de cette conjecture donnerait bien sûr une preuve assez élégante de l'annulation de $H^i(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible et $i \geq 3$.
Voici l'approche possible : Soit $P \in E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})[T_1, ..., T_n]$ un polynôme homogène, non-constant, tel que $\deg(P) < n$. Alors il faut trouver une racine non-triviale de P dans $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$. Comme le polynôme a un nombre fini des coefficients, on peut trouver un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$, tel que P est à coefficients dans $H^0(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(D))$. On trouve un $m \in \mathbb{Z}$, tel que $\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(D) \simeq \mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(m)$. En laissant varier les espaces perfectoïdes au dessus de F, on peut regarder l'application polynômiale d'espaces de Banach-Colmez suivante :

$$P \colon \mathrm{BC}_F(\mathcal{O}(k))^n \to \mathrm{BC}_F(\mathcal{O}(m + k\deg(P))),$$

qui est induite par P. Maintenant on peut observer que pour $k >> 0$, on a $nk > m + k\deg(P)$, parce que $n > \deg(P)$. Dans cette situation je pourrais imaginer que

$$P^{-1}(0) \neq \{0\}.$$

En effet, si on croit que les espaces de Banach-Colmez sur F se comportent bien comme des espaces affines sur un corps algébriquement clos, on peut s'attendre à un tel comportement. Cela impliquerait bien sûr la conjecture de Fargues ci-dessus.
Une propriété d'un corps qui est $(C1)$ est bien sûr que sa dimension cohomologique est borné par 1.[17] Il est naturel de se poser alors la question suivante :

Question 1.14. Si on sait démontrer que l'on a $\mathrm{cd}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}) = 2$, est-ce qu'on peut en déduire que l'on a $\mathrm{cd}(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})) \leq 1$?

2. Les modèles entiers des variétés de Shimura locales

Maintenant je vais expliquer le continu de la deuxième partie de ma thèse. Elle concerne les variétés de Shimura locales. La construction des modèles entiers des variétés de Shimura locales dans le cas non-ramifié était l'objectif principal de ma thèse ; malheureusement je ne suis pas arrivé jusque-là - de fait, je n'arrive même pas à démontrer la représentabilité de la fibre générique du problème de Bültel-Pappas.

2.1. Un peu d'histoire. Les fibres génériques des espaces des déformations de Lubin-Tate et Drinfeld ont donné naissance aux premières variétés de Shimura locales.
Par préférence personnelle, je vais commencer l'introduction par l'explication de la construction du schéma formel p-adique $\widehat{\Omega}^d$ introduit par Deligne et son interprétation modulaire dûe à Drinfeld.

2.1.1. *L'Omega de Drinfeld.* L'analogue du demi-plan de Poincaré en géométrie p-adique est l'espace rigide analytique suivant

$$\Omega_{\mathbb{Q}_p}^d = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{d-1,\mathrm{ad}} - \mathcal{H},$$

où $\mathcal{H}$ dénote la réunion des hyperplans $\mathbb{Q}_p$-rationnels dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^{d-1}$. C'est un exemple fondamental d'une variété de Shimura locale.
Deligne a défini un modèle formel semi-stable p-adique de l'espace $\Omega_{\mathbb{Q}_p}^d$, modèle formel traditionnellement noté par $\widehat{\Omega}_{\mathbb{Z}_p}^d$. Afin de l'introduire, on considère l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p)$ noté $\mathcal{BT}(\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p))$. C'est un ensemble simplicial. Les 0-simplexes sont donnés par les classes d'homothétie des $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^d$. Une collection $[\Lambda_{i_0}], ..., [\Lambda_{i_{r-1}}]$ forme un r-simplexe, s'il existe des représentants $\Lambda_{i_0}, ..., \Lambda_{i_{r-1}}$, tels que

$$p\Lambda_{i_{r-1}} \subset \Lambda_{i_0} \subset ...\Lambda_{i_{r-1}}.$$

Il en résulte qu'un simplexe maximal est de dimension d. Le groupe $\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p)$ agit naturellement sur ce complexe simplicial. Dans le cas $d = 2$, l'immeuble $\mathcal{BT}(\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p))$ est de fait un arbre.
Soit Δ un r-simplexe, alors on peut lui associer un schéma formel p-adique affine $\widehat{U}_\Delta$ comme solution du problème de modules suivant : le foncteur

$$\widehat{U}_\Delta \colon \mathrm{Nilp}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens},$$

[17] De fait, la propriété d'être $(C1)$ est stable par extension finie. La norme réduite d'une algèbre à division sur une extension finie du corps aurait une racine et il en résulte que $\mathrm{Br}(L) = 0$ pour tout extension finie L.

qui envoie un $S \in \mathrm{Nilp}$[18] sur les classes d'isomorphisme des triplets $(\mathcal{L}_{i_k}, \alpha_{i_k}, \Pi_k)$, $k \in \{0, ..., r-1\}$ où $\mathcal{L}_{i_k}$ sont des fibrés en droites sur S, $\alpha_{i_k} : \Lambda_{i_k} \to \mathcal{L}_{i_k}$ sont des applications $\mathbb{Z}_p$-linéaires et $\Pi_k \colon \mathcal{L}_{i_k} \to \mathcal{L}_{i_{k+1}}$ est $\mathcal{O}_S$-linéaire. On exige qu'un triplet se place dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} p\Lambda_{i_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i_{r-1}}/p"] & \Lambda_{i_0} \cdots \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i_0}"] & \Lambda_{i_{r-1}} \arrow[d, "\alpha_{i_{r-1}}"] \\ \mathcal{L}_{i_{r-1}} \arrow[r, "\Pi_{r-1}"] & \mathcal{L}_{i_0} \cdots \arrow[r, "\Pi_{i_0}"] & \mathcal{L}_{i_{r-1}} \end{tikzcd}$$

et que la condition suivante soit vérifiée :

(Deligne) : Pour $m \in \Lambda_{i_{k+1}} - \Lambda_{i_k}$ (resp. $m \in \Lambda_{i_0} - p\Lambda_{i_{r-1}}$), la section $\alpha_{i_{k+1}}(m) \in \mathcal{L}_{i_{k+1}}$ (resp. $\alpha_{i_0}(m) \in \mathcal{L}_{i_0}$) ne s'annule pas sur S.

Ce foncteur ne dépend pas du choix des représentants $\Lambda_{i_0}, ..., \Lambda_{i_{r-1}}$ et il est facile de voire que $\widehat{U}_\Delta$ est un schéma formel p-adique affine, ouvert dans

$$\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{X_0, ..., X_{r-1}, Y_j\}/(\prod_{i=1}^{r} X_i - p)),$$

où j parcourt $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \{i_0, ..., i_{r-1}\}$.
Si $\Delta' = \Delta - \{[\Lambda_{i_{k_0}}]\}$ est un sous-simplexe du simplexe Δ, on obtient une immersion ouverte $\widehat{U}_{\Delta'} \hookrightarrow \widehat{U}_\Delta$[19] et on définit

$$\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p} = \operatorname*{colim}_{\Delta} \widehat{U}_\Delta.$$

C'est un schéma formel p-adique, séparé, localement topologiquement de type fini, qui est semi-stable (mais pas quasi-compact). Il s'agit bien d'un modèle formel de l'espace de Drinfeld :

$$(\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p})^{\mathrm{ad}}_\eta = \Omega^d_{\mathbb{Q}_p}.$$

Un point de départ de la théorie des modèles entiers des variétés de Shimura locales était l'observation de Drinfeld ([**Dri76**]), qu'on peut donner une interprétation modulaire au schéma formel $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p}$:
Soit D une $\mathbb{Q}_p$-algèbre centrale, simple d'invariant de Brauer $1/d$. Soit $\mathcal{O}_D$ l'ordre maximal et Π une uniformisante. Plus concrètement, soit E_d l'extension non-ramifiée de degré d du corps $\mathbb{Q}_p$, avec Frobenius $\tau_d \in \mathrm{Gal}(E_d/\mathbb{Q}_p)$. Si on choisit une inclusion $E_d \hookrightarrow D$, on peut écrire

$$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{E_d}[\Pi]/(\Pi^d = p, \Pi(a) = \tau_d(a)\Pi)$$

comme anneau de polynômes non-commutatifs.
Soit $S \in \mathrm{Nilp}$ et X un groupe p-divisible sur S. On considère la donnée d'une $\mathcal{O}_D$-action sur X, i.e.

$$\iota \colon \mathcal{O}_D \to \mathrm{End}(X).$$

Drinfeld appelle une paire (X, ι) un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial si $\mathrm{Lie}(X)$ est un $\mathcal{O}_{E_d} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1. En utilisant la théorie de Dieudonné, on vérifie de fait que si (X, ι) est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial, le groupe p-divisible X est automatiquement formel (i.e. sur chaque fibre géométrique de S, le groupe X n'a pas de partie étale).
On fixe maintenant une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et on considère E_d inclus dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Le corps résiduel du corps $\overline{\mathbb{Q}}_p$ donne une clôture algébrique $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathbb{F}_p$. Soit $\breve{\mathbb{Q}}_p = W(k)[1/p]$ et σ et l'automorphisme de Frobenius. On fixe toujours un triplet $(D, \mathcal{O}_D, \Pi)$ comme avant.
Un résultat important dit que modulo $\mathcal{O}_D$-isogénie il n'existe qu'un seul $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de hauteur d^2 et dimension d sur k. On fixe un tel objet $\mathbb{X}$.

Définition 2. Le problème de modules de Drinfeld est le foncteur

$$\mathcal{D} \colon \mathrm{Nilp}^{\mathrm{op}}_{W(k)} \to \mathrm{Ens},$$

qui envoie S vers les classes d'équivalence de paires (X, ρ), où X est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial et $\rho \colon \mathbb{X}_{\overline{S}} \dashrightarrow X_{\overline{S}}$ est une quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$-linéaire de hauteur 0.

Le théorème de Drinfeld est alors le suivant

[18]On noté Nilp la catégorie des schémas tel que p est Zariski-localement nilpotent sur ce schéma.
[19]C'est le lieu où $\Pi_{i_{k_0}}$ est un isomorphisme.

Théorème 2.1. (Drinfeld)
Le foncteur $\mathcal{D}$ est représentable par le schéma formel $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p}$.

Remarque 3. J'ai formulé le théorème de Drinfeld dans le cas où on travaille sur $\mathbb{Q}_p$. Il y en a aussi une version générale pour toute extension finie E de $\mathbb{Q}_p$. J'ai décidé d'utiliser cette formulation parce que plus tard je vais aussi travailler avec des données de Shimura locales sur $\mathbb{Q}_p$.

La preuve de Drinfeld est difficile et n'est pas très directe. Il serait mieux d'avoir une construction directe de l'objet universel au-dessus de $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p}$. C'est ce que j'ai fait - avec l'aide de Thomas Zink - dans le cas où $d = 2$. Je vais énoncer ce résultat de la façon suivante :

Théorème 2.2. Pour $d = 2$ on peut donner une nouvelle preuve du théorème de Drinfeld en construisant explicitement (le display associé à) un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial au-dessus de $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p}$ et en démontrant que c'est bien l'objet universel.

C'est le sujet du troisième chapitre de ma thèse.
La construction consiste en deux étapes : dans un premier temps on construit le display cherché sur la fibre spéciale $\overline{\Omega}^2_{\mathbb{F}_p}$. Après on utilise la théorie des déformations de Grothendieck-Messing (du point de vue des displays de Zink [**Zin02**]), pour construire l'objet cherché sur tous les épaississements p-adiques. C'est la première étape que je ne sais pas faire en tout généralité : j'arrive seulement à construire les displays cherché sur l'ouvert où exactement un seul (ou exactement un certain nombre) index est critique et pour les recoller, il faut étendre ces displays sur le lieu où au moins un certain index est critique. Pour $d = 2$ cette extension est automatique et pour $d > 2$ je ne vois pas comment le faire.

2.2. Variétés de Shimura locales. Rapoport-Zink ont donné dans leur livre [**RZ96**] des généralisations de l'espace de Drinfeld qu'on vient de considérer. En analogie avec les variétés de Shimura globales, ils ont considéré le cas PEL. Bien sûr, d'après Deligne [**Del71**], il existe une théorie des variétés de Shimura globales complètement générale pour tout groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ qui admet une donnée de Shimura (e.g. des groupes exceptionnels du type E_6 ou bien E_7). Motivés par cette analogie, Rapoport-Viehmann [**RV14**] ont suggéré d'essayer de construire des généralisations des fibres génériques des espaces de Rapoport-Zink. Finalement, Scholze a construit dans ses exposés à Berkeley [**SW20**] ces espaces en utilisant la géométrie perfectoïde. Je vais maintenant expliquer la construction de Scholze de ces espaces.
On commence avec un peu de notation : on fixe un corps algébriquement clos discret k et une inclusion $k \hookrightarrow F$ (par exemple : $k = \overline{\mathbb{F}}_p$), où F est de nouveau un corps non-archimédien, algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $L = W(k)[1/p]$ et on note par σ l'automorphisme de Frobenius de L.
Les variétés de Shimura locales sont associées aux données suivantes : soit G un groupe réductif, connexe sur $\mathbb{Q}_p$, soit $\{\mu\}$ une $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-classe de conjugaison des co-caractères géométriques

$$\mu\colon \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p} \to G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$$

et on note par $B(G)$ les classes d'isomorphisme des G-torseurs sur la courbe $X^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{Q}_p,F} = X^{\mathrm{ad}}_F$.

Example 2.3. Le cas de Drinfeld correspond au cas suivant : soit $G = D^*$, vu comme groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}_p$ (un groupe qui est ramifié !). Soit

$$\mu\colon \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p} \to D^*_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \mathrm{GL}_{d,\overline{\mathbb{Q}}_p}$$

le cocaractère $(1, 0..., 0)$ et le fait que modulo isogénie $\mathcal{O}_D$-linéaire il n'existe qu'un seul $\mathcal{O}_D$-module spécial formel sur k se traduit par le fait que $B(G,\mu)_{\mathrm{basic}}$ est un singleton.

Un théorème fondamental de Fargues dit que $B(G)$ s'identifie à un ensemble avec une longue histoire : l'ensemble de Kottwitz. Plus précisément, le théorème de Fargues ([**Far20a**, Thm. 5.1.]) dit que

$$B(G) \simeq G(L)/\sigma - \text{conjugaison}.$$

Soit $[b] \in B(G)$ et $b \in [b]$ et soit J_b le groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$ suivant : si R est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre, alors

$$J_b(R) = \{g \in G(R \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)\colon g^{-1}b\sigma(g) = b\}.$$

Pour simplifier, je vais supposer par la suite que le groupe G est quasi-déployé. On suppose de plus que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(a) : Soit $\mu \in \{\mu\}$. On considère l'action
$$\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\mu} G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xrightarrow{\text{ad}} \text{Lie}(G)_{\overline{\mathbb{Q}}_p},$$
qui induit une décomposition
$$\text{Lie}(G)_{\overline{\mathbb{Q}}_p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \text{Lie}(G)_n$$
selon les sous-espaces de $\text{Lie}(G)_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ où $\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p}$ agit comme $\cdot\lambda^n$. Alors on exige que
$$\text{Lie}(G)_n = 0$$
pour $n \neq -1, 0, 1$. Cette condition est indépendante du choix de $\mu \in \{\mu\}$. Un co-caractère μ qui satisfait à cette condition s'appelle minuscule.

(b) : Soit $C/\breve{E}$ une extension algébriquement close non archimédienne complète, avec basculement $C^\flat$. On considère la courbe pointée associée $(\{\infty\}, X^{\text{ad}}_{\mathbb{Q}_p,C^\flat})$ et soit $\mathcal{E}_b$ un représentant de la classe d'isomorphisme $[b] \in H^1_{\text{ét}}(X^{\text{ad}}_{\mathbb{Q}_p,C^\flat}, G)$. On exige alors que le G-torseur
$$\mathcal{E}_b\mid_{X^{\text{ad}}_{\mathbb{Q}_p,C^\flat}-\{\infty\}}$$
soit trivial et admette une trivialisation méromorphe qui est bornée par μ^{-1}.

Les raisons pour lesquelles on veut supposer que (a) et (b) sont vérifiées sont les suivantes : (a) implique que l'espace qu'on veut définir est un objet de la géométrie rigide classique (et n'est pas seulement un diamant) et (b) que cet espace n'est pas vide.
La classe $\{\mu\}$ est définie sur une extension finie $E = E(G, \{\mu\})$ de $\mathbb{Q}_p$, corps qui s'appelle 'corps de Shimura local'. De plus, soit $\mu \in \{\mu\}$ définie sur E et on considère le parabolique associé :
$$P_\mu \subset G_E.$$
Ce groupe admet la description fonctorielle suivante : si R est une E-algèbre, on a
$$P_\mu(R) = \{g \in G(R) \colon \lim_{t\to\infty} \mu(t)g\mu(t^{-1}) \text{ existe}\}.$$
La variété de drapeaux associée est la variété des groupes paraboliques dans la classe de conjugaison de P_μ, i.e.
$$\mathcal{F}l(G, \mu) = G/P_\mu.$$
C'est une variété propre et lisse sur $\text{Spec}(E)$. Comme on veut faire de la géométrie rigide, on va passer à l'espace adique $\mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}$ associé ; de plus, on va plutôt considérer le changement de base
$$\mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}_{\breve{E}}.$$
Les variétés de Shimura locales associées à $(G, \{\mu\}, [b])$ forment une tour - indexée par les sous-groupes ouverts, compacts $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$ - de recouvrements étales d'un ouvert assez intéressant et en général toujours plutôt mystérieux
$$\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\text{a}} \subset \mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}_{\breve{E}};$$
ouvert qui s'appelle 'lieu admissible'. L'existence de cet ouvert était conjecturée par Rapoport-Zink, puis Hartl et Faltings ont considéré la question de l'existence de cet ouvert dans des cas particuliers et Chen-Fargues-Shen ont donné dans [**CFS21**] la première définition générale (c.f. aussi les Berkeley notes de Scholze [**SW20**] et l'article de Scholze-Weinstein [**SW13**]).
Comme l'espace topologique ne change pas si on passe aux diamants, il suffit d'introduire l'ouvert $\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\text{a}}$ comme sous-foncteur ouvert du diamant $(\mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}_{\breve{E}})^\lozenge$ au-dessus du diamant $\text{Spd}(\breve{E})$. Soit ainsi $S \in \text{Perf}_{\overline{k}_E}$ et $(S^\sharp, \iota) \in \text{Spd}(\breve{E})(S)$, le débasculement donne un diviseur de Cartier $S^\sharp \hookrightarrow X^{\text{ad}}_S$ ([**FS21**, Prop. II.1.18.]). On se donne de plus un morphisme
$$S \to (\mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}_{\breve{E}})^\lozenge$$
au-dessus du diamant $\text{Spd}(E)$. En utilisant le lemme de recollement de Beauville-Laszlo et la donnée de ce morphisme $S \to (\mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}_{\breve{E}})^\lozenge$, on peut modifier le G-torseur $\mathcal{E}_b$ sur X^{ad}_S le long du diviseur de Cartier $S^\sharp$ pour trouver un nouveau G-torseur $\mathcal{E}'_b$ sur X^{ad}_S. Alors
$$(\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\text{a}})^\lozenge \subset (\mathcal{F}l(G, \mu)^{\text{ad}}_{\breve{E}})^\lozenge$$

est le sous-foncteur donné par la condition suivante : pour tous les points géométriques $\overline{s} \to S$, le tiré en arrière du G-torseur $\mathcal{E}_b'$ le long du morphisme

$$X_{\overline{s}}^{\mathrm{ad}} \to X_S^{\mathrm{ad}}$$

est trivial, ou brièvement dit : le G-torseur $\mathcal{E}_b'$ est fibre à fibre géométrique trivial. Un résultat de base de la théorie dû à Kedlaya-Liu, et re-démontré par Fargues-Scholze ([**FS21**, Thm. II.2.19.]), dit que cette condition définit un sous-foncteur ouvert. Cela donne alors une définition du lieu admissible, qui marche en toute généralité.

Example 2.4. Si $(G, \{\mu\}, [b])$ est la donnée de Drinfeld (G n'est donc plus quasi-déployé !), on trouve bien que

$$\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}} = \Omega^d_{\breve{\mathbb{Q}}_p}.$$

Maintenant, il faut introduire la tour $\{\mathrm{Sh}_K\}_{K \subset G(\mathbb{Q}_p)}$ de revêtements étales

$$\pi_{\mathrm{dR}} \colon \mathrm{Sh}_K \to \mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}}.$$

On peut écrire $(\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}})^{\lozenge}$ comme quotient d'un espace perfectoïde S par une relation d'équivalence pro-étale représentable $R \subset S \times_{(\mathcal{F}l(G,\mu,[b])^{\mathrm{a}})^{\lozenge}} S$. D'après un résultat de Kedlaya-Liu ([**SW20**, Thm. 22.3.1.]) - qui concerne le cas des fibrés vectoriels - et l'extension de celui-ci à des G-torseurs dû à Scholze ([**SW20**, Thm. 22.5.2.]), les G-torseurs fibre à fibre géométrique triviaux sur X_S^{ad} sont équivalents à des $\underline{G(\mathbb{Q}_p)}$-torseurs pro-étales sur S. On trouve ainsi un unique $\underline{G(\mathbb{Q}_p)}$-torseur pro-étale $\mathcal{T}$ sur S, qui - par unicité - descend le long de la relation d'équivalence R en un $\underline{G(\mathbb{Q}_p)}$-torseur pro-étale $\mathcal{M}(G, \{\mu\}, [b])_\infty \to (\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}})^{\lozenge}$. D'après [**Sch22**, Coro. 11.28] c'est encore un diamant localement spatial ; l'espace

$$\mathcal{M}(G, \{\mu\}, [b])_\infty$$

s'appelle variété de Shimura locale au niveau infini. Il est probable que cet espace est en fait représentable par un espace perfectoïde. Soit maintenant $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$ un sous-groupe ouvert, compact. Alors

$$\mathcal{M}(G, \{\mu\}, [b])_\infty / \underline{K} \to (\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}})^{\lozenge}$$

est un morphisme étale, séparé. Comme a $((\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}})^{\lozenge})_{\text{ét}} \simeq (\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}})_{\text{ét}}$, ([**Sch22**, Lemma 15.6.]), on trouve un espace adique Sh_K, étale au-dessus de $\mathcal{F}l(G, \mu, [b])^{\mathrm{a}}$. L'espace adique Sh_K est lisse (partiellement propre) sur $\mathrm{Spa}(\breve{E})$ et uniquement déterminé par la propriété

$$(\mathrm{Sh}_K)^{\lozenge} \simeq \mathcal{M}(G, \{\mu\}, [b])_\infty / \underline{K},$$

(c.f. [**SW20**, Prop. 10.2.3]). Ces espaces forment un tour $\{\mathrm{Sh}_K\}_K$ avec morphismes de transition finis étales. Ce sont des variétés de Shimura locales.

2.3. La question de l'existence des modèles entiers. Soit encore $(G, \{\mu\}, [b])$ une donnée de Shimura locale et $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$ un niveau choisi ; on considère la variété de Shimura locale associée : Sh_K . Si on suppose que $K = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$, où $\mathcal{G}$ est un groupe parahorique sur $\mathbb{Z}_p$, on peut se demander s'il existe un modèle formel de l'espace rigide-analytique Sh_K .
À cause d'incapacités personnelles, et parce que c'est le cas le plus facile, je me suis concentré dans cette thèse sur le cas non-ramifié. Soit alors G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}_p$, qui admet un modèle réductif $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}_p$; c'est équivalent à dire que G est quasi-déployé et est déployé après une extension finie, non-ramifiée. On fixe dans la suite un tel modèle réductif $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}_p$. Dans cette situation, on peut trouver un co-caractère

$$\mu \colon \mathbb{G}_{m, \mathcal{O}_{\breve{E}}} \to \mathcal{G}_{\mathcal{O}_{\breve{E}}}$$

avec classe de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$-conjugaison bien définie, qui étend la classe de conjugaison donnée. Alors, on a la conjecture suivante :

Conjecture 2.5. (Folklore, c.f. [**Pap18**, Conjecture 5.2.])
Il existe un unique schéma formel, $\mathcal{M}(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$, avec action du groupe $J_b(\mathbb{Q}_p)$, qui est localement formellement de type fini et formellement lisse sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$, tel que

$$(\mathcal{M}(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b]))_\eta^{\mathrm{ad}} \simeq \mathrm{Sh}_K$$

et

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b]))_{\mathrm{red}}^{\mathrm{perf}} \simeq X_\mu(b),$$

où $X_\mu(b)$ est la variété affine de Deligne-Lustzig parfaite (c.f. [**BS17**], [**Zhu17**]). De plus, on exige que le schéma formel soit une généralisation des schémas formels déjà construits pour des données de Shimura locales non-ramifiés abéliennes.

Remarque 4. Je pourrais imaginer que le schéma formel est la solution d'un problème de modules.

Après des résultats de Rapoport-Zink [**RZ96**], Kim [**Kim18**], Shen [**She20**], le seul cas intéressant qui reste à traiter est celui où $\mathcal{G}$ est un groupe exceptionnel du type E_6 ou E_7. Il serait évidemment esthétiquement très satisfaisant de traiter tous les cas d'une manière uniforme.

2.4. L'approche de Bültel-Pappas. Comment peut-on trouver un problème de modules qui pourrait donner naissance au schéma formel $\mathcal{M}(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$ cherché ?
On considère d'abord le cas de la donnée de Shimura suivante : $(\mathrm{GL}_n, \{\mu_{n,d}\}, [b])$. C'est le cas de base déjà traité par Rapoport-Zink dans leur livre ([**RZ96**, Thm. 2.16]). Le jeu est maintenant de reformuler ce problème de modules des groupes p-divisibles d'une façon qui se généralise à n'importe quel groupe réductif $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}_p$.
En ce moment, il y a quelques théories classifiant les groupes p-divisibles en utilisant de l'algèbre semi-linéaire. Ces théories marchent soit seulement pour des bases spécifiques (théorie des modules de Dieudonné, des cristaux de Dieudonné (c.f. [**Lau13**]) ou des F-cristaux prismatiques absolus (c.f. [**AB21**])) soit pour seulement certains groupes p-divisibles. Comme on veut construire un problème de modules formulé pour toutes les bases sur lesquelles le nombre premier p est nilpotent, on va prendre la grave décision de se limiter aux groupes p-divisibles formels et utiliser la théorie des displays dûe à Zink.[20]
Soit maintenant R un anneau dans lequel p est nilpotent. Je vais donner d'abord la définition d'un display sur R et après expliquer pourquoi il ne faut pas être effrayé.

Définition 3. (Zink)
Un display sur R est un quadruplet $(P, Q, F, \dot{F})$, où P est un $W(R)$-module fini projectif, $Q \subset P$ est un $W(R)$-sous-module, $F \colon P \to P$ est un morphisme Frobenius-linéaire, $\dot{F} \colon Q \to P$ est un morphisme F-linéaire et les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) : $I_R P \subset Q \subset P$ et le R-module P/Q est fini projectif,[21]

(ii) : $\dot{F} \colon Q \to P$ est un épimorphisme F-linéaire, i.e. l'ensemble $\dot{F}(Q)$ engendre P comme $W(R)$-module,

(iii) : pour $w \in W(R)$ et $x \in P$, on a

$$\dot{F}(V(w) \cdot x) = wF(x).$$

La raison pour laquelle un display est quelque chose de très explicite (et pourquoi c'est un objet qui se généralise bien à n'importe quel groupe réductif $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}_p$) est la suivante : localement pour la topologie de Zariski sur R, un display est simplement une classe de conjugaison tordue d'une matrice dans $\mathrm{GL}_n(W(R))$!
Soit $(P, Q, F, \dot{F})$ un display sur un anneau $R \in \mathrm{Nilp}$.[22] Dans un premier temps on observe qu'on peut trouver des $W(R)$-modules fini projectifs T et L, tels que $P = T \oplus L$ et $Q = I_R T \oplus L$; cette décomposition s'appelle une décomposition normale. Localement sur R, on peut supposer que T et L sont finis libres. Puis, si T et L sont libres, avec bases $e_1, ..., e_d$ de T et $e_{d+1}, ..., e_h$ de L, on trouve une matrice

$$U = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq h} \in \mathrm{GL}_h(W(R)),$$

telle que

(a) : $F(e_i) = \sum_{j=1}^{h} a_{i,j} e_j$, pour $1 \leq i \leq d$,

(b) : $\dot{F}(e_i) = \sum_{j=1}^{h} a_{j,i} e_j$ pour $d+1 \leq i \leq h$.

Inversement, toute matrice $U \in \mathrm{GL}_h(W(R))$ définit un display avec une décomposition normale choisie et avec trivialisation choisie. Une telle matrice U s'appelle une matrice structurelle pour le display.
Cette description dépend évidemment du choix d'une base. Soit $f_1, ..., f_d$ une autre base de T et $f_{d+1}, ..., f_h$ une autre base de L. La matrice H de changement de base est par conséquent de la forme

$$H = \begin{bmatrix} A & J \\ B & C \end{bmatrix},$$

[20] On pourrait penser à utiliser les modules de Cartier, qui sont aussi décrits de façon assez explicite, i.e. plus ou moins par une matrice, mais l'avantage des displays est que les morphismes entre des displays sont aussi décrits par des matrices et que la théorie des cristaux des Dieudonné est intégrée dans la théorie.

[21] Ici je note $I_R = \ker(w_0 \colon W(R) \to R) = \mathrm{Im}(V)$.

[22] C'est la notation pour la catégorie des anneaux où p est nilpotent.

où A est un bloc de taille $d \times d$ et C est de taille $(h-d) \times (h-d)$ et J est une matrice à coefficients dans I_R. La base $f_1, ..., f_h$ donne une autre matrice structurelle $U' \in \mathrm{GL}_h(W(R))$ et si on note

$$\Phi_{h,d}\left(\begin{bmatrix} A & J \\ B & C \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F(A) & V^{-1}(J) \\ pF(B) & F(C) \end{bmatrix},$$

la relation entre les matrices structurelles est donnée par

$$H^{-1} U \Phi_{h,d}(H) = U'.$$

Jusqu'à maintenant un display est simplement un objet d'algèbre semi-linéaire et pour pouvoir lui associer un groupe p-divisible formel, il faut supposer qu'une certain condition de nilpotence soit vérifiée.[23] Cette condition est une condition qui se formule localement sur l'anneau R et on peut donc supposer, que le display est décrit par une matrice structurelle $U \in \mathrm{GL}_h(W(R))$. Cette matrice s'écrit

$$U = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & N \end{bmatrix},$$

où $X \in \mathrm{Mat}_{d \times d}(W(R))$, $N \in \mathrm{Mat}_{h-d \times h-d}(W(R))$. Soit

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \overset{\vee}{X} & \overset{\vee}{Y} \\ \overset{\vee}{Z} & \overset{\vee}{N} \end{bmatrix}$$

l'inverse. On considère maintenant la matrice

$$\overset{\vee}{N}_0 = w_0(\overline{\overset{\vee}{N}}) \in \mathrm{Mat}_{h-d \times h-d}(R/pR).$$

Si on note par $\overset{\vee}{N}_0^{(p^n)}$ la matrice où on a élevé les coefficients à la puissance p^n-ième, la condition de nilpotence de Zink dit, qu'on peut trouver $n >> 0$, tel que

$$\overset{\vee}{N}_0^{(p^n)} \cdot \overset{\vee}{N}_0^{(p^{n-1})} \cdot ... \overset{\vee}{N}_0 = 0.$$

Remarque 5. Si $R = k$ est un corps parfait, la catégorie des displays est équivalente à la catégorie des modules de Dieudonné. La condition de nilpotence de Zink dit dans ce cas là simplement que l'operateur V est p-adiquement nilpotent.

Le théorème principal de la théorie des displays est alors le suivant :

Théorème 2.6. (Zink [**Zin02**], Lau [**Lau08**])
Soit R un anneau dans lequel p est nilpotent. Il existe une équivalence naturelle entre la catégorie des groupes p-divisibles formels sur R et la catégorie des displays nilpotents sur R.

De plus, il existe une notion de quasi-isogénie pour les displays qui correspond à une quasi-isogénie pour des groupes p-divisibles formels. Au total, en utilisant les displays on peut complètement reformuler le problème de modules de Rapoport-Zink dans le cas où le groupe p-divisible qu'on est en train de déformer n'a pas de partie étale.
L'avantage est maintenant qu'il est plus facile de donner une généralisation des displays qui marche pour tous les groupes réductifs $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}_p$. C'est exactement ce que Bültel ([**Bue13**]) puis Bültel-Pappas ([**BP20**]) ont fait : la généralisation d'une matrice structurelle est bien sûr un élément $u \in \mathcal{G}(W(R))$. Maintenant il faut généraliser le groupe des matrices de la forme

$$H = \begin{bmatrix} A & J \\ B & C \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(W(R)),$$

où A est un bloc de taille $d \times d$, C un bloc de taille $n-d \times n-d$ et J a coefficients dans I_R. Ici, on va utiliser la donnée du co-caractère minuscule

$$\mu \colon \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_{\breve{E}}} \to \mathcal{G}_{\mathcal{O}_{\breve{E}}}$$

(pour trouver ce co-caractère on a déjà utilisé qu'on est dans le cas non-ramifié). De plus, le corps de Shimura local E est une extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et le co-caractère μ est défini sur $W(k_0)$, où k_0 est une extension finie de $\mathbb{F}_p$.

[23] Néanmoins, d'après un résultat de Lau [**Lau13**] on peut toujours associer un display à n'importe quel groupe p-divisible.

On considère le parabolique P_μ sur $W(k_0)$ et la généralisation des matrices de la forme ci-dessus est le groupe suivant :

$$\mathcal{G}(W(R))_\mu = \{g \in \mathcal{G}(W(R))\colon w_0(g) \in P_\mu(R)\}.$$

De plus, Bültel-Pappas ont trouvé une généralisation du morphisme $\Phi_{n,d}$: c'est un morphisme de groupes

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu}\colon \mathcal{G}(\mathcal{W}(.))_\mu \to \mathcal{G}(W(.))_{W(k_0)},$$

tel que dans $\mathcal{G}(W_{\mathbb{Q}}(R)) = \mathcal{G}(W(R)[1/p])$ on a :

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu}(h) = F \cdot (\mu(p) \cdot h \cdot \mu(p)^{-1}).$$

Définition 4. On fixe une paire $(\mathcal{G}, \mu)$ comme ci-dessus. Soit $R \in \mathrm{Nilp}_{W(k_0)}$. Un $\mathcal{G}$-μ-display sur R est une paire (Q, α), où Q est un $\mathcal{G}(W(.))_\mu$-torseur (pour la topologie étale ou bien la topologie fpqc) sur $\mathrm{Spec}(R)$ et

$$\alpha\colon Q \to Q \times_{\mathcal{G}(W(.))_\mu} \mathcal{G}(\mathcal{W}(.))$$

est un morphisme de faisceaux fpqc sur $\mathrm{Spec}(R)$, tel que pour $h \in \mathcal{G}(W(.))_\mu, q \in Q$, on ait

$$\alpha(q \cdot h) = \alpha(q) \cdot \Phi_{\mathcal{G},\mu}(h).$$

Pour introduire le problème de modules des $\mathcal{G}$-μ-displays, il faut aussi introduire une notion de quasi-isogénie.
On considère le foncteur qui associe à une R-algèbre R' le groupe $G(W(R')[1/p])$. Ce foncteur est représentable par un ind-schéma [**Kre14**], noté LG. Soit $\mathcal{P} = (Q, \alpha)$ un $\mathcal{G}$-μ-display sur R, soit $\overline{R} = R/pR$ et soit $\overline{\mathcal{P}}$ le changement de base de $\mathcal{P}$ vers $\overline{R}$.
On veut définir une paire $(\overline{\mathcal{P}}[1/p], \varphi_{\overline{\mathcal{P}}[1/p]})$: on note simplement $\overline{\mathcal{P}}[1/p] = \overline{Q} \times_{\mathcal{G}(W(.))_\mu} LG$. Pour définir l'isomorphisme

$$\varphi_{\overline{\mathcal{P}}[1/p]}\colon (\overline{\mathcal{P}}[1/p])^F \simeq \overline{\mathcal{P}}[1/p],$$

il suffit de le faire dans le cas, où le torseur $\overline{Q}$ est trivial. On fixe une trivialisation ; le morphisme α est ainsi décrit par un élément $U \in \mathcal{G}(W(\overline{R}))$. Si on change la trivialisation par un élément $h \in \mathcal{G}(W(\overline{R}))_\mu$, on a

$$U' = h^{-1} U \Phi_{\mathcal{G},\mu}(h).$$

Comme

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu}(h) = F(\mu(p) h \mu(p)^{-1}) \in LG(\overline{R}),$$

si on définit $\varphi_{\overline{\mathcal{P}}[1/p]}$ par multiplication sur la gauche avec $U\mu^\sigma(p) \in LG(\overline{R})$, c'est indépendant du choix de la trivialisation. Si alors $\mathcal{P}_1 = (Q_1, \alpha_1)$ et $\mathcal{P}_2 = (Q_2, \alpha_2)$ sont des $\mathcal{G}$-μ-displays sur R, une G-quasi-isogenie

$$\rho\colon \mathcal{P}_1 \dashrightarrow \mathcal{P}_2$$

est un isomorphisme $\rho\colon (\overline{\mathcal{P}}_1[1/p], \varphi_{\overline{\mathcal{P}}_1[1/p]}) \simeq (\overline{\mathcal{P}}_2[1/p], \varphi_{\overline{\mathcal{P}}_2[1/p]})$.
On peut finalement définir le problème de modules de Bültel-Pappas : on fixe une donnée de Shimura locale intégrale et non-ramifiée : $(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$. On suppose de plus qu'on peut trouver $b \in [b] \in B(G, \mu)$ tel que

$$b \in \mathcal{G}(W) \mu^\sigma(p) \, \mathcal{G}(W).$$

Le problème de modules de Bültel-Pappas est un foncteur

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b]) = \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}\colon \mathrm{Nilp}_{W(k)}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Ens}),$$

qui envoie $S \in \mathrm{Nilp}_{W(k)}$ vers les classes d'équivalences des paires $(\mathcal{P}, \rho)$, où $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{G}$-μ-display sur S et

$$\rho\colon \mathcal{P}_{u_0} \times_k \overline{S} \dashrightarrow \mathcal{P} \times_S \overline{S}$$

une G-quasi-isogénie. Deux paires $(\mathcal{P}_i, \rho_i)$, $i = 1, 2$ sur S sont dit équivalentes, si la G-quasi-isogénie $\rho_2^{-1} \circ \rho_1$ se relève en un isomorphisme de $\mathcal{G}$-μ-displays $\mathcal{P}_2 \simeq \mathcal{P}_1$. D'après un résultat non-publié de Bültel c'est bien un faisceau pour la fpqc-topologie sur $\mathrm{Nilp}_{W(k)}$. C'est un objet plutôt concret.

Conjecture 2.7. (Bültel-Pappas, [**BP20**, Conjecture 4.2.1.])
On suppose que $\mathrm{Ad}(b)$ n'a pas de pente -1. Le foncteur est représentable par un schéma formel, localement formellement de type fini et formellement lisse sur $\mathrm{Spf}(W)$.

2.5. Les résultats. Malheureusement, je n'arrive toujours pas à démontrer la représentabilité du foncteur de Bültel-Pappas. La difficulté principale est de démontrer que la réduction $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\mathrm{red}}$ est localement de type fini, i.e. que ce foncteur commute bien aux colimites filtrées.[24]
Un problème moins difficile est de démontrer dans un premier temps que la fibre générique du foncteur $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$ est représentable par la variété de Shimura locale.
Maintenant, je vais énoncer mes résultats : j'ai utilisé une construction assez générale de Scholze-Weinstein [**SW13**] (déjà expliquée par de Jong [**de 95**] dans la langue des espaces rigides) afin de donner un sens à cette fibre générique : c'est un faisceau pour la topologie analytique sur la catégorie des paires de Huber affinoïdes complètes

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})^{\mathrm{ad}}_{\eta} \colon \mathrm{Affd}^{\mathrm{op}}_{(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})} \to \mathrm{Ens}.$$

Après, on peut passer au diamant associé :

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})^{\mathrm{ad}\lozenge}_{\eta} \colon \mathrm{AffdPerf}^{\mathrm{op}}_{k} \to \mathrm{Ens}.$$

C'est un faisceau sur $\mathrm{Spd}(\breve{E})$ pour la topologie analytique sur les espaces perfectoides affinoïdes sur k. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 2.8. Il existe un isomorphisme entre faisceaux analytiques sur $\mathrm{Spd}(\breve{E})$

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})^{\mathrm{ad}\lozenge}_{\eta} \simeq (\mathrm{Sh}_K)^{\lozenge},$$

où $K = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$.

La preuve se trouve dans la proposition 9.2. Comme autre application de notre méthodes on démontre une conjecture de Rapoport-Pappas [**PR21**]. Soit

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}}$$

le tube d'un point $x \in X_\mu(b)(k)$ introduit par Gleason ([**Gle21**]).

Théorème 2.9. Le v-faisceau $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}}$ est représentable par un schéma formel affine régulier et plat.

La preuve se trouve dans la proposition 9.9. Pour les techniques de la preuve on peut regarder l'introduction du chapitre.

[24]La difficulté est que les vecteurs de Witt ne commutent pas aux colimites filtrées Dans le cas où $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n$, on peut répondre à cette difficulté en utilisant des displays tronqués et des isogénies. Pour $\mathcal{G}$ arbitraire, il faut linéariser la situation pour pouvoir parler sur d'isogénies. Néanmoins, cette étape me force à considérer des cocaractères non-minuscules et a priori je perds une bonne théorie de déformation...

Chapitre 2

Sur la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine

1. Introduction

Soient p un nombre premier fixé et E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, F un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, extension du corps résiduel de E, complet pour une valeur absolue non-archimédienne non-triviale. Dans le livre [**FF18**] Fargues-Fontaine ont associé à la donnée de E,F un objet géométrique qui a attiré un intérêt majeur dans les années récentes. Une des raisons (entre autres...) pour lesquelles cet objet suscite l'intérêt est que la cohomologie étale des système locaux sur cet objet offre une perspective géométrique sur la cohomologie galoisienne du corps E. Cet objet est dénommé la courbe de Fargues-Fontaine et il admet une incarnation algébrique comme schéma noethérien, régulier de dimension 1 sur $\mathrm{Spec}(E)$ - étudiée dans le livre de Fargues-Fontaine - et une incarnation analytique - étudiée par Kedlaya-Liu [**KL15**] - comme un espace adique quasi-compact, séparé de dimension 1 sur $\mathrm{Spa}(E)$. Afin de montrer que cet objet se comporte comme une courbe du point de vue de la cohomologie étale, il faut plus généralement étudier la cohomologie étale des faisceaux constructibles. C'est l'objectif de ce chapitre.

Aujourd'hui il est plus facile d'introduire la courbe en utilisant le point de vue analytique : soient $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\varpi \in F$ une pseudo-uniformisante fixée. Soit de plus $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers du corps E et π une uniformisante dans $\mathcal{O}_E$ et $\mathbb{F}_q = \mathcal{O}_E/\pi$ le corps résiduel. On considère l'anneau des vecteurs de Witt ramifiés de $\mathcal{O}_F$:

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W(\mathcal{O}_F) \otimes_{W(\mathbb{F}_q)} \mathcal{O}_E.$$

C'est un anneau topologique, complet pour la topologie $(\pi, [\varpi])$-adique. Il a été démontré dans ([**Far15**, Thm. 2.1.]) que l'espace pré-adique

$$Y_{E,F} = \mathrm{Spa}(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) - V(\pi \cdot [\varpi])$$

est bien un espace adique (i.e. le pré-faisceau structurel est un faisceau). On pense à $Y_{E,F}$ comme l'analogue de la boule unité ouverte épointée 'sur F' [1] en caractéristique-mixte. L'espace $Y_{E,F}$ est l'espace de module des dé-basculements sur E du corps F ([**FS21**, Prop. II.1.18]).[2] C'est un espace de Stein non-quasi-compact et afin de le rendre compact par quotient on considère l'automorphisme de Frobenius $\varphi\colon W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ qui induit une action proprement discontinue du groupe discret $\varphi^{\mathbb{Z}}$ sur l'espace $Y_{E,F}$. On peut donc passer au quotient et considérer l'espace adique

$$X^{\mathrm{ad}}_{E,F} = Y_{E,F}/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

Cet espace s'appelle la courbe adique de Fargues-Fontaine associée à E et F. La raison principale pour laquelle on appelle cet espace (quasi-compact, partiellement propre sur $\mathrm{Spa}(E)$) une 'courbe' est que localement il est de la forme $\mathrm{Spa}(B_I, B_I^+)$, où B_I est une E-algèbre de Banach qui est un anneau principal (c.f. [**FS21**, Cor. II.1.12]). Cette courbe veut vraiment être considérée comme une 'courbe propre et lisse sur $\mathrm{Spa}(F)$', mais cette phrase n'a aucun sens a priori. [3] Néanmoins, même si la courbe n'est pas de type fini sur $\mathrm{Spa}(E)$, elle vérifie des propriétés de finitude 'absolues' assez fortes : d'après un résultat de Kedlaya l'espace $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est fortement noethérien ([**Ked16**, Thm. 4.10]) : en tout cas, on peut bien travailler avec cet objet !

Comme toute surface de Riemann admet une algébrisation, la courbe adique $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ en admet aussi une :

---

[1] Cela n'a pas de sens à strictement parler ; mais si on se permet de passer aux diamants associés c'est bien un objet qui vit au-dessus de $\mathrm{Spa}(F)$, c.f. [**FS21**, Prop. II.1.17]

[2] Cela explique aussi pourquoi cet objet ne pourrait jamais être de type fini sur $\mathrm{Spa}(E)$ et donne une interprétation très naturelle.

[3] On peut en donner un sens approximatif en passant aux diamants : $(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})^\diamond$ n'a pas de morphisme structurel vers $\mathrm{Spa}(F)$, mais son cousin $\mathrm{Div}^1_{E,F} = \mathrm{Spd}(E) \times \mathrm{Spa}(F)/\varphi^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{Spd}(E)}$, qui vérifie $((X^{\mathrm{ad}}_{E,F})^\diamond)_{\text{ét}} \simeq (\mathrm{Div}^1_{E,F})_{\text{ét}}$, a un tel morphisme structurel et $\mathrm{Div}^1_{E,F} \to \mathrm{Spa}(F)$ est un morphisme de diamants propre et lisse ([**FS21**, Prop. II.1.21.]).

l'idée est de trouver un fibré en droites ample sur $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$, ce qui donne directement une algébrisation possible. On peut simplement définir le fibré en droites $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}}(1)$ en prenant le fibré en droites trivial $\mathcal{O}_{Y_{E,F}}$ sur $Y_{E,F}$ avec structure φ-équivariante donnée par $\varphi(f) = \pi^{-1}f$. D'après le résultat de Kedlaya-Liu [**FS21**, Thm. II.2.6], c'est bien un fibré en droites 'ample' et avec un peu de courage on peut donc considérer le schéma suivant :

$$X^{\mathrm{alg}}_{E,F} = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} H^0(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}}(1)^{\otimes n})).$$

Un des résultats principaux du livre ([**FF18**]) de Fargues-Fontaine est ainsi que c'est un E-schéma noethérien, régulier de dimension 1, recouvert par deux spectres des anneaux principaux et les corps résiduels des points fermés sont algébriquement clos ; leur basculement s'identifie canoniquement à F ([**FF18**, Thm. 6.5.2]). De plus, la théorie des fibrés vectoriels sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est bien comprise ([**FF18**, Thm. 8.2.10.]). Le lien entre la courbe adique et sa version algébrique est le suivant : on peut construire un morphisme entre d'espaces localement annelés

$$X^{\mathrm{ad}}_{E,F} \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$$

qui induit une bijection entre les points fermés $|X^{\mathrm{alg}}_{E,F}|$ et les points classiques $|X^{\mathrm{ad}}_{E,F}|^{\mathrm{cl}}$ et par tiré en arrière une équivalence de GAGA entre les catégories des fibrés vectoriels ([**FS21**, Prop. II.2.7.]).

1.1. La cohomologie étale des systèmes locaux sur la courbe. Dans l'article [**Far20a**], Fargues a commencé l'étude de la cohomologie étale de la courbe de Fargues-Fontaine. Il s'est concentré surtout sur les systèmes locaux sur la courbe algébrique et trouve un lien intéressant avec la théorie du corps de classes local de E : il montre par exemple que la classe fondamentale de la théorie du corps de classes dans $H^2(E, \mu_n)$ s'envoie vers la classe fondamentale de la courbe dans $H^2(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mu_n)$ via tiré en arrière le long du morphisme structurel

$$f\colon X^{\mathrm{alg}}_{E,F} \to \mathrm{Spec}(E),$$

c.f. [**Far20a**, Prop. 3.4] et il utilise l'identification $B(G) \simeq H^1(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, G)$, où G est un groupe réductif, connexe sur E ([**Far20a**, Thm. 5.1.]) pour donner une nouvelle preuve de la théorie du corps de classes local de E ([**Far20a**, Thm. 2.6]). De plus, comme la courbe est géométriquement simplement connexe tous les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-systèmes locaux $\mathcal{L}$ sont de la forme $\mathcal{L} = f^*(M)$, où M est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module fini avec action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$. Cette correspondance identifie la cohomologie étale de $\mathcal{L}$ en degrés $i \in \{0, 1, 2\}$ à la $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-cohomologie de M ([**Far20a**, Thm. 3.7]) en degrés $i \in \{0, 1, 2\}$. Néanmoins on ne sait pas encore que

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mathcal{L}) = 0,$$

pour $i \geq 3$. On peut donc constater que la courbe peut 'voir' l'arithmétique du corps p-adique E et l'étude de la cohomologie étale des systèmes locaux sur la courbe donne un point de vue géométrique à l'étude de la cohomologie galoisienne du corps E (c.f. par exemple le résultat [**Far20a**, Cor. 3.8.] qui donne une interprétation de la dualité de Tate-Nakayama comme dualité de Poincaré sur la courbe $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$). Le cas des systèmes locaux compris on se tourne vers les faisceaux constructibles arbitraires.

1.2. Les résultats. J'explique plus en détail le contenu de ce chapitre. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur le site étale de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$. Dans la section 2.1 en bas, on montre comment on peut construire un morphisme entre sites étales

$$u\colon (X^{\mathrm{ad}}_{E,F})_{\text{ét}} \to (X^{\mathrm{alg}}_{E,F})_{\text{ét}}.$$

On peut alors considérer le tiré en arrière $\mathcal{F}^{\mathrm{ad}} = u^*(\mathcal{F})$. La première conjecture de Fargues prédit une comparaison entre la cohomologie étale de $\mathcal{F}^{\mathrm{ad}}$ et celle de $\mathcal{F}$.

Conjecture 1.1. (Fargues, [**Far20a**, Conjecture 3.11.]) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, alors on a pour tout $i \geq 0$,

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mathcal{F}) \simeq H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}).$$

La deuxième conjecture est une conjecture d'annulation :

Conjecture 1.2. (Fargues, [**Far20a**, Conjecture 3.9.]) Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur le site étale de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$, alors on a

$$H^i(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathcal{F}) = 0,$$

pour $i \geq 3$.

Voici le résultat principal du chapitre :

Théorème 1.3. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur le site étale de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$.

(a) : Si $n = \ell \neq p$, les deux conjectures sont vraies.

(b) : Si $n = p$, alors on a

$$H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0,$$

pour $i \geq 3$, si une hypothèse technique est satisfaite.

De plus, la conjecture 1.2 implique la conjecture 1.1.

Remarque 6. Soit U un ouvert dans $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ avec adification $U^{\mathrm{ad}} \subset X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$. Alors l'hypothèse technique est la suivante : on suppose que l'on peut écrire

$$U^{\mathrm{ad}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

où $U_n \subset U^{\mathrm{ad}}$ sont des ouverts affinoïdes, tels que $U_n \subseteq U_{n+1}$, l'image de l'application de restriction res: $\mathcal{O}(U_{n+1}) \to \mathcal{O}(U_n)$ est dense ; si on note par E_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E, les

$$U_n \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$$

sont affinoïdes perfectoïdes. Je vais appeler un tel espace adique un espace pré-perfectoïde Stein.[4]. Dans la remarque 13 on trouve une petite discussion de cette hypothèse et une raison pour laquelle je pense que cette hypothèse devrait être vraie.

1.2.1. *Le cas $\ell \neq p$.* Maintenant je donne plus de détails sur la preuve du point (a) ci-dessus ; i.e. la preuve dans le cas plus facile de $\ell \neq p$-torsion. L'idée est d'expliquer d'abord pourquoi la conjecture 1.1 est équivalente à la conjecture 1.2. On suppose pour un moment que la conjecture 1.2 soit vérifiée. La première observation (Lemme 2.1) - observation plus au moins standard dans la cohomologie étale - est qu'il suffit de démontrer que

$$H^i(X', \mathbb{F}_\ell) \simeq H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_\ell),$$

pour tout revêtement ramifié $X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ (c.f. Déf. 5 pour cette notion). Pour vérifier la comparaison en degrés $i = 0, 1$, on utilise l'équivalence de GAGA pour ces revêtements ramifiés (Lemme 2.2). Cette équivalence de GAGA pour des revêtements ramifiés est déduite de l'équivalence de GAGA connue pour la courbe en utilisant le fait que le morphisme $X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ et le morphisme $X'^{\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ sont localement libres. Pour la comparaison en degré $i = 2$ on démontre un analogue adique d'un résultat de Gabber, qui compare les groupe de Brauer cohomologique et cohérent d'un espace adique, fortement noethérien sur un corps de caractéristique 0, qui est la réunion séparée des deux affinoïdes (Lemme 2.10). De fait, dans cette étape on traite dans un premier temps le cas d'un espace affinoïde (Lemme 2.12) en utilisant un théorème de Huber qui compare la cohomologie étale d'un affinoïde $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ à celle de $\mathrm{Spec}(A)$ et le résultat de Gabber qui identifie le groupe de Brauer au groupe de Brauer cohomologique pour tout schéma affine. Ensuite on utilise des faisceaux tordus localement libres sur des gerbes pour l'étape de recollement : ici je me suis fortement inspiré de la thèse de Lieblich [**Lie04**].
Enfin, il en résulte que la conjecture 1.2 implique la conjecture 1.1.[5]
Après on démontre directement que $\mathrm{cd}_\ell(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 2$ (Prop. 3.1). Cette borne suit facilement de la présentation du diamant associé à $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ suivante :

$$(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamond \simeq (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})/\underline{\mathbb{Z}_p}.$$

En particulier, il est évident que la conjecture 1.1 implique la conjecture 1.2 (au moins si $\ell \neq p$). On donne après une preuve directe du fait que $\mathrm{cd}_\ell(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}) \leq 2$ (Prop 3.5), $\ell \neq p$. Pour la preuve, on vérifie d'abord que $\mathrm{cd}_\ell(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})) \leq 1$ (Prop. 3.2), où $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$ est le corps de fonctions de la courbe $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$.

[4]L'adjectif 'pré-perfectoïde' est là seulement pour une raison peu sympathique : on ne sait pas démontrer qu'un ouvert affinoïde dans un espace perfectoïde est affinoïde perfectoïde...

[5]De fait, tous ces arguments marchent aussi dans le cas $\ell = p$, si on savait que $H^i(X', \mathbb{F}_p) = 0$ pour $i \geq 3$ et tout revêtement ramifié.

Après la borne sur la dimension cohomologique de la courbe algébrique est simplement une application facile soit de la pureté absolue soit du fait que les corps résiduels de tous les points fermés des revêtements ramifiés $X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ sont algébriquement clos.

1.2.2. *Le cas $\ell = p$.* J'explique la preuve (donnée dans la proposition 3.6) pour $\ell = p$ de mon résultat principal ; dans ce cas là mes résultats sont plutôt faibles c.f. Théorème 1.3(b) : on utilise d'abord la méthode de la trace pour ramener l'énoncé

$$H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0,$$

où $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{F}_p$-module constructible sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ et $i \geq 3$, à

$$H^i(X', j'^{\mathrm{ad}}_!(\mathbb{F}_p)) = 0,$$

où $i \geq 3$, $\pi \colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est un revêtement ramifié de degré premier à p, normalisation d'un revêtement étale $V \to U \subseteq X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$. On note $j' \colon V \to X'$ et $i' \colon Z' \to X'$ l'inclusion du fermé complémentaire. Après passage au monde adique, on peut résumer la situation dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V^{\mathrm{ad}} \arrow[r, "j'^{\mathrm{ad}}"] \arrow[d, "\dot{\pi}^{\mathrm{ad}}"] & X'^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\pi^{\mathrm{ad}}"] & Z'^{\mathrm{ad}} \arrow[l, "i'^{\mathrm{ad}}"'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j^{\mathrm{ad}}"] & X^{\mathrm{ad}}_{E,F} & Z^{\mathrm{ad}}. \arrow[l, "i^{\mathrm{ad}}"] \end{tikzcd}$$

Si l'hypothèse technique dans la remarque 6 est vérifiée, l'ouvert adique U^{ad} est un espace pré-perfectoïde Stein et on en déduit $H^i(V^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0$, pour $i \geq 3$. Maintenant, on analyse la cohomologie du faisceau $j'^{\mathrm{ad}}_!\mathbb{F}_p$ en utilisant le triangle exact suivant :

$$(j'^{\mathrm{ad}})_!\mathbb{F}_p \longrightarrow Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p \longrightarrow i'^{\mathrm{ad}}_* i'^{\mathrm{ad}*} Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p \xrightarrow{+1} .$$

Il faut donc démontrer que le complexe

$$i'^{\mathrm{ad}}_* i'^{\mathrm{ad}*} Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p$$

n'a pas de cohomologie en degrés $i \geq 2$. On analyse ici la situation en utilisant le $\underline{\mathbb{Z}_p}$-recouvrement pro-étale perfectoïde $X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit} \times_{\mathrm{Spd}(E)} \mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty) \to X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit}$, où E_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique du corps E. La formule suivante est vérifiée :

$$R\Gamma(Z'^{\mathrm{ad}}, i'^{\mathrm{ad}*} Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = \underset{W'}{\mathrm{colim}} R\Gamma(W' - Z'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = R\Gamma(\mathbb{Z}_p, \underset{\widetilde{W}'}{\mathrm{colim}} R\Gamma(\widetilde{W}' - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p)),$$

où la première colimite porte sur les voisinages ouverts, qcqs W' de Z'^{ad} et la deuxième sur les voisinages ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants $\widetilde{W}' \subset (X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit})_\infty$ de $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$.
Le fait que $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ pose le problème principal ; le point clé pour répondre à cette difficulté est le suivant : l'extension E_∞ de E est de la forme $E_\infty = \bigcup_n E_n$, où les E_n sont des extensions galoisiennes avec groupe de Galois $G_n = \mathrm{Gal}(E_n/E) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. En utilisant un système de voisinages fondamentaux $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants de Z'^{ad}_∞ bien choisi, on construit un isomorphisme entre $\mathbb{Z}_p = \lim_n G_n$-représentations

$$\underset{\widetilde{W}'}{\mathrm{colim}} H^j(\widetilde{W}' - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\ \mathrm{Ind}^{G_n}_{\{e\}}(M^{(j)}_n),$$

où les $M^{(j)}_n$ sont des $\mathbb{F}_p$-modules discrets, munis de l'action triviale de G_n : ils dépendent de j et forment un système direct, i.e. on a une application $M^{(j)}_n \to M^{(j)}_{n+1}$. Après on vérifie (c.f. Lemme 3.7) qu'une représentation du groupe $\mathbb{Z}_p$ de la forme

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\ \mathrm{Ind}^{G_n}_{\{e\}}(M^{(j)}_n)$$

n'a pas de $\mathbb{Z}_p$-cohomologie. Comme l'inclusion $U^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est évidemment 'localement de Stein', on peut en déduire l'énoncé d'annulation suivant

$$\underset{\widetilde{W}'}{\mathrm{colim}} H^i(\widetilde{W}' - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$ (c.f. lemme 3.10). Cela permet de terminer la preuve de la proposition 3.6.

Remarque 7. Le point essentiel de la preuve dans le cas $\ell = p$ est l'isomorphisme

$$\underset{\widetilde{W}'}{\mathrm{colim}} H^j(\widetilde{W}' - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{colim}}\ \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{G_n}(M_n^{(j)}).$$

Dans cette remarque je veux prendre le temps d'expliquer dans un exemple plus facile comment on peut construire un tel isomorphisme.
On considère le cas où $Z^{\mathrm{ad}} = \{\infty\}$ est un point classique dans $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$. L'objectif est d'expliquer comment on peut tuer la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie du $\mathbb{Z}_p$-module suivant :

$$\underset{\widetilde{W}}{\mathrm{colim}} H^i(\widetilde{W} - Z_\infty^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p),$$

où la colimite porte sur tous les voisinages ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants $\widetilde{W}$ de $Z_\infty^{\mathrm{ad}} := Z^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ dans $X_{\widehat{E}_\infty,F}^{\mathrm{ad}} := X_{E,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$.
On observe d'abord que $X_{\widehat{E}_\infty,F}^{\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ est un $\underline{\mathbb{Z}_p}$-torseur pro-étale (par changement de base) et il en résulte que chaque ouvert qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariant dans $X_{\widehat{E}_\infty,F}^{\mathrm{ad}}$ descend vers $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$. La colimite ci-dessus s'écrit alors

$$\underset{W}{\mathrm{colim}} H^i((W - Z^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p),$$

où cette colimite porte maintenant sur tous les voisinages ouverts qcqs W de Z^{ad} dans $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ et on note par $(.)_\infty$ le changement de base $\times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$. L'astuce clé est de récrire de nouveau cette colimite (et d'introduire artificiellement une dépendance en n) afin de réduire l'annulation de la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie au lemme de Shapiro en utilisant l'observation suivante :
Soit $X_{E_n,F}^{\mathrm{ad}} := X_{E,F}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(E_n)$. Le morphisme $f_n \colon X_{E_n,F}^{\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ est un G_n-torseur. Soit $\mathcal{W}^{(n)}$ le système des voisinages qcqs G_n-invariants de Z_n^{ad} dans $X_{E_n,F}^{\mathrm{ad}}$ et on considère la colimite suivante :

$$\underset{W^{(n)}\in\mathcal{W}^{(n)}}{\mathrm{colim}} H^i(W^{(n)} - Z_n^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p).$$

Ce sont des G_n-modules discrets et j'affirme que leur G_n-cohomologie est triviale. En effet, comme f_n est fini étale, chaque point dans Z_n^{ad} est maximal. Soient $\infty_n \in |X_{E_n,F}^{\mathrm{ad}}|$ des pré-image de ∞, tel que sous le morphisme de transition dans la tour

$$X_{E_{n+1},F}^{\mathrm{ad}} \to X_{E_n,F}^{\mathrm{ad}},$$

$$\infty_{n+1} \mapsto \infty_n.$$

On observe en utilisant que les points ∞_n sont maximaux et que G_n agit sans point fixe sur l'espace topologique $|X_{E_n,F}^{\mathrm{ad}}|$, que chaque $W^{(n)}$ peut être raffiné par un ouvert de la forme $\coprod_{g\in G_n} g\cdot W$, où W est un voisinage de ∞_n suffisamment petit, i.e. $gW \cap hW = \emptyset$ pour $g \neq h \in G_n$. Il en résulte que

$$\underset{W^{(n)}\in\mathcal{W}^{(n)}}{\mathrm{colim}} H^i(W^{(n)} - Z_n^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = \bigoplus_{g\in G_n} M_n^{(i)\prime},$$

où

$$M_n^{(i)\prime} = \underset{W}{\mathrm{colim}} H^i(W - \{\infty_n\}, \mathbb{F}_p)$$

et la colimite porte sur tous les voisinages de ∞_n qui sont suffisamment petits. Cette représentation de G_n est donc induite et par le lemme de Shapiro la G_n-cohomologie s'annule.
Afin d'appliquer cet argument à la colimite qu'on veut calculer il faut quand même faire un peu attention parce que les espaces $W - Z^{\mathrm{ad}}$ ne sont pas quasi-compacts.
On considère les groupes

$$N_n^{(i)} = \underset{W^{(n)}\in\mathcal{W}^{(n)}}{\mathrm{colim}} H^i((W^{(n)} - Z_n^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p).$$

Ces sont des $\mathbb{Z}_p$-modules et pour tout n l'application naturelle $N_n^{(i)} \to N_{n+1}^{(i)}$ est un isomorphisme en tant que $\mathbb{Z}_p$-module. En utilisant l'invariance par G_n on peut aussi donner une structure de G_n-module à $N_n^{(i)}$. L'action de $\mathbb{Z}_p$ sur $N_n^{(i)}$ se factorise ainsi sur le quotient $\mathbb{Z}_p \to G_n$. On a ainsi trivialement

$$\underset{W}{\mathrm{colim}} H^i((W - Z^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) \simeq \underset{n}{\mathrm{colim}} N_n^{(i)}$$

en tant que $\mathbb{Z}_p$-module, où la colimite sur n est prise dans la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-modules. Par contre, si on considère les $N_n^{(i)}$ comme G_n-modules la paire $(\lim_n G_n, \mathrm{colim}_n N_n^{(i)})$ est compatible[6] et ceci donne une structure de $\mathbb{Z}_p$-module sur $\mathrm{colim}_n N_n^{(i)}$, où $\mathbb{Z}_p$ agit sur $N_n^{(i)}$ via le quotient $\mathbb{Z}_p \to G_n$. On a toujours un isomorphisme en tant que $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\operatorname*{colim}_W H^i((W - Z^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) \simeq \operatorname*{colim}_n N_n^{(i)},$$

où cette fois la structure de $\mathbb{Z}_p$-module sur $\mathrm{colim}_n N_n^{(i)}$ a pour origine la compatibilité de la paire

$$(\lim_n G_n, \mathrm{colim}_n N_n^{(i)}).$$

Le même argument que celui qu'on vient de donner avant implique que comme G_n-représentation $N_n^{(i)}$ est induite et en total, on a

$$H^j(\mathbb{Z}_p, \mathrm{colim}_{\widetilde{W}} H^i(\widetilde{W} - Z_\infty^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p)) = \mathrm{colim}_n H^j(G_n, N_n^{(i)}) = 0.$$

1.3. Aperçu du contenu. Voici un bref aperçu du contenu des sections. La première partie du chapitre, section 2, concerne le problème de comparer la cohomologie étale de la courbe algébrique avec celle de la courbe adique. Dans la sous-section 2.1 un morphisme entre les sites étales

$$u\colon (X_{E,F}^{\mathrm{ad}})_{\text{ét}} \to (X_{E,F}^{\mathrm{alg}})_{\text{ét}}$$

est construit et une première réduction, lemme 2.1, du problème de comparaison à un problème plus concret est donné. Dans la sous-section 2.2 l'équivalence de GAGA pour tout revêtement ramifié de la courbe algébrique est démontré. Après, dans la sous-section 2.3, on explique comment l'annulation implique la comparaison. Le plan est le suivant : dans un premier temps, soussous-section 2.3.2, on donne quelques rappels sur les groupes de Brauer et les faisceaux tordus dans le monde adique. Après, dans soussous-section 2.3.3, j'explique la preuve de l'analogue du résultat de Gabber concernant le groupe de Brauer et le groupe de Brauer cohomologique pour les espaces adiques. Ces résultats sont appliqués dans le sou-sous-section 2.3.4 pour démontrer que si la conjecture d'annulation, conjecture 1.2, est vérifiée la conjecture de comparaison, conjecture 1.1, en résulte.
La deuxième partie du chapitre, section 3, est consacrée à quelques résultats d'annulation de la cohomologie étale des courbes adique et algébrique. Dans la sous-section 3.1 on démontre que l'on a $\mathrm{cd}_\ell(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 2$, où $\ell \neq p$ est un nombre premier. Après, sous-section 3.2, on démontre une borne sur la ℓ-dimension cohomologique du corps de fonctions de la courbe algébrique. Ce résultat est utilisé dans la sous-section 3.3 pour borner la ℓ-dimension cohomologique de la courbe algébrique par 2. Dans la sous-section 3.4 j'explique ce que je sais faire dans le cas $\ell = p$. Ensuite, dans la sous-section 3.5 on peut trouver une spéculation sur une approche possible pour attaquer la conjecture de Fargues que le corps de fonctions de la courbe algébrique est (C1). Dans la sous-section finale 3.6 j'analyse un peu le cas d'un $\mathbb{F}_p$-module constructible sur la courbe adique qui n'est pas Zariski-constructible.

1.4. Remerciements. Il y a beaucoup des mathématiciennes dont j'ai le plaisir de remercier : tout d'abord j'aimerais remercier mon directeur de thèse Laurent Fargues, qui m'a dit que je devrais réfléchir sur la cohomologie étale de la courbe. Merci beaucoup d'avoir me donner la possibilité de réfléchir sur la courbe, pour des discussions nombreuses, le partage généreuse des astuces et ta intuition profonde. Sans lui, ce travail n'existerait pas. De plus, tout le long de mon travail j'ai eu le plaisir de discuter très régulièrement avec Benoît Stroh et Arthur-César le Bras ; sans leur intérêt et soutien cet article n'éxisterait pas non plus et leur remarques ont influencés ce travail. J'aimerais remercie Johannes Anschütz pour des commentaires sur une version préliminaires, son intérêt et pour des suggestions. De plus, j'aimerais remercie Lennart Gehrmann pour des discussion concernant la cohomologie des groupes et Guido Bosco pour des discussion sur l'hypothèse (Stein).
Finalement, je veux remercier Sophie Morel chaleuresement pour tout le travail qu'elle a fait en tant que rapporteur de thèse ; grâce à ses remarques les maths sont devenus plus vraies et la présentation plus claires.

[6]Soient $G = \lim_n G_n$ un groupe pro-fini et $N = \mathrm{colim}_n N_n$, où N_n sont des G_n-modules. On note $\pi_{n+1,n}\colon G_{n+1} \to G_n$ et $f_{n,n+1}\colon N_n \to N_{n+1}$ les morphismes de transition. La paire (G, N) est dite compatible si

$$f_{n,n+1}(\pi_{n+1,n}(g_{n+1}) \cdot x_n) = g_{n+1} \cdot f_{n,n+1}(x_n),$$

pour tout $g_{n+1} \in G_{n+1}$ et $x_n \in N_n$.

2. Quelques résultats concernant la comparaison

2.1. Énoncé et première réduction. L'objectif ici est d'abord d'introduire un morphisme entre les sites étales

$$u\colon (X^{\mathrm{ad}}_{E,F})_{\text{ét}} \to (X^{\mathrm{alg}}_{E,F})_{\text{ét}},$$

ce qui correspond à un foncteur $u\colon \text{Ét}(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}) \to \text{Ét}(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})$; une fois ce foncteur construit, on peut énoncer la conjecture 1.1 de comparaison ci-dessus. Ensuite, on explique comment réduire la comparaison entre la cohomologie étale de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ et $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ avec des coefficients constructibles arbitraires au problème de comparer la cohomologie étale des revêtements ramifiés de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ avec celle du pendant adique, c.f. le lemme 2.1.
La construction du foncteur $u\colon \text{Ét}(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}) \to \text{Ét}(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})$ utilise de façon cruciale un résultat de Kedlaya [**Ked16**, Thm. 4.10] qui assure que l'espace adique sous-perfectoïde $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est fortement noethérien : en utilisant l'interprétation comme espace de module du Proj dans la catégorie des espaces localement annelés (c.f. [**FS21**, Prop. II.2.7.]), on construit un morphisme

$$X^{\mathrm{ad}}_{E,F} \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}.$$

Puis on peut appliquer un résultat de Huber [**Hub94**, Proposition 3.8], pour construire pour tout morphisme étale $U \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ un espace adique fortement noethérien U^{ad} qui vit dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U^{\mathrm{ad}} \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ X^{\mathrm{ad}}_{E,F} \arrow[r] & X^{\mathrm{alg}}_{E,F}. \end{tikzcd}$$

L'espace U^{ad} est localement fortement noethérien et uniquement caractérisé par une propriété universelle appropriée c.f. loc.cit.
On observe que le morphisme d'espaces adiques $U^{\mathrm{ad}} \to X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est toujours étale (c.f. [**Hub96**, Corollary 1.7.3] pour l'énoncé qu'on peut utiliser après on a utilisé que la propriété d'être étale est localement sur la cible), ce qui définit un foncteur $u\colon \text{Ét}(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}) \to \text{Ét}(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})$. De plus, ce foncteur envoie des recouvrements vers des recouvrements et il commute aux limites finies : cela suffit pour construire le morphisme $u\colon (X^{\mathrm{ad}}_{E,F})_{\text{ét}} \to (X^{\mathrm{alg}}_{E,F})_{\text{ét}}$.
Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})_{\text{ét}}$. On peut appliquer le foncteur dérivé $R\Gamma(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, .)$ au morphisme d'adjonction

$$\mathcal{F} \to Ru_*Ru^*\mathcal{F} = Ru_*u^*\mathcal{F}$$

pour construire un morphisme

$$\Phi_{\mathcal{F}}\colon R\Gamma(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mathcal{F}) \to R\Gamma(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}),$$

où $\mathcal{F}^{\mathrm{ad}} = u^*\mathcal{F}$. Fargues a posé la conjecture [**Far20a**, Conjecture 3.11] que $\Phi_{\mathcal{F}}$ soit toujours un isomorphisme.
Maintenant on explique comment réduire le problème de démontrer que $\Phi_{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme en un problème plus concret :

Lemme 2.1. Si $\Phi_{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible de la forme $\pi_*(M)$, où $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est un morphisme fini plat qui est fini étale au-dessus d'un ouvert dense, où X' est un schéma noethérien, régulier de dimension 1, M est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module fini, alors $\Phi_{.}$ est un isomorphisme pour tout faisceau constructible.

Comme les objets $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ jouent un rôle essentiel pour la suite, on leur donne un nom :

Définition 5. On appelle revêtement ramifié de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ une paire (X', π), où X' est un schéma noethérien, régulier de dimension 1 et $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est un morphisme fini, plat, qui est fini étale au-dessus d'un ouvert dense de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.

Voici la preuve du lemme 2.1 ci-dessus :

Démonstration. La preuve est simplement une modification de la preuve de [**Sta22**, Tag 09Z6] (un résultat standard dans la théorie de la cohomologie étale pour les schémas). Pour le lecteur impatient on peut déjà dire que le point clé est que la courbe schématique (en caractéristique 0 !) admet un recouvrement par les spectres des anneaux de Nagata ; ce qui implique que la normalisation reste bien finie.
Voici les détails : soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module constructible sur $X^{\text{alg}}_{E,F}$. D'abord, on peut trouver un ouvert dense $j\colon U \subseteq X^{\text{alg}}_{E,F}$, tel que $\mathcal{F}\mid_U =: \mathcal{L}$ est un système local.[7] Soit $Z = \{x_1, ..., x_n\}$ le fermé complémentaire ; tous les x_i sont des points fermés et les corps résiduels $\kappa(x_i)$ sont algébriquement clos, car F l'est par hypothèse.[8] Soit i_{x_i} l'immersion fermée du point x_i. On a donc $i^*_{x_i}(\mathcal{F}) =: M_i$, $i = 1, ..., n$ où M_i est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module fini. De plus, on peut trouver un recouvrement fini étale

$$\dot{\pi}\colon V \to U,$$

tel que $\dot{\pi}^*(\mathcal{L}) = \underline{M}_V$, où M est encore un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module fini. Par adjonction, on a un morphisme

$$\phi\colon \mathcal{F} \to j_*\dot{\pi}_*\dot{\pi}^*j^*(\mathcal{F}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} i_{x_i*}i^*_{x_i}(\mathcal{F}) =: \mathcal{G}_0.$$

On affirme que le morphisme ϕ est injectif.
Soient $x \in U$ et $\bar{x}$ un point géométrique au-dessus de x et soit $\bar{y}$ un point géométrique de V, qui s'envoie sur $\bar{x}$. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{\bar{x}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & (j_*\dot{\pi}_*(\underline{M}_V))_{\bar{x}} \arrow[d] \\ (\dot{\pi}^*j^*(\mathcal{F}))_{\bar{y}} \arrow[r, "="] & (\underline{M}_V)_{\bar{y}}. \end{tikzcd}$$

Ce diagramme implique alors que le morphisme d'adjonction

$$\phi_V : \mathcal{F} \to j_*\dot{\pi}_*\dot{\pi}^*j^*(\mathcal{F})$$

est injectif pour tout point $x \in U$. De la même façon, on démontre que les morphismes d'adjonctions

$$\phi_{x_i} : \mathcal{F} \to i_{x_i*}i^*_{x_i}(\mathcal{F})$$

sont injectifs dans les points x_i, pour $i = 1, ..., n$. Il en résulte que le morphisme ϕ est injectif.
Maintenant on affirme qu'on a

$$R\Gamma(X^{\text{alg}}_{E,F}, \mathcal{G}_0) \simeq R\Gamma(X^{\text{ad}}_{E,F}, \mathcal{G}^{\text{ad}}_0).$$

Soit $\pi\colon X' \to X^{\text{alg}}_{E,F}$ la normalisation de $X^{\text{alg}}_{E,F}$ dans V. On obtient alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\dot{\pi}"] & X' \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "j"] & X^{\text{alg}}_{E,F}. \end{tikzcd}$$

On affirme que le morphisme π est fini plat : il est fini parce que $X^{\text{alg}}_{E,F}$ admet un recouvrement par des anneaux principaux qui sont de plus des E-algèbres ; ce sont donc des anneaux de Nagata ([**Sta22**, Tag 0335]). Le morphisme est plat parce qu'il n'y a pas de torsion dans le faisceau structurel $\mathcal{O}_{X'}$. De plus, X' est un schéma intègre, normal (de dimension 1, donc régulier) et le résultat [**Sta22**, Tag 09Z5] implique alors que $j'_*(\underline{M}_V) \simeq \underline{M}_{X'}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} j_*\dot{\pi}_*\dot{\pi}^*j^*(\mathcal{F}) &= (j \circ \dot{\pi}_*)(\underline{M}_V) \\ &= (\pi \circ j')_*(\underline{M}_V) \\ &= \pi_*(\underline{M}_{X'}). \end{aligned}$$

[7]Soit $X = \coprod_{i\in I} X_i$ une stratification constructible, tel que $\mathcal{F}\mid_{X_i}$ soit un système local. Soit $i \in I$, tel que $\eta \in X_i$. Ici $\eta \in X^{\text{alg}}_{E,F}$ est le point générique. On peut trouver un voisinage ouvert U de η, qui est contenu dans X_i ([**Sta22**, Tag 0AAW]) ; c'est l'ouvert dense cherché.

[8]On rappelle que les $\kappa(x_i)$ sont des de-basculements de F.

On sait maintenant qu'on peut trouver pour tout faisceau constructible une injection vers un faisceau constructible pour lequel on sait déjà que le morphisme de comparaison est un isomorphisme ; sous les hypothèses imposées dans l'énoncé. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow ...,$$

où on sait déjà que $\Phi_{\mathcal{G}_i}$ sont des isomorphismes - on en déduit que $\Phi_{\mathcal{F}}$ lui aussi est un isomorphisme. $\square$

2.2. GAGA : revêtements ramifiés. Soit $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ un revêtement ramifié, c.f. définition 5. D'après la proposition de Huber ([**Hub94**, Proposition 3.8.]) qu'on vient d'utiliser, on peut construire un espace adique, fortement noethérien X'^{ad} sur $\mathrm{Spa}(E)$, qui se place dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X'^{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\pi^{\mathrm{ad}}"] \arrow[d, "f'"] & X^{\mathrm{ad}}_{E,F} \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \end{tikzcd}$$

tel que X'^{ad} est caractérisé par une propriété universelle appropriée (c.f. l'énoncé de la proposition de Huber qu'on vient de cité). De fait, il n'est pas très difficile de décrire l'espace X'^{ad} localement d'une façon explicite : soient $t_1, t_2 \in H^0(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}}(1))$ et $D_+(t_i) = \mathrm{Spec}(B_{e_i})$, où $B_{e_i} = (B[1/t_i])^{\varphi=1}$, tels que

$$D_+(t_1) \cup D_+(t_2) = X^{\mathrm{alg}}_{E,F},$$

i.e. t_1, t_2 ne sont pas colinéaires dans le E-espace vectoriel $H^0(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}}(1))$. Soient I_1, I_2 des intervalles compacts dans $[0,1]$, tels que $\varphi(I_i) \cap I_i = \emptyset$ et $V(t_i) \cap Y_{I_i} = \emptyset$, tel que $Y_{I_1} \cup Y_{I_2} = X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$. Les morphismes $B \to B_{I_i}$ induisent donc des morphismes $B_{e_i} \to B_{I_i}$. Comme le morphisme $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est fini et plat,

$$X' \times_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}} \mathrm{Spec}(B_{e_i}) = \mathrm{Spec}(B'_{e_i}),$$

où B'_{e_i} est une B_{e_i}-algèbre finie plate (donc localement libre, parce que B_{e_i} est noethérien). On peut alors considérer $B'_{I_i} = B'_{e_i} \otimes_{B_{e_i}} B_{I_i}$. C'est une E-algèbre topologique munie de la topologie canonique en tant que B_{I_i}-module fini (en particulier c'est une E-algèbre de Banach). Soit $B'^{+}_{I_i}$ la clôture intégrale de $B'_{e_i} \otimes_{B_{e_i}} B^+_{I_i}$ dans B'_{I_i}. Alors $(B'_{I_i}, B'^{+}_{I_i})$ est une paire affinoïde de Huber et on a

$$X'^{\mathrm{ad}} \times_{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}} \mathrm{Spa}(B_{I_i}, B^+_{I_i}) = \mathrm{Spa}(B'_{I_i}, B'^{+}_{I_i}),$$

en effet ; pour le voir on peut démontrer que $\mathrm{Spa}(B'_{I_i}, B'^{+}_{I_i})$ vérifie bien la propriété universelle de la proposition [**Hub94**, Proposition 3.8.]. En particulier, on voit très bien que

$$\pi^{\mathrm{ad}}\colon X'^{\mathrm{ad}} \to X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$$

est un morphisme localement libre, i.e. $\pi^{\mathrm{ad}}_*(\mathcal{O}_{X'})$ est un fibré vectoriel sur $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$; si $\mathcal{E}'$ est un fibré vectoriel sur X'^{ad}, alors $\pi^{\mathrm{ad}}_*(\mathcal{E}')$ l'est aussi.

Proposition 2.2. Il y a une équivalence entre les catégories des fibrés vectoriels sur X' et X'^{ad}, qui est induite par

$$f'^*\colon \mathrm{Fib}(X') \to \mathrm{Fib}(X'^{\mathrm{ad}}),$$

où $f'\colon X'^{\mathrm{ad}} \to X'$ est le morphismes d'espaces localement annelés introduit ci-dessus.

Démonstration. On observe d'abord que le foncteur $\pi_*(.)$ de $\mathrm{Fib}(X')$ vers la catégorie des paires $(\mathcal{E}, \mathrm{act})$, où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}}$-module localement libre et act est une structure de $\mathcal{A} = \pi_*(\mathcal{O}_{X'})$-module sur $\mathcal{E}$, est pleinement fidèle. De fait, c'est le cas parce que $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est fini localement libre. De plus, parce que $\pi^{\mathrm{ad}}\colon X'^{\mathrm{ad}} \to X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ lui aussi est fini localement libre, $\pi^{\mathrm{ad}}_*(.)$ est un foncteur pleinement fidèle de $\mathrm{Fib}(X'^{\mathrm{ad}})$ vers la catégorie des pairs $(\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}, \mathrm{act})$, où $\mathcal{E}^{\mathrm{ad}} \in \mathrm{Fib}(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})$ et act est une structure de $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} = \pi^{\mathrm{ad}}_*(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}}})$-module sur $\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}$. D'après [**FS21**, Prop. II.2.7] il y a une équivalence de GAGA

$$\mathrm{Fib}(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}) \simeq \mathrm{Fib}(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}).$$

La donnée de act est équivalente à la donnée d'un morphisme d'$\mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}}$-algèbres

$$\mathcal{A} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}}}(\mathcal{E}).$$

De la même façon, la donnée d'une action de $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ sur $\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}$ est équivalente à la donnée d'un morphisme d'$\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{ad}}}$-algèbres

$$\mathcal{A}^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{ad}}}}(\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}).$$

D'après l'équivalence de GAGA pour la courbe, on déduit une équivalence entre les catégories des paires $(\mathcal{E}, \mathrm{act})$ et $(\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}, \mathrm{act})$. Dans cette étape on a utilisé que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ sont des fibrés vectoriels et que $\mathcal{A}$ s'envoie vers $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$ dans l'équivalence $\mathrm{Fib}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}) \simeq \mathrm{Fib}(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})$.
Il résulte que le foncteur induit par f'^*

$$\mathrm{Fib}(X') \to \mathrm{Fib}(X'^{\mathrm{ad}})$$

est pleinement fidèle. Il faut donc se convaincre qu'il est également essentiellement surjectif. L'image essentielle de $\mathrm{Fib}(X')$ dans la catégorie des paires $(\mathcal{E}, \mathrm{act})$ sous le foncteur $\pi_*(.)$ est caractérisé par la condition que $\mathcal{E}$ soit également fini localement libre comme $\mathcal{A}$-module ; l'énoncé pareil est vrai sur la côté adique.
Soit maintenant $(\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}, \mathrm{act})$ une paire, tel que $\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}$ est aussi fini localement libre comme $\mathcal{A}^{\mathrm{ad}}$-module et $(\mathcal{E}, \mathrm{act})$ la paire qui lui correspond. Il faut donc démontrer que $\mathcal{E}$ est aussi un $\mathcal{A}$-module fini localement libre. On observe d'abord qu'on peut trouver un recouvrement affine $X_{E,F}^{\mathrm{alg}} = \bigcup_{i\in I} U_i$, tel que $\mathcal{E}|_{U_i}$ est un $\mathcal{A}|_{U_i}$-module fini. De fait cela se déduit de l'observation suivante : soit $R \to R'$ un morphisme d'anneaux et M un R'-module tel que M est fini comme R-module, alors il est fini comme R'-module. En effet, soit $R^n \twoheadrightarrow M$ une surjection, alors en appliquant $. \otimes_R R'$ on a une surjection $R'^n \to M \otimes_R R'$ de R'-modules et parce que M est aussi un R'-module on a une surjection $M \otimes_R R' \twoheadrightarrow M$ de R'-modules. Par le lemme de Nakayama, l'ensemble

$$\{x \in X_{E,F}^{\mathrm{alg}} \colon \mathcal{E}_x \text{ est un } \mathcal{A}_x\text{-module libre}\}$$

est ouvert.
Ensuite, on réinterprète la paire $(\mathcal{E}, \mathrm{act})$ comme un $\mathcal{O}_{X'}$-module cohérent $\mathcal{E}'$. Il faut démontrer que pour tout point fermé $x' \in |X'|$ les germes $\mathcal{E}'_{x'}$ sont libres sur $\mathcal{O}_{X',x'}$, si on suppose que $f'^*(\mathcal{E}') = \mathcal{E}'^{\mathrm{ad}}$ est localement libre comme $\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}}}$-module. On sait qu'on a une bijection entre points fermés $|X_{E,F}^{\mathrm{alg}}|$ et points classiques $|X_{E,F}^{\mathrm{ad}}|^{\mathrm{cl}}$. Si $x \in |X_{E,F}^{\mathrm{alg}}|$ correspond à $x^{\mathrm{ad}} \in |X_{E,F}^{\mathrm{ad}}|^{\mathrm{cl}}$, il y a une bijection entre la fibre de $\pi \colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ au-dessus du point x et la fibre de $\pi^{\mathrm{ad}} \colon X'^{\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ au-dessus du point x^{ad}. On trouve ainsi un point maximal $x'^{\mathrm{ad}} \in |X'^{\mathrm{ad}}|$, tel que $x'^{\mathrm{ad}} \mapsto x'$.
Par hypothèse

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ad}}_{x'^{\mathrm{ad}}} \simeq \mathcal{E}_{x'} \otimes_{\mathcal{O}_{X',x'}} \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x'^{\mathrm{ad}}}$$

est libre. Le lemme 2.3 ci-dessous implique que le morphisme $\mathcal{O}_{X',x'} \to \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x'^{\mathrm{ad}}}$ est fpqc et on peut en déduire que $\mathcal{E}_{x'}$ est libre. □

On a utilisé le lemme suivant :

Lemme 2.3. (a) : L'anneau local $\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x'^{\mathrm{ad}}}$ est noethérien.
(b) : Le morphisme $\mathcal{O}_{X',x'} \to \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x'^{\mathrm{ad}}}$ est fpqc.

Démonstration. On commence par la preuve de (a). Il suffit de démontrer que $\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$ est noethérien pour un point classique. Comme x'^{ad} est un point maximal, l'anneau local $\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x'^{\mathrm{ad}}}$ est alors fini au-dessus de l'anneau local $\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$ (c.f. [**Hub96**, Prop. 1.5.4.]).
Ensuite on suit l'argument pour le résultat analogue dans la géométrie rigide classique (c.f. [**BGR84**, Prop. 7 dans 7.3.2.]) : l'anneau local se calcule dans un voisinage affinoïde $\mathrm{Spa}(B_I)$ et x^{ad} correspond ainsi à un ideal maximal $\mathfrak{m}_{x^{\mathrm{ad}}}$ dans B_I. La complétion $\mathfrak{m}_{x^{\mathrm{ad}}}$-adique de l'anneau B_I est isomorphe à la complétion de l'anneau $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$; c'est simplement $B_{dR}^+(\kappa(x^{\mathrm{ad}}))$. Il en résulte que $\mathcal{O}_{\mathrm{Spa}(B_I),x^{\mathrm{ad}}} \hookrightarrow B_{dR}^+(\kappa(x^{\mathrm{ad}}))$: il suffit de démontrer que si l'image $f_x \in \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$ d'une fonction $f \in B_I$ est dans $\cap_n \mathfrak{m}^n_{x^{\mathrm{ad}}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$, alors $f = 0$. Il en utilisant $B_I/\mathfrak{m}^n_{x^{\mathrm{ad}}} \simeq \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}/\mathfrak{m}^n_{x^{\mathrm{ad}}}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$, on déduit $f \in \cap_n \mathfrak{m}^n_{x^{\mathrm{ad}}}$. Comme la localisation $B_{I,\mathfrak{m}_{x^{\mathrm{ad}}}}$ est noethérienne, par le théorème de Krull, on a $f = 0$. Soit ξ un générateur de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{x^{\mathrm{ad}}}$. L'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$ est engendré par l'image de ξ dans cet anneau. Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}})$, tel que $\xi \notin \mathfrak{p}$. Alors $\mathfrak{p} \subseteq (\xi)$, ce qui implique que pour $a \in \mathfrak{p}$, aussi $a/\xi \in \mathfrak{p}$, i.e. $\xi\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Comme $B_{dR}^+(\kappa(x^{\mathrm{ad}}))$ est un anneau de valuation discrète, on peut en déduire $\mathfrak{p} = 0$. Cela implique que $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}) = \{0, (\xi)\}$; l'anneau local est donc bien un anneau de valuation discrète.
Pour (b), on observe d'abord que d'après (a) on sait que le morphisme $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$ est fpqc.

Soit $\pi^{-1}(x) = \{x'_1, ..., x'_n\}$ et $(\pi^{\mathrm{ad}})^{-1}(x^{\mathrm{ad}}) = \{x'^{\mathrm{ad}}_1, ..., x'^{\mathrm{ad}}_n\}$. On note qu'il suffit de démontrer que le morphisme

$$\prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X',x'_i} \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}},x'^{\mathrm{ad}}_i}$$

est fpqc. Néanmoins cette application s'identifie au changement de base de $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}},x^{\mathrm{ad}}}$ le long de $B_e \to B'_e$. Elle est donc bien fpqc. $\square$

2.3. L'annulation implique la comparaison. Dans cette section on démontre (c.f. Corollaire 2.16) que si on savait

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \mathcal{F}) = H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0, \tag{9}$$

pour $i \geq 3$ et tous les faisceaux constructibles $\mathcal{F}$ sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, la comparaison, Conjecture 1.1, est vraie. Plus tard on démontre l'égalité (9) dans le cas de ℓ-torsion, $\ell \neq p$ (c.f. proposition 3.1 pour la courbe adique et proposition 3.5 pour la courbe algébrique).

2.3.1. *Qu'est-ce qu'il est fait exactement dans cette section ?* Je rappelle d'abord qu'on a déjà réduit la conjecture de comparaison à l'énonce

$$H^i(X', \mathbb{F}_\ell) \simeq H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_\ell), \tag{10}$$

où $i \geq 0$, $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est un revêtement ramifié et ℓ un nombre premier arbitraire (c.f. lemme 2.1). Comme on suppose l'égalité (9), on a

$$H^i(X', \mathbb{F}_\ell) = H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_\ell) = 0,$$

pour tout ℓ et $i \geq 3$.[9]

En utilisant l'équivalence de GAGA pour tout revêtement ramifié (proposition 2.2) on voit tout de suite que l'égalité (10) est bien vérifié pour $i = 0, 1$ (c.f. la preuve de la proposition 2.15 pour plus de détails). Le point essentiel est ainsi de traiter le cas où $i = 2$: encore par GAGA et la suite exacte de Kummer, il suffit de démontrer que le groupe de Brauer de X'^{ad} est isomorphe au groupe de Brauer cohomologie. Pour cette étape je me suis fortement inspiré d'un résultat de Gabber ; il a démontré dans sa thèse [**Gab81**] le théorème suivant : si S est un schéma séparé qui admet un recouvrement par deux affines, alors on a

$$\mathrm{Br}(S) \simeq \mathrm{Br}'(S)$$

(c.f. théorème 2.9). Comme X'^{ad} est un espace adique séparé, recouvert par deux affinoides, il est naturel d'essayer d'adapter la preuve du théorème de Gabber. Pour cette étape j'ai trouvé que le mieux est de suivre la preuve du résultat de Gabber donnée par Lieblich dans sa thèse ([**Lie04**]) : il utilise des faisceaux tordus sur des gerbes et dans mon approche je le suis presque mot pour mot.

2.3.2. *Rappels sur le groupe de Brauer et les faisceaux tordus.* Soit X un espace adique fortement noethérien sur un corps non-archimédien $(K, \mathcal{O}_K)$, qu'on suppose d'être de caractéristique 0.[10] On adopte la définition d'une algèbre d'Azumaya suivante :

Définition 6. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau analytique d'$\mathcal{O}_X$-algèbres. Le faisceau $\mathcal{A}$ s'appelle algèbre d'Azumaya, si le $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent est fini localement libre et il existe un recouvrement étale $f\colon Y \to X$ et un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur Y, tel que

$$f^*(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}).$$

Le degré d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ est le rang d'un fibré vectoriel qui trivialise $\mathcal{A}$.

Comme pour les schémas il existe une description équivalente qui est purement 'cohérente' :

Lemme 2.4. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau analytique en $\mathcal{O}_X$-algèbres, tel que le $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent est fini localement libre. Les deux conditions sont équivalentes :

(a) : $\mathcal{A}$ est une algèbre d'Azumaya,

(b) : le morphisme canonique d'$\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\psi\colon \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}),$$

donné par $a \otimes b \mapsto (x \mapsto axb)$, est un isomorphisme.

[9] Plus tard on démontre $H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0$ pour tout revêtement ramifié, c.f. proposition 3.6.

[10] Pour pouvoir utiliser l'exactitude de la suite exacte de Kummer.

Démonstration. On démontre d'abord que (a) implique (b). Afin d'expliquer que ψ est bien un isomorphisme, on peut travailler sur la localisation stricte de l'espace adique X dans un point géométrique ξ (c.f. [**Hub96**, Def. 2.5.11]). Sur la localisation stricte on peut utiliser qu'on sait déjà que ψ est un isomorphisme pour les algèbres de matrices usuelles.
(b) implique (a) : on peut supposer d'abord que X est affinoïde et soit $x \in X$. Soit $\bar{x}$ un point géométrique au-dessus de x et soit $X(\bar{x}) = (\mathcal{O}_{X(\bar{x})}, \mathcal{O}^+_{X(\bar{x})})$ la localisation stricte de X au point $\bar{x}$. L'algèbre $\mathcal{A}|_{X(\bar{x})}$ correspond à une algèbre sur $\mathcal{O}_{X(\bar{x})}$, tel que le morphisme ψ soit un isomorphisme. Il en résulte, qu'on a un isomorphisme

$$\mathcal{A}|_{X(\bar{x})} \simeq \mathrm{Mat}_m(\mathcal{O}_{X(\bar{x})}).$$

On peut donc trouver un voisinage étale affinoïde U de x, tel que $\mathcal{A}|_U \simeq \mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}_U)$. En prenant l'union disjointe de tous ces voisinages étales, on trouve le recouvrement étale cherché. □

On considère le schéma affine en groupes $\mathrm{PGL}_{n,K}$ sur K. Alors on note

$$\mathrm{PGL}_n^{\mathrm{ad}} = \mathrm{PGL}_n \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K),$$

où on a pris le produit fibré au sens de la proposition [**Hub94**, Proposition 3.8.]. Pour tout espace affinoïde $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ au-dessus de $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$, on a

$$\mathrm{PGL}_n^{\mathrm{ad}}(R, R^+) = \mathrm{PGL}_n(R).$$

Lemme 2.5. Il y a un isomorphisme entre faisceaux étales dans $\widetilde{X}_{\text{ét}}$,

$$\mathrm{PGL}_{n,X}^{\mathrm{ad}} = \mathrm{PGL}_{n,K}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(K,\mathcal{O}_K)} X \simeq \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})).$$

Démonstration. Il existe un morphisme entre faisceaux étales dans $\widetilde{X}_{\text{ét}}$,

$$\mathrm{PGL}_{n,X}^{\mathrm{ad}} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}))$$

et il suffit de démontrer qu'il induit un isomorphisme sur les localisations strictes. Ici on peut utiliser l'énonce analogue pour des schémas. □

Par la descente étale il résulte de ce lemme qu'on a une bijection

$$\{\text{algèbres d'Azumaya sur } X \text{ de degré } n\}/\text{iso} \simeq H^1_{\text{ét}}(X, \mathrm{PGL}_{n,X}^{\mathrm{ad}}).$$

Définition 7. Soit X un espace adique fortement noethérien sur $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$. Le groupe de Brauer ('cohérent') de X est le groupe (via le produit tensoriel) de toutes les algèbres d'Azumaya sur X, modulo la relation d'équivalence suivante : on dit que $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, s'il existe des fibrés vectoriels $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sur X, et un isomorphisme

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}').$$

On a le résultat suivant de type GAGA pour le groupe de Brauer :

Lemme 2.6. (a) : Soit (A, A^+) une paire affinoïde fortement noethérienne sur $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$, alors on a

$$\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A)) \simeq \mathrm{Br}(\mathrm{Spa}(A, A^+)).$$

(b) : Soit $\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ un revêtement ramifié, alors on a

$$\mathrm{Br}(X') \simeq \mathrm{Br}(X'^{\,\mathrm{ad}}).$$

Démonstration. En utilisant le lemme 2.4 ci-dessus, les deux points (a) et (b) résultent des équivalences de catégories $\mathrm{Fib}(\mathrm{Spa}(A, A^+)) \simeq \mathrm{Fib}(\mathrm{Spec}(A))$ (un résultat de Kedlaya-Liu [**KL15**, Thm. 2.7.7.]) et $\mathrm{Fib}(X') \simeq \mathrm{Fib}(X'^{\mathrm{ad}})$ (Prop. 2.2). □

Maintenant on explique le lien avec le groupe de Brauer cohomologique ; ce groupe est défini de la façon suivante :

$$\mathrm{Br}'(X) := H^2(X, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})_{\mathrm{tors}}.$$

En utilisant la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\det} \mathrm{PGL}_n^{\mathrm{ad}} \longrightarrow 1, \tag{11}$$

on a une injection[11]

$$\iota\colon \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}'(X)$$

[11] L'argument usuel s'applique aussi : en négligeant les algèbres d'Azumaya de la forme $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ on force l'injectivité du morphisme de connexion c.f. [**Gir71**, V.4. 4.4.]

et la classe de cohomologie d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ est notée $[\mathcal{A}] \in \mathrm{Br}'(X)$.
Le prochain objectif est d'expliquer un critère pour déterminer quand une classe $c \in \mathrm{Br}'(X)$ est de la forme $[\mathcal{A}]$ pour une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X. Ce critère est formulé en utilisant des faisceaux tordus localement libres sur des gerbes. Comme je n'ai pas trouvé dans la littérature une bonne théorie des champs 'géométriques' pour des espaces adiques il n'existe donc a priori pas une bonne théorie des faisceaux sur ces champs. Il faut faire ainsi un peu attention !
Soit X encore un espace adique fortement noethérien sur $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$, où K est un corps NA de caractéristique 0. Comme Huber dans [**Hub96**] on peut ainsi considérer le petit site étale de X, noté $(X)_{\text{ét}}$. On suit la définition du stacks-project d'un champ dans le site $(X)_{\text{ét}}$, i.e. on prend la définition [**Sta22**, Tag 026F] (i.e. une catégorie fibrée en groupoïdes au-dessus de $(X)_{\text{ét}}$, telle que le foncteur des morphismes entre objets dans la catégorie fibrée est un faisceau sur $(X)_{\text{ét}}$ et toute donnée de descente est effective). Un tel champ $\mathfrak{X}$ admet un gros site étale, noté $(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$. Les objets sont des espaces adiques fortement noethériens S, étales au-dessus de X, avec la donnée d'un morphisme entre catégories fibrées $f\colon S \to \mathfrak{X}$ (i.e. une section du champ $\mathfrak{X}$) et les morphismes entre $f\colon S \to \mathfrak{X}$ et $g\colon S' \to \mathfrak{X}$ sont des morphismes $\psi\colon S \to S'$ au-dessus de $\mathfrak{X}$, i.e. un morphisme $S \to S'$ au-dessus de X avec un 2-isomorphisme

$$\phi\colon g \circ \psi \simeq f.$$

Les recouvrements sont engendrés par les recouvrements étales $S \to S'$. Avec cette définition j'affirme qu'il s'agit bien d'un site : les isomorphismes sont des recouvrements et on peut tester localement sur S la propriété d'être un recouvrement ; les recouvrements sont stables par changement de base parce qu'on ne travaille qu'avec des espaces adiques qui sont (localement) fortement noethériens. Sur ce site on a le faisceau des anneaux, noté $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, qui associe à $(f\colon S \to \mathfrak{X}) \in (\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$ les sections globales $H^0(S, \mathcal{O}_S)$. On affirme qu'on a un morphisme de topoi annelés

$$\pi\colon (\widetilde{(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \to (\widetilde{(X)_{\text{ét}}}, \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}).$$

De fait, si $\mathcal{F} \in \widetilde{(X)_{\text{ét}}}$, alors $\pi^*(\mathcal{F}) \in \widetilde{(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}}$ est le faisceau qui associée à $(S \to \mathfrak{X}) \in (\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$ l'objet $\mathcal{F}(S)$; on a donc par définition que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = \pi^*\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$. Si $p\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme entre champs sur $(X)_{\text{ét}}$, on a un morphisme de topoi induit $p\colon \widetilde{(\mathfrak{Y})_{\text{Ét}}} \to \widetilde{(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}}$: si $\mathcal{F}$ un faisceau dans $\widetilde{(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}}$ et $(f\colon S \to \mathfrak{Y}) \in (\mathfrak{Y})_{\text{Ét}}$ un objet dans le site, alors on a $p^*\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}(p \circ f)$.
Maintenant on introduit quelques exemples de champs qui vont être importants pour la suite.

Définition 8. Une $\mathbb{G}_m^{\text{ad}}$-gerbe sur $(X)_{\text{ét}}$ est la donnée d'un champ $\mathfrak{X}$ sur $(X)_{\text{ét}}$ et, pour toute section $x \in \mathfrak{X}(S)$, d'un isomorphisme entre faisceaux étales sur S,

$$i_x\colon \underline{\mathrm{Aut}}(x) \simeq \mathbb{G}_{mS}^{\text{ad}},$$

tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) : Soit $S \in (X)_{\text{ét}}$, alors il existe un recouvrement étale $S' \to S$, tel qu'il existe une section dans $\mathfrak{X}(S')$.
(b) : Soit $x, y \in \mathfrak{X}(S)$, il existe un recouvrement étale $S' \to S$, tel que $x|_{S'} \simeq y|_{S'}$ dans $\mathfrak{X}(S')$.
(c) : Soit $x \simeq y$ dans $\mathfrak{X}(S)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_{mS}^{ad} \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "i_y"] & \underline{\mathrm{Aut}}(y) \arrow[dl] \\ \underline{\mathrm{Aut}}(x). & \end{tikzcd}$$

D'après un théorème de Giraud (c.f. [**Gir71**, IV.3.]) on sait qu'il existe une bijection naturelle entre classes d'isomorphisme de $\mathbb{G}_m^{\text{ad}}$-gerbes et classes de cohomologie dans $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m^{\text{ad}})$.

Remarque 8. (a) : En remplaçant le groupe $\mathbb{G}_m^{\text{ad}}$ par le groupe μ_n^{ad}, on obtient la notion d'une μ_n^{ad}-gerbe sur X.
(b) : L'exemple de base d'une $\mathbb{G}_m^{\text{ad}}$-gerbe est le champ classifiant $B\mathbb{G}_m^{\text{ad}}$, qui associe à $S \in (X)_{\text{ét}}$ le groupoïde des fibrés en droites sur S. Localement pour la topologie étale sur X, toute $\mathbb{G}_m^{\text{ad}}$-gerbe sur X est de cette forme.
(c) : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'Azumaya sur X. Soit $\mathrm{Triv}(\mathcal{A})$ le champs sur $(X)_{\text{ét}}$, qui associe à $S \in (X)_{\text{ét}}$ le groupoïde des paires $(\mathcal{W}, \psi)$, où $\mathcal{W}$ est un fibré vectoriel sur S et $\psi\colon \mathcal{A}|_S \simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{W})$ est un

isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres. Triv($\mathcal{A}$) est ainsi une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe sur X (c.f. [**Gir71**, V.4. 4.2.]), telle que

$$[\mathrm{Triv}(\mathcal{A})] = [\mathcal{A}] \in H^2(X, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}),$$

(c.f. [**Gir71**, V.4. Remarque 4.5.]).

On observe que sur la $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe Triv($\mathcal{A}$), il existe une certaine structure supplémentaire ; celle d'un fibré vectoriel $\mathcal{W}^{\mathrm{uni}}$ satisfaisant la propriété que les deux actions de $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$, l'une donnée par la structure $\mathcal{O}_{\mathrm{Triv}(\mathcal{A})}$-linéaire sur $\mathcal{W}^{\mathrm{uni}}$ et l'autre par l'action inertielle (c.f. en bas), coïncident. Même si cette observation semble un peu triviale, sur des $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbes générales c'est exactement la bonne condition pour vérifier si la classe de cohomologie de cette gerbe est induite par une algèbre d'Azumaya.
Soit maintenant $\mathfrak{X} \to X$ une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$ (resp. μ_n^{ad}) gerbe sur X. On considère un faisceau $\mathcal{F}$ sur $(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$. Dans cette situation on a une action

$$\mathcal{F} \times \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}} \to \mathcal{F}.$$

De fait, soit $s\colon S \to \mathfrak{X}$ une section de la gerbe et soit $\lambda_S \in \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}(S) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}(s)(S)$. Par définition de ce qu'est un faisceau $\mathcal{F}$ sur $(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$, λ_S induit un isomorphisme

$$\lambda_S^*(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}.$$

Sur les sections cela induit une action

$$\lambda_S^*\colon \mathcal{F}(S) \to \mathcal{F}(S).$$

Cette action s'appelle l'action inertielle (c.f. [**Lie08**, Def. 2.2.1.6.]).
On parvient à la définition d'un faisceau tordu sur une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe :

Définition 9. Soit $\mathfrak{X}$ une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe (resp. μ_n^{ad}) sur X.

(a) : Un fibré vectoriel (de rang constant n) sur $\mathfrak{X}$ est un morphisme de champs sur $(X)_{\text{ét}}$,

$$\mathfrak{X} \to \mathrm{Fib}_n,$$

où Fib_n est le champs sur $(X)_{\text{ét}}$ qui classifie les fibrés vectoriels de rang n.

(b) : Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module sur $(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$. La structure $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire sur $\mathcal{E}$ induit une action par multiplication avec les scalaires

$$\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$

Le faisceau $\mathcal{E}$ s'appelle faisceau tordu si l'action sur la gauche associée à l'action inertielle (une action sur la droite) coïncide avec l'action par multiplication avec les scalaires.

(c) : Un faisceau n-tordu sur une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$ gerbe $\mathfrak{X}$ sur X est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathcal{E}$ sur $(\mathfrak{X})_{\text{Ét}}$, tel que l'action sur la gauche associée à l'action inertielle coïncide avec l'action par multiplication avec des scalaires relevée à la puissance n-ième. Un faisceau 1-tordu est ainsi un faisceau tordu. Un faisceau localement libre n-tordu est un faisceau n-tordu $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{X}$, tel que $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel.

Voici les propriétés de base qui seront nécessaire pour la suite.

Lemme 2.7. Soit $\mathfrak{X}$ une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe (resp. une μ_n^{ad}-gerbe) sur X.

(a) : Soient $\mathcal{E}$ resp. $\mathcal{F}$ des faisceaux n- resp. m-tordus, localement libres sur $\mathfrak{X}$. Alors $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ est un faisceau $n+m$-tordu, localement libre, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un faisceau $n-m$-tordu, localement libre.

(b) : Le tiré en arrière le long des morphismes de topoi annelés

$$\pi\colon \widetilde{(\mathfrak{X})_{\text{ét}}} \to \widetilde{(X)_{\text{ét}}}$$

induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux localement libres 0-tordus et les $\mathcal{O}_{(X)_{\text{ét}}}$-modules localement libres.

(c) : On peut recoller les faisceaux localement libres, tordus le long des recouvrements analytique de X. Plus précisément : soit $X = U \cup V$ un recouvrement par des ouverts analytiques. On suppose qu'on se donne des faisceaux tordus localement libres $\mathcal{P} \neq 0$ sur $\mathfrak{X} \times_X U$ et $\mathcal{Q}$ sur $\mathfrak{X} \times_X V$, tel que

$$\mathcal{Q}|_{U\cap V} \simeq \mathcal{P}|_{U\cap V} .$$

Alors il existe un unique faisceau tordu, localement libre $\mathcal{M}$ sur $\mathfrak{X}$, tel que $\mathcal{M}|_U \simeq \mathcal{P}$ et $\mathcal{M}|_V \simeq \mathcal{Q}$.

(d) : On suppose que $c \mapsto c'$ par $H^2(X, \mu_n^{\mathrm{ad}}) \to H^2(X, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$ et que $\mathfrak{X}_c$ resp. $\mathfrak{X}_{c'}$ sont des μ_n^{ad}-gerbes resp. $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbes sur X, représentants de c resp. c'. Alors il existe un 1-morphisme

$$F\colon \mathfrak{X}_c \to \mathfrak{X}_{c'},$$

tel que pour toute $x = (f\colon S \to \mathfrak{X}_c) \in \mathfrak{X}_c(S)$, le morphisme induit par F

$$\underline{\mathrm{Aut}(x)} \simeq \mu_{n,S}^{\mathrm{ad}} \to \underline{\mathrm{Aut}(F(x))} \simeq \mathbb{G}_{m,S}^{\mathrm{ad}}$$

s'identifie au changement de base du morphisme canonique $\mu_n^{\mathrm{ad}} \to \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$. Le tiré en arrière le long de F induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux tordus localement libres sur $\mathfrak{X}_{c'}$ et sur $\mathfrak{X}_c$.

Démonstration. Le point (a) est formel. Le point (b) sans la condition 'localement libre' est démontré par Lieblich dans sa thèse, c.f. [**Lie04**, Lemma 2.1.1.17.] : la condition d'être 0-tordu implique simplement que l'action inertielle est triviale. Cela implique que le morphisme d'adjonction (qui vient simplement de la définition d'un morphisme entre topoi annelés)

$$\pi^*\pi_*(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$$

est un isomorphisme ; cette étape est expliquée par Lieblich dans la preuve loc.cit.[12] Il en résulte que $\mathcal{E}$ est de la forme $\pi^*(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{(X)_{\text{ét}}}$-module. J'affirme que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{(X)_{\text{ét}}}$-module localement libre. Par définition, on peut vérifier ceci localement sur la topologie étale sur X. On peut donc supposer, que la $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe soit scindée, i.e. de la forme $X \times_{\mathrm{Spa}(K)} B\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$. Soit $s\colon X \to X \times_{\mathrm{Spa}(K)} B\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$ la section de la projection $\pi\colon X \times_{\mathrm{Spa}(K)} B\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}} \to X$. Le faisceau localement libre, 0-tordu $\mathcal{E}$ est maintenant un fibré vectoriel sur $X \times_{\mathrm{Spa}(K)} B\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$. On a donc

$$\mathcal{F} \simeq s^*(\pi^*(\mathcal{F})) \simeq s^*(\mathcal{E})$$

et $\mathcal{F}$ est bien un fibré vectoriel.
Pour démontrer le point (c), il est préférable de prendre un autre point du vue sur des faisceaux tordus ; celui de Caldararu : on pense à la gerbe $\mathfrak{X}$ comme représentant d'une classe de cohomologie $[\mathfrak{X}] \in H^2(X, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$. On peut trouver un hyper-recouvrement augmenté[13] pour la topologie étale $X_\bullet \to X$, avec une section $\alpha \in H^0(X_2, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$, qui représente la classe $[\mathfrak{X}]$ et telle que le cobord sur X_3 est trivial (c'est un théorème de Verdier qu'on utilise ici, c.f. [**SGA72**, Exposé V.7]). Un faisceau tordu, localement libre au sens de Caldararu est alors la donnée d'une paire $(\mathcal{F}, g)$, où $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel sur X_0 et

$$g\colon \mathrm{pr}_1^{(1)*}(\mathcal{F}) \simeq \mathrm{pr}_2^{(1)*}(\mathcal{F}),$$

tel que

$$\mathrm{pr}_1^{(2)*}(g) \circ \mathrm{pr}_2^{(2)*}(g) = \alpha \cdot \mathrm{pr}_3^{(2)*}(g),$$

c.f. [**Lie04**, Def. 2.1.3.1]. D'après [**Lie04**, Prop. 2.1.3.11.], les catégories des faisceaux tordus localement libres comme dans la définition Déf. 9 et les faisceau tordus localement libres au sens de Caldararu sont équivalentes (ici on utilise que le résultat de Lieblich marche dans la généralité d'un topos annelé et que dans l'équivalence qu'il a démontrée les faisceaux localement libres sont identifiés sur les deux côtés).[14]
En utilisant cette interprétation, il est facile de démontrer que l'on peut recoller les faisceaux tordus localement libres comme cherché : la classe de cohomologie étale $[\mathfrak{X}] \mid_U \in H^2(U, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$ (resp. $[\mathfrak{X}] \mid_V \in H^2(V, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$ resp. $[\mathfrak{X}] \mid_{U\cap V} \in H^2(U \cap V, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$) est représentée par l'hyper-recouvrement augmenté $X_\bullet \times_X U \to U$ (resp. pour V resp. $U \cap V$) et la section $\alpha \mid_{X_2 \times_X U} \in H^0(X_2 \times_X U, \mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}})$ (resp. $\alpha \mid_{X_2 \times_X V}$ resp. $\alpha \mid_{X_2 \times_X U \cap V}$).

Étant donné des faisceaux tordus localements libres $\mathcal{P}$ sur $\mathfrak{X} \times_X U$ resp. $\mathfrak{X} \times_X V$; ils correspondent à des faisceaux tordus au sens de Caldarau, i.e. à des paires $(\mathcal{F}_U, g)$ resp. $(\mathcal{F}_V, h)$ avec un isomorphisme sur $U \cap V$. Comme X_2 admet un recouvrement analytique par $X_2 \times_X U$ et $X_2 \times_X V$ avec intersection

[12] Ici $\pi_*(\mathcal{E})$ est a priori qu'un $\mathcal{O}_{(X)_{\text{ét}}}$-module (c.f. la définition du stacks project [**Sta22**, Tag 03D6]).

[13] Je rappelle qu'un hyper-recouvrement augmenté $U_\bullet \to X$ est un object simplicial $U_\bullet$ dans $(X)_{\text{ét}}$ avec $U_{-1} = X$ et on exige que pour $n \geq -1$,

$$U_{n+1} \to (\mathrm{cosk}_n(U_\bullet)_{\leq n})_{n+1}$$

est un recouvrement pour la topologie étale.

[14] La construction du foncteur entre les deux version des faisceaux tordus n'est pas si triviale : d'apres [**Lie04**, Prop. 2.1.3.6.] - c'est l'ingrédient non-trivial - un trouve une section $x\colon U_0 \to \mathfrak{X}$, tel que les deux tirés en arrières $x_1, x_2 \colon U_1 \to \mathfrak{X}$ sont isomorphes. Si on fixe un tel isomorphisme $\varphi\colon x_0 \simeq x_1$, on a $\delta(\varphi) = a$. Si maintenant $\mathcal{E}$ est un faisceau tordu localement libre sur $\mathfrak{X}$ comme défini avant, on peut considérer $\mathcal{F} := x^*(\mathcal{E})$. Par définition, l'isomorphisme φ donne un isomorphisme $\psi\colon \mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_0$. Le cobord est donné par multiplication avec a, parce qu'on a exigé dans la définition d'un faisceau tordu que l'action intertiale coïncide avec la multiplication par les scalaires.

$X_2 \times_X U \cap V$, on peut recoller les faisceaux localement libres $\mathcal{P}$ resp. $\mathcal{Q}$ le long de l'isomorphisme donné sur $U \cap V$.
Pour finir la preuve, on aborde la preuve du point (d). L'existence du 1-morphisme $F \colon \mathfrak{X}_c \to \mathfrak{X}_{c'}$ est expliqué dans [**Lie04**, Lemma 2.1.2.3]. En utilisant le point de vue des faisceaux tordus au sens de Caldararu, le fait que F induit une équivalence entre faisceaux tordus localement libres devient une trivialité. $\square$

Le lemme suivant est maintenant sans surprise.

Lemme 2.8. Soit $c \in \mathrm{Br}'(X)$ et $\mathfrak{X}_c \to X$ une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe sur X, représentant de la classe c. Alors c est contenue dans $\mathrm{Br}(X)$ si et seulement s'il existe sur $\mathfrak{X}_c$ un faisceau tordu, non-nul, localement libre.

Démonstration. Si $c = [\mathcal{A}]$ on a $\mathfrak{X}_c \simeq \mathrm{Triv}(\mathcal{A})$ et sur $\mathrm{Triv}(\mathcal{A})$ on a le faisceau tordu, non-nul, localement libre $\mathcal{W}^{\mathrm{uni}}$ défini juste après la remarque 8. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau tordu, non-nul, localement libre sur $\mathfrak{X}_c$, alors $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ est d'après le lemme 2.7 (a), (b) équivalent à une $\mathcal{O}_X$-algèbre avec $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent localement libre. Comme la gerbe est étale localement scindée, c'est donc bien une algèbre d'Azumaya sur X. $\square$

2.3.3. *Le théorème de Gabber dans le cadre analytique.* On rappelle d'abord que Gabber a démontré dans sa thèse le résultat suivant :

Théorème 2.9. (Gabber)
Soit X un schéma séparé[15], qu'on peut écrire
$$X = U \cup V,$$
où U, V sont des schémas affines. Alors on a
$$\mathrm{Br}(X) \simeq \mathrm{Br}'(X).$$

La preuve est donnée dans [**Gab81**, Chapter II, Theorem 1]. Le plus important, dans cette preuve, est le résultat de recollement suivant ([**Gab81**, Lemma 2, Part II]) : soit $c \in \mathrm{Br}'(X)$ une classe de cohomologie et soient $\mathcal{A}_U$ et $\mathcal{A}_V$ sur U resp. V des algèbres d'Azumaya, telles que
$$c|_U = [\mathcal{A}_U] \text{ et } c|_V = [\mathcal{A}_V].$$
Alors on peut trouver une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X, telle que $c = [\mathcal{A}]$. Lieblich a donné dans sa thèse [**Lie04**] une preuve de ce résultat en utilisant des faisceaux tordus : ici on a changé de perspective ; au lieu d'essayer recoller des algèbres d'Azumaya (modulo équivalence de Brauer) on veut plutôt recoller des faisceaux tordus (sur des gerbes).
On suit cette approche (i.e. la preuve de la proposition [**Lie08**, Prop. 3.1.4.5.]) pour démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.10. Soit X un espace adique, fortement noethérien sur $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$, où K est un corps non archimédien de caractéristique 0, tel que
$$X = U \cup V,$$
où U, V sont des affinoïdes et $U \cap V$ est toujours affinoïde. Alors on a
$$\mathrm{Br}(X) \simeq \mathrm{Br}'(X).$$

Maintenant on se tourne vers la preuve de la proposition 2.10. D'abord, on observe qu'il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.11. Soit $\mathfrak{X} \to X$ une μ_n^{ad}-gerbe sur X. Sur $\mathfrak{X}$ il existe un faisceau tordu, non-nul, localement libre de rang constant.

De fait, soit $c \in \mathrm{Br}'(X)$ une classe de cohomologie ; elle correspond à une $\mathbb{G}_m^{\mathrm{ad}}$-gerbe $\mathfrak{X}_c \to X$ sur X. Par la suite exacte de Kummer, on peut relever la classe c à une classe $c' \in H^2(X, \mu_n^{\mathrm{ad}})$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Celle-ci correspond à une μ_n^{ad}-gerbe $\mathfrak{X}_{c'} \to X$. D'après le lemme 2.7,(d), on a une équivalence entre faisceaux tordus localement libres sur $\mathfrak{X}_c$ et $\mathfrak{X}_{c'}$. On peut déduire du lemme 2.11 ci-dessus l'existence d'un faisceau tordu, non-nul, localement libre de rang constant sur $\mathfrak{X}_c$; en passant à l'algèbre des endomorphismes on en déduit l'existence d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X, tel que $c = [\mathcal{A}]$.
Il suffit alors de démontrer le lemme 2.11 ci-dessus.

[15] C'est une hypothèse nécessaire ! Un contre-exemple a été donné par Edidin, Hassett, Kresch, Vistoli [**?**, Corollary 3.11].

Avant d'attaquer la proposition 2.10 directement, on va d'abord traiter le cas affinoïde ; ici on utilise de fait le résultat de Gabber ci-dessus comme ingrédient.

LEMME 2.12. Soit $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ un espace adique affinoïde, fortement noethérien sur $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$. Alors on a

$$\mathrm{Br}(\mathrm{Spa}(A, A^+)) \simeq \mathrm{Br}'(\mathrm{Spa}(A, A^+)).$$

DÉMONSTRATION. On observe d'abord qu'il y a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(\mathrm{Spa}(A, A^+)) \arrow[r] & \mathrm{Br}'(\mathrm{Spa}(A, A^+)) \\
\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Br}'(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et il faut démontrer que la flèche horizontale en haut est un isomorphisme : par le résultat de Gabber en haut (Théorème 2.9) la flèche $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A)) \to \mathrm{Br}'(\mathrm{Spec}(A))$ est un isomorphisme et d'après GAGA, lemme 2.6, la flèche $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A)) \to \mathrm{Br}(\mathrm{Spa}(A, A^+))$ est un isomorphisme. Il suffit alors de démontrer que $\mathrm{Br}'(\mathrm{Spec}(A)) \simeq \mathrm{Br}'(\mathrm{Spa}(A, A^+))$. Pour cela, on rappelle le résultat de comparaison crucial de Huber : comme le faisceau μ_n^{ad} est par définition le tiré en arrière du faisceau μ_n le long du morphisme $\mathrm{Spa}(A, A^+) \to \mathrm{Spec}(A)$ et l'anneau de Tate A est par hypothèse complet, on a

$$H^i(\mathrm{Spa}(A, A^+),\, \mu_n^{\mathrm{ad}}) \simeq H^i(\mathrm{Spec}(A),\, \mu_n)$$

par [**Hub96**, Thm. 3.2.9].[16] Maintenant on peut comparer les deux suites exactes de Kummer et en déduire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A))_{[n]} \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathrm{Spec}(A),\, \mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}'(\mathrm{Spec}(A))[n] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathrm{Spa}(A, A^+))_{[n]} \arrow[r] & H^2(\mathrm{Spa}(A, A^+),\, \mu_n^{ad}) \arrow[r] & \mathrm{Br}'(\mathrm{Spa}(A, A^+))[n] \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

pour tout n. En utilisant le résultat de Kedlaya-Liu [**KL15**, Thm. 2.7.7.]), on voit que

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A))_{[n]} \simeq \mathrm{Pic}(\mathrm{Spa}(A, A^+))_{[n]}.$$

Finalement, on a

$$\mathrm{Br}'(\mathrm{Spec}(A)) \simeq \mathrm{Br}'(\mathrm{Spa}(A, A^+)),$$

d'où le lemme. □

Maintenant on observe le corollaire suivant du lemme 2.12, qui concerne encore le cas affinoïde :

COROLLAIRE 2.13. Soit $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ un espace adique affinoïde, fortement noethérien sur $\mathrm{Spa}(K, \mathcal{O}_K)$ et soit $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ une μ_n^{ad}-gerbe. Alors il existe un faisceau tordu, non-nul, localement libre et de rang constant sur $\mathfrak{X}$.

DÉMONSTRATION. Ici on utilise simplement 'l'invariance sous le groupe' pour des faisceaux tordus localement libres, 2.7, (d), et le lemme 2.12 qu'on vient de démontrer. □

Le cas affinoïde compris, on tourne vers la preuve du lemme 2.11. A partir de maintenant, on suit la preuve donné par Lieblich dans [**Lie08**, Prop.3.1.4.5.] presque mot pour mot. Comme lui, on a besoin d'une petite injection de la K-théorie :

LEMME 2.14. [17] Soit R un anneau commutatif avec unité.

(a) : Soit $P \neq 0$ un R-module projectif, de rang constant. Si $P^{\otimes n}$ est libre pour un $n \neq 0 \in \mathbb{N}$, alors il existe $m \neq 0 \in \mathbb{N}$, tel que $P^{\oplus m}$ est libre.

(b) : Soit $P \neq 0$ de nouveau un R-module projectif, de rang constant et $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors on peut trouver des R-modules non-nuls, finis libres F_0, F_1 et un R-module projectif, de rang constant $\overline{P} \neq 0$, tels que

$$P \otimes_R \otimes \overline{P}^{\otimes n} \otimes_R F_0 \simeq F_1.$$

[16] Dans l'application cherchée on a seulement besoin de l'énoncé du lemme dans le cas où K est de plus algébriquement clos, on peut donc trivialiser μ_n et utiliser directement le résultat comme énoncé par Huber dans [**Hub96**, Corollary 3.2.2.].

[17] Même si ce lemme a l'air élémentaire, pour la preuve on doit utiliser des résultats de K-théorie ; notamment le fait que le noyau de l'application 'rang' est un nil-idéal.

Pour la preuve c.f. [**Lie08**, Lemma 3.1.4.3 et Corollary 3.1.4.4].
Finalement, on peut commencer la preuve du lemme 2.11 : soit $\mathfrak{X} \to X$ une μ_n^{ad}-gerbe sur X. On note $U = \mathrm{Spa}(A_1, A_1^+)$, $V = \mathrm{Spa}(A_2, A_2^+)$ et $U \cap V = \mathrm{Spa}(A_3, A_3^+)$. On peut prendrer la restriction de la gerbe donnée et considérer $\mathfrak{X}|_U \to U$ et $\mathfrak{X}|_V \to V$. D'après le corollaire 2.13, on peut trouver des faisceaux tordus, non-nuls, localement libres de rangs constants $\mathcal{P}$ sur $\mathfrak{X}|_V$ et $\mathcal{Q}$ sur $\mathfrak{X}|_U$. L'objectif est bien sûr de les recoller pour construire le faisceau tordu sur $\mathfrak{X} \to X$.
En considérant des sommes directes de copies de $\mathcal{P}$ resp. $\mathcal{Q}$, on peut supposer que $\mathrm{rg}(\mathcal{P}) = \mathrm{rg}(\mathcal{Q})$. Comme ces sont des faisceaux tordus sur des μ_n^{ad}-gerbes, $\mathcal{P}^{\otimes n}$ resp. $\mathcal{Q}^{\otimes n}$ sont 0-tordus ; d'après le lemme 2.7,(b), $\mathcal{P}^{\otimes n}$ (resp. $\mathcal{Q}^{\otimes n}$) correspond donc à un A_1-module (resp. A_2-module) non-nul, fini projectif de rang constant. On se réduit d'abord au cas où ce sont des modules libres.
Par lemme 2.14, (b), on peut trouver des A_1-modules finis libres F_0, F_1 (resp. des A_2-modules finis libres G_0, G_1) et un A_1-module $\overline{P} \neq 0$ fini projectif de rang constant (resp. un A_2-module $\overline{Q} \neq 0$ fini projectif de rang constant), tel qu'on a

$$\mathcal{P}^{\otimes n} \otimes_{A_1} \overline{P}^{\otimes n} \otimes_{A_1} F_0 \simeq F_1 \tag{12}$$

(resp.

$$\mathcal{Q}^{\otimes n} \otimes_{A_2} \overline{Q}^{\otimes n} \otimes_{A_2} G_0 \simeq G_1.) \tag{13}$$

On considère maintenant les A_1-modules $F_0, F_1, \overline{P}$ (resp. les A_2-modules $G_0, G_1, \overline{Q}$) comme des fibrés vectoriels sur U (resp. V) ; en utilisant le lemme 2.7,(b), on peut les considérer aussi comme des faisceaux localement libres 0-tordus sur la gerbe $\mathfrak{X}|_U$ (resp. $\mathfrak{X}|_V$). D'après le lemme 2.7, (a), on peut remplacer le faisceau tordu $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$) par le faisceau tordu $\mathcal{P} \otimes \overline{P} \otimes F_0$ (resp. $\mathcal{Q} \otimes \overline{Q} \otimes G_0$) ; ces faisceaux tordus vérifient bien que leur n-ième puissance tensorielle soit finie libre.
Maintenant on veut expliquer pourquoi on peut recoller ces faisceaux tordus : sur l'intersection $U \cap V$ on peut considérer les faisceaux $1 - 1 = 0$-tordus suivants :

$$P := \mathcal{Q}^{\vee}|_{U\cap V} \otimes \mathcal{Q}|_{U\cap V},$$

et

$$Q := \mathcal{P}|_{U\cap V} \otimes \mathcal{Q}^{\vee}|_{U\cap V}.$$

Ici on note par $(.)|_{U\cap V}$ le tiré en arrière des faisceaux tordus localement libres le long du morphisme de μ_n^{ad}-gerbes $\mathfrak{X}|_{U\cap V} \to \mathfrak{X}|_U$ resp. $\mathfrak{X}|_{U\cap V} \to \mathfrak{X}|_V$. Trivialement, on a un isomorphisme entre faisceaux tordus

$$\mathcal{P}|_{U\cap V} \otimes P \simeq \mathcal{Q}|_{U\cap V} \otimes Q. \tag{14}$$

On l'utiliser pour construire la donnée de recollement : on observe d'abord qu'après la réduction qu'on vient d'effectuer, on est dans une situation où les A_3-modules projectifs $P^{\otimes n}$ et $Q^{\otimes n}$ sont en effet libres. D'après le lemme 2.14 (a), il résulte qu'on peut trouver un $m >> 0$, tel que $P^{\oplus m}$ et $Q^{\oplus m}$ sont libres. L'isomorphisme (14), implique un isomorphisme

$$\mathcal{P}|_{U\cap V} \otimes P^{\oplus m} \simeq \mathcal{Q}|_{U\cap V} \otimes Q^{\oplus m},$$

i.e. pour un $M \geq 0$, on a

$$\mathcal{P}^{\oplus M}|_{U\cap V} \simeq \mathcal{Q}^{\oplus M}|_{U\cap V}.$$

Comme on sait d'après le lemme 2.7,(c), que l'on peut recoller les faisceaux tordus le long du recouvrement $X = U \cup V$, on peut appliquer ce fait aux faisceaux tordus $\mathcal{P}^{\oplus M}$ et $\mathcal{Q}^{\oplus M}$ en utilisant l'isomorphisme qu'on vient de construire. Cela permet de finir la preuve du lemme 2.11 et donc finalement aussi la preuve de la proposition 2.10.

2.3.4. *L'annulation implique la comparaison : Preuve.*

Proposition 2.15. Soit ℓ un nombre premier et $\pi \colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ un revêtement ramifié. Le morphisme de comparaison induit un isomorphisme

$$H^i(X', \mathbb{F}_\ell) \simeq H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_\ell),$$

pour $i = 0, 1, 2$.

Démonstration. On commence par le cas $i = 0$: ici on a $H^0(X', \mathbb{F}_\ell) = (\mathbb{F}_\ell)^{\pi_0(X')}$ et $H^0(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_\ell) = (\mathbb{F}_\ell)^{\pi_0(X'^{\mathrm{ad}})}$. Il faut donc expliquer pourquoi il existe une bijection entre les composantes connexes de X' et X'^{ad}. Comme le schéma X' est noethérien, les composantes connexes sont en bijection avec les idempotents indécomposables dans $H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$. De plus, comme l'espace adique X'^{ad} est localement connexe, il en résulte qu'il y a aussi une bijection entre les composantes connexes de X'^{ad} et les idempotentes indécomposables dans $H^0(X'^{\mathrm{ad}}, \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}}})$. Finalement, on peut appliquer GAGA pour la courbe et le fait que les morphismes π et π^{ad} sont finis localement libres, pour en déduire la suite des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} H^0(X', \mathcal{O}_{X'}) &= H^0(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}, \pi_* \mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}}) \\ &\simeq H^0(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \pi^{\mathrm{ad}}_* \mathcal{O}_{X^{\mathrm{ad}}E,F}) \\ &= H^0(X'^{\mathrm{ad}}, \mathcal{O}_{X'^{\mathrm{ad}}}). \end{aligned}$$

La bijection entre les idempotents indécomposables en résulte.
Pour le cas $i = 1$, on affirme qu'il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements finis étales de X' et de X'^{ad}. Cela suffit pour comparer les $\mathbb{F}_\ell$-torseurs sur X' et X'^{ad}. On observe d'abord que l'équivalence GAGA pour X' resp. X'^{ad} implique une équivalence entre revêtements finis localement libres de X' et X'^{ad}; il faut donc expliquer pourquoi la propriété d'être fini étale se correspond. Soit $f\colon Y \to X'$ un morphisme fini localement libre et $f^{\mathrm{ad}}\colon Y^{\mathrm{ad}} \to X'^{\mathrm{ad}}$ l'adification associé. Si f est fini étale, le morphisme f^{ad} l'est aussi. On suppose maintenant que f^{ad} est fini étale et on démontre que f est aussi fini étale. Comme f est plat, il suffit de démontrer que $\Omega_{Y/X'} = 0$. Comme le lieu dans Y, où f est non-ramifié est un ouvert et Y est localement noethérien[18], il suffit de démontrer que $\Omega_{Y/X',y_0} = 0$ pour tout point fermé $y_0 \in |Y|$.
Maintenant, on observe qu'on peut trouver un point maximal $y^{\mathrm{ad}} \in |Y^{\mathrm{ad}}|$, tel que $y^{\mathrm{ad}} \mapsto y_0$. De fait, $f(y_0)$ est un point fermé dans X' et on trouve un point maximal $x'^{\mathrm{ad}} \in |X'^{\mathrm{ad}}|$, tel que $x'^{\mathrm{ad}} \mapsto f(y_0)$ et x'^{ad} s'envoie vers un point classique dans $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$. Maintenant il faut utiliser qu'il existe une bijection entre la fibre du morphisme $f\colon Y \to X'$ au-dessus du point $f(y_0)$ et la fibre du morphisme $f^{\mathrm{ad}}\colon Y^{\mathrm{ad}} \to X'^{\mathrm{ad}}$ au-dessus du point x'^{ad}.
Pour finir la preuve, il suffit de démontrer que

$$(\Omega_{Y/X'})^{\mathrm{ad}} \simeq \Omega_{Y^{\mathrm{ad}}/X'^{\mathrm{ad}}}.$$

De fait, cet isomorphisme implique

$$(\Omega_{Y/X'})_{y_0} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y_0}} \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{ad}},y^{\mathrm{ad}}} \simeq (\Omega_{Y^{\mathrm{ad}}/X'^{\mathrm{ad}}})_{y^{\mathrm{ad}}} = 0.$$

Comme le morphisme $\mathcal{O}_{Y,y_0} \to \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{ad}},y^{\mathrm{ad}}}$ est fidèlement plat (c.f. la preuve du lemme 2.3), il en résulte que $(\Omega_{Y/X'})_{y_0} = 0$.
Pour démontrer l'isomorphisme ci-dessus, il suffit de le faire localement sur Y^{ad}. On travaille sur le recouvrement affinoïde suivant : soit $\{\mathrm{Spec}(B_{e'_i})\}_i$ un recouvrement affine du schéma X' et $\{\mathrm{Spa}(B'_i)\}_i$ un recouvrement affinoïde, tel que $B_{e'_i} \to B'_i$ (ici on utilise le recouvrement construit dans la discussion qui a précédé la preuve du lemme 2.2). Soit $\{f^{-1}(\mathrm{Spec}(B_{e'_i}))\}_i = \{\mathrm{Spec}(A_i)\}_i$, un recouvrement de Y. $\{\mathrm{Spa}(A \otimes_{B_{e'_i}} B'_i)\}_i$ est alors un recouvrement de Y^{ad}. En utilisant que dans cette situation, on a

$$\Omega_{\mathrm{Spa}(A \otimes_{B_{e'_i}} B'_i)/\,\mathrm{Spa}(B'_i)} \simeq \Omega_{A \otimes_{B_{e'_i}} B'_i/B'_i}$$

(i.e. la topologie ne joue pas de rôle, c.f. [**Hub96**, Construction (1.6.2.),(iii)]) on peut bien vérifier l'isomorphisme cherché.
Finalement, pour $i = 2$, on a besoin d'un isomorphisme $\mathbb{F}_\ell \simeq \mu_\ell$. Soit donc E' une extension galoisienne de E, qui contient une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Il y a deux suites spectrales :

$$H^i(\mathrm{Gal}(E'/E), H^j(X'_{E'}, \mathbb{F}_\ell) \Rightarrow H^{i+j}(X', \mathbb{F}_\ell)$$

et

$$H^i(\mathrm{Gal}(E'/E), H^j(X'^{ad}_{E'}, \mathbb{F}_\ell)) \Rightarrow H^{i+j}(X'^{ad}, \mathbb{F}_\ell).$$

Il suffit donc de démontrer qu'il y a un isomorphisme entre $\mathrm{Gal}(E'/E)$-modules

$$H^j(X'_{E'}, \mathbb{F}_\ell) \simeq H^j(X'^{\mathrm{ad}}_{E'}, \mathbb{F}_\ell),$$

pour $j = 0, 1, 2$. D'après ce qu'on a déjà expliqué avant, il suffit d'expliquer le cas $j = 2$. Néanmoins ici on peut utiliser l'identification entre le groupe de Brauer cohomologique et cohérent de $X'^{\mathrm{ad}}_{E'}$ (proposition 2.10) ; ce qui implique

$$\mathrm{Br}'(X'_{E'}) \simeq \mathrm{Br}'(X'^{\mathrm{ad}}_{E'}),$$

[18]Cela implique qu'un point quelconque se spécialise dans un point fermé [**Sta22**, 02IL].

GAGA pour $X'_{E'}$ (proposition 2.2, lemme 2.6 (b)) et la suite exacte de Kummer, pour déduire

$$H^2(X'_{E'},\, \mu_\ell) \simeq H^2(X'^{\mathrm{ad}}_{E'},\, \mu_\ell).$$

□

Corollaire 2.16. Si pour tout revêtement ramifié $X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, on a

$$H^i(X',\, \mathbb{F}_\ell) = 0,$$

pour $i \geq 3$, alors le morphisme de comparaison est un isomorphisme, i.e.

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F},\, \mathcal{F}) \simeq H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F},\, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}),$$

pour $i \geq 0$ et $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_\ell$-module constructible sur le site étale de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.

Démonstration. Cela résulte directement du lemme 2.1 et le lemme 2.15, qu'on vient d'expliquer. [19] □

Remarque 9. Cette comparaison est aussi vraie pour les adifications des ensembles ouverts $U \subseteq X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ avec coefficients $\mathbb{F}_\ell$, où $\ell \neq p$, i.e. on a

$$R\Gamma(U,\, \mathbb{F}_\ell) \simeq R\Gamma(U^{\mathrm{ad}},\, \mathbb{F}_\ell).$$

Néanmoins on n'a pas besoin de cette observation pour la suite.
De fait, soient $i\colon Z \hookrightarrow X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ et $i^{\mathrm{ad}}\colon Z^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ les inclusions des fermés complémentaires. Comme d'habitude, parce qu'on a déjà établi la comparaison $R\Gamma(X^{\mathrm{alg}}_{E,F},\, \mathbb{F}_\ell) \simeq R\Gamma(X^{\mathrm{ad}}_{E,F},\, \mathbb{F}_\ell)$, il suffit de vérifier la pureté cohomologique pour i resp. i^{ad}, i.e. il s'agit d'expliquer pourquoi on a des isomorphismes $Ri^!\mathbb{F}_\ell(1)[2] \simeq \mathbb{F}_\ell$ et $Ri^{\mathrm{ad}!}\mathbb{F}_\ell(1)[2] \simeq \mathbb{F}_\ell$. L'isomorphisme $Ri^!\mathbb{F}_\ell(1)[2] \simeq \mathbb{F}_\ell$ résulte de la pureté absolue de Gabber [**Fuj02**].[20] Pour l'isomorphisme dans le monde adique, on observe d'abord qu'il suffit de démontrer la pureté pour une paire (Y_I, Z^{ad}), où Y_I est une couronne affinoïde suffisamment petite, telle que $Z^{\mathrm{ad}} \subset Y_I$. Maintenant, il suffit de démontrer que

$$Rf^{\lozenge!}\mathbb{F}_\ell \simeq \mathbb{F}_\ell(1)[2],$$

où $f\colon Y_I^{\lozenge} \to \mathrm{Spa}(F)$ est le morphisme structurel vers $\mathrm{Spa}(F)$ du diamant. En utilisant la présentation $Y_I^{\lozenge} = A_I/\underline{\mathbb{Z}_p}$, où A_I est la perfection d'une couronne dans la boule ouverte épointée sur $\mathrm{Spa}(F)$, on peut déduire l'isomorphisme $Rf^{\lozenge!}\mathbb{F}_\ell \simeq \mathbb{F}_\ell(1)[2]$ du fait qu'on connait déjà le complexe dualisant sur A_I ([**Sch22**, Thm. 24.1]) en utilisant le résultat [**Sch22**, Prop. 24.2.] (on rappelle ici qu'en utilisant le dernier résultat on doit choisir une mesure de Haar sur $\mathbb{Z}_p$).

3. Quelques résultats sur l'annulation de la cohomologie

3.1. ℓ-dimension cohomologique de $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$. Soit ℓ un nombre premier, $\ell \neq p$. L'objectif ici est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.1. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_\ell$-module dans $(\widetilde{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}})_{\text{ét}}$. Alors on a

$$H^i_{\text{ét}}(X^{\mathrm{ad}}_{E,F},\, \mathcal{F}) = 0$$

pour $i \geq 3$.

Pour la preuve on utilise la présentation du diamant $(X^{\mathrm{ad}}_{E,F})^{\lozenge}$ suivante : soit $E(\mu_{p^\infty})$ l'extension cyclotomique infinie de E, construite en ajoutant tous les racines p-ème d'unité dans une clôture algébrique de E choisie ; c'est une extension galoisienne infinie. Le caractère cyclotomique identifie le groupe $\mathrm{Gal}(E(\mu_{p^\infty})/E)$ à un sous-groupe infini et fermé de $\mathbb{Z}_p^*$. Comme la partie de torsion d'un tel groupe est forcement finie, on en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Gal}(E(\mu_{p^\infty})/E) \simeq \mathbb{Z}_p \times \Delta,$$

où Δ est un groupe fini. Soit $E_\infty = (E(\mu_{p^\infty}))^{\Delta}$; c'est une extension de Galois infinie de E avec groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}_p$: cette extension s'appelle la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E. La complétion p-adique $\widehat{E_\infty}$ est un corps perfectoïde. On peut alors appliquer au corps E_∞ la théorie du corps des

[19] On rappelle qu'ici qu'on est en train d'utiliser des résultats d'annulation qu'on explique un peu plus tard ; notamment prop. 3.5, prop. 3.1, la remarque 15 juste après prop. 3.6.

[20] Comme on travaille ici qu'en dimension 1 on n'a pas vraiment besoin de toute la force de la pureté absolue et dans SGA 5 I. 5.1. on peut trouver un argument plus facile.

normes de Fontaine-Wintenberger : soit $X_E(E_\infty)$ le corps des normes associé ; c'est un corps de valuation discrète de caractéristique p, avec corps résiduel isomorphe à celui de E_∞ (et, comme E_∞ est une colimite d'extension totalement ramifiées de E, c'est simplement $\mathbb{F}_q$). En particulier, on en déduit un isomorphisme non-canonique entre $X_E(E_\infty)$ et $\mathbb{F}_q(\!(t)\!)$. De plus, la théorie des corps du normes dit que le basculement $(\widehat{E_\infty})^\flat$ s'identifie à la perfection completée de $X_E(E_\infty)$, c.f. [**EG21**, Thm. 2.1.6] ; on en déduit que $(\widehat{E_\infty})^\flat$ est non-canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}_q(\!(t^{1/p^\infty})\!)$. Cela implique un isomorphisme

$$(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamond \simeq (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})/\underline{\mathbb{Z}_p}.$$

Ici le choix de la variable t sur la boule unité ouverte épointée $\mathbb{B}_F^{1,\circ,*}$ sur $\mathrm{Spa}(F)$, correspond au choix d'un isomorphisme $(\widehat{E_\infty})^\flat \simeq \mathbb{F}_q(\!(t^{1/p^\infty})\!)$. Maintenant on peut donner la preuve de la proposition ci-dessus :

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_\ell$-module étale sur $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$. Comme le site et la cohomologie étale d'un espace adique analytique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Z}_p)$ ne changent pas si on passe au diamant associé, [**Sch22**, Lemma 15.6], on a la formule suivante :

$$R\Gamma(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma((X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamond, \mathcal{F}^\diamond) \simeq R\Gamma(\mathbb{Z}_p, R\Gamma(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}, \mathcal{G})),$$

où $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{F}_\ell$-module étale sur $\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}$. La raison pour laquelle on a choisi cette présentation du diamant de $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$, est que maintenant on peut utiliser que $\mathbb{Z}_p$ est un pro-p groupe et comme on est dans le cas où $\ell \neq p$, la suite de Hochschild-Serre[21] implique

$$H^i((X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^\diamond, \mathcal{F}^\diamond) = H^0(\mathbb{Z}_p, H^i(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}, \mathcal{G})),$$

pour $i \geq 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathrm{cd}_\ell(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \leq 2$. L'espace perfectoïde $\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}$ est qcqs et donc en particulier un diamant spatial. Par [**Sch22**, Prop. 21.11], on a

$$\mathrm{cd}_\ell(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \leq \dim_{\mathrm{Krull}}(|\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}|) + \sup_y \mathrm{cd}_\ell(\kappa(y)),$$

où le supremum est pris sur tous les points maximaux dans $\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}$. Comme l'action de φ_F sur $\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}$ est proprement discontinue,

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(|\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}|) = \dim_{\mathrm{Krull}}(|\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}|) = 1.$$

Il faut donc déterminer $\mathrm{cd}_\ell(\kappa(y))$, où $y \in \mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}$ est un point maximal. Ici on peut soit utiliser un résultat de Scholze, qui dit que parce que $f\colon \mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spa}(F, \mathcal{O}_F)$ est un morphisme entre diamants spatiaux avec $\mathrm{dim.trg}(f) = 1$, on a $\mathrm{cd}_\ell(\kappa(y)) \leq 1$ c.f. [**Sch22**, Prop. 21.16], soit on peut utiliser des résultats de Berkovich : le corps résiduel complété $\kappa(y)$ s'identifie au corps résiduel complété d'un point maximal dans la perfection d'une couronne suffisamment petite $A(\rho, \rho') \subseteq \mathbb{B}_F^{1,\circ,*}$.[22] Soit $y' \in A(\rho,\rho')$ le point maximal qui correspond à y et soient $L(y')$ le corps résiduel non-complété resp. $\kappa(y')$ le corps résiduel complété de $A(\rho,\rho')$ en y'. Il faut donc comprendre $\mathrm{cd}_\ell(\widehat{\kappa(y')^{\mathrm{perf}}})$. En utilisant [**Ber93**, Prop. 2.4.1.](ici on utilise [**Ber93**, Prop. 2.4.3.] pour s'assurer que les hypothèses sont bien vérifiées : la condition que l'anneau des entiers est hensélien est stable sous perfection et complétion), on déduit

$$\mathrm{Gal}((\widehat{\kappa(y')^{\mathrm{perf}}})^{\mathrm{sep}}/\widehat{\kappa(y')^{\mathrm{perf}}}) \simeq \mathrm{Gal}((\kappa(y')^{\mathrm{perf}})^{\mathrm{sep}}/\kappa(y')^{\mathrm{perf}}) \simeq \mathrm{Gal}(\kappa(y')^{\mathrm{sep}}/\kappa(y')).$$

Le résultat [**Ber93**, Thm. 2.3.3.] dit que $L(y')$ est quasi-complet (c.f. [**Ber93**, Def.2.3.1.]), donc on peut oublier le procédé de complétion (encore par [**Ber93**, Prop. 2.4.1.]) pour calculer la ℓ-dimension cohomologique et à ce point là on peut simplement utiliser [**Ber93**, Thm. 2.5.1.] ; théorème qui dit

$$\mathrm{cd}_\ell(\mathrm{Gal}(L(y'))^{\mathrm{sep}}/L(y')) \leq \mathrm{cd}_\ell(F) + \dim(|A(\rho,\rho')^{\mathrm{Berk}}|) = 1.$$

□

[21]Cette suite spectrale existe parce qu'on considère ici seulement des faisceaux, avec des valeurs discrètes, qui viennent du site étale.

[22]Cette notation est différent de celle dans [**Ber93**] : il note $\kappa(x)$ le corps résiduel non-complété et $\mathcal{H}(x)$ le corps résiduel complété.

3.2. ℓ-dimension cohomologique de $E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})$. Soient ℓ toujours un nombre premier, $\ell \neq p$ et $E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})$ le corps de fonctions de la courbe algébrique.

PROPOSITION 3.2. On a

$$\mathrm{cd}_\ell(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) \leq 1.$$

L'idée est la suivante : on reformule d'abord l'énoncé que $\mathrm{cd}_\ell(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) \leq 1$ en une assertion sur l'annulation des groupes de Brauer des revêtements ramifiés. Puis on peut appliquer GAGA (proposition 2.2) pour ces revêtements ramifiés afin de se réduire à démontrer l'annulation de la ℓ-torsion dans le groupe de Brauer de l'adification. Finalement on peut finir l'argument en utilisant qu'il résulte de la preuve de la proposition 3.1 que pour tout point maximal $x \in X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ on a $\mathrm{cd}_\ell(\kappa(x)) \leq 1$.[23]
On commence par le lemme suivant ; la preuve ressemble à celle donnée par Fargues dans [**Far20a**, Cor. 2.5.].

LEMME 3.3. Pour démontrer $\mathrm{cd}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) \leq 1$, il suffit de démontrer

$$\mathrm{Br}(X') = 0,$$

pour tout revêtement ramifié X' de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.

REMARQUE 10. On observe que l'énoncé du lemme n'est pas limité à la ℓ-dimension cohomologique. Plus tard, on explique comment démontrer l'analogue suivant : pour démontrer $\mathrm{cd}_\ell(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) \leq 1$, il suffit de démontrer

$$\mathrm{Br}(X')[\ell] = 0,$$

pour tout revêtement ramifié X' de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.

DÉMONSTRATION. On observe d'abord que pour démontrer que $\mathrm{cd}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) \leq 1$, il suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(L) = 0$ pour toute extension finie $L/E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})$. En effet, c'est exactement [**Sta22**, TAG 03R8]. Ensuite, on prend la normalisation de L dans $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$; c'est un revêtements ramifié $X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ avec corps de fonctions identifié à L (c.f. la preuve du lemme 2.1). La suite exacte de Kummer sur $\mathrm{Spec}(L)_{\text{ét}}$ implique

$$\mathrm{Br}(L)[\ell] = H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(L),\, \mu_\ell) = \mathrm{colim}_U\, H^2(U,\, \mu_\ell),$$

où ℓ est un nombre premier arbitraire (i.e. peut-être que $\ell = p$) et la colimite porte sur tous les ouverts affines non-vides dans X'.[24] Soit $Z = X' - U$. Le couple (X', Z) est pur d'après le théorème de pureté absolue de Gabber [**Fuj02**, Thm. 2.1.1] ; ici on utilise que X' est un schéma noethérien normal de dimension 1 (donc régulier) et Z est une collection finie de spectres des corps, donc régulier lui aussi. On en déduit une surjection

$$H^2(X',\, \mu_\ell) \to H^2(U,\, \mu_\ell).$$

D'après Grothendieck, [**Gro66**, Cor. 2.2.], on sait que le groupe de Brauer de X' est isomorphe au groupe de Brauer cohomologique. En utilisant l'hypothèse $\mathrm{Br}(X') = 0$, la suite exacte de Kummer donne alors

$$\mathrm{Pic}(X')_{[\ell]} \simeq H^2(X',\, \mu_\ell)$$

(ici $\mathrm{Pic}(X')_{[\ell]}$ est le co-noyau de la multiplication par ℓ.) Pour démontrer $\mathrm{Br}(L)[\ell] = 0$, on doit trouver pour tout $x \in H^2(U,\, \mu_\ell)$ un ouvert affine $V \subseteq U$, tel que $x\,|_V = 0 \in H^2(V,\, \mu_\ell)$. Puisqu'on sait déjà que l'application

$$\mathrm{Pic}(U)_{[\ell]} \to H^2(U,\, \mu_\ell)$$

[23] Ceci était peut-être un peu implicite dans la preuve de la proposition 3.1 ; donc voici plus de détails : on peut calculer le corps résiduel complété $\kappa(x)$ dans un voisinage affinoïde Y_I du point maximal $x \in |X^{\mathrm{ad}}_{E,F}|$. Après on peut identifier le point maximal $x \in |Y_I|$ à un point maximal dans le diamant associé $Y_I^\diamondsuit$; noté $x^\diamondsuit$. On rappelle qu'il y a une définition de la ℓ-dimension cohomologique du point $x^\diamondsuit \in Y_I^\diamondsuit$, c.f. [**Sch22**, Def. 21.10], tel que $\mathrm{cd}_\ell(x) = \mathrm{cd}_\ell(\kappa(x))$. Soit maintenant $f\colon Y_I^\diamondsuit \to \mathrm{Spa}(F)$ le morphisme structurel ; c'est un morphisme entre diamants spatiaux avec $\dim.\mathrm{trg}(f) \leq 1$. Le résultat [**Sch22**, Prop. 21.16] implique donc bien

$$\mathrm{cd}_\ell(x) = \mathrm{cd}_\ell(x^\diamondsuit) \leq 1.$$

[24] Ici on a utilisé les faits suivants : le revêtement ramifié admet un faisceau inversible ample, parce que le morphisme $X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est fini, et il en résulte qu'on peut raffiner un ouvert quelconque dans X' par un ouvert affine (c.f. [**Sta22**, Tag 01ZY]) ; cela implique la formule $L = \operatorname*{colim}_{U \text{affine ouvert}} \mathcal{O}_{X'}(U)$ et le résultat [**Sta22**, Tag 09YU]. Question : est-il vraie que tous les ouverts dans X' sont automatiquement affines ?

est surjective, on peut trouver une pré-image $[\mathcal{L}] \in \mathrm{Pic}(U)$ de la classe x. Comme $0 = \mathrm{Pic}(L) = \mathrm{colim}_{U \mathrm{affine}} \mathrm{Pic}(U)$, on peut trouver un ouvert affine $V \subseteq U$, tel que $[\mathcal{L}] \mid_V = 0$. En regardant le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(U)_{[\ell]} \arrow[r] \arrow[d] & H^2(U, \mu_\ell) \arrow[d] \\ \mathrm{Pic}(V)_{[\ell]} \arrow[r] & H^2(V, \mu_\ell), \end{tikzcd}$$

on trouve $x \mid_V = 0 \in H^2(V, \mu_\ell) = 0$. Cela implique $\mathrm{Br}(L)[\ell] = 0$ pour tout nombre premier ℓ, i.e. $\mathrm{Br}(L) = 0$. $\square$

Remarque 11. Cette remarque est la suite de la remarque faite avant c.f. remarque 10. On affirme que pour démontrer $\mathrm{cd}_\ell(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})) \leq 1$, il suffit de démontrer $\mathrm{Br}(X')[\ell] = 0$ pour tout revêtement ramifié de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$.
Afin d'expliquer ceci, il suffit d'expliquer le fait suivant : pour démontrer $\mathrm{cd}_\ell(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})) \leq 1$, il suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(L)[\ell] = 0$, pour toute extension finie de $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$. En effet, une fois que l'on a expliqué cette réduction, on peut simplement suivre la preuve donnée auparavant.
On suppose donc $\mathrm{Br}(L)[\ell] = 0$ pour toute extension finie de $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de ℓ-torsion sur $\mathrm{Spec}(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}))_{\text{ét}}$. L'objectif est de démontrer que $H^i(\mathrm{Spec}(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})), \mathcal{F}) = 0$, pour $i \geq 2$. Pour une extension finie L de $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$, on sait par hypothèse que $H^2(\mathrm{Spec}(L), \mu_\ell) = 0$. Soit

$$H \subset \mathrm{Gal}(\overline{E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})}/E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}))$$

le sous-groupe pro-ℓ maximal et $M \subset \overline{E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})}$ l'extension associée. Comme M est une colimite d'extensions finies, on sait que $H^2(\mathrm{Spec}(M), \mu_\ell) = 0$.
On observe que $\mu_\ell \subset M^*$. De fait, sinon M aurait une extension galoisienne de degré premier à ℓ, mais c'est impossible par construction de M. Maintenant on peut appliquer [**Sta22**, Tag 0DV9] et en déduire que

$$H^q(\mathrm{Spec}(E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})), \mathcal{F}) = 0,$$

pour $q \geq 2$.

En utilisant l'équivalence GAGA pour des revêtements ramifiés (prop. 2.2) pour déduire que

$$\mathrm{Br}(X') \simeq \mathrm{Br}(X'^{\mathrm{ad}}),$$

(c.f. lemme 2.6), il suffit alors d'expliquer pourquoi le résultat suivant est vrai :

Lemme 3.4. Pour tout $\ell \neq p$, on a

$$\mathrm{Br}(X'^{\,\mathrm{ad}})[\ell] = 0.$$

Démonstration. On considère la projection du site étale vers le site analytique de l'espace adique analytique noethérien X'^{ad} :

$$r \colon (X'^{\mathrm{ad}})_{\text{ét}} \to (X'^{\mathrm{ad}})_{\mathrm{an}}.$$

On a la formule suivante pour la fibre de $R^i r_* \mathbb{G}_m$ en un point $x \in |X'^{\mathrm{ad}}|$: soit $X_x'^{\mathrm{ad}}$ la localisation de l'espace X'^{ad} en le point x; c'est l'espace pseudo-adique au sens de Huber $(X'^{\mathrm{ad}}, G(x))$, où $G(x)$ est l'ensemble des généralisations du point x. Alors on a :

$$(R^i r_* \mathbb{G}_m)_x = H^i(X_x'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{G}_m).$$

En effet, cela résulte de l'énoncé de [**Hub96**, Corollary 2.4.6], en utilisant $G(x) \sim \lim\limits_{x \in U \text{ ouvert qcqs}} U$. On affirme que cette fibre ne dépend que de la généralisation maximale de x. On observe dans un premier temps que $\mathbb{G}_m$ est un faisceau sur-convergent ('overconvergent') sur $(X'^{\mathrm{ad}})_{\mathrm{an}}$; par [**Hub96**], début de la page 400, on doit se convaincre que $\mathbb{G}_m$ est constant sur les généralisations des points $x \in X'^{\mathrm{ad}}$; ceci est le cas parce que, par définition, les sections de $\mathbb{G}_m$ ne dépendent pas de la composante $+$ dans une paire de Huber affinoïde. On peut aussi observer que $\mathbb{G}_m$ est sur-convergent dans le sens étale, [**Hub96**, Def. 8.2.1] : en utilisant [**Hub96**, Rem. 8.2.2. (b)], on doit vérifier le fait suivant : pour $Y \to X'^{\mathrm{ad}}$ étale, $\mathbb{G}_m \mid_Y$ est un faisceau sur-convergent sur le site $(Y)_{\mathrm{an}}$: ceci resulte du même argument que celui qu'on donné avant.

En particulier, on en déduit que pour toute spécialisation $\eta_1 \to \eta_2$ entre points géométriques dans $(X_x'^{\mathrm{ad}})_{\text{ét}}$, on a

$$(\mathbb{G}_m\,|_{X_x'^{\mathrm{ad}}})_{\eta_2} \simeq (\mathbb{G}_m\,|_{X_x'^{\mathrm{ad}}})_{\eta_1}.$$

En utilisant [**Hub96**, Cor. 2.6.7], on voit bien que la fibre $(R^i r_* \mathbb{G}_m)_x$ ne dépend que de la généralisation maximale de x.
Finalement, on peut appliquer [**Hub96**, Prop. 2.3.10.], pour avoir la formule assez explicite dans les mains :

$$(R^i r_* \mathbb{G}_m)_x = H^i_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(K),\, \mathbb{G}_m), \tag{15}$$

où K est le corps résiduel complété (!) du point x. Maintenant, on affirme que la suite spectrale de Leray pour r implique un isomorphisme

$$H^2(X'^{\mathrm{ad}},\, \mathbb{G}_m) = H^0((X')_{\mathrm{an}},\, R^2 r_* \mathbb{G}_m).$$

De fait, on doit expliquer pourquoi $H^1((X')_{\mathrm{an}}, R^1 r_* \mathbb{G}_m) = H^2((X')_{\mathrm{an}},\, R^0 r_* \mathbb{G}_m) = 0$. La première annulation résulte simplement de

$$(R^1 r_* \mathbb{G}_m)_x = \mathrm{Pic}(K) = 0,$$

pour tout point maximal $x \in X'^{\mathrm{ad}}$; ici on a utilisé la formule (15) et $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(K),\, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(K)$. La seconde annulation résulte du fait que $|X'^{\mathrm{ad}}|$ est un espace topologique qcqs et spectral de dimension de Krull 1, c.f. [**Sch92**, Cor. 4.6.]. Ensuite, on veut comprendre $H^0((X')_{\mathrm{an}},\, R^2 r_* \mathbb{G}_m)$. On a une injection

$$H^0((X')_{\mathrm{an}},\, R^2 r_* \mathbb{G}_m) \hookrightarrow \prod_{x \text{ maximal}} (R^2 r_* \mathbb{G}_m)_x,$$

qui induit une injection analogue sur les parties de ℓ-torsion :

$$H^0((X')_{\mathrm{an}},\, R^2 r_* \mathbb{G}_m)[\ell] \hookrightarrow \prod_{x \text{ maximal}} (R^2 r_* \mathbb{G}_m)_x[\ell].$$

Cependant, on peut désormais observer qu'on a $(R^2 r_* \mathbb{G}_m)_x[\ell] = 0$: en effet, soient $x \in X'^{\,\mathrm{ad}}$ un point maximal et $y \in X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ son image ; c'est encore un point maximal et l'extension des corps résiduels complétés $\kappa(x)/\kappa(y)$ est finie. Il en résulte $\mathrm{cd}_\ell(x) \leq \mathrm{cd}_\ell(y) \leq 1$ - ce qu'on a déjà expliqué dans la preuve de la proposition 3.1. En utilisant encore la formule (15), on obtient l'énoncé d'annulation suivant

$$0 = H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\kappa(x)),\, \mu_\ell) = \mathrm{Br}(\kappa(x))[\ell] = (R^2 r_* \mathbb{G}_m)_x[\ell].$$

Au total, on en déduit par la suite spectrale de Leray l'annulation $H^2(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{G}_m)[\ell] = 0$. Comme le groupe de Brauer défini en utilisant les algèbres d'Azumaya s'injecte dans le groupe de Brauer cohomologique, on a une injection $\mathrm{Br}(X'^{\mathrm{ad}})[\ell] \hookrightarrow H^2(X'^{\mathrm{ad}},\, \mathbb{G}_m)[\ell] = 0$, ce qui termine la preuve. $\square$

3.3. ℓ-dimension cohomologique de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$.

Soit ℓ toujours un nombre premier, $\ell \neq p$.

Proposition 3.5. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_\ell$-module constructible dans $(\widetilde{X^{\mathrm{alg}}_{E,F}})_{\text{ét}}$. Alors on a

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F},\, \mathcal{F}) = 0,$$

pour $i \geq 3$.

Démonstration. L'idée est d'utiliser le résultat sur la ℓ-dimension cohomologique du corps de fonctions de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, couplé avec le théorème de pureté absolue de Gabber afin de pouvoir démontrer l'annulation cherchée de la cohomologie étale des revêtements ramifiés.
On commence avec quelques réductions assez classiques ('la méthode de la trace') pour se ramener au cas d'un revêtement ramifié et le cas des coefficients constants.
On peut trouver un ouvert non-vide $j \colon U \subseteq X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, tel que $\mathcal{F}|_U$ est un système local en $\mathbb{F}_\ell$-modules ; soit $\mathcal{L}$ ce système sur U. On observe d'abord qu'il suffit de démontrer que

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F},\, j_! \mathcal{L}) = 0,$$

pour $i \geq 3$. Cela résulte du fait que le complement de U dans $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est une collection de spectres de corps algébriquement clos. D'après [**Sta22**, Tag 0GJ0] on peut trouver un revêtement étale fini $\dot{\pi} \colon V \to U$ de degré premier à ℓ, tel que $\dot{\pi}^*(\mathcal{L})$ admet une filtration finie avec des graduées de la forme $\underline{\mathbb{F}_\ell}_V$. Maintenant on prend la normalisation de $V \to U$ dans $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$; c'est un revêtement ramifié $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ de degré premier à ℓ (c.f. la preuve du lemme 2.1). Cette situation est décrit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\dot\pi"] & X' \arrow[d, "\pi"] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j"] & X^{\mathrm{alg}}_{E,F} & Z. \arrow[l, "i"] \end{tikzcd}$$

On en déduit une injection

$$H^i(X^{\mathrm{alg}}_{E,F},\, j_!\mathcal{L}) \hookrightarrow H^i(X',\, j'_!(\dot\pi^*\mathcal{L}));$$

ici on applique le fait que le degré du revêtement ramifié est premier à ℓ. En utilisant la filtration de $\dot\pi^*(\mathcal{L})$ on se réduit au cas où $\dot\pi^*(\mathcal{L}) = \underline{\mathbb{F}_\ell}_V$. Puis on peut observer qu'il suffit de démontrer que

$$H^i(X',\, \mathbb{F}_\ell) = 0,$$

pour $i \geq 3$. C'est encore le fait que le complement de V dans X' est une collection finie de spectres de corps algébriquement clos, parce que X' est un schéma irréductible de dimension 1, qui est fini sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$. Finalement, on peut attaquer cette annulation. Soit $E(X')$ le corps de fonctions sur X' et soit

$$j_{\eta'}\colon \mathrm{Spec}(E(X')) \to X'$$

l'inclusion du point générique. Soit $c \in H^i(X', \mathbb{F}_\ell)$, pour $i \geq 3$ une classe de cohomologie. D'après le résultat sur la ℓ-dimension cohomologique de $E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})$, on sait que

$$j^*_{\eta'}(c) \in H^i(\mathrm{Spec}(E(X')), \mathbb{F}_\ell) = 0,$$

pour $i \geq 2$. Comme $H^i(\mathrm{Spec}(E(X')),\, \mathbb{F}_\ell) = \mathrm{colim}_{U'}\, H^i(U', \mathbb{F}_\ell)$, où la colimite porte sur tous les ouverts affines non-vides U' dans X', on en déduit l'existence d'un ouvert - qui dépend de la classe c -

$$j_{U'}\colon U' \hookrightarrow X^{\mathrm{alg}}_{E,F},$$

tel que $j^*_{U'}(c) = 0$ dans $H^i(U', \mathbb{F}_\ell)$. On peut appliquer le théorème de pureté absolue de Gabber [**Fuj02**, Thm. 2.1.1.] au complement de U' - ici on utilise que X' est noethérien et régulier et que ce complement est encore une collection finie de spectres de corps, donc régulier - pour déduire que pour $i \geq 3$, on a

$$H^i(X',\, \mathbb{F}_\ell) \simeq H^i(U',\, \mathbb{F}_\ell),$$

où l'isomorphisme est induit par $j^*_{U'}(.)$. En effet, soit T le complement de U' avec immersion fermée $i_T\colon T \hookrightarrow X'$. La pureté absolue donne

$$i^!_T(\mathbb{F}_\ell) \simeq \underline{\mathbb{F}_\ell}_T(-1)[-2]$$

et il ne reste qu'à appliquer le triangle exact

$$i_{T*}i^!_T\mathbb{F}_\ell \longrightarrow \mathbb{F}_\ell \longrightarrow Rj_{U'*}\mathbb{F}_\ell \xrightarrow{+1} .$$

Si on applique cet argument à toute classe de cohomologie (ce qui force à changer les ensembles ouverts U') on en déduit l'annulation cherchée. $\square$

Remarque 12. On peut aussi éviter l'utilisation de la pureté absolue en utilisant que $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est un schéma noethérien de dimension 1 avec tous les corps résiduels en tous les points fermés algébriquement clos, pour déduire que pour tout faisceau constructible $\mathcal{F}$ sur $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, le morphisme $\mathcal{F} \to j_{\eta*}j^*_\eta\mathcal{F}$ induit un isomorphisme sur les groupes de cohomologie en degrés $i \geq 2$. Ici $j_\eta\colon \mathrm{Spec}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ est l'inclusion du point générique.[25]

[25]Voici l'explication : on observe d'abord que le noyau et le co-noyau du morphisme d'adjonction

$$\psi\colon \mathcal{F} \to j_{\eta*}j^*_\eta\mathcal{F}$$

sont des faisceaux grattes-ciels. Comme tous les corps résiduels des points fermés sont algébriquement clos, $H^i(\ker(\psi)) = H^i(\mathrm{coker}(\psi)) = 0$, pour $i > 0$. Après on peut regarder les suites exactes

$$0 \longrightarrow \ker(\psi) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{im}(\psi) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{im}(\psi) \longrightarrow j_{\eta*}j^*_\eta\mathcal{F} \longrightarrow \mathrm{coker}(\psi) \longrightarrow 0,$$

3.4. Le cas $\ell = p$. Dans le cas $\ell = p$ je n'arrive à démontrer l'annulation de la cohomologie étale en degrés ≥ 3 d'un faisceau de la forme $\mathcal{F}^{\mathrm{ad}}$ dans $(\widetilde{X^{\mathrm{ad}}_{E,F}})_{\text{ét}}$, où $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{F}_p$-module constructible sur le site étale de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, que si l'hypothèse suivante est vérifiée :

(Stein) Soit $U \subset X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ un ouvert algébrique avec adification U^{ad}. Alors l'espace adique fortement noethérien U^{ad} est pré-perfectoïde Stein, i.e. soit E_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de E, on suppose donc

$$U^{\mathrm{ad}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

est une réunion croissante d'ouverts affinoïdes, res: $\mathcal{O}(U_{n+1}) \to \mathcal{O}(U_n)$ est d'image dense et

$$U_n \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$$

est affinoïde perfectoïde.

Proposition 3.6. Si l'hypothèse (Stein) est vérifiée,

$$H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0,$$

pour tout $\mathbb{F}_p$-module constructible $\mathcal{F}$ sur le site étale de $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ et $i \geq 3$.

Sous l'hypothèse (Stein), la conjecture de comparaison 1.1 implique ainsi la conjecture d'annulation 1.2. Maintenant je donne quelques commentaires sur la condition (Stein).

Remarque 13. (a) : On observe d'abord que l'hypothèse (Stein) est en fait plus forte que ce dont on a vraiment besoin. Soit $\dot{\pi}^{\mathrm{ad}}\colon V^{\mathrm{ad}} \to U^{\mathrm{ad}}$ l'adification d'un revêtement fini étale $\dot{\pi}\colon V \to U$ (de degré premier à p). Comme avant (c.f. lemme 2.1) on prend la normalisation pour construire un revêtement ramifié $\pi\colon X' \to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ avec adification $\pi^{\mathrm{ad}}\colon X'^{\,\mathrm{ad}} \to X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$. Alors on a besoin de savoir que

$$H^i(V^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 3$. Il suffit de savoir que l'on a

$$H^i(V^{\mathrm{ad}\flat}_\infty, \mathcal{O}) = 0,$$

pour $i \geq 1$, où $V^{\mathrm{ad}\flat}_\infty := V^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$. C'est une conséquence de l'hypothèse (Stein), mais je peux imaginer qu'on pourrait attaque cet énoncé d'annulation directement.

(b) : On garde les notation du point (a) avant. Je dois expliquer un peu pourquoi je pense que l'hypothèse (Stein) est vraie : sur le plan conceptuel, on peut observer que par analogie entre $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ et une surface de Riemann compacte il est naturel de penser que chaque ouvert de Zariski dans $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est un espace de Stein. Cela prédit qu'on a

$$H^i(V^{\mathrm{ad}}, \mathcal{O}) = 0, \tag{16}$$

pour $i \geq 1$.

Afin de donner un peu de substance à cette prédiction je veux expliquer comment on peut démontrer l'égalité (16).

Comme $\dot{\pi}^{\mathrm{ad}}$ est fini étale, il suffit de démontrer qu'on a

$$H^i(U^{\mathrm{ad}}, \dot{\pi}^{\mathrm{ad}}_*\mathcal{O}) = 0,$$

pour $i \geq 1$. Le fibré vectoriel $\mathcal{E} = \pi^{\mathrm{ad}}_*(\mathcal{O})$ étend $\dot{\pi}^{\mathrm{ad}}_*(\mathcal{O})$. D'après un résultat d'amplitude dû à Kedlaya-Liu (et de nouveau écrit par Fargues-Scholze [**FS21**, Thm. II.2.6.]) il existe un nombre naturel $n >> 0$, tel que

$$H^i(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{E}(n)) = 0$$

pour $i > 0$.

J'utilise maintenant la suite de Mayer-Vietoris :

---

et en déduire que $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, j_{\eta*}j_\eta^*\mathcal{F})$, pour $i \geq 2$. Maintenant on peut utiliser la suite spectrale de Leray pour $F := j_\eta^*\mathcal{F}$ et le morphisme j_η; elle dit qu'il faut analyser

$$H^i(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{X^{\mathrm{alg}},x}), F).$$

Néanmoins le corps de fraction du hensélisé $\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{X^{\mathrm{alg}},x}$ est une extension algébrique du corps des fonctions et donc $\mathrm{cd}_\ell(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}^{\mathrm{h}}_{X^{\mathrm{alg}},x})) \leq \mathrm{cd}_\ell(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F}))$. Si on met tout cela ensemble, on en déduit l'énoncé cherché.

Comme $U^{\rm ad} = X^{\rm ad} - \{x_1, ..., x_n\}$, où $x_i \in |X^{\rm ad}_{E,F}|^{\rm cl}$ (ces sont des points classiques), on peut trouver un ouvert affinoïde $Y_I \subset Y_{[1,q]}$, où $I \subset (0,1)$ est un intervalle compact, tel que $\{x_1, ..., x_n\} \subset Y_I$ et le complémentaire $Y_I - \{x_1, ..., x_n\}$ est de Stein (c.f. la preuve du lemme 3.10). La dernière observation dont on a besoin est que le fibré en droites $\mathcal{O}_{X^{\rm ad}}(n)$ est trivial sur $U^{\rm ad}$.[26]
J'applique la suite exacte de Mayer-Vietoris au recouvrement suivant :

$$X^{\rm ad}_{E,F} = Y_I \cup U^{\rm ad},\ Y_I \cap U^{\rm ad} = Y_I - \{x_1, ..., x_n\}$$

et au faisceau $\mathcal{E}(n)$. Comme $H^i(X^{\rm ad}_{E,F}, \mathcal{E}(n)) = 0$ et $H^i(Y_I - \{x_1, ..., x_n\}, \mathcal{E}(n)) = 0$ pour $i > 0$, on en déduit

$$H^i(U^{\rm ad},\, \mathcal{E}(n)|_{U^{\rm ad}}) = H^i(U^{\rm ad},\, \dot{\pi}^{\rm ad}_* \mathcal{O}) = 0,$$

pour $i > 0$.

La preuve de la proposition 3.6 dépend de quelques lemmes et on va donner la preuve après cette préparation.

3.4.1. *Préparations concernant la cohomologie des groupes :* Dans la preuve on a besoin du fait suivant : soient

$$G = \lim_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

un groupe pro-fini, présenté comme limite inverse d'un système de groupes finis $((G_n)_{n\in\mathbb{N}}, \pi_{m,n})$, et $((N_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_{n,m})$ un système inductif de G_n-modules. On dit qu'une telle paire

$$((G_n, \pi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}, (N_n, f_{n,m})_{n\in\mathbb{N}})$$

forme une paire compatible si pour $m \geq n$, on a

$$f_{n,m}(\pi_{n,m}(g_m) \cdot x_n) = g_m \cdot f_{n,m}(x_n),$$

pour tout $g_m \in G_m$, $x_n \in N_n$. Dans une telle situation on peut munir $N = \operatorname{colim}_n N_n$ d'une structure de G-module, où G agit sur N_n via le quotient $G \to G_n$. La G-cohomologie du module N est décrite par le lemme suivant :

Lemme 3.7. Si $((G_n, \pi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}, (N_n, f_{n,m})_{n\in\mathbb{N}})$ est une paire compatible, on a

$$H^j(G,\, N) = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H^j(G_n,\, N_n).$$

Démonstration. Ce lemme est exactement [**NSW08**, Proposition 1.5.1.]. □

On va appliquer ce lemme dans la situation suivante : soient $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des groupes abéliens discrets, munis de l'action triviale de G_n, et on suppose qu'ils forment un système inductif, i.e. pour $n \leq m$, on a une application $M_n \to M_m$. Soit $N_n = \operatorname{Ind}^{G_n}_{\{e\}}(M_n) = \operatorname{Hom}(G_n, M_n)$; on a alors une application $N_n \to N_m$ donnée par

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(G_n, M_n) &\to \operatorname{Hom}(G_{n+1}, M_n)\\ &\to \operatorname{Hom}(G_{n+1}, M_{n+1})\end{aligned}$$

et $((G_n)_{n\in\mathbb{N}}, (N_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forment ainsi une paire compatible. On en déduit par le lemme de Shapiro ([**NSW08**, Proposition 1.3.7.]) le fait suivant :

$$H^j(G,\, \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} N_n) = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H^j(G_n,\, \operatorname{Ind}^{G_n}_{\{e\}}(M_n)) = 0, \tag{17}$$

égalité cruciale pour la preuve de la proposition 3.6.

[26]De fait, U est le spectre d'un anneau principal et la restriction de $\mathcal{O}_{X^{\rm ad}}(n)$ à $U^{\rm ad}$ s'identifie à le tiré en arrière de la restriction $\mathcal{O}_{X^{\rm alg}}(n)|_U$ le long du morphisme

$$U^{\rm ad} \to U.$$

3.4.2. *Préparations géométriques.* De plus, on doit expliquer deux énoncés d'annulation qui sont essentiels dans la preuve de la propostion 3.6. Le premier lemme est standard :

LEMME 3.8. Soit S un espace pré-perfectoïde Stein sur $\mathrm{Spa}(E)$. Alors on a

$$H^i(S, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 3$.

DÉMONSTRATION. Soit E_∞/E la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. Par hypothèse on peut trouver un recouvrement

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n,$$

tel que

$$S_\infty := S \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty),$$

où $S_{n,\infty} := S_n \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ est un espace affinoïde perfectoïde et les morphismes de restriction $\mathrm{res}\colon \mathcal{O}(S_{n+1,\infty}) \to \mathcal{O}(S_{n,\infty})$ ont image dense. En utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre et $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$, il suffit de démontrer

$$H^i(S_\infty, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$. L'espace perfectoïde $S_\infty^\flat$ est un espace de Stein : comme on suppose que tous les $S_{n,\infty}$ sont affinoïdes perfectoïdes, on a

$$(S_\infty)^\flat = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_{n,\infty})^\flat,$$

où chaque $S_{n,\infty}^\flat$ est encore affinoïde. Si $A \to B$ est une application continue entre anneaux de Tate qui sont perfectoïdes et telle que l'image est dense c'est aussi le cas pour l'application $A^\flat \to B^\flat$, c.f. [**Ked19**, Lemma 2.8.4].
D'après le résultat de Kedlaya-Liu [**KL19**, Thm. 2.6.5], on a

$$H^i(S_\infty^\flat, \mathcal{O}) = 0,$$

pour $i \geq 1$.
La suite exacte d'Artin-Schreier implique donc bien que

$$H^i(S_\infty, \mathbb{F}_p) = H^i(S_\infty^\flat, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$. □

COROLLAIRE 3.9. Soient $U \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ un sous-schéma ouvert non-vide et $U^{\mathrm{ad}} \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ l'adification associé. De plus, on considère un revêtement finit étale $V \to U$ et $V^{\mathrm{ad}} \to U^{\mathrm{ad}}$ l'adification associé. Si l'hypothèse (Stein) est vérifiée, on a

$$H^i(V^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 3$.

DÉMONSTRATION. On observe d'abord qu'un revêtement fini d'un espace de Stein est encore un espace de Stein. Le théorème de presque pureté de Scholze [**Sch12**, Thm. 1.10] implique alors que si U^{ad} est pré-perfectoïde Stein aussi V^{ad} l'est. On conclut en utilisant le lemme 3.8. □

Ce corollaire est le seul endroit où j'ai besoin de l'hypothèse (Stein).
On va aussi utiliser un autre ingrédient géométrique, qui est inconditionnel, parce que c'est seulement un énonce local. Celui est le suivant :

LEMME 3.10. Soient $X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ un revêtement fini plat, qui est ramifie le long de $Z \hookrightarrow X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ et $X'^{\,\mathrm{ad}} \to X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ l'adification associé. Soit $Z'^{\,\mathrm{ad}}$ le pré-image de Z^{ad} dans $X'^{\,\mathrm{ad}}$. On considère de plus la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique E_∞de E et le diamant $X_\infty'^{\,\mathrm{ad}\,\lozenge} := X'^{\,\mathrm{ad}\,\lozenge} \times_{\mathrm{Spd}(E)} \mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty)$ et $Z_\infty'^{\,\mathrm{ad}}$ le pré-image de $Z'^{\,\mathrm{ad}}$ dans $X_\infty'^{\,\mathrm{ad}\,\lozenge}$. Soit $\widetilde{\mathcal{W}'}$ un système fondamental des voisinages qcqs ouverts $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants de $Z_\infty'^{\,\mathrm{ad}} \hookrightarrow X_\infty'^{\,\mathrm{ad}}$. Alors on a

$$\operatorname*{colim}_{\widetilde{W'}\in\widetilde{\mathcal{W}'}} H^i(\widetilde{W'} - (Z'^{\,\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$.

Remarque 14. On peut observer que le diamant $X'^{\mathrm{ad}\,\Diamond}_{\infty}$ est réprésentable par un espace perfectoïde en utilisant l'existence d'une 'perfectoïdisafiction' [**BS22**]. 1.16.(1)] : c'est un problème local et on prend $\mathrm{Spa}(R,R^+)$ affinoïde dans $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ avec pré-image $\mathrm{Spa}(R',R'^+)$ dans X'^{ad}, tel qu'on a $\mathrm{Spa}(R,R^+)\times_{\mathrm{Spa}(E)}\mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)=\mathrm{Spa}(S,S^+)$, où (S,S^+) est affinoïde perfectoïde. On peut par exemple travailler avec un recouvrement de $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ donné par $\mathrm{Spa}(B_{[1,\rho]},B^+_{[1,\rho]})$ et $\mathrm{Spa}(B_{[\rho,q]},B^+_{[\rho,q]})$, $\rho\in[1,q]$. Comme le foncteur qui associe le diamant à un espace adique analytique commute aux limites, on a $\mathrm{Spd}(R',R'^+)\times_{\mathrm{Spd}(E)}\mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty)=\mathrm{Spd}(S',S'^+)$, où $S'=S\otimes_R R'$ et S'^+ est la clôture integrale de S^+ dans S'. Puisque $S^+\to S'^+$ est un morphisme intègre, on peut appliquer le résultat de Bhatt-Scholze ci-dessus pour trouver un anneau perfectoïde entier S'^+_{perfd}, universel pour l'existence d'un morphisme $S'^+\to S'^+_{\mathrm{perfd}}$. Si x est une pseudo-uniformisante dans S, la paire affinoïde perfectoïde $(S'^+_{\mathrm{perfd}}[1/x],(S'^+_{\mathrm{perfd}}[1/x])^+)$, où $(S'^+_{\mathrm{perfd}}[1/x])^+$ est la clôture integrale de S'^+_{perfd} dans $S'^+_{\mathrm{perfd}}[1/x]$, est l'espace perfectoïde cherché. Après, on peut recoller ces espaces perfectoïdes affinoïdes afin de construire l'espace perfectoïde qui représente $(X'^{\mathrm{ad}})^{\Diamond}_{\infty}$.
L'espace $Z'^{\mathrm{ad}}_{\infty}$ est un sous-espace Zariski-fermé dans l'espace perfectoïde qui représente $X'^{\mathrm{ad}\,\Diamond}_{\infty}$.

Démonstration. La preuve du lemme 3.10 consiste en l'explication de la suite d'identifications suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname*{colim}_{\widetilde{W}'} H^i(\widetilde{W}'-(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty,\mathbb{F}_p) &= \operatorname*{colim}_{Z'^{\mathrm{ad}}\subset W'\subset X'^{\mathrm{ad}}} H^i((W'-Z'^{\mathrm{ad}})_\infty,\mathbb{F}_p)\\ &= \operatorname*{colim}_{Z^{\mathrm{ad}}\subset W\subset X^{\mathrm{ad}}} H^i((\pi^{-1}(W)-Z'^{\mathrm{ad}})_\infty,\mathbb{F}_p)\\ &= \operatorname*{colim}_{Z^{\mathrm{ad}}\subset W\subset X^{\mathrm{ad}},W\subset Y_{[\rho^q,\rho]}\,\mathrm{affd},\varphi(W)\cap W=\emptyset} H^i((\pi^{-1}(W)-Z'^{\mathrm{ad}})_\infty,\mathbb{F}_p)\\ &= 0,\end{aligned}$$

où la dernière égalité est vraie pour $i\geq 2$. Ici on note par $(.)_\infty$ le changement de base $.\times_{\mathrm{Spd}(E)}\mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty)$. En effet, dans la première égalité on utilise le fait que chaque voisinage ouvert qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariant $\widetilde{W}\subset(X'^{\mathrm{ad}})^{\Diamond}_{\infty}$ de $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$ descend en un voisinages ouvert qcqs $W'\subset X'^{\mathrm{ad}}$ de Z'^{ad}. Dans la deuxième égalité, on utilise la possibilité de trouver un système cofinal de tels voisinages de la forme $\pi^{-1}(W)$, où W est un voisinage qcqs ouvert de Z^{ad}. De fait, comme les points différents $z'\in Z'^{\,\mathrm{ad}}$ n'ont pas de généralisations communes, on peut dans un premier temps remplacer le voisinage W' par un voisinage de la forme $\coprod_{i=1}^m W'_i$, où W'_i est un voisinage ouvert qcqs de $z'_i\in Z'^{\mathrm{ad}}$. Dans un deuxième temps, comme $\pi^{\mathrm{ad}}\colon X'^{\mathrm{ad}}\to X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est fini et ainsi une application fermée, il existe un voisinage qcqs ouvert W de Z^{ad}, tel que

$$\pi^{-1}(W)\subseteq\coprod_{i=1}^m W'_i.$$

Dans la troisième égalité on a utilisé l'uniformisation $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}=Y_{[1,q]}/\varphi^{\mathbb{Z}}$ (i.e. on utilise le Frobenius pour identifier $Y_{[1,1]}$ et $Y_{[q,q]}$) ; on trouve ainsi un système cofinal de la forme $W\subset Y_{[\rho^q,\rho]}$ affinoïde, tel que $\varphi(W)\cap W=\emptyset$.
Finalement, on va utiliser qu'on peut trouver un système cofinal des voisinages affinoïdes $W\subset Y_{[1,q]}$ de Z^{ad}, tel que $W-Z^{\mathrm{ad}}$ est une union disjointe finie de espaces pré-perfectoïdes Stein : on écrit $Z^{\mathrm{ad}}=\{z_1,..,z_m\}$, comme les localisations rationnels sont une base de la topologie d'espace affinoïde $Y_{[1,q]}$, on peut raffiner chaque ouvert affinoïde dans $Y_{[1,q]}$, voisinage de Z^{ad}, par un ouvert affinoïde de la forme

$$\coprod_{i=1}^m U_i,$$

où U_i sont des localisation rationnels de $Y_{[1,q]}$, voisinage du point classique $z_i\in Z^{\mathrm{ad}}$. Chaque point classique $z_i=V(f_i)$ est un fermé de Zariski dans U_i et on peut par conséquent considérer le recouvrement

$$U_i-\{z_i\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W_n(z_i),$$

où $W_n(z_i)=\{y\in U_i\colon |f_i(y)|\geq|\pi(y)|^n\neq 0\}$; puisque l'ouvert U_i est bien affinoïde, les $W_n(z_i)$ restent affinoïdes et c'est donc bien un recouvrement qui fait de $U_i-\{z_i\}$ un espace de Stein. Les $W_n(z_i)\times_{\mathrm{Spa}(E)}\mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ sont des espaces affinoïdes perfectoïdes : dans un premier temps, on observe que $U_i\times_{\mathrm{Spa}(E)}$

$\mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ sont des espaces affinoïdes perfectoïdes ; en effet, c'est une localisation rational de l'espace affinoïde perfectoïde $Y_{[1,q]}\times_{\mathrm{Spa}(E)}\mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ ([**Sch12**, Thm. 6.3.(ii)]). Soit f_∞ l'image de f par l'application

$$\mathcal{O}(Y_I)\to\mathcal{O}(Y_{I,\infty}).$$

On a donc

$$W_n(z_i)\times_{\mathrm{Spa}(E)}\mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)=\{y\in U_{i,\infty}\colon|f_\infty(y)|\geq|\pi(y)^n|\neq 0\},$$

et c'est un ouvert rational dans l'espace affinoïde perfectoïde $Y_{I,\infty}$ (c.f. la preuve de la proposition [**FS21**, Prop. II.1.1]) ; donc affinoïde perfectoïde lui-même. Puisque π est fini, $\pi^{-1}(\coprod_{i=1}^m[U_i-\{z_i\}])=\pi^{-1}(\coprod_{i=1}^m U_i)-Z'^{\mathrm{ad}}$ reste une union disjointe finie des espaces de Stein et comme on travaille ici sur le lieu où π est fini étale, on en déduit que $(\pi^{-1}(\coprod_{i=1}^m U_i)-Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$ est une union disjointe finie des espace de Stein perfectoïde. En passant au basculement, comme dans la preuve du lemme 3.8 la suite exacte de Artin-Schreier implique alors de nouveau qu'on a

$$H^i((\pi^{-1}(\coprod_{i=1}^m U_i)-Z'^{\mathrm{ad}})_\infty,\mathbb{F}_p)=0,$$

pour $i\geq 2$. □

Le dernier point essentiel dans la preuve de la proposition 3.6 est la construction d'un bon système fondamental des voisinages ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants de Z'^{ad}_∞ dans $X'^{\mathrm{ad}\,\diamond}_\infty$.

Lemme 3.11. Soient $X'\to X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$ un revêtement fini plat, ramifié le long de $Z\hookrightarrow X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, U le complement ouvert de Z dans $X^{\mathrm{alg}}_{E,F}$, Z' le pré-image de Z dans X' et V le complement ouvert de Z' dans X'. Si on passe au monde adique, on obtient le Zariski-fermé $Z^{\mathrm{ad}}\hookrightarrow X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$, avec complement ouvert U^{ad} dans $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ et le Zariski-fermé $Z'^{\,\mathrm{ad}}\hookrightarrow X'^{\,\mathrm{ad}}$ avec complement ouvert V^{ad}.
On écrit la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique E_∞ de E comme union croissante des sous-extension galoisiennes E_n/E, tel que $G_n:=\mathrm{Gal}(E_n/E)\simeq\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Maintenant, on dessine le diagramme suivant (pour aider à la construction) :

$$\begin{tikzcd}
(Z'^{\,\mathrm{ad}})_\infty \arrow[r] \arrow[d] & (X'^{\,\mathrm{ad}\,\diamond})_\infty \arrow[d, "f_n"] & (V^{\mathrm{ad}\,\diamond})_\infty \arrow[l] \arrow[d] \\
(Z'^{\,\mathrm{ad}})_n \arrow[r] \arrow[d] & (X'^{\,\mathrm{ad}\,\diamond})_n \arrow[d, "g_n"] & (V^{\mathrm{ad}\,\diamond})_n \arrow[l] \arrow[d] \\
(Z'^{\,\mathrm{ad}}) \arrow[r] & X'^{\,\mathrm{ad}\,\diamond} & V^{\mathrm{ad}\,\diamond} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où $(.)_n$ (resp. $(.)_\infty$) signifie le changement de base de $\mathrm{Spd}(E)$ vers $\mathrm{Spd}(E_n)$ (resp. $\mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty)$), le morphisme f_n est un $\ker(\mathbb{Z}_p\to G_n)=H_n$-torseur et g_n est un G_n-torseur.
On appelle un ouvert $W'^{(n)}\subset X'^{\mathrm{ad}}_n$ 'suffisamment petit', si

$$gW'^{(n)}\cap hW'^{(n)}=\emptyset,$$

pour $g\neq h\in G_n$.

(a) : Soit

$$\mathcal{W}'^{(n)}_i=\{\coprod_{g\in G_n}g\cdot W'^{(n)}\colon W'^{(n)}\text{voisinage qcqs ouvert 'suffisament petit' de }\tilde{z}'^{(n)}_i\},$$

pour $i=1,...,m$. Alors le système $\coprod_{i=1}^m W'^{(n)}_i$, où $W'^{(n)}_i\in\mathcal{W}'^{(n)}_i$ est un système fondamental des voisinages ouverts qcqs G_n-invariants de Z'^{ad}_n dans X'^{ad}_n.

(b) : Le système $(f_n^{-1}(\coprod_{i=1}^m W'^{(n)}_i))_n$, où $W'^{(n)}_i\in\mathcal{W}^{(n)}_i$, $n\in\mathbb{N}$, est un système fondamental des voisinages ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants de Z'^{ad}_∞ dans $X'^{\mathrm{ad}\,\diamond}_\infty$.

Démonstration. On peut se réduire au cas où $Z^{\mathrm{ad}}=\{\infty\}$ est un seul point à l'infini (c'est juste pour relaxer un peu les notations). Soit $Z'^{\mathrm{ad}}=\{z'_1,...,z'_m\}$. On observe d'abord que tous les points $z'_i\in Z'^{\mathrm{ad}}$ sont fermés et maximaux : ils sont fermés parce que Z'^{ad} est fermé, donc spectral, et parce que c'est un ensemble fini - c.f. [**Sta22**, Tag 0902 et Tag 0905] ; ils sont maximaux parce qu'il n'existe pas de généralisations communes pour deux points $z'_i \neq z'_j$, $z'_i, z'_j \in Z'^{\mathrm{ad}}$, car les valuations sur le corps résiduels $\kappa(z_i)$, $z_i \in Z^{\mathrm{ad}}$ s'étendent d'une façon unique. Comme

$$g_n\colon (X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit})_n \to X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit}$$

est un G_n-torseur, on peut choisir des pré-images compatibles (en $n \in \mathbb{N}$) $\tilde{z}_i'^{(n)} \in (X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit})_n$, $i = 1, ..., m$, des points $z'_i \in X'^{\mathrm{ad}}$, et écrire $(Z'^{\mathrm{ad}})_n$ comme réunion disjointe des orbites $G_n \cdot \tilde{z}_i'^{(n)}$. Puisque g_n est fini étale tous les points dans $(Z'^{\mathrm{ad}})_n$ sont encore (fermés et) maximaux.
On démontre le point (a). L'énoncé clef ici est le suivant : on peut toujours raffiner un voisinage de $\tilde{z}_i'^{(n)}$ par un voisinage qui est 'suffisamment petit'. Pour expliquer ceci on considère la localisation de l'espace adique analytique $X_n'^{\mathrm{ad}}$ en un point $\tilde{z}_i'^{(n)}$: c'est l'ensemble des généralisations du point $\tilde{z}_i'^{(n)}$. Comme les points $\tilde{z}_i'^{(n)}$ sont maximaux, on a

$$\{\tilde{z}_i'^{(n)}\} = (X_n'^{\mathrm{ad}})_{\tilde{z}_i'^{(n)}} = \bigcap_{\tilde{z}_i'^{(n)} \in U} U,$$

où l'intersection porte sur tous les voisinages ouverts qcqs de $\tilde{z}_i'^{(n)}$. Il suffit ainsi de démontrer

$$g((X_n'^{\mathrm{ad}})_{\tilde{z}_i'^{(n)}}) \cap (X_n'^{\mathrm{ad}})_{\tilde{z}_i'^{(n)}} = \emptyset,$$

pour $g \neq e \in G_n$; comme G_n agit sans points fixes sur l'espace topologique $|X_n'^{\mathrm{ad}}|$, on a $g(\tilde{z}_i'^{(n)}) \neq \tilde{z}_i'^{(n)}$, pour $g \neq e \in G_n$. Cela implique l'égalité cherchée.
Soit maintenant $\mathcal{U}_n(i)$ un voisinage ouvert qcqs G_n-invariant de $G_n \cdot \tilde{z}_i'^{(n)}$; d'après l'énoncé qu'on vient d'expliquer, on peut trouver un voisinage 'suffisamment petit' $W_i'^{(n)}$ de $\tilde{z}_i'^{(n)}$ inclus dans $\mathcal{U}_n$. Grâce à l'invariance par G_n du voisinage $\mathcal{U}_n(i)$, on a $\coprod_{g \in G_n} g \cdot W_i'^{(n)} \subseteq \mathcal{U}_n(i)$.
Soit maintenant $\mathcal{U}_n$ un voisinage ouvert qcqs G_n-invariant de $(Z'^{\,\mathrm{ad}})_n$. C'est en particulier un voisinage ouvert qcqs G_n-invariant de $G_n \cdot \tilde{z}_i'^{(n)}$; on peut par conséquent trouver des voisinages suffisamment petits $W_i'^{(n)} \subset \mathcal{U}_n$ de $\tilde{z}_i'^{(n)}$, $i = 1, ...m$. On observe qu'on peut supposer que

$$gW_i'^{(n)} \cap hW_j'^{(n)} = \emptyset,$$

pour $g, h \in G_n$, $g \neq h$, $i \neq j \in \{1, ..., m\}$. [27] On peut en déduire que

$$\coprod_{i=1}^{m} \coprod_{g \in G_n} g \cdot W_i'^{(n)} \subseteq \mathcal{U}_n.$$

Ceci implique le point (a).
On affirme maintenant que le système

$$\{f_n^{-1}(\mathcal{W}_i'^{(n)})\}_{i=1,...,m,n\in\mathbb{N}}$$

forme un système fondamental de voisinages $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants de $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$ dans $(X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit})_\infty$. Il faut expliquer d'abord pourquoi c'est bien un voisinage $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariant : soit $\mathcal{R}_n$ un système de représentants de G_n dans $\mathbb{Z}_p$. Donc on observe qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et chaque voisinage ouvert qcqs W'_n de $\tilde{z}_j'^{(n)}$

$$f_n^{-1}(\coprod_{g \in G_n} g \cdot W'_n) = \coprod_{\widetilde{g}_{k,n} \in \mathcal{R}_n \subset \mathbb{Z}_p} \widetilde{g}_{k,n} \cdot f_n^{-1}(W'_n).$$

En effet, ceci suit du fait que $f_n\colon (X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit})_\infty \to (X'^{\mathrm{ad}\diamondsuit})_n$ est un H_n-torseur.[28] Il en résulte qu'il s'agit bien de voisinages $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants.

[27] C'est le même argument qu'on vient de donner pour trouver un voisinage suffisamment petit d'un point $\tilde{z}_i'^{(n)}$. De fait, pour $i \neq j$, on a $g \cdot \tilde{z}_i'^{(n)} \neq \tilde{z}_j'^{(n)}$, parce que sinon $f_n(g \cdot \tilde{z}_i'^{(n)}) = z_i = z_j = f_n(\tilde{z}_j'^{(n)})$. Alors on a

$$g((X_n'^{\mathrm{ad}})_{\tilde{z}_i'^{(n)}}) \cap (X_n'^{\mathrm{ad}})_{\tilde{z}_j'^{(n)}} = \emptyset.$$

[28] En effet, soit V'_n un ouvert qcqs dans $X_n'^{\mathrm{ad}}$, $g \in G_n$ et $\tilde{g} \in \mathbb{Z}_p$ une pre-image de g_n. Alors, on affirme qu'on a

$$f_n^{-1}(g \cdot V'_n) = \tilde{g} \cdot f_n^{-1}(V'_n).$$

Soit $\tilde{w} \in f_n^{-1}(V'_n)$, alors on a $f_n(\tilde{g} \cdot \tilde{w}) = g \cdot f_n(\tilde{w}) \in g \cdot V'_n$. Pour l'autre inclusion, soit $\tilde{w} \in f_n^{-1}(g \cdot V'_n)$. On prend $w' \in V'_n$, tel que $f_n(\tilde{w}) = g \cdot w'$. Soit $\tilde{w}' \in f^{-1}(V'_n)$ une pre-image de w' sous f_n, alors on a $f_n(\tilde{w}) = f_n(\tilde{g} \cdot \tilde{w}')$. On trouve un $h \in H_n$, tel que $\tilde{w} = \tilde{g} \cdot h \cdot \tilde{w}'$. Comme $f_n(h \cdot \tilde{w}') = f_n(\tilde{w}') \in V'_n$, cela implique que $\tilde{w} \in \tilde{g} \cdot f_n^{-1}(V'_n)$.

Il reste à démontrer que c'est bien un système fondamental : soit V'_∞ un voisinage ouvert qcqs $\mathbb{Z}_p$-invariant de $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$. Le voisinage V'_∞ descend vers un voisinage G_n-invariant qcqs ouvert V'_n de $(\overline{Z'^{\mathrm{ad}}})_n$, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. On peut ainsi trouver des voisinages 'suffisamment petits' $W_i'^{(n)}$ de $\tilde{z}_i'^{(n)}$, tels que

$$\coprod_{i=1}^{m} \coprod_{g \in G_n} g \cdot W_i'^{(n)} \subseteq V'_n.$$

Il en résulte que

$$f_n^{-1}(\coprod_{i=1}^{m} \coprod_{g \in G_n} g \cdot W_i'^{(n)}) \subseteq f_n^{-1}(V'_n) = V'_\infty,$$

ce qui implique l'énoncé. □

3.4.3. *Preuve de la proposition 3.6.* On est finalement prêt à démontrer la proposition 3.6. Parce que ça fait déjà un petit moment qu'on a énoncé cette proposition, je vais rappeller ce qu'on veut démontrer : Soit $\mathcal{F}$ un $\mathbb{F}_p$-module constructible sur le site étale de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$. Alors on veut expliquer pourquoi l'hypothèse (Stein) implique

$$H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0,$$

pour $i \geq 3$.

Démonstration. On fixe un $\mathbb{F}_p$-module constructible $\mathcal{F}$ sur le site étale de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$. Comme dans la preuve de la proposition 3.5, on applique d'abord la méthode de la trace : soit U un ouvert dans $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$, sur lequel $\mathcal{F}$ est un système local, $\dot{\pi}\colon V \to U$ le revêtement fini étale de degré premier à p construit en utilisant la méthode de la trace et $\pi\colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ le revêtement ramifié construit en prenant la normalisation de V dans $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$; je rappelle que π est un morphisme fini plat. Cette situation est de nouveau décrite par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\dot{\pi}"] & X' \arrow[d, "\pi"] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d] \\ U \arrow[r, "j"] & X_{E,F}^{\mathrm{alg}} & Z. \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

On considère la composition suivante

$$j_!\mathcal{L} \longrightarrow j_!\dot{\pi}_*\dot{\pi}^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} j_!\mathcal{L}.$$

Par construction, elle s'identifie à la multiplication par $\deg(\dot{\pi})$. Comme $\dot{\pi}$ est fini étale, on a

$$j_!\dot{\pi}_*\dot{\pi}^*(\mathcal{L}) \simeq \pi_* j'_! \dot{\pi}^*(\mathcal{L}).$$

Appliquant à la composition ci-dessus le morphisme $u^*\colon \widetilde{(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})}_{\text{ét}} \to \widetilde{(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})}_{\text{ét}}$, on trouve

$$j_!^{\mathrm{ad}}\mathcal{L}^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \pi_*^{\mathrm{ad}} j_!'^{\mathrm{ad}}(\dot{\pi}^*(\mathcal{L}))^{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\mathrm{tr}^{\mathrm{ad}}} j_!^{\mathrm{ad}}\mathcal{L}^{\mathrm{ad}}.$$

La composition s'identifie toujours à la multiplication $\cdot\deg(\pi^{\mathrm{ad}})$. On emploie ici le fait que π_* et $j'_!$ commutent avec l'adification (le cas de $j'_!$ est évident et pour le cas du foncteur π_* on peut utiliser [**Hub96**, Thm. 3.7.2]).
Afin de démontrer $H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0$, pour $i \geq 3$, il suffit de prouver

$$H^i(X'^{\mathrm{ad}}, j_!'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p) = 0, \tag{18}$$

pour $i \geq 3$.
De fait, comme tous les corps résiduels des points dans Z^{ad} sont algébriquement clos, il suffit de démontrer $H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, j_!^{\mathrm{ad}}(\mathcal{L}^{\mathrm{ad}})) = 0$, $i \geq 3$. Étant donné que le degré de π^{ad} est premier à p, on voit qu'il suffit à démontrer que $H^i(X'^{\mathrm{ad}}, j_!'^{\mathrm{ad}}(\dot{\pi}^*(\mathcal{L}))^{\mathrm{ad}}) = 0$, $i \geq 3$. Comme le foncteur $u^*(.)$ est exact, $(\dot{\pi}^*(\mathcal{L}))^{\mathrm{ad}}$ est toujours une extension successive du faisceau $\underline{\mathbb{F}_p}_{V^{\mathrm{ad}}}$ et on est finalement réduit à démontrer l'égalité (18) ci-dessus.
On considère le triangle suivant :

$$j_!'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p \longrightarrow Rj_*'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p \longrightarrow i_*'^{\mathrm{ad}} i'^{\mathrm{ad}*} Rj_*'^{\mathrm{ad}}\mathbb{F}_p \xrightarrow{+1} .$$

Par corollaire 3.9, on a

$$H^i(V^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 3$. On est réduit à démontrer

$$H^i(Z'^{\mathrm{ad}},\, i'^{\mathrm{ad}*}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = 0,$$

pour $i \geq 2$. Maintenant on affirme la formule suivante pour ces groupes de cohomologie :

Lemme 3.12.

$$H^i(Z'^{\,\mathrm{ad}},\, i'^{\,\mathrm{ad}\,*}Rj'^{\,\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_{W'} H^i(W' - Z'^{\,\mathrm{ad}},\, \mathbb{F}_p),$$

où la colimite porte sur tous les ouverts qcqs $W' \subseteq X'^{\,\mathrm{ad}}$, tels que $Z'^{\,\mathrm{ad}} \subset W'$.

On doit expliquer cette formule, car a priori on a besoin d'utiliser tous les voisinages étales de Z'^{ad} dans cette colimite.

Démonstration. (du lemme 3.12.) Les ingrédients sont les deux faits : premièrement, tous les corps résiduels des points $z'_i \in Z'^{\mathrm{ad}}$ sont algébriquement clos. Deuxièmement, dans le monde des espaces adiques on peut raffiner un voisinage étale donné par un voisinage étale, que l'on peut écrire comme composition d'une immersion ouverte et d'un morphisme fini étale (et on peut supposer que la source et la cible sont connexes c.f. [**Hub96**, Lemma 2.2.8]).
Soit $Z'^{\mathrm{ad}} = \{z'_1, ..., z'_m\}$; on a donc la formule suivante :

$$H^i(Z'^{\mathrm{ad}},\, i'^{\mathrm{ad}*}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = \bigoplus_{i=1}^{m} H^i(\{z_i\},\, i_{z'^*_i}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p),$$

où $i_{z'_i}\colon \{z'_i\} \hookrightarrow X'^{\mathrm{ad}}$ est l'inclusion du point $\{z'_i\}$.
Ensuite on peut analyser les groupes de cohomologie $H^i(\{z_i\},\, i^*_{z'_i}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p)$. Ici on trouve la suite des identifications suivantes :

$$\begin{aligned} H^i(\{z'_i\},\, i^*_{z'_i}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) &= \operatorname*{colim}_{f\colon (W',v)\to(\mathrm{Spa}(B'),z'_i) \text{ étale et } W' \text{ affd.}} H^i(W' - f^{-1}(v),\, \mathbb{F}_p) \\ &= \operatorname*{colim}_{f\colon (W',v)\to(X'^{\mathrm{ad}},z'_i) \text{ immersion ouverte qcqs, } W' \text{ affd. connexe}} H^i(W' - \{z'_i\},\, \mathbb{F}_p), d \end{aligned}$$

où $\mathrm{Spa}(B', B'^{+})$ est un voisinage affinoïde, connexe du point $z'_i \in Z'^{\mathrm{ad}}$. De fait, dans un premier temps on observe que les voisinages étales $f\colon (W', v) \to (\mathrm{Spa}(B'), z'_i)$ avec W' affinoïde tels que $f^{-1}(z'_i) = \{v\}$ sont cofinaux. Afin de le voir, il faut se convaincre que chaque point dans la fibre $f^{-1}(z'_i)$ est fermé : f est quasi-compact et localement quasi-fini, donc quasi-fini et $f^{-1}(z'_i)$ est un ensemble fini. Chaque point dans $f^{-1}(z'_i)$ est ainsi (ouvert et) fermé ; et comme z'_i est fermé il en résulte que chaque point de $f^{-1}(z'_i)$ est fermé dans W'. Après, on peut trouver un système cofinal de voisinages étales $f\colon (W', v) \to (\mathrm{Spa}(B'), z'_i)$, tel que W' et $\mathrm{Spa}(B')$ sont affinoïdes connexes, $f^{-1}(z'_i) = \{v\}$ et f est la composition d'une immersion ouverte et un morphisme fini étale. Puisque les corps résiduels $\kappa(z'_i)$ sont algébriquement clos, la partie finie étale est triviale et cela explique la deuxième égalité ci-dessus.
On en déduit que

$$H^i(Z'^{\mathrm{ad}},\, i'^{\mathrm{ad}*}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = \bigoplus_{i=1}^{m} H^i(i^*_{z'_i}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname*{colim}_{z'_i \in W'_i \subset X'^{\mathrm{ad}} \text{ affd}} H^i(W'_i - \{z'_i\},\, \mathbb{F}_p).$$

Vu que les points z'_i sont maximaux, on peut trouver des voisinages ouverts W'_i des points z'_i, tels que $W'_i \cap W'_j = \emptyset$, c.f. [**Sta22**, Tag 0904]. Il en résulte qu'on peut raffiner un voisinage ouvert qcqs W' de Z'^{ad} par un voisinage de la forme $\coprod_{i=1}^{m} W'_i$. Finalement, on en déduit que

$$\operatorname*{colim}_{Z'^{\mathrm{ad}} \subset W' \subset X'^{\mathrm{ad}} \text{ affd}} H^i(W' - Z'^{\mathrm{ad}},\, \mathbb{F}_p) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} H^i(i^*_{z'_i}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p),$$

comme cherché. □

On revient à la démonstration de la proposition 3.6. D'après le lemme qu'on vient de démontrer, il faut maintenant analyser la colimite

$$\operatorname*{colim}_{W'} H^i(W' - Z'^{\mathrm{ad}},\, \mathbb{F}_p).$$

On effectue cette analyse par passage au revêtement perfectoide : Soit E_∞ encore la $\mathbb{Z}_p$-extension de E. On peut l'écrire comme réunion croissante d'extensions galoisiennes E_n de E (telles que $G_n := \mathrm{Gal}(E_n/E) \simeq$

$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}_p = \lim_n \mathrm{Gal}(E_n/E)$). Le morphisme $\mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty) \to \mathrm{Spd}(E)$ est ainsi un $\underline{\mathbb{Z}_p}$-torseur pro-étale ; par changement de base on a donc le $\underline{\mathbb{Z}_p}$-torseur pro-étale

$$X'^{\mathrm{ad}\Diamond} \times_{\mathrm{Spd}(E)} \mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty) \to X'^{\mathrm{ad}\Diamond}.$$

Par la suite on écrit simplement $X'^{\mathrm{ad}\Diamond} \times_{\mathrm{Spd}(E)} \mathrm{Spd}(\widehat{E}_\infty) := (X'^{\mathrm{ad}\Diamond})_\infty$.

On considère maintenant le système filtrant des voisinages ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants $\widetilde{W'} \subset (X'^{\mathrm{ad}\Diamond})_\infty$ de $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$. On trouve ainsi l'égalité suivante :

$$\operatorname*{colim}_{W'} R\Gamma(W' - Z'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = R\Gamma(\mathbb{Z}_p, \operatorname*{colim}_{\widetilde{W'}} R\Gamma(\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p)). \tag{19}$$

On a fait recours aux faits suivants : l'exactitude de la colimite, le fait que la cohomologie étale d'un espace adique analytique sur $\mathbb{Z}_p$ ne change pas si on passe aux diamants, et l'existence d'une identification entre les ouverts qcqs $W' \subset X'^{\mathrm{ad}}$ tels que $Z'^{\mathrm{ad}} \subset W$ et les ensembles ouverts qcqs $\underline{\mathbb{Z}_p}$-invariants $\widetilde{W'} \subset (X'^{\mathrm{ad}\Diamond})_\infty$ tels que $(Z'^{\mathrm{ad}})_\infty \subset \widetilde{W}$. D'après le lemme 3.10, on sait que le complexe

$$\mathrm{colim}_{\widetilde{W'}}\, R\Gamma(\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p)$$

n'a pas de cohomologie en degrés supérieur ou égale à 2.
Le fait que $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ représente le problème principal : a priori ce résultat d'annulation ne suffit qu'à démontrer l'annulation de $H^i(i'^{\mathrm{ad}*}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p)$ pour $i \geq 3$. Cependant l'observation suivante sauve la situation : il y a un isomorphisme entre $\mathbb{Z}_p$-représentations[29]

$$\operatorname*{colim}_{\widetilde{W'}} H^j(\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{G_n}(M_n^{(j)}), \tag{20}$$

où $M_n^{(j)}$ sont des $\mathbb{F}_p$-modules discrets, munis de l'action triviale de G_n : ils dépendent de j et forment un système inductif, i.e. on a une application $M_n^{(j)} \to M_{n+1}^{(j)}$. Le lemme 3.7 implique que la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie d'une représentation du groupe $\mathbb{Z}_p$ de la forme

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{G_n}(M_n^{(j)})$$

est triviale (c.f. également la discussion après ce lemme pour voir comment on a muni $\mathrm{colim}_n\, \mathrm{Ind}_{\{e\}}^{G_n}(M_n)$ d'une action du groupe $\mathbb{Z}_p$). L'égalité (19) implique que, en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre,

$$H^i(Z'^{\mathrm{ad}}, i'^{\mathrm{ad}*}Rj'^{\mathrm{ad}}_*\mathbb{F}_p) = H^0(\mathbb{Z}_p, \operatorname*{colim}_{\widetilde{W'}} H^i(\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty), \mathbb{F}_p).$$

Grâce au lemme 3.10 on pourra donc conclure.
L'énoncé clef pour finir la preuve est ainsi l'égalité (20).
Mais maintenant on peut utiliser le système fondamental fourni par le lemme 3.11 pour calculer la colimite :

$$\operatorname*{colim}_{\widetilde{W'}} H^j(\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{g\in G_n} M_n^{(j)},$$

où

$$M_n^{(j)} = \operatorname*{colim}_{W_i'^{(n)} \text{ voisinage 'suffisament petit' de } \tilde{z}_i'^{(n)}} H^j(f_n^{-1}(\coprod_{i=1}^m \cdot W_i'^{(n)} - (\{\tilde{z}_i'^{(n)}\}_{i=1,\dots,m})), \mathbb{F}_p).$$

[30] Sur les $M_n^{(j)}$ le groupe $\mathbb{Z}_p$ agit via le quotient G_n et cette dernière action est triviale ; de plus $\{M_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment bien un système direct. En effet, on observe d'abord l'égalité suivante :

$$M_n^{(j)} = \operatorname*{colim}_{W' \text{ voisinage de } Z_n'^{\mathrm{ad}}} H^i(f_n^{-1}(W' - Z_n'^{\mathrm{ad}}), \mathbb{F}_p).$$

[29]Les $\mathbb{F}_p$-modules discrets $\operatorname*{colim}_{\widetilde{W'}} H^j(\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty, \mathbb{F}_p)$ sont bien sûr munis d'une action de $\mathbb{Z}_p$ - par l'action de $\underline{\mathbb{Z}_p}$ sur $\widetilde{W'} - (Z'^{\mathrm{ad}})_\infty$ et la fonctorialité de la cohomologie.

[30]Peut-être qu'il n'est pas vrai que $H^j(f_n^{-1}(\coprod_{i=1}^m \cdot W_i'^{(n)} - (\{\tilde{z}_i'^{(n)}\}_{i=1,\dots,m}), \mathbb{F}_p) = 0$, pour $j \geq 2$ - mais cela n'est pas grave, parce qu'on a seulement besoin de cette expression de la colimite pour tuer la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie...

De fait, si $Z_n'^{\mathrm{ad}} \subset W'$ est un tel voisinage, on peut trouver un voisinage suffisamment petit $W_i'^{(n)} \subset W'$ pour chaque point $\tilde{z}_i^{(n)} \in Z_n'^{\mathrm{ad}}$. De plus, parce que les points $\tilde{z}_i^{(n)}$ sont tous maximaux, on peut supposer que $W_i'^{(n)} \cap W_j'^{(n)} = \emptyset$; l'égalité en résulte. Après on considère le morphisme de transition dans la tour

$$f_{n+1,n} \colon X_{n+1}'^{\mathrm{ad}} \to X_n'^{\mathrm{ad}}.$$

Si W' est un voisinage qcqs de $Z_n'^{\mathrm{ad}}$, $f_{n+1,n}^{-1}(W')$ est un voisinage qcqs de $Z_{n+1}'^{\mathrm{ad}}$. On a donc une application

$$H^i(f_n^{-1}(W' - Z_n'^{\mathrm{ad}}), \mathbb{F}_p) = H^i(f_{n+1}^{-1}(f_{n+1,n}^{-1}(W') - Z_{n+1}'^{\mathrm{ad}}), \mathbb{F}_p) \to M_{n+1}^{(j)}.$$

Elles sont compatibles si on raffine les voisinages et on a ainsi une application bien définie

$$M_n^{(j)} \to M_{n+1}^{(j)}.$$

Cela permet de finalement terminer la preuve. □

Remarque 15. On remarque ici que dans la preuve ci-dessus on a seulement utilisé le fait que le degré de

$$\pi \colon X' \to X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$$

est premier à p pour pouvoir démontrer que $H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0$ implique que $H^i(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ad}}) = 0$, où $i \geq 3$. Après on n'a pas utilisé l'hypothèse sur le degré ; ce qui implique que $H^i(X'^{\mathrm{ad}}, \mathbb{F}_p) = 0$, $i \geq 3$, pour tout revêtement ramifié X' de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$.

3.5. Le corps $E(X_{E,F}^{\mathbf{alg}})$ est-il $(C1)$? Cette section est un peu spéculative : l'objectif est d'expliquer une approche possible, en utilisant des espaces de Banach-Colmez, à une conjecture de Fargues. Cette conjecture est la suivante :

Conjecture 3.13. (Fargues)
Le corps de fonctions de la courbe algébrique $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$ est $(C1)$.

Une résolution de cette conjecture donnerait certainement une preuve assez élégante de l'annulation de $H^i(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est un faisceau constructible sur le site étale de $X_{E,F}^{\mathrm{alg}}$ et $i \geq 3$.
Voici l'approche possible : soit $P \in E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})[T_1, ..., T_n]$ un polynôme homogène, non-constant, tel que $\deg(P) < n$. Alors il faut trouver une racine non-triviale de P dans $E(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$. Comme le polynôme a un nombre fini de coefficients, on peut trouver un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X_{E,F}^{\mathrm{alg}})$, tel que P est à coefficients dans $H^0(X_{E,F}^{\mathrm{alg}}, \mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(D))$. On trouve un $m \in \mathbb{Z}$, tel que $\mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(D) \simeq \mathcal{O}_{X_{E,F}^{\mathrm{alg}}}(m)$. En laissant varier les espaces perfectoïdes au dessus de F, on peut regarder l'application polynômiale entre espaces de Banach-Colmez suivante :

$$P \colon \mathrm{BC}_F(\mathcal{O}(k))^n \to \mathrm{BC}_F(\mathcal{O}(m + k \deg(P))),$$

qui est induite par P. Maintenant on peut observer que pour $k >> 0$, on a $nk > m + k \deg(P)$, parce que $n > \deg(P)$. Dans cette situation je pourrais imaginer que

$$P^{-1}(0) \neq \{0\}.$$

En effet, si on croit que les espaces de Banach-Colmez sur F se comportent bien comme des espaces affines sur un corps algébriquement clos, on peut s'attendre à un tel comportement. Cela impliquerait bien sûr la conjecture de Fargues ci-dessus.

3.6. Et que se passe-t-il pour des faisceaux non-Zariski constructibles ? Il n'est pas difficile de démontrer que l'on a

$$\mathrm{cd}_p(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}) \leq 3.$$

[31] Dans mon approche pour contrôler la p-dimension cohomologique de la courbe algébrique, on n'a travaillé qu'avec des faisceaux sur la courbe adique $X_{E,F}^{\mathrm{ad}}$ qui sont 'algébriques'. On peut ainsi se poser la question suivante :

[31] Voici l'argument : on utilise la présentation $(X_{E,F}^{\mathrm{ad}})^{\diamond} = (\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}})/\underline{\mathbb{Z}_p}$; comme $\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$, la suite spectrale de Hochschild-Serre implique qu'il suffit de démontrer que $\mathrm{cd}_p(\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \leq 2$. Cela résulte de la formule [**Sch22**, Prop. 21.11], qui est aussi valide pour $\ell = p$, des faits que $\dim_{\mathrm{Krull}} |\mathbb{B}_F^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}/\varphi_F^{\mathbb{Z}}| = 1$ et que $\mathrm{cd}_p(M) \leq 1$, où M est un corps de caractéristique p.

Question 3.14. Peut on trouver un $\mathbb{F}_p$-module constructible $\mathcal{F}$ (dans le sens de Huber [**Hub96**, Def. 2.7.2.]) sur l'espace adique $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$, tel que

$$H^3(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathcal{F}) \neq 0?$$

C'est une question intéressante parce que l'intuition que $X^{\mathrm{ad}}_{E,F}$ est 'une surface de Riemann compacte' prédit que de fait $\mathrm{cd}_p(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}) \leq 2$.
Dans le reste de cette section je veux analyser cette question dans le cas d'un faisceau constructible de la forme $j_!\mathbb{F}_p$, où

$$j\colon Y_{[1,\rho]} \hookrightarrow X^{\mathrm{ad}}_{E,F} = Y_{[1,q]}/(Y_{[1,1]} \sim Y_{[q,q]})$$

et $\rho \in [1,q]$. Comme d'habitude, on considère le changement de base au niveau infini :

$$j_\infty\colon Y_{[1,\rho],\infty} \hookrightarrow X^{\mathrm{ad}}_{E_\infty,F}.$$

Ici on note $Y_{[1,\rho],\infty} := Y_{[1,\rho]} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$ et $X^{\mathrm{ad}}_{E_\infty,F} := X^{\mathrm{ad}}_{E,F} \times_{\mathrm{Spa}(E)} \mathrm{Spa}(\widehat{E}_\infty)$. En utilisant

$$\mathrm{cd}_p(\mathbb{Z}_p) = 1$$

et $\mathrm{cd}_p(X^{\mathrm{ad}}_{E_\infty,F}) \leq 2$, on voit facilement que

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^2(X^{\mathrm{ad}}_{E_\infty,F}, j_{\infty !}\mathbb{F}_p)) \simeq H^3(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, j_!\mathbb{F}_p).$$

Maintenant on analyse le groupe

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^2(X^{\mathrm{ad}}_{E_\infty,F}, j_{\infty !}\mathbb{F}_p)).$$

On rappelle que $X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F} = (\mathbb{B}^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}_F/\varphi_F^{\mathbb{Z}})$. On considère de plus la décomposition ouverte/fermée

$$A^{\mathrm{perf}}_{[1,\rho],F} \xrightarrow{k} (\mathbb{B}^{1,\circ,*,\mathrm{perf}}_F/\varphi_F^{\mathbb{Z}}) \xleftarrow[i]{} A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F}.$$

Cette décomposition implique la suite exacte courte suivante

$$k_!\mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow i_*\mathbb{F}_p.$$

Les espaces $(X^{\mathrm{ad}}_{E_\infty,F})^\flat$ et $A_{(\rho,q],F}$ sont connexes ; il en résulte

$$H^0(k_!\mathbb{F}_p) = H^1(k_!\mathbb{F}_p) = 0$$

en utilisant la suite exacte longue en cohomologique induite par la suite exacte courte ci-dessus. Comme $H^2(X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F}, \mathbb{F}_p) = 0$, cette suite exacte longue donne la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow H^1(X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^1(A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(k_!\mathbb{F}_p) \longrightarrow 0.$$

C'est une suite exacte courte de $\mathbb{Z}_p$-modules discrets et en appliquant la $\mathbb{Z}_p$-cohomologie, on peut en déduire une suite exacte longue. Il en résulte une surjection

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^1(A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F}, \mathbb{F}_p)) \twoheadrightarrow H^1(\mathbb{Z}_p, H^2(k_!\mathbb{F}_p)).$$

Le noyau de cette surjection s'identifie à l'image de $H^1(\mathbb{Z}_p, H^1(X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F}, \mathbb{F}_p))$. On observe que

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^1(X^{\mathrm{ad}\flat}_{E_\infty,F}, \mathbb{F}_p)) = H^2(X^{\mathrm{ad}}_{E,F}, \mathbb{F}_p).$$

Si on suppose de plus que $\mu_p \subset E$, ce dernier groupe de cohomologie s'identifie à $\mathbb{F}_p$.
Maintenant on analyse $H^1(\mathbb{Z}_p, H^1(A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F}, \mathbb{F}_p))$. D'abord, on observe que

$$H^1(\mathbb{Z}_p, H^1(A^{\mathrm{perf}}_{(\rho,q],F}, \mathbb{F}_p)) = H^2(Y_{(\rho,q]}, \mathbb{F}_p).$$

L'espace $Y_{(\rho,q]}$ admet un recouvrement de Stein

$$Y_{(\rho,q]} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_{[\rho_n,q]}.$$

Cela implique la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \mathrm{R}^1 \lim_n H^1(Y_{[\rho_n,q]}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^2(Y_{(\rho,q]}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow \lim_n H^2(Y_{[\rho_n,q]}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow 0.$$

Sous des hypothèses supplémentaires on peut vérifier que la dernière limite s'annule :

Lemme 3.15. On suppose que le corps de fonctions $E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})$ est de dimension cohomologique 1 et $\mu_p \subset E^*$. Alors on a
$$H^i(Y_I,\, \mathbb{F}_p) = 0,$$
pour $i \geq 2$ et $I \subset (0,1)$ un intervalle compact, tel que $\varphi(Y_I) \cap Y_I = \emptyset$.

Démonstration. Il suffit d'expliquer l'annulation pour $i = 2$: en utilisant la présentation $Y_I^{\diamondsuit} = A^{\mathrm{perf}}_{I,F}/\underline{\mathbb{Z}_p}$ on démontre
$$H^i(Y_I, \mathbb{F}_p) = 0,$$
pour $i \geq 3$.
Soit $t \in B^{\varphi=\pi}$, tel que t ne s'annule pas dans Y_I. D'après un résultat de Fargues-Fontaine ([**FF18**, Prop. 7.9.1.]) l'inclusion canonique $B_e = (B[1/t])^{\varphi=1} \hookrightarrow B_I$ est d'image dense. Soit
$$A_e = \{f \in B_e \colon ||f||_I \leq 1\}.$$
On a $A_e[1/\pi] = B_e$. D'après le résultat de comparaison de Huber ([**Hub96**, Cor. 3.2.2.]), on a
$$H^i(Y_I,\, \mathbb{F}_p) = H^i(\mathrm{Spec}(A_e^h[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p).$$
Ici $A_e^h = \mathrm{colim}_{A_e \to A_e'}\, A_e'$ est le hensélisé de A_e le long de π, i.e. la colimite porte sur tous les $A_e \to A_e'$ étale, tel que $A_e/\pi \simeq A_e'/\pi$. Par compatibilité de la cohomologie étale aux colimites filtrantes, on a
$$H^i(\mathrm{Spec}(A_e^h[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p) = \operatorname*{colim}_{A_e \to A_e'} H^i(\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p).$$
On affirme que $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi])) = 0$. C'est ici que l'on doit utiliser l'hypothèse que $\mathrm{cd}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) = 1$. De fait, $\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi])$ est un schéma noethérien de dimension 1 qui est régulier. Soient $\{C_i\}_{i\in I}$ ses composantes connexes. Il y en a un nombre fini et ce sont aussi les composantes irréductibles. Chaque C_i est le spectre d'un anneau de Dedekind. Il suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(C_i) = 0$ et pour cela il suffit de démontrer que $\mathrm{Br}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_i))) = 0$, car pour un schéma régulier intègre S, avec point générique η_S, de dimension 1 on a une injection
$$\mathrm{Br}(S) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\kappa(\eta_S)).$$
Le morphisme induit $C_i \to \mathrm{Spec}(B_e)$ est toujours étale. L'image U est un ouvert et comme B_e est un anneau principal l'ouvert U est affine. Le morphisme $C_i \to U = \mathrm{Spec}(R)$ est étale et surjectif entre schémas affines. Il correspond ainsi à une injection sur les anneaux et il est donc dominant. On observe $\mathrm{Frac}(B_e) = \mathrm{Frac}(R)$ et le fait que l'extension $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_i))$ de $\mathrm{Frac}(B_e)$ est finie. On a donc $\mathrm{Br}(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(C_i))) = 0$, parce que $\mathrm{cd}(E(X^{\mathrm{alg}}_{E,F})) = 1$.
En utilisant la suite exacte de Kummer, on déduit de l'hypothèse $\mu_p \subset E^\times$ l'isomorphisme
$$H^2(\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi]),\, \mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi]))_{[p]}.$$
Maintenant, on affirme que
$$\operatorname*{colim}_{A_e \to A_e'} \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi])) = \mathrm{Pic}(B_I) = 0,$$
ce qui finit la preuve car B_I est un anneau principal.
D'abord, on utilise la compatibilité de la cohomologie étale aux colimites filtrantes
$$\operatorname*{colim}_{A_e \to A_e'} \mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(A_e'[1/\pi])) = H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(A_e^h[1/\pi]),\, \mathbb{G}_m).$$
On observe que A_e^h et $\widehat{A}_e$ sont sans π-torsion. On peut donc appliquer le résultat de Bouthier-Česnavičius [**BC20**, Thm. 2.3.3. (c)] à $G = \mathbb{G}_m$ et au morphisme
$$(A_e^h, \pi) \to (\widehat{A}_e, \pi)$$
et en déduire
$$\mathrm{Pic}(A_e^h[1/\pi]) \simeq \mathrm{Pic}(\widehat{A}_e[1/\pi]).$$
Comme $B_e \hookrightarrow B_I$ est d'image dense, on a $\widehat{A}_e[1/\pi] = B_I$. $\square$

La question finale est la suivante

Question 3.16. Dans la situation ci-dessus : A-t-on
$$\mathrm{R}^1 \lim_n H^1(Y_{[\rho_n, q]},\, \mathbb{F}_p) = 0?$$

Il est équivalent d'essayer de comprendre

$$\mathrm{R}^1 \lim_n H^0(\mathbb{Z}_p, H^1(A_{[\rho_n,q],F}, \mathbb{F}_p)).$$

Une autre question dans cette direction est la suivante :

QUESTION 3.17. A-t-on

$$H^2(Y_{(\rho,q]},\, \mu_p) \neq 0?$$

Par l'analogie entre $Y_{E,F}$ et la boule ouverte unité épointée $\mathbb{B}_C^{\circ,1,*}$, où C est un corps non archimedien algébriquement clos, il est probable que cette question a une réponse positive si le corps F n'est pas sphériquement clos. Peut on par exemple adapter les résultats de la section [**CDN21**, Prop. A.2.] ?
La conclusion de cette discussion est ainsi la suivante : si F n'est pas sphériquement clos je peux imaginer que

$$H^3(X_{E,F}^{\mathrm{ad}}, j_!(\mathbb{F}_p)) \neq 0.$$

Chapitre 3

G-μ-displays and local shtuka

1. Introduction

The theory of displays was introduced by Zink in [**Zin02**] to give a Dieudonné-type classification for formal p-divisible groups over general p-adic rings. This was motivated by an old paper of Norman [**Nor75**] and Zink succeeded in proving that formal p-divisible groups are classified by nilpotent displays over a very large class of rings, for example those p-adic rings R, such that R/pR is a finitely generated $\mathbb{F}_p$-algebra. Later Lau proved in [**Lau08**] that this classification result in fact extends to all p-adic rings. To give a display is to give a filtered, finitely generated projective module over the p-typical Witt vectors of the p-adic ring, one is working over, together with certain Frobenius-linear operators. This data is required to satisfy certain axioms. Instead of recalling this precisely, I refer the reader to Zink's definition [**Zin02**, Definition 1] and give the following slogans:

(a) a display is (locally on the ring) a Frobenius-twisted conjugacy class of matrices,
(b) a display is a mixed-characteristic analog of Drinfeld′s shtukas with one leg.

Let me make this more precise: concerning (a), consider the group GL_n over $\mathbb{Z}_p$ and let $L^+\mathrm{GL}_n$ be the Greenberg-transform with points $L^+\mathrm{GL}_n(R) = \mathrm{GL}_n(W(R))$. Next, let d be an integer $d \leq n$ and consider the subgroup scheme $\mathrm{GL}_n(\mathcal{W}(.))_{n,d} \subseteq L^+\mathrm{GL}_n$ of matrices of the form

$$\begin{bmatrix} A & B \\ J & C \end{bmatrix}$$

where J is a block matrix with entries in $I(R) = \mathrm{Im}(V\colon W(R) \to W(R))$ and A has size $d \times d$ and C has size $n-d \times n-d$. Define the Frobenius-linear group homomorphism

$$\Phi_{n,d}\colon\ \mathrm{GL}_n(\mathcal{W}(R))_{n,d} \to L^+\mathrm{GL}_n(R),$$

by the formula

$$\Phi_{n,d}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ J & C \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F(A) & pF(B) \\ V^{-1}(J) & F(C) \end{bmatrix}.$$

Then the precise formulation of slogan (a) is the following statement again due to Zink.

Fact 1.1. (Zink) Let R be a p-adic ring. Then the groupoid of displays (locally of height n and dimension d) over R is equivalent to the groupoid of $\mathrm{GL}_n(\mathcal{W}(.))_{n,d}$-torsors Q together with a sheaf-morphism

$$\alpha\colon Q \to L^+\mathrm{GL}_n,$$

such that

$$\alpha(q \cdot h) = h^{-1}\alpha(q)\Phi_{n,d}(h),$$

for all $q \in Q$ and $h \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{W}(.))_{n,d}$.

Note that once one adds the Zink-nilpotency condition on displays, this proposition together with the statement that displays indeed classify formal p-divisible groups, gives a very explicit description of formal p-divisible groups (of fixed height and dimension) purely in terms of group theory!
The meaning of slogan (b) remains a bit vague over general base rings (e.g. what should play here really the role of the leg?). If one instead considers only perfect rings in characteristic p, then one can explain this slogan by the following easy

Fact 1.2. Let R be a perfect $\mathbb{F}_p$-algebra.
Then the category of displays over R embeds fully faithfully into the category of finitely generated projective $W(R)$-modules P together with a F-linear morphism

$$\varphi_P\colon P \to P,$$

such that $\varphi_P[1/p]\colon P \otimes_{W(R)} W(R)[1/p] \to P \otimes_{W(R)} W(R)[1/p]$ is a F-linear isomorphism.

The datum of a pair (P, φ_P) has obvious similiarity with a (local) shtuka with only one leg, but this interpretation works only if R is a perfect ring in characteristic p.
Regarding the mixed-characteristic case, Scholze has used perfectoid geometry to introduce p-adic shtuka in his Berkeley lectures [**SW20**], see [**SW20**, Def. 11.4.1.]. A theorem of Fargues then asserts that in case one is working over a geometric perfectoid point, p-divisible groups are indeed classified by local mixed-characteristic shtukas with one leg and a minuscule bound on the singularity at that leg, see [**SW20**, Thm. 14.1.1.]. If one restricts to formal p-divisible groups, one can thus use Scholze′s mixed-characteristic local shtukas to give a precise meaning to slogan (b) over perfectoid base rings.
One of the aims of this chapter is to extend this picture to formal p-divisible groups carrying additional structures and beyond.
The wish to study mixed-characteristic shtuka might have its origins in trying to construct their moduli in the hope of achieving geometric realizations of local Langlands correspondences. Propagated by an article of Rapoport-Viehmann [**RV14**] and deeply inspired by Deligne′s group theoretical reformulation (and extension) of the theory of Shimura-varieties [**Del71**], an ongoing project right now is therefore to rewrite the theory of Rapoport-Zink spaces and their generic fibers in terms of group theory. In particular, this means to extend the theory beyond the cases of (P)EL-type considered by Rapoport-Zink [**RZ96**]. The part of this program concerning the generic fiber was first achieved by Scholze in his Berkeley lectures [**SW20**], where he constructed general local Shimura-varieties as rigid analytic spaces. His methods of construcing these spaces used crucially his theory of diamonds, the relative Fargues-Fontaine curve and foundational results of Kedlaya-Liu; it therefore only makes sense on the generic fiber.
Thus, an open problem is to investigate the existence of integral models for local Shimura-varieties, beyond the PEL-cases considered by Rapoport-Zink; or more generally beyond the abelian case: these 'exotic' cases are interesting because these spaces are not in an obvious way linked to p-divisible groups anymore.[1] Although Scholze proposes an integral model in [**SW20**, Section 25], he is only able to make sense of this on the level of v-sheaves, which is still strong enough to characterize a conjectural flat and normal formal scheme, whose associated v-sheaf should be the moduli problem introduced by Scholze in [**SW20**, Def. 25.1.1]. In the following, let me concentrate on the case when the level structure is maximal hyperspecial.
This is where the work of Bültel-Pappas [**BP20**] ties in: their approach is different than that of Scholze in that it works more classically in the world of formal schemes; and more importantly: not just for integral perfectoid rings. To explain their ideas, one first simply notes that in case one is considering Rapoport-Zink spaces, where one is deforming a formal p-divisible group, one can use the classification result of Zink and Lau, to reformulate the Rapoport-Zink moduli problem of p-divisible groups completely in terms of nilpotent displays. Therefore, to generalize Rapoport-Zink spaces, one may try to generalize displays. But then one can use the perspective on displays given by fact 1.1, to see that to generalize displays one just has to generalize the group $\mathrm{GL}_n(\mathcal{W}(.))_{n,d}$ and the morphism $\Phi_{n,d}$. This is exactly what Bültel [**Bue13**] and later Bültel-Pappas were able to do for unramified reductive groups $\mathcal{G}$ over $\mathbb{Z}_p$ and a minuscule cocharacter μ.[2] After having generalized displays to unramified groups, one can introduce moduli problems of these generalized displays. In the case of GL_n and a minusucle cocharacter they give back the raw Rapoport-Zink spaces, where one is deforming a formal p-divisible group. Then Bültel-Pappas are able to show that in the Hodge-type case, on locally noetherian test-objects, these moduli problems have indeed the expected shape of a (formally smooth) formal scheme, locally formally of finite type, see [**BP20**, Thm. 5.1.3.]. Nevertheless, they leave open the problem to investigate the relationship between their approach and that of Scholze. This is what is done in this chapter.

1.1. Statement of the results. I will now state more precisely the main results. To do this, one has to introduce a bit of set-up: fix a prime number p and choose an algebraic closure $\overline{\mathbb{Q}}_p$ of $\mathbb{Q}_p$, which induces an algebraic closure $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. Denote by $\breve{\mathbb{Q}}_p = W(k)[1/p]$ the maximal unramified extension of $\mathbb{Q}_p$.
Let G be a connected reductive group over $\mathbb{Q}_p$, $\{\mu\}$ a $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-conjugacy class of minuscule cocharacters

[1]Compare however with the work of Bültel [**Bue13**], where he is neverless still able in specific situations to make a link with p-divisible group in the case of global Shimura varieties - I thank Oliver Bültel for making me aware of this!

[2]Although their theory is definable in greater generality than that of a reductive group scheme, one cannot expect it to give rise to the right objects. Note for example that Lau in [**Lau21**] is also able to define $\mathcal{G}$-μ-displays for non-minuscule cocharacter and general smooth $\mathbb{Z}_p$-groups. In cases of ramification one should use the local model to set up the theory of $\mathcal{G}$-μ-displays and in that case one can e.g. compare with the recent work of Pappas in that direction, [**Pap21**].

of $G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ and $[b] \in B(G, \mu^{-1})$. A triple $(G, \{\mu\}, [b])$ is called a local Shimura datum [**SW20**, Def. 24.1.1]. Let $E = E(G, \{\mu\})$ be the local reflex field, a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. If $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$ is some compact open subgroup, Scholze has associated in [**SW20**, Def. 24.1.3.] to $(G, \{\mu\}, [b], K)$ a uniquely determined smooth and partially proper rigid analytic variety Sh_K over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$. This is the local Shimura variety with level structure K.
To make the link with the work of Bültel-Pappas, let me assume that G is unramified and choose a reductive model $\mathcal{G}$ over $\mathbb{Z}_p$. Then one can consider the maximal hyperspecial level structure $K = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$ and the local Shimura variety is uniquely characterized by the fact that the associated diamond is the solution of a moduli problem of local shtuka ([**SW20**, Def. 23.1.1]). The rigid analytic variety Sh_K is conjectured (c.f. [**Pap18**, Conjecture 5.2.]) to admit a uniquely determined integral model.
The moduli problem of $\mathcal{G}$-μ-displays should give rise to the desired integral model if one adds a further assumption on the slopes of $[b]$. To define this moduli problem, let

$$\mu\colon \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_E} \to \mathcal{G}_{\mathcal{O}_{\breve{E}}}$$

be an integral extension of a representative of the previously considered conjugacy class of geometric cocharacters. Its $\mathcal{G}(\mathcal{O}_E)$-conjugacy class is well-defined. Assume that $[b] \in B(G, \mu)$ admits a representative $b = u_0\mu(p)$, where $u_0 \in \mathcal{G}(W(k))$. This element u_0 gives rise to a $\mathcal{G}$-μ-display $\mathcal{P}_0$ over k.
Bültel-Pappas introduce ([**BP20**, section 4.2]) a functor

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}\colon\ \mathrm{Nilp}^{\mathrm{op}}_{W(k)} \to \mathrm{Set}$$

classifying $\mathcal{G}$-μ-displays, which modulo p are quasi-isogenous to the base change of $\mathcal{P}_0$. Assume in the following that -1 is not a slope of $\mathrm{Ad}(b)$. By an unpublished result of Oliver Bültel, this functor admits no non-trivial automorphism and is therefore a sheaf for the fpqc topology on $\mathrm{Nilp}_{W(k)}$.
Making use of a construction of Scholze-Weinstein [**SW13**], one can define a generic fiber of the functor $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$ without knowing its representability. This is a sheaf for the analytic topology

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}\colon \mathrm{CAffd}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})} \to \mathrm{Set},$$

where $\mathrm{CAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}$ is the category of complete affinoid Huber-pairs (see subsection 9.1). Let

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit} \to \mathrm{Spd}(\breve{E})$$

be the diamantine version of the previous sheaf (see subsection 9.2). Then one of the main results of this chapter is the following

THEOREM 1.3. (Proposition 9.2)
Assume that $p \geq 3$. There is an isomorphism of analytic sheaves on $\mathrm{AffdPerf}^{\mathrm{op}}_k$

$$\psi\colon (\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit} \simeq (\mathrm{Sh}_K)^{\diamondsuit},$$

over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$.

Furthermore, a conjecture of Rapoport-Pappas [**PR21**, Conjecture 3.3.4] is verified: let $\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}}$ be the v-sheaf introduced by Scholze as in [**SW20**, Def. 25.1.1.], which is associated to the data $(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$ and the flag-variety as the local model. Using the main results of the PhD-thesis of Gleason [**Gle21**], for a point $x \in X_\mu(b)(k)$ in the affine Deligne-Lustzig variety ([**PR21**, Def. 3.3.1]), one may consider the formal completion

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}},$$

(c.f. [**PR21**] (3.3.4.)). Then one shows the following

THEOREM 1.4. (Proposition 9.9)
Assume that $p \geq 3$. The v-sheaf $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}}$ is representable by the formal spectrum over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ of a regular complete noetherian local ring.

1.2. Techniques of the proof.

1.2.1. *Link between adjoint nilpotent displays and local shtuka.* To prove the previous statements, one has to relate adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays to Scholze's local shtuka. One actually compares adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays to Breuil-Kisin-Fargues modules with extra structure (see Def. 16) and then the passage to shtuka is evident. Here the main statement is the following

Proposition 1.5. (Corollary 7.3)
Assume $p \geq 3$. Let R be an integral perfectoid $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-algebra. Then there is a fully faithful functor from the category of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ^{σ}-displays to the category of $\mathcal{G}$-Breuil Kisin-Fargues modules of type μ.

In the case where $R = \mathcal{O}_C$ is the ring of integers of a complete and algebraically closed extension of $\breve{E}$, one can describe the essential image in the style of Scholze-Weinstein as modifications of trivial G-bundles on the Fargues-Fontaine curve.

Proposition 1.6. (Corollary 7.6)
Assume $p \geq 3$ and let $\mathcal{O}_C$ be as before. Consider the pointed adic Fargues-Fontaine curve $(X^{\mathrm{ad}}_{C^{\flat},\mathbb{Q}_p}, \infty)$ associated to the pair $(C^{\flat}, \mathbb{Q}_p)$ and the given untilt C of $C^{\flat}$.
The following categories are equivalent:

(a): Adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ^{σ}-displays over $\mathcal{O}_C$,

(b): tuples $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}, \iota, \mathcal{T})$, where $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}$ are G^{adic}-torsors on $X^{\mathrm{ad}}_{C^{\flat},\mathbb{Q}_p}$, $\mathcal{E}_1$ is trivial, ι is a μ-bounded meromorphic modification of $\mathcal{E}_1$ by $\mathcal{E}$ along ∞, $\mathcal{T}$ is a $\mathcal{G}$-torsor on $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, such that if $\mathcal{V}$ is the G-torsor on $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ corresponding to $\mathcal{E}_1$ one requires that
$$\mathcal{T} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathcal{V}.$$
One furthermore requires that the vector bundle $\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$ has all HN-slopes < 1; here $\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$ is the vector bundle on $X^{\mathrm{ad}}_{C^{\flat},\mathbb{Q}_p}$ obtained by pushing out along the adjoint representation.

I will now explain what goes into the proof of these statements. Here I follow the strategy used by Eike Lau in [**Lau18**] where he considers the GL_n case.
Let R be an integral perfectoid $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-algebra. The bridge between the rings $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ and $W(R)$ is built using the crystalline period ring $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$: the ring $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ embeds into $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ and using the Cartier morphism and Witt functoriality one constructs the rather funny morphism
$$\chi\colon\ \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to W(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) \to W(R).$$
The whole set-up admits an enhencement to frame morphisms and one can introduce the appropiate notion of $\mathcal{G}$-μ-window categories. Objects in this category are torsors under certain groups and in case these torsors are trivial one calls these windows banal (a term that was introduced in [**BP20**] for displays). Then one shows the following (the 'crystalline equivalence'):

Proposition 1.7. (Proposition 5.1)
Let R be an integral perfectoid $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-algebra.

(a): The morphism χ induces an equivalence
$$\chi_{\bullet}\colon\ \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R))_{\mathrm{nilp,banal}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Displ}(R)_{\mathrm{nilp,banal}}.$$

(b): Assume furthermore that R is p-torsion free, then
$$\chi_{\bullet}\colon\ \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R))_{\mathrm{nilp}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Displ}(R)_{\mathrm{nilp}}$$
is an equivalence.

Remark 1. The restriction in (b) to p-torsion free integral perfectoid rings is maybe not necessary, but I was only able to verify descent for $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(.)$ in this set-up c.f. Lemma 3.4.

Here the key ingredient is Lau's unique lifting lemma, which I reproduce in the language used in this chapter in Proposition 4.11.
It remains to link $\mathcal{G}$-μ-windows over $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ to those over $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. This is the step where I have to assume $p \geq 3$ unfortunately. Here I give a group theoretic adaption of the arguments of Cais-Lau [**CL17**] and show the following

Proposition 1.8. (Proposition 6.1)
Assume that $p \geq 3$ and let R be an integral perfectoid $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-algebra. Then the inclusion $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R) \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ induces an equivalence
$$\mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_{\mathrm{banal}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R))_{\mathrm{banal}}.$$

1.2.2. *Link between the moduli problems.* Having wrestled with the theory of frames and windows, one can finally turn to the comparison of the moduli problems. To get going, one has to compare the two notions of quasi-isogeny that are used. Unfortunately, this is not a direct consequence of the work done before: in the case of GL_n this translation of the quasi-isogeny is automatic because there one does not only work with groupoids and one can use a good notion of an isogeny. This is one of the most technical parts of this chapter and I refer to section 8 for the full details; let me just say here that one uses the Tannakian perspective on $\mathcal{G}$-μ-displays introduced by Daniels in [**Dan21**] and the key fact that the Frobenius acts p-adically very nilpotently on

$$\ker(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p) \to W(R/p)).$$

At this point, one can construct a morphism of v-sheaves over $\mathrm{Spd}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$

$$\mathcal{M}_v^{\mathrm{BP}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{Scholze}}^{\mathrm{int}},$$

see for example the proof of Proposition 9.9 and one can verify that this morphism is a bijection on geometric points. Scholze has pioneered a trick which allows one to deduce an isomorphism of v-sheaves in this situation: one considers arbitrary products $\prod_{i \in I} \mathcal{O}_{C_i}$, where C_i are complete algebraically closed fields over $\mathcal{O}_{\breve{E}}$ with perfectoid pseudo uniformizers $\varpi_i \in C_i$. Let $R^+ = \prod_{i\in I} \mathcal{O}_{C_i}$, $\varpi = (\varpi_i)_i \in R^+$ and $R = R^+[1/\varpi]$. Then one has to show that a $\mathrm{Spa}(R, R^+)$-valued point of $\mathcal{M}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{Scholze}}$ factors over $\mathcal{M}_v^{\mathrm{BP}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{Scholze}}$. Since this product of point construction does not interact well with the adjoint nilpotency condition, one has to find a different way.
Here I succeeded in the generic fiber to show Proposition 9.2. One technial ingredient is the following statement, which might also be helpful in other contexts:

Lemma 1.9. *(see Lemma 9.4 and Remark 25)*
Let (R, R^+) be an affinoid perfectoid pair over k. Let $\mathcal{N}$ be a $\mathcal{G}$-torsor over

$$\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi]).$$

There exists a covering for the analytic topology of $\mathrm{Spa}(R, R^+)$, such that $\mathcal{N}$ extends to the whole spectrum after pullback to this covering.

1.3. Some loose ends. Finally, let me briefly explain why I got interested in the problem of showing that the generic fiber of the Bültel-Pappas moduli problem of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays is representable by the local Shimura variety: the methods of this article allow to construct a continous and specializing morphism

$$\mathrm{sp}\colon |\operatorname{Sh}_K| \to |X_\mu(b)|,$$

here $X_\mu(b)$ the affine Deligne-Lustzig variety associated to an unramified local Shimura-datum

$$(G, \{\mu\}, [b])$$

over $\mathbb{Q}_p$, with chosen reductive model $\mathcal{G}$ of G and maximal hyperspecial levelstructure $K = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)$; this morphism was also constructed in great generality and studied in depth in the PhD-thesis of Ian Gleason [**Gle21**]. The idea was to show that the following locally ringed space is in fact a formal scheme locally formally of finite type: $(|X_\mu(b)|, \mathrm{sp}_*\mathcal{O}^\circ_{\mathrm{Sh}_K})$. To glue the underlying reduced scheme one would for example have to show that there is an isomorphism

$$((\mathrm{sp}_*\mathcal{O}^\circ_{\mathrm{Sh}_K})/(\mathrm{sp}_*\mathcal{O}^{\circ\circ}_{\mathrm{Sh}_K}))^{\mathrm{perf}} \simeq \mathcal{O}_{X_\mu(b)}.$$

To attack this, it would be helpful to be able to construct an adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-display over the ring of power bounded functions over $\mathrm{sp}^{-1}(U)$, where U is open, affine in $X_\mu(b)$ To actually get going, a moduli description in terms of $\mathcal{G}$-μ-displays of the local Shimura variety might be helpful. Let me nevertheless admit, that the most difficult thing seems to be to verify that the ring $\mathcal{O}^\circ_{\mathrm{Sh}_K}(\mathrm{sp}^{-1}(U))$ is $I = \mathcal{O}^{\circ\circ}_{\mathrm{Sh}_K}(\mathrm{sp}^{-1}(U))$-adic and formally of finite type; this seems difficult because the specialization morphism is not quasi-compact and I don't know how to control the geometric shape of $\mathrm{sp}^{-1}(U)$ (it should at least be a smooth Stein-space in the sense of rigid analytic geometry). Needless to say, once one knows that the locally ringed space $(|X_\mu(b)|, \mathrm{sp}_*\mathcal{O}^\circ_{\mathrm{Sh}_K})$ is a formal scheme, formally smooth and locally of finite type, one could finally attack the representability conjecture put forward by Bültel-Pappas, see Conjecture 9.1.

1.4. Overview. Let me briefly explain what is actually done in the sections. In section 3, I recall the theory of frames and introduce the main examples that will be relevant later on. Here I also verify descent for the relevant frames and will introduce an h-frame structure in the sense of Lau on the crystalline frame associated to a quasi-regular semiperfect ring. Afterwards, as was already said, in section 4, I will introduce the notion of $\mathcal{G}$-μ windows for the frames that are necessary. Furthermore, I will recall the adjoint nilpotency condition discovered by Bültel-Pappas in [**BP20**] and reproduce Lau's unique lifting lemma in the language I am using here, see Prop 4.11: this will be used repeatedly in the sequel. In section 5, I will show the crystalline equivalence and in section 6, I will explain why $\mathcal{G}$-μ-windows for the frame corresponding to $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ are equivalent to $\mathcal{G}$-μ-windows for the frame corresponding to $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, as long as $p \geq 3$. This will be put to use in section 7, when I compare $\mathcal{G}$-μ-displays over integral perfectoid rings with Scholze's mixed characteristic shtukas. The next section 8, is concerned with the translation between the notion of quasi-isogeny as used by Bültel-Pappas and with that used by Scholze in his moduli problem of local mixed characteristic shtukas. Finally, in the last section 9, everything will be put together to first show the representability of diamond of the generic fiber of the Bültel-Pappas moduli problem, then I explain a conjecture on absolute prismatic crystals which should pave the way towards showing that the generic fiber of the Bültel-Pappas moduli problem itself is representable by the local Shimura variety; at least inside the category of complete and smooth affinoid adic spaces over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$. Finally, the existence of integral models of the tubes in the local Shimura variety is verified.

2. Notations and Conventions

I will fix throughout a prime p. All rings will be assumed to be commutative and to have a 1 element. If R is some ring, I denote by Nilp_R the category of R-algebras S, such that p is nilpotent in S. When talking about the ring of Witt vectors, I always mean the ring of p-typical Witt vectors. A ring R is called p-adic, when it is complete and separated in the p-adic topology. A surjection of p-adic rings $S \to R$ is called a pd-extension, if $\mathfrak{a} = \ker(S \to R)$ is equipped with a divided power structure $\{\gamma_n\}$, that I require to be compatible with the canonical pd-structure on $p\mathbb{Z}_p$. I define $\gamma_n(x) = [x]^{(n)}$. Groups will always act from the right. If $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(R)$ is some smooth-affine group scheme over $\mathbb{Z}_p$, then $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}} = \mathrm{Spa}(R, R^+)$, where R^+ is the integral closure of $\mathbb{Z}_p$ in R; this definition is made in a way such that if S is some adic space over $\mathbb{Z}_p$, then $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}(S) = \mathcal{G}(\Gamma(S, \mathcal{O}_S))$.

3. Frames

As the terminology already suggests, one first has to introduce the concept of frames, to prepare the study of $\mathcal{G}$-windows with μ-structure. A frame is an axiomatization of the structures on the ring of Witt vectors, that are used in developing the theory of displays, as done by Zink [**Zin02**]. This section might be a bit dry but the reason it is fruitful to think abstractly about the concept of a frame is that Zink himself ([**Zin01**]), Lau ([**Lau18**]) and Anschütz-Le Bras ([**AB21**]) found many situations, where they naturally make an appearance. For this article frame structures arising from constructions in p-adic Hodge-theory, that have been discussed by Lau in [**Lau18**], will be particularly relevant.

3.1. The category of frames. First of all, the notion of frames that is being used in this article will be quickly introduced and it will be explained what a morphism between them is. The reference for this is [**Lau10**, Section 2].

Definition 1. A frame $\mathcal{F}$ consists of a 5-tuple $(S, R, I, \varphi, \dot{\varphi})$, where S and R are rings, $I \subset S$ is an ideal, such that $R = S/I$, $\varphi\colon S \to S$ is a ring-endomorphism and $\dot{\varphi}\colon I \to S$ is a φ-linear map. This data is required to fulfill the following properties:

(a) $\varphi(x) \equiv x^p \bmod pS$,
(b) $\dot{\varphi}(I)$ generates S as an S-module,
(c) $pS + I \subseteq \mathrm{Rad}(S)$.

Remark 2. From (b) it follows that there exists a unique element $\zeta_{\mathcal{F}} \in S$, such that

$$\zeta_{\mathcal{F}}\dot{\varphi}(i) = \varphi(i),$$

for all $i \in I$. I will call this element the *frame-constant of* $\mathcal{F}$. [3]

Next, let me quickly introduce morphisms of frames.

Definition 2. Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}'$ be frames.
A u-frame morphism is the data of a pair λ and u, of a ring-homomorphism

$$\lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$$

and a unit $u \in (S')^\times$, such that

(a): $\lambda(I) \subseteq I'$,
(b): $\varphi' \circ \lambda = \lambda \circ \varphi$,
(c): $(\dot{\varphi}' \circ \lambda)(i) = u \cdot (\lambda \circ \dot{\varphi})(i)$, for all $i \in I$.

Remark 3. (i): The unit $u \in (S')^\times$ is uniquely determined, again thanks to Axiom (b) in the definition of a frame.
(ii): For the Frame-constants $\zeta_{\mathcal{F}}$ and $\zeta_{\mathcal{F}'}$ one gets the relation

$$u\zeta_{\mathcal{F}'} = \lambda(\zeta_{\mathcal{F}}).$$

(iii): In case $u = 1$, I will speak of a strict frame-morphism rather than a 1-morphism.

3.2. Main examples of frames.
3.2.1. *The Witt frame.* Let R be a p-adic ring. Let $W(R)$ the ring of Witt vectors and denote by

$$I(R) = \ker(w_0\colon W(R) \to R)$$

the image of Verschiebung. Then Zink proved that $W(R)$ is p-adic and $I(R)$-adic (and both topologies coincide, if $R \in \mathrm{Nilp}_{\mathbb{Z}_p}$), see [**Zin02**, Prop. 3]. It follows that

$$\mathcal{W}(R) = (W(R), I(R), R, F, V^{-1})$$

is a frame with frame constant equal to p. It is functorial in homomorphisms of p-adic rings.

[3] This terminology is not found in the literature, but it sounds reasonable to me.

3.2.2. *The frame $\mathcal{F}_{\inf}$.* Let me recall the definition of integral perfectoid rings, as in [**BMS18**].

Definition 3. An integral perfectoid ring R is a topological ring R, such that

(a): R/p is semiperfect,
(b): R is p-adic,
(c): $\ker(\theta_R\colon W(R^\flat) \to R)$ is a principal ideal,
(d): there exists an element $\varpi \in R$, such that

$$\varpi^p = pu,$$

where $u \in R^\times$.

Here $R^\flat = \lim_{\mathrm{Frob}} R/p$ is the inverse limit perfection and θ_R is Fontaine′s map, which exists for any p-adic ring.

Traditionally, one writes $\mathbb{A}_{\inf}(R) = W(R^\flat)$ and checks that any generator $\xi \in \mathbb{A}_{\inf}(R)$ of $\ker(\theta)$ is automatically a non-zero divisor; in fact generators are exactly the so-called distinguished elements: if one writes $\xi = (\xi_0, \xi_1, ...)$, then ξ_0 has to be topologically nilpotent and ξ_1 a unit. Furthermore, $\mathbb{A}_{\inf}(R)$ is (p, ξ)-adically complete. I denote by φ the Witt vector Frobenius on $\mathbb{A}_{\inf}(R)$.
Fix a generator ξ of $\ker(\theta)$. Consider the φ-linear map

$$\dot{\varphi}\colon\ \ker(\theta) = (\xi) \to \mathbb{A}_{\inf}(R)$$

given by $\dot{\varphi}(\xi x) = \varphi(x)$. Note that it is well-defined, because ξ is a non-zero divisor, but that it *depends on the choice of* ξ. It follows that

$$\mathcal{F}_{\inf}(R) = (\mathbb{A}_{\inf}(R), R, \ker(\theta) = (\xi), \varphi, \dot{\varphi})$$

is a frame with frame-constant $\varphi(\xi)$, which depends on the choice of ξ. It is functorial for homomorphisms of integral perfectoid rings.

3.2.3. *The frame $\mathcal{F}_{cris}$.* Consider again an integral perfectoid ring R. Recall the ring $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, which is the universal p-complete pd-thickening of the semi-perfect ring R/p. One can construct it as the p-adic completion of the pd-hull (over $(\mathbb{Z}_p, p\mathbb{Z}_p)$ by the conventions) of $\mathbb{A}_{\inf}(R)$ with respect to $\ker(\theta)$; by continuity one still has the surjection

$$\theta\colon\ \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to R$$

(whose kernel is now way bigger). In the following, one considers the ideal

$$\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) = \ker(\theta\colon\ \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to R),$$

that turns out to be a pd-ideal. A crucial observation made by Lau is that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ is p-torsion free, see [**Lau18**, Prop. 8.11.] - Bhatt-Morrow-Scholze give in [**BMS19**, Thm. 8.14 (1)] a different proof of a more general fact (i.e. that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(S)$ is p-torsion free for any quasi-regular semiperfect ring S). Since on $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))$ the Frobenius φ becomes divisible by p, it follows that

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi}{p}\colon\ \mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$$

is a well-defined φ-linear map.
Then

$$\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) := (\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R), \mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)), R, \varphi, \dot{\varphi})$$

is a frame with frame constant equal to p. It is functorial in homomorphisms of integral perfectoid rings.

Remark 4. A $\mathbb{F}_p$-algebra is integral perfectoid if and only if it is perfect. Then, for integral perfectoid $\mathbb{F}_p$-algebras R, it follows that that

$$\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) = \mathcal{F}_{\inf}(R) = \mathcal{W}(R).$$

3.2.4. *The frame $\mathcal{F}_{\mathbb{\Delta}}$.* The frame-structure discussed here was first considered by Anschütz-Le Bras in [**AB21**, Example 4.1.17], when they classify p-divisible groups over quasi-syntomic rings using absolute filtered prismatic F-crystals [**AB21**, Thm. 4.6.10].
To introduce these frames, let me first introduce the notion of a quasi-regular semi-perfectoid ring; this concept was introduced by Bhatt-Morrow-Scholze in [**BMS19**, Def. 4.19 and Rem. 4.21].

DEFINITION 4. (a): A ring S is called quasi-syntomic, if it has bounded p^∞-torsion, is p-adic, and the contangent complex $L_{S/\mathbb{Z}_p}$ has p-complete Tor-amplitude in $[-1,0]$, i.e. for all S/p-modules N, it is true that

$$(L_{S/\mathbb{Z}_p} \otimes^L_S S/p) \otimes^L_S N \in D^{[-1,0]}(R/p).$$

A morphism of rings with bounded p^∞-torsion $S \to S'$ is called quasi-syntomic, if it is p-completely flat and the contangent complex $L_{S'/S} \in D(S')$ has p-complete Tor-amplitude in $[-1,0]$. It is called a quasi-syntomic cover if in addition $S \to S'$ is p-completely faithfully flat.

(b): A quasi-syntomic ring S is called quasi-regular semi-perfectoid if it is quasi-syntomic and admits a surjection $R \to S$, where R is integral perfectoid.

(c): Let S be a quasi-syntomic ring, then the big quasi-syntomic site is the opposite category of the category that has objects given by S-algebras and morphisms are just S-algebra homomorphisms and the coverings are generated by quasi-syntomic covers. This site is denoted by S_{QSYN}. The small quasi-syntomic site is the opposite of the category of quasi-syntomic S-algebras with covers generated by quasi-syntomic covers. This site is denoted by S_{qsyn}.

REMARK 5. One has to argue that the category defined in (c) forms indeed a site, this is done in [**BMS19**, Lemma 4.16.]. Recall furthermore the important fact, that locally for the quasi-syntomic topology, a quasi-syntomic ring will be quasi-regular semiperfectoid, see [**BMS19**, Lemma 4.27.]; this will be put to use later.

Let S be quasi-regular semi-perfectoid, admitting a surjection $A/I \to S$, where (A,I) is a perfect prism. Then I is a principal ideal, generated by a regular element; let d be a generator. It is known that the absolute prismatic site $(S)_{\Delta}$ admits an initial object $(\Delta_S, I\Delta_S)$,[4] which is a prism over (A,I). In particular, it is classically (p,I)-adically complete and d-torsion free. Define the first step of the Nygaard-filtration to be

$$\mathcal{N}^{\geq 1}(\Delta_S) = \{x \in \Delta_S \colon \varphi(x) \in I\}.$$

Then one has that $\Delta_S/\mathcal{N}^{\geq 1}(\Delta_S) \simeq S$ by [**BS22**], Thm. 12.2. As Δ_S is d-torsion free, the divided Frobenius

$$\dot{\varphi} \colon \mathcal{N}^{\geq 1}(\Delta_S) \to \Delta_S,$$

given by $\dot{\varphi}(i) = \varphi(i)/d$ is well-defined. In total, one can give the following

DEFINITION 5. Let S be a quasi-regular semiperfectoid ring, which is a quotient of A/I, where (A,I) is a perfect prism. Then the prismatic frame associated to S is

$$\mathcal{F}_{\Delta}(S) = (\Delta_S, \mathcal{N}^{\geq 1}(\Delta_S), S, \varphi, \dot{\varphi})$$

REMARK 6. This is a frame with frame-constant (contrary to the $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$-frame) given by d.

REMARK 7. In this remark I will discuss the relation between the frame $\mathcal{F}_{\Delta}$ and the previously introduced frames.

(a): If $S = R$ is integral perfectoid, then $\Delta_S = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$. Then $\mathcal{F}_{\Delta}(R)$ differs from the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$ as follows:

$$\mathcal{F}_{\Delta}(R) = (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R), \varphi^{-1}((\xi)), R, \varphi, \dot{\varphi}),$$

where $\dot{\varphi} := \varphi/\xi$; this frame has frame constant ξ, and

$$\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) = (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R), (\xi), R, \varphi, \dot{\varphi}),$$

where $\dot{\varphi}(\xi \cdot x) = \varphi(x)$. It has frame constant $\varphi(\xi)$. Compare with the discussion in [**AB21**, Example 4.1.17].

(b): Let S be quasi-regular semi-perfect, i.e. S is a $\mathbb{F}_p$-algebra and the quotient of an integral perfectoid ring R. Then one has an isomorphism

$$\Delta_S \simeq \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(S),$$

which on $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ induces the Frobenius (see [**AB21**, Lemma 3.4.3.]) - this identification will also be later used when verifying descent for $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(.)$). In this case also $\mathcal{F}_{\Delta}(S)$ is a Frobenius-twist of $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(S)$.

---

[4] As the notation suggests the ring $\Delta_S = \Delta_{S/R}$ is in fact independent of R.

3.2.5. *Some important frame-morphisms.*

(i): Let R be an integral perfectoid ring. Using the Cartier-morphism[5] $\delta\colon \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to W(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))$, one can construct a strict frame-morphism
$$\chi\colon \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) \to \mathcal{W}(R),$$
see Lemma 5.3.

(ii): Let R be an integral perfectoid ring. Then the natural inclusion $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ induces a $u = \frac{\varphi(\xi)}{p}$-frame morphism (for a choice of a generator ξ)
$$\lambda\colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R).^{6}$$

In the following it will be shown that χ induces an equivalence between $\mathcal{G}$-μ-windows over the respective frames, once one adds a nilpotency condition discovered by Bültel-Pappas (Prop. 5.1) and that λ induces an equivalence of $\mathcal{G}$-μ-windows if one assumes $p \geq 3$ (Prop. 6.1).

3.3. Descent for frames. As all the previously introduced examples of frames satisfied some functoriality, one can investigate the question, whether there are topologies for which one will get sheaf-properties. To prevent confusion, let me fix the following vocabulary: One says that a contravariant functor from some category equipped with a site-structure to the category of frames is a sheaf, if each entry in the datum of a frame gives rise to a sheafy version of the respective structure.

3.3.1. *Descent for the Witt frame:* Let R be a ring, in which p is nilpotent. Then it follows for example from Zink's Witt descent ([**Zin02**], Lemma 30), that the functor
$$(R \to R') \mapsto W(R')$$
is a sheaf for the fpqc-topology on the category of affine R-schemes. From this one deduces the following

LEMMA 3.1. *Let $R \in \mathrm{Nilp}$. Then the functor*
$$\mathcal{W}()\colon \operatorname{Spec}(R)^{\mathrm{aff,op}}_{\mathrm{fpqc}} \to \mathrm{Set},$$
$$(R \to R') \mapsto \mathcal{W}(R')$$
is a sheaf of frames.

3.3.2. *Descent for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$:* Let R be an integral perfectoid ring. Then I want to explain how to get a sheafy version of the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$ for the affine étale topology on $\operatorname{Spec}(R/p)$ (i.e. the formal affine p-adic étale topology of $\operatorname{Spf}(R)$). This construction rests on observations due to Lau made in [**Lau18**].
In the following fix the integral perfectoid ring R from above and also fix a generator $\xi \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ of the kernel of $\theta\colon \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R) \to R$. One first observes that then for any integral perfectoid R-algebra R', one has that
$$\ker(\theta'\colon \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R') \to R') = \xi\, \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R'),$$
as the property of being a distinguished element passes through ring-homomorphisms. Then Lau proves the following

LEMMA 3.2. [**Lau18**, Lemma 8.10.] *Let R be an integral perfectoid ring. Let $B := R/p$ and $B \to B'$ be an étale ring-homomorphism. Then there exists a unique integral perfectoid R-algebra R', such that (i) $R'/p = B'$ and (ii) all $R/p^n \to R'/p^n$ are étale, for $n \geq 1$.*

Here the integral perfectoid R-algebra is constructed as $R' := W((B')^{\mathrm{perf}})/\xi$, where
$$(B')^{\flat} := (B')^{\mathrm{perf}} = \lim_{\mathrm{Frob}} B'$$
is the inverse-limit perfection. Using this, one can construct the following pre-sheaves:
Let $\operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}}$ be the category of affine schemes, that are étale over $\operatorname{Spec}(R/p)$. This category carries the structure of a site by declaring jointly surjective morphisms as covers. Then consider
$$\mathcal{R}\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Set},$$

[5] Recall that for a p-torsionfree ring A, which carries a Frobnius lift $\varphi\colon A \to A$, the Cartier-morphism is the homomorphism $\delta\colon A \to W(A)$ determined by $w_n(\delta(a)) = \varphi^n(a)$, for all $n \geq 0$ and $a \in A$. Here $w_n(.)$ are the Witt polynomials. one has $\delta(\varphi(a)) = F(\delta(a))$ for all $a \in A$. This is for example explained in [**Zin**, Lemma 2.38].

[6] One has to check that u is indeed a unit. For completeness, I recall the argument: write $\xi = (a_0, a_1, ...)$ in Teichmueller-coordinates. Then $u \equiv \frac{[a_0]}{p} + [a_1]^p$ modulo $p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$, thus $u \equiv [a_1]^p$ modulo $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) + p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. But $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) + p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ is in the radical of $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. As a_1 is a unit.

$$\mathcal{R}(B') = R',$$

where R' is the uniquely determined integral perfectoid R-algebra from Lemma 3.2 above. Furthermore, consider

$$\mathcal{A}_{inf}\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Set},$$
$$\mathcal{A}_{inf}(B') = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}(B')).$$

This gives two ring pre-sheaves. Lau proves then the following:

LEMMA 3.3. [**Lau18**, Lemma 10.9] *The pre-sheaves $\mathcal{R}$ and $\mathcal{A}_{inf}$ are sheaves.*

REMARK 8. This can also be explained from the prismatic perspective, using that the prismatic structure (pre)-sheaf is in fact a sheaf for the p-completely étale topology by [**BS22**, Cor. 3.12.] and then restricting to the perfect prismatic site.

From this one immediately deduces that

$$\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R})\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Set}$$

is a sheaf of frames.

3.3.3. *Descent for the frame $\mathcal{F}_{cris}$.* Consider still an integral perfectoid ring R. Note that for an étale R/p-algebra B', one has that B' is still semi-perfect, as in fact $B' = \mathcal{R}(B')/p$. In the next statement I will use prismatic techniques and therefore one really will want to know that B is quasi-syntomic, for which I will have to suppose that R is in fact p-torsion free. Recall that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B') = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}(B'))$. Then one observes the following

LEMMA 3.4. *Let R be a p-torsion free integral perfectoid ring. Then the presheaf*

$$\mathcal{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R})\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Set}$$

is a sheaf.

PROOF. First, let me give a prismatic proof: write as before $B = R/p$; first observe that B is a quasi-regular semiperfect ring. By definition, one has to see that B admits a surjection from a perfectoid ring (trivial) and that B is itself quasi-syntomic. This follows from the assumption that p was regular in R. [7] Now consider the small quasi-syntomic site of B, denoted by B_{qsyn}. It has a basis for the topology given by objects $B \to B'$, such that B' is quasi-regular semiperfect. Then let B_{qrsp} be the subcategory of B_{qsyn}, with objects $B \to B'$, where B' is quasi-regular semiperfect; it is still endowed with the quasi-syntomic topology and forms a site by [**BMS19**, Lemma 4.26.] Then the association

$$\mathbb{\Delta}_{\bullet}\colon B^{\mathrm{op}}_{\mathrm{qrsp}} \to \mathrm{Set},$$

given by $(B \to B') \mapsto \mathbb{\Delta}_{B'}$ is a sheaf by [**BS22**, Cor. 3.12]. But recall from [**AB21**, Lemma 3.4.3], that one has a canonical, φ-equivariant identification

$$\mathbb{\Delta}_{B'} \simeq \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B').$$

The point being here that on the one hand, $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')$ is a δ-ring, mapping down to B', which gives a map in one direction and on the other hand that $\ker(\mathbb{\Delta}_{B'} \to B')$ admits divided powers. This now implies the statement one is after: if $B \to B'$ is an étale cover, then B' is again quasi-regular semiperfect. Namely, the result of Lau that I recalled before, Lemma 3.2, one may write $B' = R'/p$, where R' is an integral perfectoid ring. It thus suffices to see that B' is quasi-syntomic, for which one has to convince oneself of the fact that p is regular in R'. But $\mathbb{Z}_p \to R$ is flat and $R \to R'$ is p-completely étale. By Elkik, there exists an étale R-algebra R'_0, such that R' is the p-adic completion of R'_0. It follows that p is regular in R'_0 and therefore also in R'. Since a p-completely étale covering is in particular a quasi-syntomic covering, it follows that one may consider $B_{\text{ét}}$ as a sub-site of B_{qrsp} and now the lemma follows.

A different proof can be given by observing first, that it suffices to show that $(B \to B') \mapsto \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')/p$ is a sheaf, because all the values $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')$ are by construction p-adic and and an inverse limit of sheaves is

[7]Here quickly the argument: To see that B is indeed quasi-syntomic, look at the morphisms $\mathbb{Z}_p \to R \to R/p$, which gives the following triangle for cotangent complexes:

$$L_{R/\mathbb{Z}_p} \otimes^L_R R/p \longrightarrow L_{R/p/\mathbb{Z}_p} \longrightarrow L_{(R/p)/R} \xrightarrow{+1} .$$

Since R is perfectoid, the term $L_{R/\mathbb{Z}_p} \otimes^L_R R/p = (\ker(\theta))/(\ker(\theta))^2[1] \otimes^{\mathbb{L}}_R R/p$ has p-completed Tor-amplitude in $[-1,0]$ and since p is regular in R, it is true that $L_{(R/p))/R} \simeq (pR)/(pR)^2[1]$, so that it follows that also $L_{R/p/\mathbb{Z}_p}$ has p-completed Tor-amplitude in $[-1,0]$.

still a sheaf. Then one may use the following heavy input: by [**BMS19**, Prop. 8.12], there is a natural (for morphisms of quasi-regular semiperfect rings) isomorphism

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')/p \simeq L\Omega_{B'/\mathbb{F}_p};$$

here one uses again that B' will be quasi-regular semiperfect to verify that the hypothesis of the statement of Bhatt-Morrow-Scholze are verified and $L\Omega_{./\mathbb{F}_p}$ denotes the derived de Rham complex of an $\mathbb{F}_p$-algebra. By comparing conjugate filtrations and using that $\mathbb{L}_{B'/B} \simeq 0$ for any étale $B \to B'$, it follows that

$$L\Omega_{B'/\mathbb{F}_p} \simeq L\Omega_{B/\mathbb{F}_p} \otimes_B B'.$$

By usual faithfully flat descent for quasi-coherent sheaves (as $L\Omega_{B/\mathbb{F}_p}$ is concentrated in degree 0), it is then deduced that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(.)/p$ is a sheaf, as desired. □

Remark 9. This lemma of course begs for a more down to earth proof and should probably be true for integral perfectoids with p-torsion. Here I fall however on the following problem: it is not clear to me that the PD-hull commutes with I-complete flat basechange. In fact, the formula one would want to verify is the following: let $B = R/p \to R'/p$ be a p-completely faithfully flat étale map, then $B^\flat \to (B')^\flat$ is ξ_0-completely faithfully flat étale and one would like to have that

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')/p^n \simeq (\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B) \otimes_{W(B^\flat)} W(B'^\flat))/p^n(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B) \otimes_{W(B^\flat)} W(B'^\flat)),$$

which would follow from the universal properties of $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)$ resp. $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')$, if one would know that PD-Hulls extend along (p, ξ_0)-completely flat morphisms. This however is unfortunately not clear to me, so that I had to stick to the more abstract proof given above.

In total, one may deduce the following: let R be a p-torsion free integral perfectoid ring. Then the pre-sheaf of frames

$$\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}(.))\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Frames}$$

is indeed a sheaf of frames. Indeed, this follows from the previous descent statement for $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(.)$ and the known descent for $\mathcal{R}(.)$, by making use of the fact that a kernel of morphisms of sheaves is again a sheaf; to take care of the $\mathrm{Fil}_{\mathrm{cris}}(.)$ component of the gadgets that make up a frame.

3.3.4. *Descent for the frame $\mathcal{F}_{\Delta}$.* Let R be a quasi-syntomic ring and consider the quasi-syntomic site R_{qsyn} of R. Since R is quasi-syntomic, this site admits as a basis quasi-regular semiperfectoid R-algebras A. Denote by R_{qrsp} the category of quasi-regular semiperfectoid R-algebras, equipped with the quasi-syntomic topology. Then one can consider the following pre-sheaf of frames

$$\mathcal{F}_{\Delta}\colon R_{\mathrm{qrsp}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Frames},$$

given by sending a quasi-regular semiperfectoid R-algebra A towards the frame

$$\mathcal{F}_{\Delta}(A) = (\Delta_A, \mathcal{N}^{\geq 1}(\Delta_A), A, \varphi, \dot{\varphi}),$$

as in Def. 5. By [**BS22**], Cor. 3.12. the association

$$\Delta_{\bullet}\colon R_{\mathrm{qrsp}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},$$

sending a quasi-regular semiperfectoid R-algebra A towards Δ_A defines a sheaf for the quasi-syntomic topology. Furthermore, the association $\mathcal{O}_{\mathrm{qsyn}}\colon R_{\mathrm{qrsp}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, given by sending a quasi-regular semiperfectoid R-algebra A towards A itself defines a quasi-syntomic sheaf. It follows that in total $\mathcal{F}_{\Delta}$ is a sheaf of frames for the quasi-syntomic topology.

3.4. h-frame structure on $\mathcal{F}_{\Delta}$ in the case of $\mathbb{F}_p$-algebras. Here I will record an h-frame structure on the frame $\mathcal{F}_{\Delta}(A)$, where A is as before a quasi-regular semiperfect ring.
First, let me recall the definition of an h-frame, which is due to Lau:

Definition 6. [**Lau21**, Def. 2.0.1.]
A triple $(\bigoplus_{n\geq 0} S_n, \sigma, \{t_n\}_{n\geq 0})$, where $\bigoplus_{n\geq 0} S_n$ is an $\mathbb{Z}_{n\geq 0}$-graded ring, $\sigma\colon S_{\geq 0} \to S_0$ is a ring homomorphism and $t_n\colon S_{n+1} \to S_n$ are maps of sets, is called an h-frame if

(a): For all $n \geq 0$, the map $t_n\colon S_{n+1} \to S_n$ are $S_{\geq 0}$-module homomorphisms,
(b): $\sigma_0\colon S_0 \to S_0$ is a Frobenius lift and $\sigma_n(t_n(a)) = p\sigma_{n+1}(a)$, for all $a \in S_{n+1}$,
(c): $p \in \mathrm{Rad}(S_0)$.

One can consult Lau's article [**Lau21**, Examples 2.1.1-2.1.14] for several examples from nature; for example he explains a natural h-frame structure on the Witt frame [**Lau21**, Example 2.1.3].
Now fix a quasi-regular semiperfect ring A, let $(\Delta_A, (p))$ be the associated prism. Recall that the Nygaard-filtration was defined as follows ([**BS22**, Def. 12.1]):

$$\mathcal{N}^{\geq n}(\Delta_A) = \{x \in \Delta_A \colon \varphi(x) \in p^n \Delta_A\}.$$

This is a decreasing and multiplicative filtration indexed by the natural numbers. After this preparation, one can construct the desired h-frame structure: let

$$\bigoplus_{n\geq 0} S_n := \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{N}^{\geq n}(\Delta_A),$$

which is a $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded ring. Then let $\sigma_n \colon \mathcal{N}^{\geq n} \to \Delta_A$ be the p^n-divided Frobenius. Next, define

$$t_n \colon \mathcal{N}^{\geq n+1}(\Delta_A) \to \mathcal{N}^{\geq n}(\Delta_A)$$

just to be the inclusion. Then the conditions (a)-(c) are satisfied. This is an h-frame associated to a p-torsion free ring with a multiplicative filtration with Frobenius-divisibility as in [**Lau21**, Example 2.1.1].

Remark 10. Note that one is here not taking the filtration of $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A)$ by the divided powers of $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A))$ (which would correspond to the Hodge-Filtration under the comparison with the derived de Rham cohomology). The worry with this filtration is that the Frobenius-divisibility fails. Note further that $\mathcal{N}^{\geq 1}(\Delta_A)$ coincides with $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A))$, so that the above h-frame extends the 1-frame structure that was previously put on $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(A)$.

The reason I discussed this h-frame structure is that it will be later useful to have a Tannakian perspective on the notion of a crystalline G-quasi-isogeny, see section 8 and more precisely Lemma 8.4.

4. $\mathcal{G}$-μ-windows

The aim of this section is to quickly introduce $\mathcal{G}$-μ-windows for the frames discussed in the previous section. To set up this theory one has two at least possibilities: either follow Lau's elegant approach in [**Lau21**] using h-frame structures on the frames just discussed, or copy pase the definition given by Bültel-Pappas. In total, I sticked to the latter possibility since later I have to consider a frame for which I was not able to find a h-frame structure, c.f. Remark 11. To get going, in the first subsection the reader finds a recollection on the inputs from group theory that will be relevant. Then the category of $\mathcal{G}$-μ-windows for the different frames is introduced and lastly I will recall the adjoint nilpotency condition as introduced by Bültel-Pappas, to be able to restate Lau's unique lifting lemma in the language used here.

4.1. Reminder on some group-theory. Let $\mathcal{G} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ be a smooth affine group scheme. Furthermore, let k_0 be a finite extension of $\mathbb{F}_p$ and

$$\mu \colon \mathbb{G}_{m,W(k_0)} \to \mathcal{G}_{W(k_0)}$$

be a cocharacter. Following Lau [**Lau21**], the data $(\mathcal{G}, \mu)$ will be refered to as a window datum.
To this set-up one can associate the following weight subgroups

(i): The closed subgroups $P^{\pm} \hookrightarrow \mathcal{G}_{W(k_0)}$, that have points in $W(k_0)$-algebras R given as

$$P^{\pm}(R) = \{g \in \mathcal{G}_{W(k_0)}(R) \colon \lim_{t^{\pm}\to 0} \mu(t)^{-1} g \mu(t) \text{ exists}\}.$$

Here for example the expression $' \lim_{t\to 0} \mu(t)^{-1} g\mu(t)$ exists$'$ means that the orbit map associated to g :

$$\mathbb{G}_{m,R} \to \mathcal{G}_R,$$
$$t \mapsto \mu(t)^{-1} g \mu(t)$$

extends (necessarily uniquely) to a morphism

$$\mathbb{A}^1_R \to \mathcal{G}_R.^8$$

(ii): The closed normal subgroups $U^{\pm} \hookrightarrow P^{\pm}$, that have points in $W(k_0)$-algebras R given as

$$U^{\pm}(R) = \{g \in \mathcal{G}_{W(k_0)}(R) \colon \lim_{t^{\pm}\to 0} \mu(t)^{-1} g \mu(t) \text{ exists and equals the unit-section}\}.$$

[8] Note the difference in sign to [**CGP15**], because I consistently consider right-actions.

Let me recall a couple of well-known facts about these groups, that will be used in the following.

Fact 4.1.

(i): The subgroups $P^{\pm}$ and $U^{\pm}$ are smooth over $W(k_0)$. Furthermore, if $\mathcal{G}$ has connected fibers, then $P^{\pm}$ and $U^{\pm}$ also have connected fibers and $U^{\pm}$ have unipotent fibers. In case $\mathcal{G}$ is a reductive group scheme, $P^{\pm}$ are parabolic subgroup schemes. See [**CGP15**, Lemma 2.1.4, Lemma 2.1.5].

(ii): Multiplication in $\mathcal{G}_{W(k_0)}$ induces an open immersion

$$U^+ \times_{W(k_0)} P^- \to \mathcal{G}_{W(k_0)}.$$

See [**CGP15**, Proposition 2.1.8. (3)].

(iii): Using the adjoint representation of $\mathcal{G}_{W(k_0)}$, one gets a $\mathbb{G}_{m,W(k_0)}$ representation

$$\mathrm{Ad}(\mu^{-1})\colon \mathbb{G}_{m,W(k_0)} \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)}),$$

which in turn gives the weight decomposition

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_n.$$

Under this decomposition of the Lie-algebra, one has

$$\mathrm{Lie}(P^+) = \bigoplus_{n\geq 0} (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_n \text{ resp. } \mathrm{Lie}(P^-) = \bigoplus_{n\leq 0} (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_n,$$

and

$$\mathrm{Lie}(U^+) = \bigoplus_{n> 0} (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_n \text{ resp. } \mathrm{Lie}(U^-) = \bigoplus_{n< 0} (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_n.$$

See [**CGP15**, Proposition 2.1.8.(1)].

(iv): There exists $\mathbb{G}_{m,W(k_0)}$-equivariant morphisms of schemes

$$\log^{\pm}\colon U^{\pm} \to V(\mathrm{Lie}(U^{\pm})),$$

that induce the identity on Lie-algebras. They are necessarily isomorphisms of schemes. See [**Lau21**, Lemma 6.1.1].
Assume in addition that $\mathrm{Lie}(U^+) = (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_1$, then the morphism

$$\log^{+}\colon U^{+} \to V(\mathrm{Lie}(U^{+}))$$

is uniquely characterized by the requirement to be $\mathbb{G}_m$-equivariant and to induce the identity on the Lie-algebras. Furthermore, it is a group scheme isomorphism. See [**Lau21**, Lemma 6.3.2].

(v): Assume that $\mathcal{G}$ is a reductive group scheme, then the condition $\mathrm{Lie}(U^+) = (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_1$ is equivalent to μ being a minuscule cocharacter. This follows from the fact that the set of roots is preserved under $\eta \mapsto -\eta$.

Following Lau, one defines the following concept:

Definition 7. Let $(\mathcal{G}, \mu)$ be a window datum, then

(i): it is called 1-bound, if $\mathrm{Lie}(U^+) = (\mathrm{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_1$,

(ii): it is called reductive, if $\mathcal{G}$ is a reductive group scheme over $\mathbb{Z}_p$.

For the main applications towards moduli of $\mathcal{G}$-μ-displays and their relations to local Shimura varieties, reductive and 1-bound display-data (which then automatically implies that μ is minuscule by the above) will be most relevant, since the concept of $\mathcal{G}$-μ-windows one is using here is otherwise not the right one as was already pointed out in the introduction.

4.2. Quotient groupoid of banal $\mathcal{G}$-μ-windows. The statements in this subsection are basically easy modifications of the results of Bültel-Pappas [**BP20**, section 3.1.].
Let $(\mathcal{G}, \mu)$ be a window datum, in particular one has fixed a finite extension k_0 of $\mathbb{F}_p$.

Definition 8. Let $\mathcal{F} = (S, I, R, \varphi, \dot{\varphi})$ be a frame. One says that $\mathcal{F}$ is a frame over $W(k_0)$, if S is a $W(k_0)$-algebra and φ extends the Witt vector Frobenius on $W(k_0)$.

Example 4.2. Let $R \in \mathrm{Nilp}_{W(k_0)}$ (or a p-adic $W(k_0)$-algebra). Using the Cartier-morphism

$$\triangle\colon W(k_0) \to W(W(k_0)),$$

which is characterized by the formula

$$W_n(\triangle(x)) = F^n(x),$$

one sees that the Witt frame $\mathcal{W}(R)$ is a frame over $W(k_0)$. A similiar remark applies to the relative Witt frame.
Furthermore, if R is an integral perfectoid $W(k_0)$-algebra, then both $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$ and $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$ are frames over $W(k_0)$.

Definition 9. Let $\mathcal{F} = (S, I, R, \varphi, \dot{\varphi})$ be a frame over $W(k_0)$. The window group of the window datum $(\mathcal{G}, \mu)$ is the group

$$\mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu = \{g \in \mathcal{G}_{W(k_0)}(S) \colon g(\bmod I) \in P^-(R)\}.$$

Let me describe the structure of the window group.

Lemma 4.3. *Multiplication in $\mathcal{G}_{W(k_0)}(S)$ induces a bijection*

$$m\colon U^+(I) \times P^-(S) \to \mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu.$$

Proof. First, note that the above map is an injection. Indeed, by Fact 4.1 (ii) multiplication is an open immersion and thus a monomorphism.
It remains to see the surjectivity. Take a point $g \in \mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu$ corresponding to a morphism

$$g\colon \operatorname{Spec}(S) \to \mathcal{G}_{W(k_0)}(S),$$

that modulo I factors through P^-. By the axioms of a frame, $I \subseteq \operatorname{Rad}(S)$, and therefore there is a bijection of maximal prime ideals $\operatorname{MaxSpec}(R) \longleftrightarrow \operatorname{MaxSpec}(S)$. Now consider the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(S) \arrow[r, "g"] & \mathcal{G}_{W(k_0)} \\ \operatorname{Spec}(R) \arrow[u, "f^\sharp"] \arrow[r] & U^+ \times_{W(k_0)} P^- \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd},$$

where the lower horizontal map is given by $(e, g \circ f^\sharp)$, where $e \in U^+(R)$ is the unit section. If $x_0 \in \operatorname{Spec}(S)$ is a closed point, there is a unique closed point $x_0' \in \operatorname{Spec}(R)$, such that $f^\sharp(x_0') = x_0$. It follows that $g(x_0) = g(f^\sharp(x_0')) \in V$, where $V \subseteq \mathcal{G}_{W(k_0)}$ is the open image of the mutliplication m. Here one has used again Fact 4.1 (ii) above. Now let $x \in \operatorname{Spec}(S)$ be an arbitrary point. One finds a closed point x_0 lying in the closure of x. It follows that $g(x_0) \in g(\overline{\{x\}}) \subseteq \overline{\{g(x)\}}$, as g is continous. As already observed, $g(x_0) \in V$ and V is open, thus closed under generalization, so that $g(x) \in V$. This concludes the verification of the surjectivity. $\square$

The next aim is to construct the divided Frobenius

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}\colon \mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu \to \mathcal{G}_{W(k_0)}(S)$$

for window data $(\mathcal{G}, \mu)$, such that $\operatorname{Lie}(U^+) = (\operatorname{Lie}(\mathcal{G})_{W(k_0)})_1$. In general it might only be a map of sets. I will explain, why it is a group homomorphism for all frames that will be relevant.
Let $h \in \mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu$ and using Lemma 4.3 above, one writes it uniquely as a product $h = u \cdot p$, where $u \in U^+(I)$ and $p \in P^-(S)$. By Fact 4.1 (iv), one can define

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}\colon U^+(I) \to U^+(S)$$

to be the composition, as in the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} U^+(I) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\log^+"] & U^+(S) \\ \operatorname{Lie}(U^+) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \dot{\varphi}"] & \operatorname{Lie}(U^+) \otimes S. \arrow[u, "(\log^+)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Next, note that the very description of the functor of points of P^- makes it possible to give the following definition: set $\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}\colon P^-(S) \to P^-(S)$ to be

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}} = \mu(\zeta_{\mathcal{F}})\varphi(h)\mu(\zeta_{\mathcal{F}})^{-1}.$$

Recall that $\zeta_{\mathcal{F}} \in S$ was the frame-constant, i.e. the unique element such that $\varphi(i) = \zeta_{\mathcal{F}}\dot{\varphi}(i)$.
The next statment will explain, why $\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}$ is a group homomorphism for example for the frames $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$ and $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$.

LEMMA 4.4. *Let $\mathcal{F} = (S, I, R, \varphi, \dot{\varphi})$ be a frame over $W(k_0)$, such that S is $\zeta_{\mathcal{F}}$-torsion free. Then the divided Frobenius*

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}\colon\ \mathcal{G}(\mathcal{F})_{\mu} \to \mathcal{G}_{W(k_0)}(S)$$

is a group homomorphism.

PROOF. Note that inside $S[1/\zeta_{\mathcal{F}}]$ the relation $\dot{\varphi}(i) = \frac{\varphi(i)}{\zeta_{\mathcal{F}}}$ is true for all $i \in I$. As $\log^+$ is $\mathbb{G}_{m,W(k_0)}$-equivariant and $\mathrm{Ad}(\mu^{-1})((\zeta_{\mathcal{F}})^{-1})$ acts by *division* by $\zeta_{\mathcal{F}}$ on $\mathrm{Lie}(U)^+$, one deduces that

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}(u) = \mu(\zeta_{\mathcal{F}})\varphi(u)\mu(\zeta_{\mathcal{F}})^{-1} \in \mathcal{G}_{W(k_0)}(S[1/\zeta_{\mathcal{F}}]),$$

for all $u \in U^+(I)$. Thus, one has in total for all $h \in \mathcal{G}(\mathcal{F})_{\mu}$

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}(h) = \mu(\zeta_{\mathcal{F}})\varphi(h)\mu(\zeta_{\mathcal{F}})^{-1} \in \mathcal{G}_{W(k_0)}(S[1/\zeta_{\mathcal{F}}]). \tag{21}$$

This is clearly a group homomorphism and since S is $\zeta_{\mathcal{F}}$-torsion free the map into the localization is injective. This concludes the easy verification. □

REMARK 11. Note that the ring of Witt vectors $W(R)$ for a non-reduced ring in characteristic p is certainly not p-torsion free. Thus the above argument does not apply. Still the divided Frobenius for the Witt frame is a group homomorphism. In fact, one can prove this either using the argument given by Bültel-Pappas in [**BP20**, Prop. 3.1.2.], or using the h-frame structure on the Witt frame introduced by Lau [**Lau21**, Example 2.1.3]. In general, one can say that the divided Frobenius $\Phi_{\mathcal{F}}$ is a group homomorphism either in case one can put a h-frame structure on $\mathcal{F}$ or in case S is $\zeta_{\mathcal{F}}$-torsion free. One can in fact construct h-frame structures on $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$ and $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$, which gives another reason, why the divided Frobenius is a group homomorphism in these cases. I decided to stick to the construction of $\mathcal{G}$-μ-windows given here, as one will later need an auxillary frame, for which I was not able to give a h-frame structure.[9]

DEFINITION 10. Let $\mathcal{F}$ be a frame over $W(k_0)$, such that the divided Frobenius $\Phi_{\mathcal{F}}$ is a group homomorphism. Then the groupoid of banal [10] $\mathcal{G}$-μ-windows over $\mathcal{F}$ is the quotient groupoid

$$\mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F})_{\mathrm{banal}} = [\mathcal{G}_{W(k_0)}(S)/_{\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}}\, \mathcal{G}(\mathcal{F})_{\mu}],$$

for the action $g * h = h^{-1}g\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{F}}(h)$ for all $g \in \mathcal{G}_{W(k_0)}(S)$ and $h \in \mathcal{G}(\mathcal{F})_{\mu}$.

REMARK 12. One has two kinds of functorialities for these objects: Let

$$\mathcal{F} \in \{\mathcal{W}(R), \mathcal{W}(S/R), \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R), \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\}.$$

(i) *Functoriality in minuscule window-data:*
A morphism of minuscule window-data $f\colon (\mathcal{G}_1, \mu_1) \to (\mathcal{G}_2, \mu_2)$ is a $\mathbb{Z}_p$-group scheme homomorphism $f\colon\ \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, such that $f_{W(k_0)} \circ \mu_1 = \mu_2$. It induces a functor

$$f\colon\ \mathcal{G}_1 - \mu_1 - \mathrm{Win}(\mathcal{F})_{\mathrm{banal}} \to \mathcal{G}_2 - \mu_2 - \mathrm{Win}(\mathcal{F})_{\mathrm{banal}}.$$

(ii): *Functoriality in frame morphisms:*
Consider a u-frame homomorphism $\lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, where $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ are frames, such that banal $\mathcal{G}$-μ-windows are defined. Then one gets a base-change morphism

$$\lambda_{\bullet}\colon\ \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F})_{\mathrm{banal}} \to \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}')_{\mathrm{banal}},$$

induced by the map $\mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S')$, $g \mapsto \lambda(g)\mu(u)$, in general only in case the frame-constant $\zeta_{\mathcal{F}'}$ does not lead to torsion in S', or if $u = 1$. Let me remark here already that in Lemma 6.8 one is faced with an u-frame morphism, where the above hypothesis does not apply. Nevertheless, one can check that this morphism induces a base-change functor, because in that example the frame-constants of both the source and the target are 0.

[9] This is the frame $\underline{A_0}$ from Lemma 6.7.

[10] This 'banal' refers to the triviality of torsors. This usage was introduced in [**BP20**].

4.3. Construction of $\mathcal{G}$-μ-windows for some frames.

4.3.1. *$\mathcal{G}$-μ-displays.* Here I will briefly recall the construction of $\mathcal{G}$-μ-displays of Bültel-Pappas ([**BP20**, Def. 3.2.1]).
Recall the following result due to Greenberg:

PROPOSITION 4.5. Let R be a ring and $X \to W_n(R)$ be an affine scheme of finite type (resp. finite presentation).
Then the fpqc-sheaf

$$F_n(X)\colon R - \text{algebras} \to \text{Set},$$

$$F_n(X)(R') = X_{W_n(R)}(W_n(R'))$$

is representable by an affine scheme over R of finite type (resp. of finite presentation).

In the situation of the proposition, one calls the R-scheme $F_n(X)$ the Greenberg-Transformation of X. It commutes with fiber-products. Thus, in case X is a group scheme, one deduces that $F_n(X)$ is a R-group scheme.
Let $(\mathcal{G}, \mu)$ be a window datum. Using the Cartier-morphism, one can consider the $W_n(W(k_0))$-group scheme $\mathcal{G}_{W(k_0)} \times_{W(k_0)} \operatorname{Spec}(W_n(W(k_0)))$. Then

$$L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)}) = \lim_{n \geq 1} F_n(\mathcal{G}_{W(k_0)} \times_{W(k_0)} \operatorname{Spec}(W_n(W(k_0))))$$

is an affine $W(k_0)$-group scheme with points in $W(k_0)$-algebras R given as

$$L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)})(R) = \mathcal{G}_{W(k_0)}(W(R)).$$

One has to be careful, because it will not be of finite type or finite presentation anymore. By [**BP20**, Prop. 2.2.1.,(d)] it is flat and formally smooth over $W(k_0)$. One can consider the window group for the Witt frame as the sections of a closed subgroup scheme

$$\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu \hookrightarrow L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)}).$$

In case $(\mathcal{G}, \mu)$ is a minuscule window datum, one checks, see [**BP20**, Prop. 3.1.2.], that the divided Frobenius extends to a group scheme homomorphism

$$\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{W}}\colon \mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu \to L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)}).$$

Hence the following definition makes sense.

DEFINITION 11. Let $R \in \operatorname{Nilp}_{W(k_0)}$ (or a p-adic $W(k_0)$-algebra) and $(\mathcal{G}, \mu)$ a minuscule window datum.
A $\mathcal{G}$-μ-displays over R is a pair (Q, α), where Q is a fpqc $\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu$-torsor on $\operatorname{Spec}(R)$ and

$$\alpha\colon Q \to L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)})_R$$

is a map of fpqc-sheaves on $\operatorname{Spec}(R)$, such that

$$\alpha(q \cdot h) = h^{-1}\alpha(q)\Phi_{\mathcal{G},\mu,\mathcal{W}}(h)$$

for all $h \in \mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu$ and $q \in Q$.

REMARK 13. Let R be a $W(k_0)$-algebra, such that p is nilpotent. In case $\mathcal{G}$ is assumed to be a reductive group scheme, then the datum of a $\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu$-torsor over $\operatorname{Spec}(R)$ is equivalent to the datum of a $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{E}$ on $\operatorname{Spec}(W(R))$ and a section of the proper morphism $\bar{\mathcal{E}}/P^- \to \operatorname{Spec}(R)$. Here one denotes by $\bar{\mathcal{E}} = P \times_{\operatorname{Spec}(W(R))} \operatorname{Spec}(R)$. See [**BP20**, section 3.2.4.]. In the GL_n-case this just means that a display has an underlying finite projective module over the Witt vectors together with a filtration. Thus, I call the above section the *Hodge-filtration.*

The next statement appears as [**BP20**, Prop. 3.2.11.] under a noetherian hypothesis.

LEMMA 4.6. *Fix a minuscule and reductive window datum $(\mathcal{G}, \mu)$. Let A be a $W(k_0)$-algebra, that is I-adically complete and separated for an ideal I, that contains a power of p. Then there exists a natural equivalence*

$$\mathcal{G} - \mu - \operatorname{Displ}(\operatorname{Spec}(A)) \simeq 2 - \lim_{n \geq 1} \mathcal{G} - \mu - \operatorname{Displ}(\operatorname{Spec}(A/I^n)).$$

Proof. Given the arguments in the proof of [**BP20**, Prop. 3.2.11.], one only has to explain, how to construct from a compatible system of $\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu$-torsors Q_n over $\operatorname{Spec}(A/I^n)$ for all $n \geq 1$ a $\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu$-torsors over $\operatorname{Spec}(A)$. By Remark 13 above, one has to show that a compatible system of $L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)})$-torsors $\mathcal{E}_n$ over $\operatorname{Spec}(A/I^n)$ together with a compatible system of sections of $\mathcal{E}_n/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu \to \operatorname{Spec}(A/I^n)$ gives a $L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)})$-torsor $\mathcal{E}$ over $\operatorname{Spec}(A)$ together with a section of $\mathcal{E}/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu \to \operatorname{Spec}(A)$. The $L^+(\mathcal{G}_{W(k_0)})$-torsor $\mathcal{E}$ is constructed in the proof of the cited proposition [11] and for the existence of the section one can use [**Bha16**, Remark 4.6.], which avoids the use of Grothendieck′s algebraization theorem. In fact, the theorem of Bhatt gives that

$$(\mathcal{E}/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu)(\operatorname{Spec}(A)) = \lim_{n\geq 1}(\mathcal{E}/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu)(\operatorname{Spec}(A/I^n)).$$

But one has that $(\mathcal{E}/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(A/I^n) \cong (\mathcal{E}_n/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu)$ and by assumption, there are sections $s_n \in (\mathcal{E}_n/\,\mathcal{G}(\mathcal{W})_\mu)(\operatorname{Spec}(A/I^n)$. $\square$

4.3.2. *$\mathcal{G}$-μ-windows for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$.* Let $(\mathcal{G},\mu)$ be a minuscule window datum. Fix an integral perfectoid $W(k_0)$-algebra R.

Lemma 4.7. (a): *The pre-sheaf*

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}))\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Grp}$$

is a sheaf. The same is true for $\mathcal{G}(\mathcal{R})$.

(b): *The pre-sheaf*

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}))_\mu\colon \operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\text{ét}} \to \mathrm{Grp}$$

is a sheaf.

Proof. For (a), one just observes that as $\mathcal{G}\,/\mathbb{Z}_p$ is of finite type, one can consider $\mathcal{G}$ as the equalizer of maps

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p} \rightrightarrows \mathbb{A}^m_{\mathbb{Z}_p}$$

in the category of étale sheaves. Obviously, $(\mathcal{A}_{inf})^k(B') = (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R'))^k$ for $k \geq 1$ are sheaves and therefore the claim follows from the fact that equalizer of étale sheaves are again étale sheaves.[12] The same argument shows that also $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ is a sheaf. For (b), one first notes that Fontaine′s map induces a morphism of sheaves

$$\theta\colon \mathcal{G}(\mathcal{A}_{inf}(\mathcal{R})) \to \mathcal{G}_{W(k_0)}(\mathcal{R}).$$

Consider the monomorphism of sheaves $\iota\colon P^-(\mathcal{R}) \hookrightarrow \mathcal{G}_{W(k_0)}(\mathcal{R})$ induced by the closed immersion

$$P^- \subset \mathcal{G}_{W(k_0)}$$

of group schemes. Then one can write the presheaf $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{inf}(\mathcal{R}))_\mu$ as the fiber-product

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_{inf}(\mathcal{R})) \times_{\theta,\mathcal{G}_{W(k_0)}(\mathcal{R}),\iota} P^-(\mathcal{R})$$

and the Lemma is proven, as a fiber product of étale sheaves is again an étale sheaf (same argument as in the footnote just made in this proof). $\square$

As the frame-constant $\varphi(\xi) = \zeta_{\mathcal{F}_{inf}(\mathcal{R}(B'))}$ for varying étale $B = R/p$-algebras B' does not lead to torsion in $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}(B'))$, one has a group homomorphism

$$\Phi_{inf}\colon \mathcal{G}(\mathcal{F}_{inf}(\mathcal{R}))_\mu \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_{inf}(\mathcal{R})).$$

Therefore one can make the following

Definition 12. Let R be an integral perfectoid $W(k_0)$-algebra. A $\mathcal{G}$-μ-window for the frame $\mathcal{F}_{inf}$ over R is a tuple (Q,α), where

(a): Q is a $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{inf}(\mathcal{R}))_\mu$-torsor on $\operatorname{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}}$,
(b): $\alpha\colon Q \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}))$ is a morphism of sheaves, such that

$$\alpha(q\cdot h) = h^{-1}\alpha(q)\Phi_{\mathrm{inf}}(h).$$

[11] Where they do not make use of the noetherianess assumption!

[12] The forgetful functor from sheaves to presheaf is a right adjoint, thus preserverse limits.

In the following I will denote by $\mathcal{G}$-μ-Win$(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}))$ the corresponding stack of $\mathcal{G}$-μ-windows over R. In other words, this is just the quotient stack

$$[\mathcal{G}(\mathcal{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}))/_{\Phi_{\mathrm{inf}}}\, \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R}))_\mu]$$

over $\mathrm{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{ét}}$.

REMARK 14. One similiarly sees, that one can construct $\mathcal{G}$-μ-windows for prisms giving rise to frames.

For later use, let me record a description of banal $\mathcal{G}$-μ^σ-windows for $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$, whose proof is of course very similiar to [**BP20**, Prop. 3.2.15.].

LEMMA 4.8. *Let R be an integral perfectoid $W(k_0)$-algebra as before. There exists an equivalence of groupoids*

$$[\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))/_{\Phi_{\mathrm{inf}},\mathcal{G},\mu^\sigma}\, \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_\mu] \simeq [\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu^\sigma(\varphi(\xi))\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))/_\varphi\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))].$$

PROOF. Note at first that μ being minuscule, implies that[13]

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_\mu = \mu(\xi)^{-1}\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu(\xi) \cap \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)). \tag{22}$$

One deduces the equivalence

$$[\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))/_{\Phi_{\mathrm{inf}},\mathcal{G},\mu^\sigma}\, \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_\mu] \to [\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\varphi(\mu(\xi))/_\varphi \mu(\xi)^{-1}\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu(\xi) \cap \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))],$$

given by sending $g \mapsto g\varphi(\mu(\xi))$. But using (22) above, one deduces that the inclusion induces an equivalence between

$$[\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\varphi(\mu(\xi))/_\varphi \mu(\xi)^{-1}\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu(\xi) \cap \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))]$$

and

$$[\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu^\sigma(\varphi(\xi))\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))/_\varphi\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))].$$

Indeed, to show fully faithfullness, assume that

$$g_1\varphi(\mu(\xi)) = h^{-1}g_2\varphi(\mu(\xi))\varphi(h).$$

This implies that

$$\varphi(h) = \varphi(\mu(\xi))^{-1}g_2^{-1}hg_1\varphi(\mu(\xi)).$$

Then (as φ is an automorphism of $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$) one deduces by (22) above that

$$h \in \mu(\xi)\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu(\xi)^{-1} \cap \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)).$$

It is essentially surjective: take $g_1\varphi(\mu(\xi))g_2$. Then just write $g_2 = \varphi(h)^{-1}$, for $h \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))$. It follows that

$$h^{-1}g_1\varphi(\mu(\xi))g_2\varphi(h) \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\varphi(\mu(\xi)).$$

□

REMARK 15. Let R be a perfect $\mathbb{F}_p$-algebra. Then $\mathcal{G}$-μ-windows for $\mathcal{F}_{inf}(R)$ are the same as $\mathcal{G}$-μ-displays over R. Thus the previous lemma recovers and extends [**BP20**, Prop. 3.2.15.].

4.3.3. *$\mathcal{G}$-μ-windows for the frame $\mathcal{F}_{cris}$.* The construction for these windows works exactly the same way as for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$.
Fix a p-torsion free integral perfectoid $W(k_0)$-algebra R. Then $\mathcal{G}(\mathcal{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}))$ and $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}))_\mu$ are still sheaves for $\mathrm{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff,op}}_{\mathrm{ét}}$ and as all rings $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R})$ are p-torsion free, one has a group homomorphism

$$\Phi_{\mathrm{cris}}\colon\ \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}))_\mu \to \mathcal{G}(\mathcal{A}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R})).$$

Thus, one can copy-paste the previous Definition 12.

[13]In fact, one inclusion is obvious and the other one follows from the description of the window group: multiplication induces an isomorphism $U^+((\xi)) \times P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)) \to \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_\mu$. Let $u \in U^+((\xi)), p \in P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))$, then $\mu(\xi)^{-1}u\mu(\xi)$ is the unit section and $\mu(\xi)p\mu(\xi)^{-1} \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}})$. It follows that $u \cdot p \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}) \cap \mu(\xi)^{-1}\, \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))\mu(\xi)$.

4.4. Adjoint nilpotency condition. In this section, I briefly want to recall the adjoint nilpotency condition for $\mathcal{G}$-μ-displays, as formulated by Bültel-Pappas in [**BP20**, Def. 3.4.2]. As in the theory of classical Zink-displays, this nilpotency condition is needed to develop the deformation theory - but one should be careful that under the equivalence of stacks between classical Zink-displays and $(\mathrm{GL}_n, \mu_{n,d})$-displays, the nilpotency conditions do not coincide.
Let k be an algebraically closed field of characteristic p, $W = W(k)$ and $L = W(k)[1/p]$ the fraction field. Let σ be the Frobenius-automorphism of L. Furthermore, let $(\mathcal{G}, \mu)$ be a minuscule and reductive window datum and denote by $G = \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ the generic fiber. If $b \in G(L)$, Kottwitz [**Kot85**] associates a morphism of L-groups

$$\nu_b \colon \mathbb{D}_L \to G_L,$$

characterized by the property, that for any $(V, \rho) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$, the $\mathbb{Q}$-graduation on V_L given by $\rho \circ \nu_b$ coincides with the decomposition in isotopic components of the isocristal $(V_L, \rho(b) \circ (1 \otimes \sigma))$. Thus one can say that $\rho(b)$ has a slope at $\lambda \in \mathbb{Q}$. A trivial observation is that this requirement is independent of the choice of a representative $b \in [b] \in B(G)$. By Lemma 4.8, one deduces

Corollary 4.9. *Let (Q, α) a $\mathcal{G}$-μ-display over k. After trivialization, one may represent it by a section $g \in \mathcal{G}(W)$. Then the requirement that $\mathrm{Ad}(g\mu^\sigma(p))$ has all slopes greater than -1 is independent of the choice of the trivialization.*

Thus, the next definition makes sense.

Definition 13. Let $R \in \mathrm{Nilp}_{W(k_0)}$ and (Q, α) a $\mathcal{G}$-μ-display over $\mathrm{Spec}(R)$. Then (Q, α) is called adjoint nilpotent, if for all geometric points

$$\bar{x}_k \colon \mathrm{Spec}(\overline{\kappa(x)}) \to \mathrm{Spec}(R),$$

the pull-back $(\bar{x}_k)^*(Q, \alpha)$ fulfills the requirement of the last corollary.

Recall the following translation of the adjoint nilpotency condition in the case of a trivialized $\mathcal{G}$-μ-display given in [**BP20**, 3.4.4.].

Proposition 4.10. Let R be k_0-algebra and (Q, α) a trivialized $\mathcal{G}$-μ-display over R, given by a section $g \in L^+(\mathcal{G})(R)$. Then (Q, α) is adjoint nilpotent, if and only if the endomorphism

$$\mathrm{Ad}(w_0(g)) \circ (\mathrm{Frob}_R \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}_R \otimes \pi) \colon \mathrm{Lie}(U^+)_R \to \mathrm{Lie}(U^+)_R$$

is nilpotent. Here I denote by $\pi \colon \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Lie}(U^+)$ the projection onto $\mathrm{Lie}(U^+)$, killing $\mathrm{Lie}(P^+)$.

Remark 16. Let me briefly comment on the relation between this nilpotency condition and Zink′s nilpotency condition in the case of the linear group. Let $R \in \mathrm{Nilp}$ and $\mathcal{P}$ be a classical Zink-display over R. Then $\mathcal{P}$ is adjoint nilpotent if and only if there are radical ideals $I_{nil} \subseteq R$ and $I_{uni} \subseteq R$, with $I_{nil} \cap I_{uni} = \sqrt{pR}$, such that $\mathcal{P}_{R/I_{nil}}$ and $(\mathcal{P}/I_{uni})^t$ are Zink-nilpotent. Here $()^t$ means the dual display. This is a reproduction of [**BP20**, Remark 3.4.5].

This is the motiviation to give the following

Definition 14. Let R be a p-torsion free integral perfectoid $W(k_0)$-algebra. Let

$$\mathcal{F} \in \{\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R), \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/pR)\}.$$

Then a $\mathcal{G}$-μ-window $\mathcal{P} = (Q, \alpha)$ over $\mathcal{F}$ is said to fulfill the adjoint nilpotency condition, if étale-locally on $\mathrm{Spec}(R/pR)$, one can represent $\mathcal{P}$ by a structure matrix $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))$, such that the endomorphism

$$\psi_g \colon \mathrm{Lie}(U^+)_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)} \to \mathrm{Lie}(U^+)_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)},$$

where $\psi_g = (\mathrm{id}_{Lie(U^+)} \otimes \varphi) \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{Ad}(g)$, is nilpotent modulo $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) + p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$.

The same definition works for not necessarily p-torsion free integral perfectoid $W(k_0)$-algebras for banal $\mathcal{G}$-μ-windows for the frames $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$ resp. $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/pR)$ (remember that the worries with the p-torsion always came from the necessity of having descent statements as in Lemma 3.4).

Remark 17. Let me briefly point out why this condition is independent of the choice of a structure matrix $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))$. In fact, let me reformulate the condition that the above φ-linear endomorphism $\psi_g = (\mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(U^+)} \otimes \varphi) \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{Ad}(g)$ is nilpotent modulo $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) + p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ as follows: first, let $\overline{g} \in \mathcal{G}(R/pR)$ be the reduction of g modulo $\mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) + p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$. The condition that $\psi_{\overline{g}}$ is nilpotent is equivalent to the condition that its base change towards $R/\sqrt{pR}$ is nilpotent; since R is integral perfectoid, this is a perfect ring in characteristic p.[14] Then one has the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/\sqrt{pR}) = W(R/\sqrt{pR}) \arrow[d] \\
R/pR \arrow[r] & R/\sqrt{pR}.
\end{tikzcd}$$

Denoting by $g_{\mathrm{red}} \in \mathcal{G}(W(R/\sqrt{pR}))$ the image of g under $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to W(R/\sqrt{pR})$, the condition that $\psi_{\overline{g}}$ is nilpotent is therefore equivalent to the condition that $\psi_{g_{\mathrm{red}}}$ is nilpotent modulo p. By [**BP20**, Lemma 3.4.4], this last condition just depends on the $\mathcal{G}$-μ-display that g_{red} represents, which concludes the verification.

4.5. Lau's unique lifting lemma. Here I want to reproduce the unique lifting lemma, as proven by Lau in [**Lau21**, Proposition 7.1.5.]. Since I am using a slightly different language than him and since this a central techniqual tool, I decided to give a detailed explanation of the proof.

Definition 15. (Lau) Let $\lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ be a u-frame morphism, such that $\mathcal{G}$-μ-windows over $\mathcal{F}$ resp. $\mathcal{F}'$ are defined. Then one calls λ nil-crystalline, if the base-change functor $\lambda_\bullet$ induces an equivalence of the corresponding adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-window categories. It is called crystalline, if it is an equivalence even without putting the adjoint nilpotency condition.

The term 'crystalline' was introduced by Lau in [**Lau10**, Def. 3.1.].
Now I want to explain the key criterium (the 'unique lifting lemma') for when the base change along a frame-morphism is fully faithful; the question of essential surjectivity then comes down to the question whether one can lift a section $g' \in \mathcal{G}(S')$ towards $g \in \mathcal{G}(S)$, which in the applications will be ok since then $S' \to S$ is surjective and S' is henselian along $\ker(S' \to S)$.
Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}'$ two frames over $W(k_0)$. One makes the following assumptions:

(a): There exists a strict frame morphism
$$\lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}',$$
given by a surjective ring homomorphism $\lambda\colon S \to S'$, that induces an isomorphism $R \simeq R'$,

(b): let $K = \ker(\lambda)$, an ideal that by assumption (a) lies in I. Then one requires that K is p-adically complete and separated,

(c): finally, one requires that $\dot{\varphi}(K) \subseteq K$.

Proposition 4.11. (Lau) Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}'$ two frames over $W(k_0)$ together with a strict morphism
$$\lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}',$$
fulfilling the above hypotheses (a),(b) and (c). Furthermore let $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_{W(k)}(S)$. Now assume either

- that the endomorphisms of $\mathrm{Lie}(U^+) \otimes_{W(k)} S$ given by
$$(\mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(\mathcal{G})} \otimes \varphi) \circ \pi \circ \mathrm{Ad}(g_i)$$
are nilpotent, where $i = 1, 2$ (recall that here π was the projection from $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ towards $\mathrm{Lie}(U^+)$),
- or that the action of $\dot{\varphi}$ on K is topologically nilpotent.

Then, if $\lambda(g_1) = \lambda(g_2)$, there exists a unique $h \in \mathcal{G}_{W(k)}(\mathcal{F})_\mu$, such that
$$g_2 = h^{-1} g_1 \Phi_{\mathcal{F}}(h). \tag{23}$$

Proof. One first notes that the analog of [**Lau21**, Lemma 7.1.4.] is of cours true in this set-up and proved word by word the same way. Let me state it explictly for the reader's convenience

Lemma 4.12. (a): *Let $\mathcal{G}(K) = \ker(\mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S'))$ and $\mathcal{G}(K)_\mu = \ker(\mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu \to \mathcal{G}(\mathcal{F}')_\mu)$. Then there is a natural identification*
$$\mathcal{G}(K) \cong \mathcal{G}(K)_\mu,$$

(b): *λ induces a surjective group homomorphism*
$$\mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S'),$$

[14] Indeed, if $\varpi \in R$ is some perfectoid pseudo-uniformizer, then one has that $\sqrt{pR} = \bigcup_n \varpi^{1/p^n}$.

(c): λ *induces a surjective group homomorhism,*

$$\mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu \to \mathcal{G}(\mathcal{F}')_\mu.$$

Coming back to the proof of Prop. 4.11, note that this lemma implies that one has to show that the action by Φ-conjugation is simply transitive on the fibers, i.e. one has to show that for all $g \in \mathcal{G}(S)$ and all $h \in \mathcal{G}(K)$, there exists a unique $z \in \mathcal{G}(K)_\mu$, such that

$$z^{-1} g \Phi_{\mathcal{F}}(z) = hg. \tag{24}$$

Now one reformulates (24) in a different way, which is more tractable to proving: one has an identification $\mathcal{G}(K) \simeq \mathcal{G}(K)_\mu$ by part (a) of the previous lemma. Thus for all $g \in \mathcal{G}(S)$, one can consider the following group homomorphism

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_g \colon \mathcal{G}(K) &\to \mathcal{G}(K) \\ z &\mapsto g(\Phi_{\mathcal{F}}(z))g^{-1}. \end{aligned}$$

Then (24) is equivalent to

$$z^{-1} \mathcal{U}_g(z) = h. \tag{25}$$

Thus one has to show the following
Claim: The map

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(K) &\to \mathcal{G}(K), \\ z &\mapsto \mathcal{U}_g(z)^{-1} z \end{aligned}$$

is bijective.
Note that the assumptions that K is p-adic and $\mathcal{G}$ is smooth, together imply that

$$\mathcal{G}(K) \cong \lim_{i \geq 1} \mathcal{G}(K/p^i K).$$

Furthermore, consider

$$\mathcal{G}(p^i K) := \ker(\mathcal{G}(K) \to \mathcal{G}(K/p^i K)).$$

I claim that $\mathcal{U}_g$ preserves $\mathcal{G}(p^i K)$, then $\mathcal{U}_g$ will operate on $\mathcal{G}(K/p^i K) \simeq \mathcal{G}(K)/\mathcal{G}(p^i K)$[15] and I furthermore claim that it does so pointwise nilpotently. Then the above **Claim** follows. In fact, for $z \in \mathcal{G}(K)$ the product $\Pi := \cdots \mathcal{U}_g^2(z)\mathcal{U}_g(z)z$ then makes sense and it satisfies $\mathcal{U}_g(\Pi)^{-1}\Pi = z$. The injectivity follows, because in case $\mathcal{U}_g(z)^{-1}z = \mathcal{U}_g(z')^{-1}z'$, the product $z'z^{-1}$ is fixed by $\mathcal{U}_g$. But $\mathcal{U}_g$ is pointwise nilpotent and thus has as a unique fixpoint the unit section. Therefore, to finish the proof, one has to show the two above properties.
For this, one first shows that $\Phi_{\mathcal{F}}$ respects the decomposition $\mathcal{G}(K) = U^+(K) \times P^-(K)$ coming from the (omitted) proof of the previous lemma.
On $U^+(K) \cong \mathrm{Lie}(U^+) \otimes_{W(k)} K$, one has by definition $\Phi_{\mathcal{F}} = \mathrm{id} \otimes \dot{\varphi}$ and because by assumption $\dot{\varphi}(K) \subseteq K$ this is ok.
Take a section $g \in P^-(K)$. This corresponds to a morphism of $W(k)$-algebras

$$g^\sharp \colon A/(A_{>0}) \to S,$$

such that $\lambda(g^\sharp(f)) = e_{S'}^\sharp(f)$, where $e_{S'} \in P^-(S')$ the unit section. In terms of the weight-decomposition

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n,$$

one knows that $e_{S'}^\sharp(f_n) = 0$, for all $n \neq 0$.[16] Thus, writing $f = \sum_{n \geq 0} f_{-n} \in A/(A_{>0})$, the assumption that $g \in P^-(K)$ implies $g^\sharp(f_{-n}) \in K$ for $n \geq 1$ and that $\lambda(g^\sharp(f_0)) = e_{S'}^\sharp(f_0)$. Recall that one defined

$$\Phi_{\mathcal{F}} \colon P^-(S) \to P^-(S)$$

by $g \mapsto \mu(p)\varphi(g)\mu(p)^{-1}$. This means that

$$(\Phi(g))^\sharp(f_{-n}) = p^n \varphi(g^\sharp(f_{-n})),$$

for $n \geq 0$. Thus, it follows for $n \geq 1$, that $(\Phi(g))^\sharp(f_{-n}) \in K$, because φ also lets K stable [17]. Furthermore, the following identities hold:

$$\lambda((\Phi(g))^\sharp(f_{-0})) = \lambda(\varphi(g^\sharp(f_0)) = \varphi'(\lambda(g^\sharp(f_0))) = \varphi'(e_{S'}^\sharp(f_0)) = e_{S'}^\sharp(f_0).$$

[15] As $\mathcal{G}$ is smooth, the map $\mathcal{G}(K) \to \mathcal{G}(K/p^i K)$ is surjective.
[16] This follows for example because P^+ and P^- are both subgroup schemes of $\mathcal{G}$.
[17] One has $\lambda(\varphi(x)) = \varphi'(\lambda(x)) = 0$, for $x \in K$.

Here one uses that φ' induces a group endomorphism on $P^-(S')$ and thus sends the unit section to the unit section. In total, it follows that

$$\lambda((\Phi(g))^\sharp(\sum_{n\geq 1} f_{-n}))) = \lambda(\sum_{n\geq 1} p^n\varphi(g^\sharp(f_{-n}))) = \lambda(\varphi((f_{-0}))) = e^\sharp_{S'}(f).$$

Note that it also follows that Φ stabilzes $U^+(p^iK)$ and also $P^-(p^iK)$. One deduces that also $\mathcal{U}_g$ stabilizes $U^+(p^iK)$ and $P^-(p^iK)$ and the first claim above is proven. Now let me turn to the second:
By induction it is sufficient to show that $\mathcal{U}_g$ acts pointwise nilpotently on all

$$\mathcal{G}(p^iK/p^{i+1}K) \cong \mathcal{G}(p^iK)/\,\mathcal{G}(p^{i+1}K)$$

to conclude that $\mathcal{U}_g$ is pointwise nilpotent on all $\mathcal{G}(K/p^iK)$, for all $i \geq 0$.
Now one shows the claimed pointwise nilpotency of $\mathcal{U}_g$ on $\mathcal{G}(p^iK/p^{i+1}K)$. For this, one first claims that

$$\Phi_{\mathcal{F}} \colon P^-(p^iK/p^{i+1}K) \to P^-(p^iK/p^{i+1}K)$$

is the zero map. In fact, observe that $P^-(p^iK/p^{i+1}K) \simeq \mathrm{Lie}(P^-)\otimes p^iK/p^{i+1}K$. Under this identification $\Phi_{\mathcal{F}}$ corresponds to $\cdot p^{-m}\varphi$ on weight m-components, where $m \leq 0$. As $\varphi = p\dot{\varphi}$ on K, the claim is ok.
Therefore, one has the following factorization of the endormorphism $\mathcal{U}_g$:

$$\mathcal{G}(K_i) \xrightarrow{pr_2} U^+(K_i) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\dot{\varphi}} U^+(K_i) \xrightarrow{z\mapsto gzg^{-1}} \mathcal{G}(K_i),$$

here I wrote $K_i := p^iK/p^{i+1}K$ to not exceed the margin. This is pointwise nilpotent, if the permutation

$$U^+(K_i) \xrightarrow{z\mapsto gzg^{-1}} \mathcal{G}(K_i) \xrightarrow{pr_2} U^+(K_i) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\dot{\varphi}} U^+(K_i)$$

is pointwise nilpotent. But the morphism of pointed sets $U^+(K_i) \to U^+(K_i)$, defined by $z \mapsto pr_2(zgz^{-1})$ is described by some power series, whose higher degree terms are annihaled by $\mathrm{id}\otimes\dot{\varphi}$, because one has $\dot{\varphi}(ab) = p\dot{\varphi}(a)\dot{\varphi}(b)$, for all $a, b \in K$. Therefore,

$$\mathcal{U}_g \colon \mathrm{Lie}(U^+)_S \otimes_S K_i \to \mathrm{Lie}(U^+)_S \otimes_S K_i$$

is given by $\lambda \otimes \dot{\varphi}$, where λ is the following φ-linear endomorphism of $\mathrm{Lie}(U^+) \otimes_{W(k)} S$:

$$(1 \otimes \varphi) \circ \pi \circ \mathrm{Ad}(g).$$

Now using either the assumption that this φ-linear endomorphism is nilpotent or the assumption that $\dot{\varphi}$ acts topologically nilpotent on K, one may conclude the proof of the statement. $\square$

5. Crystalline equivalence

Fix as usual a 1-bound window datum $(\mathcal{G}, \mu)$. Let R be a p-torsion free integral perfectoid $W(k)$-algebra. In this section I will first construct a strict framemorphism

$$\chi \colon \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) \to \mathcal{W}(R)$$

and then proceed to show the following statement

Proposition 5.1. (Crystalline equivalence)
Let R be a p-torsion free integral perfectoid $W(k)$-algebra. Then the base change functor

$$\chi_\bullet \colon \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/p))_{\mathrm{nilp}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Displ}(R/p)_{\mathrm{nilp}}$$

is an equivalence (i.e. χ is nil-crystalline).

Recall that Zink proves in [**Zin01**] the GL_n-case of the crystalline equivalence (in fact, he proves a more general statement). He writes down a quasi-inverse of the base-change functor $\chi_\bullet$, by evaluating the crystal of a nilpotent display at the (topological) pd-thickening $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \to R$ to get the finite projective module over $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ and then gets the Frobenius-structure by applying functoriality of the crystal to the Frobenius-isogeny of the display. As one has to work here with torsors, this route is not available. Instead, the idea is to first prove the statement $'$ *modulo p* $'$ directly by applying Lau's unique lifting lemma, Proposition 4.11, and then study the relation between lifts and lifts of the Hodge-filtration in the present set-up, to deduce the full statement. In this second step the adjoint nilpotency condition will be crucial.

5.1. Crystalline equivalence modulo p. Consider still R a p-torsion free integral perfectoid $W(k)$-algebra. Then one has the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/p) = (\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R), \mathrm{Fil}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)) + p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R), R/pR, \varphi, \dot{\varphi})$, that of course still has frame-constant p. By Lemma 5.3 below, one has a strict frame-morphism

$$\chi/p\colon \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/p) \to \mathcal{W}(R/p),$$

and the aim of this section is to show that

$$(\chi/p)_{\bullet}\colon\ \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/p))_{\mathrm{nilp}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Displ}(R/p)_{\mathrm{nilp}}$$

is an equivalence of groupoids. By Lemma,7.1, even further below, one sees that the fibered category on $\mathrm{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}}$, given by sending $B = R/p \to B' = R'/p$, $\mathcal{R}(B') = R'$, towards the groupoid of $\mathcal{G}$-μ-displays over R' is a stack; furthermore, for $\mathcal{G}$-μ-$\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R))$ one has built this descent-behaviour into the very definition. Therefore one is immediately reduced to show that (χ/p) induces an equivalence on the corresponding quotient-groupoids of banal and adjoint nilpotent windows resp. displays. Let me state the statement explicitely (dropping as usual in the statements that concern the banal case the assumption that the integral perfectoid ring is p-torsion free).

Lemma 5.2. *Let R be an integral perfectoid $W(k_0)$-algebra. Then*

$$(\chi/p)_{\bullet}\colon\ \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{cris}(R/p))_{\mathrm{nilp,banal}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Displ}(R/p)_{\mathrm{nilp,banal}}$$

is an equivalence.

Let me now operate in slightly greater generality. Consider a p-adic and p-torsion free ring A, a p-adic ring R, that is the quotient of A by a pd-ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. This means that one requires here that for all $m \geq 0$ and all $a \in \mathfrak{a}$ one has that $\gamma_m(a) \in \mathfrak{a}$. Assume that there exists a Frobenius-Lift

$$\varphi\colon A \to A.$$

Since A is assumed to be p-torsion free, it follows that one can consider $\dot{\varphi} = \frac{\varphi}{p}\colon \mathfrak{a} \to A$ and one has a frame

$$\underline{A} = (A, \mathfrak{a}, R, \varphi, \dot{\varphi}).$$

Lemma 5.3. *There exists a strict frame-morphism*

$$\chi\colon \underline{A} \to \mathcal{W}(R).$$

Proof. This is contained in [**Zin**, Corollary 2.40.]. The frame-morphism is constructed as the composition of the Cartier-morphism

$$\delta\colon A \to W(A),$$

with the homomorphism $W(A) \to W(R)$.[18] □

In this setting, the groupoid of banal $\mathcal{G}$-μ-windows for the frame $\underline{A}$ is given by

$$[\mathcal{G}(A)/_{\Phi_{\underline{A}}}\mathcal{G}(\underline{A})_{\mu}]$$

(since the frame-constant is here p, which by assumption is a regular element in A so that the divided Frobenius $\Phi_{\underline{A}}$ is indeed a group homomorphism). An element $U \in \mathcal{G}(A)$ is said to satisfy the adjoint nilpotency condition, if the endomorphism

$$\psi_U\colon\ \mathrm{Lie}(U^+)_A \to \mathrm{Lie}(U^+)_A,$$

given by $\psi_U = (\mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(U^+)} \otimes \varphi) \circ \pi \circ \mathrm{Ad}(U)$ is nilpotent modulo $\mathfrak{a} + pA$. Now one may deduce the crystalline equivalence ′ modulo p ′:

Lemma 5.4. *Keep the assumptions in Lemma 5.3, but add the assumption that R is a semi-perfect $\mathbb{F}_p$-algebra. Then for the strict frame-morphism $\chi\colon \underline{A} \to \mathcal{W}(R)$ the base-change functor*

$$\chi_{\bullet}\colon\ \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Win}(\underline{A})_{\mathrm{banal,nilp}} \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\mathrm{Displ}(R)_{\mathrm{banal,nilp}}$$

is fully faithful.

Proof. Write $K = \ker(\chi\colon A \to W(R))$. I want to apply the unique lifting lemma Proposition 4.11. Thus one first has to show that χ satisfies the following hypotheses:

(a): $\chi\colon A \to W(R)$ is a surjection,
(b): $\ker(\chi)$ is p-adically complete,
(c): $\dot{\varphi}$ stabilizes K, i.e. $\dot{\varphi}(K) \subseteq K$.

[18] I am really using $W(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))$ here!

First of all, by definition both $\underline{A}$ and $\mathcal{W}(R)$ are frames over the same ring R. Furthermore, as R is semiperfect and $VF = FV = p$ in $W(R)$, it follows that $I(R) = pW(R)$. As both rings A and $W(R)$ are p-adically complete, it suffices to show that χ is surjective after reduction modulo p. This follows because $p \in \mathfrak{a}$, thus A/pA surjects onto $A/\mathfrak{a}$, which is isomorphic to $W(R)/pW(R) \simeq R$.
Part (b) is automatic. Let me show (c). For this, one computes $K = \ker(\chi)$. Let $a \in A$ and write $\delta(a) = (\delta(a)_0, \delta(a)_1, ...) \in W(A)$. Then $a \in K$, iff all $\delta(a)_i \in \mathfrak{a}$. I claim that this is the case iff $\varphi^n(a) \in p^n\mathfrak{a}$. Let $a \in K$. Then certainly $\delta(a)_0 = a \in \mathfrak{a}$. By the construction of the Cartier-morphism, one has that

$$W_n(\delta(a)) = a^{p^n} + p(\delta(a)_1^{p^{n-1}}) + ... + p^n\delta(a)_n = \varphi^n(a). \tag{26}$$

From (26), one deduces after division by p^n that

$$\dot{\varphi}^n(a) = (p^n - 1)!\gamma_{p^n}(a) + (p^{n-1} - 1)!\gamma_{p^{n-1}}(\delta(a)_1) + ... + \delta(a)_n \in \mathfrak{a}. \tag{27}$$

Here I used that all $\delta(a)_i \in \mathfrak{a}$ so that one can apply γ and that $\mathfrak{a}$ is a pd-ideal, so that $\gamma_m(a) \in \mathfrak{a}$. It follows that $\varphi^n(a) \in p^n\mathfrak{a}$.
For the other inclusion, I argue by induction: one has that $\delta(a)_0 = \varphi^0(a) = a \in \mathfrak{a}$. Assume one has already shown for $i \leq n-1$ that $\delta(a)_i \in \mathfrak{a}$. One may write, as $\varphi^n(a) \in p^n\mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}\delta(a)_n &= \frac{\varphi^n(a) - (\delta(a)_0)^{p^n} - p(\delta(a)_1)^{p^{n-1}} - ... - p^{(n-1)}(\delta(a)_{n-1})^p}{p^n} \\ &= \dot{\varphi}^n(a) - (p^n - 1)!\gamma_{p^n}(\delta(a)_0) - ... - (p-1)!\gamma_p(\delta(a)_{n-1}) \in \mathfrak{a}.\end{aligned}$$

From this it follows that $\dot{\varphi}(K) \subseteq K$: let $a \in K$, one has that

$$\varphi^n(\dot{\varphi}(a)) = \frac{\varphi^{n+1}(a)}{p} \in p^n\mathfrak{a},$$

because $\varphi^{n+1}(a) \in p^{n+1}\mathfrak{a}$. Now the above description of the kernel shows that also $\dot{\varphi}(a) \in K$.
Let me write again $K_i = p^iK/p^{i+1}K$. Then, to conclude the proof as in Proposition 4.11, one still has to check that the φ-linear endomorphism

$$\psi_g \otimes \dot{\varphi}\colon \operatorname{Lie}(U^+)_A \otimes_A K_i \to \operatorname{Lie}(U^+)_A \otimes_A K_i,$$

is really pointwise nilpotent. Recall that here ψ_g was the φ-linear endomorphism of $\operatorname{Lie}(U^+)_A$ given by $(1 \otimes \varphi) \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{Ad}(g)$. But this follows from the adjoint nilpotency condition on $g \in \mathcal{G}(A)$. In fact, to make the argument clearer, let me choose a basis of $\operatorname{Lie}(U^+)$, i.e. an isomorphism $\operatorname{Lie}(U^+) \simeq (W(k))^{n_1}$. Then one has $(\psi_g \otimes \dot{\varphi})(x) = N \cdot \dot{\varphi}(\underline{x})$, where $N \in \mathrm{Mat}_{n_1}(A)$ and $\underline{x} \in (K_i)^{n_1}$ is the column-vector corresponding to x. Inductively, one gets

$$(\psi_g \otimes \dot{\varphi})^n(x) = N \cdot \varphi(N) \cdot \varphi^2(N) ... \varphi^{n-1}(N) \cdot \dot{\varphi}^n(\underline{x}).$$

The adjoint nilpotency condition says, that there exists some $c \geq 1$, such that

$$M = N \cdot \varphi(N) \cdot \varphi^2(N) ... \varphi^c(N)$$

has coefficients in $\mathfrak{a}$. Thus, one gets that

$$(\psi_g \otimes \dot{\varphi})^{c+1}(x) = N \cdot \varphi(M) \cdot \dot{\varphi}^{c+1}(\underline{x}) = N \cdot \dot{\varphi}(M \cdot \dot{\varphi}^c(\underline{x})) = N \cdot \dot{\varphi}(M) \cdot \varphi(\dot{\varphi}(\underline{x})) = 0.$$

Here I used in the third equation, that $\dot{\varphi}$ is φ-linear, in the fourth equation, that M has coefficients in $\mathfrak{a}$ and in the final equation, that $\varphi(K) \subseteq pK$. This concludes the proof. $\square$

Return to the assumption that R is a an integral perfectoid $W(k)$-algebra. Recall that then R/p is semi-perfect and $\mathrm{Fil}_{\mathrm{cris}}(R/p) = \ker(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p) \to R/p)$ is stabilized by the divided powers.[19] Before I go on, let me give another proof of the fully faithfulness of the base-change along χ/p in this situation, which works without (!) the adjoint nilpotency condition:

[19]As this was critically used above, let me briefly recall the argument. Let $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)^\circ$ be the pd-envelope of $\ker(\theta)$ over $(p\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, so that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ is the p-adic completion thereof. Let $x = \sum_n x_n\gamma_n(\xi) \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)^\circ$. Then one has that

$$\frac{x^m}{m!} = \sum_{i_n, s.t. \sum i_n = m} \prod_n x_n \frac{(ni_n)!}{(n!)^{i_n}(i_n)!}\gamma_{n \cdot i_n}(\xi) \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)^\circ$$

(one has to check that $\frac{(ni_n)!}{(n!)^{i_n}(i_n)!}$ is really a natural number). From this it follows that $\theta(\frac{x^m}{m!}) = 0$. The case of $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ now follows from continuity.

Remark 18. The claim here is that the operator $\dot{\varphi}$ operates topologically nilpotently on

$$\ker(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p) \to W(R/p)).$$

In fact, this kernel will be generated by

$$[x]^{(n)},$$

for all $n \geq 1$ and $x \in \ker(R^\flat \to R/p)$. Then one has that

$$\varphi^m([x]^{(n)}) = \frac{(p^m n)!)}{n!}[x]^{(np^m)}.$$

It follows that $\dot{\varphi} = \varphi/p$ stabilizes $\ker(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p) \to W(R/p))$ and this action is topologically nilpotent; the Lemma 4.11 of Lau above then implies the desired fully-faithfulness. Let me already point out here that the fact that the Frobenius acting on this kernel is very (!) topologically nilpotent will be crucially used later on again, when one compares G-quasi-isogenies of $\mathcal{G}$-μ-displays over integral perfectoid rings and the corresponding crystalline G-quasi-isogeny of $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues modules of type μ, see section 8.

Either by lemma 5.4 above, or the remark I just made, one deduces that base-change along the strict frame-morphism

$$\chi/p\colon \mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p) \to \mathcal{W}(R/p)$$

is fully faithful. It is however also essentially surjective in this context, because $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p)$ is henselian along the ideal $\ker(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p) \to W(R/p))$. Indeed, it is enough to check this modulo p, because $\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p)$ is p-adic. But then $\ker(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p) \to W(R/p))/p$ is in fact a nil-ideal (to the exponent p), so that the pair $(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)/p, \ker(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p) \to W(R/p))/p)$ is indeed henselian; using now that the group $\mathcal{G}$ is always assumed to be smooth over $\mathbb{Z}_p$, one may deduce the essential surjectivity by lifting a structure matrix.

5.2. Proof of the crystalline equivalence. To deduce that the morphism $\chi\colon \mathcal{F}_{\text{cris}}(R) \to \mathcal{W}(R)$ is nil-crystalline, one follows [**Lau18**, Prop. 9.7.].
One has a strict frame-morphism $j\colon \mathcal{F}_{\text{cris}}(R) \to \mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p)$. Note that one gets an injective group homomorphism

$$j\colon\ \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_\mu \to \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p))_\mu.$$

Consider the category $\mathcal{C}$ with objects $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) \times \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p))_\mu / \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_\mu$ and morphism given by $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p))_\mu$, with the action: $(g, \bar{x}) \cdot h = (h^{-1} g \Phi_{\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p)}(h), \bar{hx})$.
Then it is straightforward to see, that one gets an equivalence

$$[\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R))/_{\Phi_{\mathcal{F}_{\text{cris}}(R)}} \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_\mu] \simeq \mathcal{C},$$

given by sending $g \mapsto (g, \bar{e})$. Oberserve that under the natural maps

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p))_\mu / \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_\mu \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R)) / \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_\mu \to (\mathcal{G}/P^-)(R),$$

the coset $\mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/p))_\mu / \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_\mu$ gets identified with the sections in the flag-variety, whose reductions modulo p are the identity-coset. Thus lifts under j correspond to lifts of the Hodge-Filtration. On the other hand, by section 3.5.7. in [**BP20**], one sees that lifts of banal and adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays over R/pR towards R correspond to the coset-space $\mathcal{G}(W(pR)) / \mathcal{G}(\mathcal{W}(pR))_\mu$, which is again identified with the sections in the flag-variety, whose reductions modulo p are the identity-coset.
Now consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R))_{\text{nilp,banal}} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "j"] & \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Displ}(R)_{\text{nilp,banal}} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\text{cris}}(R/pR))_{\text{nilp,banal}} \arrow[r, "\chi/p"] & \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Displ}(R/pR)_{\text{nilp,banal}}.
\end{tikzcd}$$

Then I just explained that lifts under j and lifts under π correspond to lifts of the Hodge-filtration in the same way. One deduces that this diagram of groupoids is cartesian - because χ/p is already known to induce an equivalence, it follows that χ induces an equivalence.

6. Descent from $\mathbb{A}_{\mathbf{cris}}$ to $\mathbb{A}_{\inf}$

In this section I will give a group theoretical generalization of the descent of classical windows over $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ to those over $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$, as proven by Cais-Lau in Sections 2.2 and 2.3 of [**CL17**]. Because I follow their methods, I have unfortunately to restrict to the case that $p \geq 3$.
Let as usual $(\mathcal{G}, \mu)$ a 1-bound window datum, R a p-torsion free integral perfectoid $W(k)$-algebra. Recall the $u = \frac{\varphi(\xi)}{p}$-frame morphism

$$\lambda \colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R).$$

Then I want to show the following

Proposition 6.1. The base-change functor

$$\lambda_\bullet \colon \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_{\mathrm{banal}} \to \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R))_{\mathrm{banal}}$$

is crystalline for $p \geq 3$.

Consider the frames

$$\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R) = \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = (\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^n\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R), (\xi)/p^n(\xi), R/p^nR, \varphi(\bmod p^n), \dot{\varphi}(\bmod p^n))$$

for $n \geq 1$ resp. the same with $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$. One thus obtains by assumptions that $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) = \lim_{n\geq 1} \mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R)$ and $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) = \lim_{n \geq 1} \mathcal{F}_{\mathrm{cris},n}(R)$, in the sense of [**Lau10**, Section 2]. Due to general problems with torsion, let me first check the following

Lemma 6.2. *Let $\mathcal{F} = (S, I, R, \varphi, \dot{\varphi}) \in \{\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R), \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\}$ and $\mathcal{F}_n = (S/p^nS, I/p^nI, R/p^nR, \varphi, \dot{\varphi}) \in \{\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R), \mathcal{F}_{\mathrm{cris},n}(R)\}$. Then the divided Frobenius-map*

$$\Phi_{\mathcal{F}_n} \colon \mathcal{G}(\mathcal{F}_n)_\mu \to \mathcal{G}(S_n)$$

is a group homomorphism.

Proof. The proof rests on the following
Claim: The homomorphisms $G(S) \to \mathcal{G}(S/p^nS)$ and $\mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu \to \mathcal{G}(\mathcal{F}_n)_\mu$ are surjective.
Let me explain this: one has that $(S, \ker(\pi_n) = p^nS)$ is a henselian pair by [**Sta22**, Tag 0CT7]. Then one can use that as $\mathcal{G}$ is smooth, the map

$$\pi_n \colon \mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(S/\ker(\pi_n)) = \mathcal{G}(S/p^nS)$$

is surjective. This implies, as P^- is also smooth, that likewise the map

$$\pi_n \colon P^-(S) \to P^-(S/p^nS)$$

is surjective. Now the map $I \to I/p^nI$ is surjective. Thus one can use the decomposition

$$\mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu \cong P^-(S) \times \mathrm{Lie}(U^+) \otimes I$$

to conclude the proof of the **Claim**.
Let me now prove the lemma. As $\pi_n \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_n$ is a *strict* frame-homomorphism, one has the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\pi_n"] & \mathcal{G}(S) \arrow[d, "\pi_n"] \\
\mathcal{G}(\mathcal{F}_n)_\mu \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{F}_n}"] & \mathcal{G}(S/p^nS).
\end{tikzcd}$$

Let $h_n, h_n' \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_n)_\mu$, one wants to show the equation

$$\Phi_{\mathcal{F}_n}(h_n \cdot h_n') = \Phi_{\mathcal{F}_n}(h_n) \cdot \Phi_{\mathcal{F}_n}(h_n'). \tag{28}$$

Let $h, h' \in \mathcal{G}(\mathcal{F})_\mu$ be pre-images of h_n, h_n' under π_n. Then one has the equation

$$\Phi_{\mathcal{F}}(h \cdot h') = \Phi_{\mathcal{F}}(h) \cdot \Phi_{\mathcal{F}}(h'), \tag{29}$$

by the assumption that $\Phi_{\mathcal{F}}$ is a group homomorphism. Now one can apply π_n to both sides of equation (29) and by the commutativity of the above diagram, it follows that equation (28) holds true. □

Now I consider the induced u_n-frame homomorphisms

$$\lambda_n \colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cris},n}(R),$$

for all $n \geq 1$. Here u_n is the reduction of $u = \frac{\varphi(\xi)}{p} \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$ modulo p^n.
The key statement is now the following:

LEMMA 6.3. *For all $n \geq 1$, if λ_n is crystalline, also λ_{n+1} is crystalline.*

For the proof, I will need a certain variation of the usual deformation theory arguments in an additive setting. Thus let me start with a little excursion on this topic.
Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}'$ be two frames over $W(k)$ fulfilling the following properties:

(a): The divided Frobenii $\Phi_{\mathcal{F}}$ and $\Phi_{\mathcal{F}'}$ are group homomorphisms,

(b): one has a u-frame-morphism

$$\lambda\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}',$$

such that the corresponding ring-homomorphism $\lambda\colon S \to S'$ is surjective and one has $R \simeq R'$.

(c): Denoting by $K = \ker(S \to S')$, one requires that $\dot{\varphi}(K) \subseteq K$ and

$$\dot{\varphi}\colon K \to K$$

is elementwise (topologically) nilpotent.

Let me consider the following quotient groupoid, which is a Lie-algebra version of the quotient groupoid of banal $\mathcal{G}$-μ-windows: one denotes by $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ the Lie-algebra, a finite free $\mathbb{Z}_p$-module, $\mathfrak{u}^+ = \mathrm{Lie}(U^+)$ and $\mathfrak{p}^- = \mathrm{Lie}(P^-)$. Let $g \in \mathcal{G}(S)$ and $\lambda_\bullet(g) = \lambda(g)\mu(u) \in \mathcal{G}(S')$. Furthermore, I will consider the Lie-theoretic analog of the divided Frobenius map

$$\psi_{\mathcal{F}}\colon \mathfrak{u}^+ \otimes I \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S \to \mathfrak{g} \otimes S,$$

which is defined to be $\mathrm{id} \otimes \dot{\varphi}$ on $\mathfrak{u}^+ \otimes I$ and $\zeta_{\mathcal{F}}^m \cdot \varphi$ on weight m-components. Consider

$$\mathcal{C}_g = [\mathfrak{g} \otimes S/_g \mathfrak{u}^+ \otimes I \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S],$$

where the action is by $X.Z = X - \mathrm{Ad}(g)(Z) + \psi_{\mathcal{F}}(Z)$. Likewise, one has

$$\mathcal{C}_{\lambda_\bullet(g)} = [\mathfrak{g} \otimes S'/_{\lambda_\bullet(g)} \mathfrak{u}^+ \otimes I' \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S'],$$

where the action is now by $X'.Z' = X' - \mathrm{Ad}(\lambda_\bullet(g))(Z') + \psi_{\mathcal{F}'}(Z')$. Observe that for all $Z \in \mathfrak{u}^+ \otimes I \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S$, the following equation is true

$$\mathrm{Ad}(\mu(u))\lambda(\psi_{\mathcal{F}}(Z)) = \psi_{\mathcal{F}'}(\lambda(Z)).\text{[20]} \tag{30}$$

This implies now that whenever an element $Z \in \mathfrak{u}^+ \otimes I \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S$ defines a morphism between $X, Y \in \mathfrak{g} \otimes S$, then $\lambda(Z)$ will define a morphism between $\mathrm{Ad}(\mu(u))\lambda(X)$ and $\mathrm{Ad}(\mu(u))\lambda(Y)$. In total, one has constructed a functor

$$\mathcal{C}_g \to \mathcal{C}_{\lambda_\bullet(g)}.$$

LEMMA 6.4. [21] *The previously introduced morphism of groupoids*

$$\mathcal{C}_g \to \mathcal{C}_{\lambda_\bullet(g)}$$

is an equivalence.

PROOF. This is an additive version of the usual argument for a frame morphism being crystalline: first one notes that

$$\mathrm{Ad}(\mu(u)) \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \otimes \lambda)\colon \mathfrak{g} \otimes S \to \mathfrak{g} \otimes S'$$

is a surjective homomorphism of S-modules with kernel $\mathfrak{g} \otimes K$. Furthermore,

$$\lambda\colon \mathfrak{u}^+ \otimes I \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S \to \mathfrak{u}^+ \otimes I' \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S'$$

is surjective.[22] It follows that one has to see that the action of $\mathfrak{u}^+ \otimes I \oplus \mathfrak{p}^- \otimes S$ on the fibers is simply transitive. Spelled out this means: it remains to be shown that for all $X \in \mathfrak{g} \otimes S$ and all $X_0 \in \mathfrak{g} \otimes K$, there exists a unique $Z \in \mathfrak{g} \otimes K$, such that

$$X - \mathrm{Ad}(g)(Z) + \psi_{\mathcal{F}}(Z) = X + X_0. \tag{31}$$

[20] In fact, it suffices to check this on elements $Z = u^+ \otimes i + p^- \otimes s$, where $u^+ \in \mathfrak{u}^+$ and $p^- \in \mathfrak{p}^-$. By the definition of a u-framemorphism, one obtains that $\lambda(\mathrm{id} \otimes \dot{\varphi})(u^+ \otimes i) = u^{-1}(\mathrm{id} \otimes \dot{\varphi}')(u^+ \otimes \lambda(i))$ and $\lambda(\zeta_{\mathcal{F}}^m \varphi(p^- \otimes s)) = u^{+m} \zeta_{\mathcal{F}'}^m \varphi'(p^- \otimes \lambda(s))$. Now use that $\mathrm{Ad}(\mu(u))$ will act by multiplication with u on the first expression, while by division by u^m on the second, to conclude.

[21] It is my pleasure to thank Eike Lau for discussions concerning this lemma in the summer of 2018 and setting me on the right way.

[22] Here one uses the assumption that $R \simeq R'$, to be able to deduce that λ sends I surjectively onto I' by the snake-lemma.

Note that as $\mathrm{Ad}\colon \mathcal{G} \to V(\mathrm{Lie}(\mathcal{G}))$ is a group scheme homomorphism, one has the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{g}\otimes K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \mathfrak{g}\otimes S \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \mathfrak{g}\otimes S' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(\lambda(g))"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{g}\otimes K \arrow[r] & \mathfrak{g}\otimes S \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] & \mathfrak{g}\otimes S' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

It follows that $\mathrm{Ad}(g)$ induces an automorphism of $\mathfrak{g}\otimes K$. Furthermore, note that $\psi_{\mathcal{F}}$ stabilizes $\mathfrak{g}\otimes K$, as K is an ideal and $\dot{\varphi}$ does so by assumption. One thus has to show that the map

$$(\psi_{\mathcal{F}} - \mathrm{Ad}(g))\colon \mathfrak{g}\otimes K \to \mathfrak{g}\otimes K$$

is a bijection. As was noted above that $\mathrm{Ad}(g)$ induces an automorphism of $\mathfrak{g}\otimes K$, it suffices to show that $(U - \mathrm{id})$ is a bijection, where $U = \mathrm{Ad}(g)^{-1}\circ\psi_{\mathcal{F}}$. But observe that as $\varphi = \zeta_{\mathcal{F}}\cdot\dot{\varphi}$ on K, one my write

$$\psi_{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} E_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}_{n_2}(\zeta_{\mathcal{F}}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{diag}_{n_3}(\zeta_{\mathcal{F}}^2) \end{vmatrix} \circ \dot{\varphi},$$

where $n_1 = \mathrm{rg}(\mathfrak{u}^+)$, $n_2 = \mathrm{rg}(\mathfrak{p}^0)$ and $n_3 = \mathrm{rg}(\mathfrak{p}^{-1})$. But it was assumed that $\dot{\varphi}$ is pointwise (topologically) nilpotent on K. It follows that U is (topologically) nilpotent and thus that $(U-1)$ is a bijection. This concludes the proof. ☐

Now let me explain why Lemma 6.3 above is true.

Proof. First one notes that one has strict frame morphisms $\pi_{n+1}\colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf},n+1}(R) \to \mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R)$, resp. $\pi_{n+1}\colon \mathcal{F}_{\mathrm{cris},n+1}(R) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cris},n}(R)$, for all $n \geq 1$, induced by reduction modulo p^n. Consider the following commutative diagram of groupoids

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n+1}(R))_{\mathrm{banal}} \arrow[r, "\lambda_{n+1}"] \arrow[d, "\pi_{n+1}"] & \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris},n+1}(R))_{\mathrm{banal}} \arrow[d, "\pi_{n+1}"] \\ \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R))_{\mathrm{banal}} \arrow[r, "\lambda_n"] & \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris},n}(R))_{\mathrm{banal}}. \end{tikzcd}$$

By assumption the lower horizontal functor is an equivalence. The idea is to show that λ_{n+1} induces equivalences on the fibers of the reduction modulo p^n-functors. Then the statement follows.
Let $g_n \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^n\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))$, considered as an representative for a banal $\mathcal{G}$-μ-window over $\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n}(R)$. Then I want to understand the fiber over this object of the above frame morphisms as a groupoid. Thus, denote by $\mathcal{L}(g_n)$ the fiber of $\pi_{n+1,\bullet}$ over g_n. This is the quotient groupoid with objects

$$\{g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1})\colon g \bmod p^n = g_n\}$$

and morphisms

$$\{h \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n+1}(R))_\mu\colon h \bmod p^n = 1\}$$

and the usual action by Φ-conjugation. Choosing a lift $\tilde{g}_{n+1} \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1})$ of g_n (remember $\mathcal{G}$ is smooth), one can identify[23]

$$\{g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1})\colon g \bmod p^n = g_n\} \simeq \mathfrak{g}\otimes(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p).$$

Here I used that $p^n\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R) \simeq \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$, by p-torsion freeness. Furthermore, one has a bijection

$$\{h \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n+1}(R))_\mu\colon h \bmod p^n = 1\} \simeq \mathfrak{u}^+\otimes I_{\mathrm{inf},1} \oplus \mathfrak{p}^-\otimes\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p.$$

Indeed, recall that multiplication induces a bijection

$$U^+(I_{\mathrm{inf},n+1}) \times P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}) \to \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n+1}(R))_\mu,$$

[23]The set $\{g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1})\colon g \bmod p^n = g_n\}$ is a principal homogenous space under $\ker(\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}) \to \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^n))$. Sending g towards $g^\sharp - e^\sharp$ ($e^\sharp$ is the unit section) induces an isomorphism $\ker(\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}) \to \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^n)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(I_{\mathcal{G}}/I_G^2, I)$, where $I_G \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ is the ideal cutting out the unit section of $\mathcal{G}$. Since $\mathcal{G}$ is smooth over $\mathbb{Z}_p$, one sees that $I_{\mathcal{G}}/I_{\mathcal{G}}^2$ is finite free as a $\mathbb{Z}_p$-module, so that one gets

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(I_{\mathcal{G}}/I_G^2, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(I_{\mathcal{G}}/I_{\mathcal{G}}^2, \mathbb{Z}_p)\otimes_{\mathbb{Z}_p} I,$$

where I wrote $I := p^n\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}/p^{n+1}\,\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$.

then let $h \in \{h \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},n+1}(R))_\mu \colon h \bmod p^n = 1\}$ and write it as $u^+ \cdot p^- = h$, with $u^+ \in U^+(I_{inf,n+1})$, $p^- \in P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1})$. Then one has to see that $u^+ \in \ker(U^+(I_{inf,n+1}) \to U^+(I_{inf,n}))$ and $p^- \in \ker(P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}) \to P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^n))$. But this follows because, modulo p^n, one then gets $u^+ = (p^-)^{-1}$ and since $U^+ \cap P^- = \{e\}$. Then one uses the isomorphisms

$$\ker(U^+(I_{\mathrm{inf},n+1}) \to U^+(I_{inf,n})) \simeq \mathfrak{u}^+ \otimes_{W(k_0)} p^n I_{inf}/p^{n+1} I_{inf}$$

and

$$\ker(P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}) \to P^-(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^n)) \simeq \mathfrak{p}^- \otimes_{W(k_0)} p^n\, \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p^{n+1}\, \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$$

to conclude the verification of the above claim.

Now let $g_1 \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p)$ be the reduction modulo p of g_n. Under the above identifications, the action of the groupoid $\mathcal{L}(g_n)$ gets identified with

$$X.Z = X - \mathrm{Ad}(g_1)(Z) + \psi_{\mathcal{F}_{\mathrm{inf},1}(R)}(Z).$$

In the above notation, there is an equivalence of groupoids $\mathcal{L}(g_n) \simeq \mathcal{C}_{g_1}$.[24] I claim that there is an equivalence

$$\lambda_{n+1} \colon \mathcal{L}(g_n) \simeq \mathcal{L}(\lambda_{n,\bullet}(g_n)).$$

But this follows from the above lemma, 6.4, applied to the frame morphisms $\pi \colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf},1}(R) \to \underline{A_0}$ and $\chi \colon \mathcal{F}_{\mathrm{cris},1}(R) \to \underline{A_0}$, which I shall introduce in the proof of the next Lemma (where I will also check that these frame morphisms will satisfy the hypothesis I imposed in the lemma one is applying here). □

To finish the proof of Proposition 6.1, it remains to show the following

Lemma 6.5. *Assume that $p \geq 3$. Then the u-frame morphism*

$$\lambda_1 \colon \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf},1}(R))_{\mathrm{banal}} \to \mathcal{G} - \mu - \mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris},1}(R))_{\mathrm{banal}}$$

is crystalline.

This will be shown in two steps. Again, this is a group theoretic adaptation of the argument of Cais-Lau.

6.0.1. *π is crystalline!* Let me introduce the notation $A_1 := \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)/p\, \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ and $A_0 := A_1/\xi^p A_1$. Then there is the following frame-structure on A_0:

$$\underline{A_0} := (A_0, \xi A_0/\xi^p A_0, R/p, \varphi = \mathrm{Frob}_{A_0}, \dot{\varphi}_0),$$

where $\dot{\varphi}_0(\xi a) = \varphi(a)$, for all $a \in A_0$. Sometimes I will write $\mathrm{Fil}(A_0) := \xi A_0/\xi^p A_0$. Then it follows that the quotient homomorphism

$$A_1 \to A_0,$$

induces a strict frame-morphism

$$\pi \colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \underline{A_0}.$$

Lemma 6.6. *Assume that $p \geq 3$, then π is crystalline.*

Proof. I want to adapt the Unique Lifting Lemma, Proposition 4.11, to the situation at hand. Consider

$$K := \ker(\pi) = \xi^p A_0.$$

Then it is true that $\dot{\varphi}(\xi^p a)) = \varphi(\xi)^{p-1}\varphi(a) = \xi^{p(p-1)}a^p$, and therefore $\dot{\varphi}$ stabilizes K. Furthermore, one sees that for $p \geq 3$ the restriction

$$\dot{\varphi} \colon K \to K,$$

is topologically nilpotent.

Recall that in Proposition 4.11 I worked with frames such that the frame-constant is equal to p. Here one is faced with frames, whose frame-constant is ξ^p. One has to modify the arguments.

First, $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)$ is (p,ξ)-adically complete, and thus A_1 is ξ-adic and also complete in the ξ^p-adic topology (since $(\xi^p) \subseteq (\xi)$) and K is open, thus closed in this topology. In Lemma 4.12 the only place, where I used that the frame-constant is p, was to show that K/pK is a nilideal. Recall that this was true, because φ is a Frobenius-lift. In the case at hand it follows directly that $K/\xi^p K$ is a nil-ideal. In total, one also has Lemma 4.12 in the present set-up.

Then in the proof of Proposition 4.11 the same arguments work, using in the end that $\dot{\varphi}$ is pointwise topologically nilpotent on K. □

[24] In particular one observes that this fiber just depends on the reduction modulo p!

6.0.2. χ *is crystalline!* Now I want to connect the frame $\underline{A_0}$ from before with the frame

$$\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

To shorten notation, in the following one write $A_1^{\mathrm{cris}} := \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)/p\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$.

LEMMA 6.7. *Assume $p \geq 3$. There exists a u^{-1}-frame homomorphism*

$$\chi \colon \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R) \otimes \mathbb{Z}\,/p\,\mathbb{Z} \to \underline{A_0}.$$

PROOF. One can give the ideal $\mathrm{Fil}(A_0)$ the trivial pd-structure by setting $\gamma_p(\xi) = 0$. The universal property of A_1^{cris} gives a unique pd-homomorphism

$$\chi \colon A_1^{\mathrm{cris}} \to A_0,$$

extending the map $\pi \colon A_1 \to A_0$ and sending $\mathrm{Fil}^p(A_1^{\mathrm{cris}})$ to zero. Then the identity of A_0 factors as

$$A_0 = A_1/\xi^p A_1 \to A_1^{\mathrm{cris}}/\,\mathrm{Fil}^p(A_1^{\mathrm{cris}}) \to A_0.$$

Here the first map is surjective and therefore both homomorphisms have to be bijective. One has the following identity in $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R)$:

$$\dot{\varphi}_{\mathrm{cris}}(\frac{\xi^n}{n!}) = u^n \frac{p^{n-1}}{n!} = x \cdot p^{n-1-\nu_p(n!)}, \tag{32}$$

where still $u = \frac{\varphi(\xi)}{p}$ and x is some unit. From the estimate $\nu_p(n!) \leq \frac{n-1}{p-1}$ one deduces for $p \geq 3$ that $n - 1 - \nu_p(n!)$ is positive and thus

$$\dot{\varphi}_{\mathrm{cris}} \colon \mathrm{Fil}^p(A_1^{\mathrm{cris}}) \to A_1^{\mathrm{cris}}$$

is the zero map. Therefore

$$\dot{\varphi}_{\mathrm{cris}} \colon \mathrm{Fil}(A_1^{\mathrm{cris}}) \to A_1^{\mathrm{cris}}$$

factorizes over $\mathrm{Fil}(A_0) \to A_1^{\mathrm{cris}}$ and induces a map

$$\overline{\dot{\varphi}} \colon \mathrm{Fil}(A_0) \to A_0.$$

Because λ is a u-framehomomorphism, it follows that $\overline{\dot{\varphi}} = u \cdot \dot{\varphi}_0$. It follows that χ is a u^{-1}-frame-homomorphism, as desired. $\square$

LEMMA 6.8. *Assume $p \geq 3$. Then the u^{-1}-frame homomorphism from Lemma 6.7 before is crystalline.*

PROOF. Before checking that the u^{-1}-frame morphism is crystalline, let me explain, why it induces indeed a functor of the associated banal $\mathcal{G}$-μ-window categories. Explicitely, this means that one has to show that for $g, g' \in \mathcal{G}(A_1^{\mathrm{cris}})$, such that there is a $h \in \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{cris},1}(R))_\mu$ with

$$g' = h^{-1} g \Phi_{\mathrm{cris},1}(h), \tag{33}$$

there exists a $z \in \mathcal{G}(\underline{A_0})_\mu$, such that

$$\chi(g')\mu(u^{-1}) = z^{-1}\chi(g)\mu(u^{-1})\Phi_{\underline{A_0}}(z). \tag{34}$$

For this, write as usual $h = v \cdot q$, where $v \in U^+(\mathrm{Fil}(A_1^{\mathrm{cris}}))$ and $q \in P^-(A_1^{\mathrm{cris}})$. Then

$$z = \chi(v) \cdot \chi(q) \in \mathcal{G}(\underline{A_0})_\mu$$

will be the desired element. In fact, by definition one has that $\Phi_{\underline{A_0}}(\chi(q)) = \mu(0)\varphi(\chi(q))\mu(0)^{-1}$, as the frame constant of $\underline{A_0}$ is zero. This implies that $\Phi_{\underline{A_0}}(\chi(q))$ lies in the centralisator of μ[25] and thus

$$\Phi_{\underline{A_0}}(\chi(q))\mu(u^{-1}) = \mu(u^{-1})\Phi_{\underline{A_0}}(\chi(q)). \tag{35}$$

Furthermore, one checks directly the equations

$$\mu(u^{-1})\Phi_{\underline{A_0}}(\chi(v))\mu(u) = \chi(\Phi_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris},1}}(v)) \tag{36}$$

and

$$\Phi_{\underline{A_0}}(\chi(q)) = \chi(\Phi_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris},1}}(q)). \tag{37}$$

Now equations (35)-(37) together readly imply equation (34) for $z = \chi(v) \cdot \chi(q)$ as above.
Now one can turn to checking that χ is indeed crystalline, where one already knows the game: one has to modify the Unique Lifting Lemma, Proposition 4.11, to apply it in situation here.

[25]In fact, one has that $P^- \cap P^+$ is exactly the μ-centralizer, [**CGP15**, Lemma 2.1.5.]and by definition $\mu(0)\varphi(\chi(q))\mu(0)^{-1}$ has no parts of weight < 0, as one killed those parts via multiplication with 0.

Consider $K := \ker(A_1^{\mathrm{cris}} \to A_0) = \mathrm{Fil}^p(A_1^{\mathrm{cris}})$. This ideal has pd-structure and because $p=0$, it follows that it is a nil-ideal (to the exponent p). Since smooth morphisms, locally of finite presentation satisfy Grothendieck's lifting criterium for nilideals and because $K \subseteq \mathrm{Fil}(A_1^{\mathrm{cris}}) \subseteq \mathrm{Rad}(A_1^{\mathrm{cris}})$, the same arguments as in the omitted proof of Lemma 4.12 apply. I make the following
Claim: The divided Frobenius

$$\Phi_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\colon \mathcal{G}(K) \to \mathcal{G}(K)$$

is the trivial map.
If one has verified this statement, the proof of the present Lemma follows exactly as in Proposition 4.11.
Let me prove the claim. For

$$\Phi_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = \mathrm{id}\otimes\dot{\varphi}\colon \mathrm{Lie}(U^+)\otimes K \to \mathrm{Lie}(U^+)\otimes K$$

one already knows that it is true, as one computed above that $\dot{\varphi}$ is zero on K.
For

$$\Phi_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\colon P^-(K) \to P^-(K)$$

the usual argument applies: if $g \in P^-(K)$ and $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$, one has that $g^\sharp(f_{-n}) \in K$ for $n \geq 1$. As the $\zeta_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = p = 0$, $\Phi_{\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(g)^\sharp(f_{-n}) = 0$. Writing $g^\sharp(f_0) = e^\sharp_{A_1^{\mathrm{cris}}}(f_0) + k$ for $k \in K$, one has that $k^p = 0$ and the Lemma follows, because Frobenius maps the unit section to the unit section. □

6.1. Extension to the general case. Now I sketch how to deduce the descent result, Proposition 6.1, for an arbitrary integral perfectoid $W(k)$-algebra, that is not necessarily p-torsion free[26]. This follows by the same arguments as used by Lau to prove the GL_n-case, see [**Lau18**, Lemma 9.2., Prop. 9.3]. Therefore I just briefly recall these.
Let R be an integral perfectoid $W(k)$-algebra, let $R_1 = R/R[\sqrt{pR}]$, $R_2 = R/\sqrt{pR}$ and $R_3 = R_1/\sqrt{pR_1}$. Then R_1 is p-torsion free integral perfectoid, while R_2 and R_3 are perfect. One then has a crucial pullback and pushout square with the canonical maps

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \arrow[d] \\ R_2 \arrow[r] & R_3. \end{tikzcd}$$

It follows that one has a pushout diagram in the category of frames, presenting $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$) as the pushout of $\mathcal{F}_{inf}(R_1)$ and $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R_2)$ over $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R_3)$ (resp. the same for $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(.)$). Thus there is also a pushout diagram of groupoids

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R))_{\mathrm{banal}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R_1))_{\mathrm{banal}} \arrow[d] \\ \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R_2))_{\mathrm{banal}} \arrow[r] & \mathcal{G}-\mu-\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R_3))_{\mathrm{banal}}, \end{tikzcd}$$

(resp. the same for banal $\mathcal{G}$-μ-windows for $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(.)$). The point is now that in the descent result, one may reduce to the case that the integral perfectoid $W(k)$-algebra is either a perfect $\mathbb{F}_p$-algebra, where it is trivial as the frame morphism $\lambda\colon \mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R) \to \mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$ is just the identity, or p-torsion free, which was addressed before.

7. Connection to local mixed-characteristic shtukas à la Scholze

Fix a reductive and minuscule window datum $(\mathcal{G}, \mu)$. I will now explain, how to go from adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays to local mixed characteristic $\mathcal{G}$-shtukas. As the real work has been done in the previous sections, I will be rather quick here.
Let me begin with the obvious extension of the notion of a Breuil-Kisin-Fargues module, as in [**Far15**], [**Lau18**], that will be used.

Definition 16. Let R be an integral perfectoid ring with fixed perfectoid pseudo-uniformizer $\varpi \in R$.

[26]As the category of integral perfectoids is closed under products, one can certainly construct integral perfectoids with p-torsion, that are not perfect.

(a): Breuil-Kisin-Fargues module with $\mathcal{G}$-structure over R is a pair $(\mathcal{P}, \varphi_{\mathcal{P}})$, where $\mathcal{P} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))$ is a $\mathcal{G}$-torsor and
$$\varphi_{\mathcal{P}} \colon (\varphi^*\mathcal{P})[1/\varphi(\xi)] \simeq \mathcal{P}[1/\varphi(\xi)],$$
for some generator ξ of $\ker(\theta)$ and $\mathcal{P}[1/\varphi(\xi)] = \mathcal{P} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R))} \mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R)[1/\varphi(\xi)])$.

(b): One says that a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues module $(\mathcal{P}, \varphi_{\mathcal{P}})$ is of type μ, if for all maps $R \to V$, where V is a ϖ-complete rank 1 valuation ring with algebraically closed fraction field and any representative $U \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V)[1/\varphi(\xi)])$ for the base-change of $(\mathcal{P}, \varphi_{\mathcal{P}})$ to $\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V))$[27] one has that
$$U \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V))\mu(\varphi(\xi))\,\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V)).$$

Remark 19. The condition in (b) is phrased in a way that it exactly gives that the $\mathcal{G}$-shtuka one constructs from $(\mathcal{P}, \varphi_{\mathcal{P}})$ will have singularities bounded by the cocharacter μ. It may be checked for one representative (since changing by φ-conjugation with elements in $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V))$ does not change this containement condition).

I will write $\mathcal{G}$-BKF(R) for the corresponding groupoid and $\mathcal{G}$-BKF$(\mathcal{R})$ for the fibered category for the affine etale topology on $\mathrm{Spec}(R/p)$, constructed via Lau's sheaf. Note that one defined the fibered category of $\mathcal{G}$-μ-windows for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{R})$ in such a way that it forms a stacks.

Lemma 7.1. (a): *$\mathcal{G}$-BKF$(\mathcal{R})$ is a stack.*
(b): *$\mathcal{G}$-μ-Displ$(\mathcal{R})$ is a stack.*

Proof. The reader is referred to [**Lau18**, Lemma 10.9.], where the corresponding statements for $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n$ and minuscule BKFs resp. p-divisible groups are proven. Using [**BP20**, Lemma B.0.4.(b)] for $\mathcal{G}$-BKFs and GFGA, Lemma 4.6, for $\mathcal{G}$-μ-displays, the same arguments apply. $\square$

Corollary 7.2. *Let R be an integral perfectoid $W(k)$-algebra. Then there exists a fully faithful functor $\mathcal{G}$-μ-$\mathrm{Win}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)) \to \mathcal{G}$-$\mathrm{BKF}(R)$ with essential image exactly those $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues modules over R, which are of type μ.*

Proof. At first one has to construct the functor: let (Q, α) be a $\mathcal{G}$-μ-window for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R)$. Let $B = R/p$ and $f \colon B \to B'$ an étale covering, which trivializes (Q, α). Let $R' = \mathcal{R}(B')$. Then Lemma 4.8 produces from $f^*(Q, \alpha)$ a uniquely determined (trivial) Breuil-Kisin-Fargues module over R' (which is automatically of type μ). Using uniqueness and the fact that the fibered category $\mathcal{G}$-BKF$(\mathcal{R})$ forms a stack on $\mathrm{Spec}(B)^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}}$, one may build a uniquely determined $\mathcal{G}$-BKF over R. This association is functorial and one has therefore constructed the desired functor.
The fully faithfullness part follows directly from the local statement in Lemma, 4.8, and the fact that $\mathcal{G}$-BKF$(\mathcal{R})$ forms a stack.
For the claim about the essential image, I will use ϖ-complete arc-descent: for this, fix an integral perfectoid $W(k)$-algebra R as above and also a perfectoid pseudo-uniformizer $\varpi \in R$. Then one considers the category of integral perfectoid R-algebra and equips this category with the ϖ-complete arc-topology: covers are generated by morphism of integral perfectoid R-algebras $A \to B$, such that for all ϖ-complete valuation rings V of rank ≤ 1, and any map $A \to V$, there exists a faithfully flat extension of ϖ-complete valuation rings of rank ≤ 1, (=just an inclusion) $V \to V'$ and a morphism $B \to V'$ making the following diagram commutative:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ V \arrow[r] & V' \end{tikzcd} .$$
Then, by [**CS21**, Lemma 4.2.6.], the pre-sheaf $R \to R' \mapsto \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R')$ satisfies ϖ-complete arc-descent. It follows that the pre-sheaves $R \to R' \mapsto \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R'))$ resp. $R \to R' \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(R'))_\mu$ satisfy ϖ-complete arc-descent, by using the same tricks as I used to check étale descent as in Lemma 4.7. From this one obtains ϖ-complete arc-descent for the fibered category of $\mathcal{G}$-μ-windows for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}(.)$. One can find in the literature the result that also the fibered category sending $R \to R' \mapsto \mathcal{G}\,-\mathrm{Tors}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R'))$ satisfies ϖ-complete arc-descent: indeed, here one can use very recent results due to Ito [**Ito21**, Corollary 4.2.] that imply ϖ-complete arc-descent for finite projective modules and the case of $\mathcal{G}$-torsors then follows by making use of the Tannakian formalism. Since the condition to be of type μ was formulated in a way

[27] Here one uses that V is strictly henselian, as an absolutely integrally closed local domain and that then $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V)$ will also be strictly henselian, so that any $\mathcal{G}$-torsor over $\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(V))$ will be trivial.

which is local for the ϖ-complete arc-topology, also the fibered category $(R \to R') \mapsto \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\operatorname{BKF}(R')$ satisfies ϖ-complete arc-descent. It follows that one may check arc-locally on R that the functor

$$\mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\operatorname{Win}(\mathcal{F}_{\inf}(R)) \to \mathcal{G}\text{-}\mu\text{-}\operatorname{BKF}(R)$$

is an equivalence. This allows one to restrict to a situation, where $R' = \prod_{i \in I} V_i$ with all V_i ϖ_i-adically complete and separated valuation rings of rank ≤ 1 and which have algebraically closed fraction field. In this situation, any $\mathcal{G}$-torsor over $\operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(R'))$ is trivial and the condition to be of type μ becomes that for any structure matrix $U \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(R')[1/\varphi(\xi)])$, representing this $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues module over R', the image of U under the morphism

$$\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(R')[1/\varphi(\xi)]) \to \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(V_i)[1/\varphi(\xi_i)]),$$

can be written as

$$U_i = g_i \mu(\varphi(\xi_i)) h_i,$$

where $g_i, h_i \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(V_i))$. Taking the product, one obtains element $g, h \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(R'))$, such that under all morphisms $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(R')[1/\varphi(\xi)]) \to \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\inf}(V_i)[1/\varphi(\xi_i)])$, $g\mu(\varphi(\xi))h$ is send towards U_i. Using now that the map $\mathbb{A}_{\inf}(R)[1/\varphi(\xi)] \to \prod_{i \in I} \mathbb{A}_{\inf}(V_i)[1/\varphi(\xi_i)]$ is injective, one deduces that

$$U = g\mu(\varphi(\xi))h.$$

This allows one to use lemma 4.8 to construct the required $\mathcal{G}$-μ-window over R', proving the essential surjectivity. □

As a consequence of the previously proven equivalence between banal adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ displays over integral perfectoid $W(k)$-algebras and banal adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ windows for the frame $\mathcal{F}_{\text{cris}}(R)$, plus the descent result along $\lambda\colon \mathcal{F}_{\inf}(R) \to \mathcal{F}_{\text{cris}}(R)$ of the last section, one deduces

Corollary 7.3. *Let R still be an integral perfectoid $W(k)$-algebra and assume $p \geq 3$, there exists a fully faithful functor $\mathcal{G} - \mu^{\sigma} - \operatorname{Displ}(R)_{\text{nilp}} \to \mathcal{G} - \mu - \operatorname{BKF}(R)$.*

Remark 20. Although the frame $\mathcal{F}_{\inf}(R)$ depends on a choice of ξ, the above functor does not.

Let $S = \operatorname{Spa}(R, R^+)$ be an affinoid perfectoid space over $\operatorname{Spa}(k)$ and $S^\sharp = \operatorname{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp,+})$ an untilt over $\operatorname{Spa}(W(k))$. Then $R^{\sharp,+}$ is an integral perfectoid $W(k)$-algebra and by restricting from $\operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(R^+))$ to $\operatorname{Spa}(W(R^+), W(R^+)) - \{[\varpi] = 0\} =: S \dot{\times} \operatorname{Spa}(\mathbb{Z}_p)$ (with the $(p, [\varpi])$-adic topology, where $\varpi \in R$ is of course some pseudo-uniformizer), one is finally able to produce for $p \geq 3$ a local mixed-characteristic $\mathcal{G}$-shtuka over S with a leg at $S^\sharp \subset S \dot{\times} \operatorname{Spa}(\mathbb{Z}_p)$, as introduced in [**SW20**].

7.1. Classification of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays over $\mathcal{O}_C$. I will now state a description of the essential image of the previous functor from adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays to local mixed-characteristic $\mathcal{G}$-shtukas over a geometric perfectoid point in terms of the schematical Fargues-Fontaine curve [**FF18**] - in the spirit of Scholze-Weinstein. Using GAGA one could also work with the adic Fargues-Fontaine curve. Since most of this material is explained sufficiently in the GL_n-case in Scholze′s Berkeley notes [**SW20**], and the case of general reductive $\mathcal{G} / \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ requires only few new ideas, I decided to not give full proofs here.
Let C be a complete non-archimedean, algebraically closed field extension of $W(k)[1/p]$. Then its ring of integers $\mathcal{O}_C$ is a strictly henselian and integral perfectoid $W(k)$-algebra. I will abbreviate $\mathbb{A}_{\inf} = \mathbb{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C)$ and $\mathcal{F}_{\inf} = \mathcal{F}_{\inf}(\mathcal{O}_C)$. Note that $\mathbb{A}_{\inf}$ is again a strictly henselian $W(k)$-algebra. Let $X = X^{\text{alg}}_{\mathbb{Q}_p, C^\flat}$ be the schematical Fargues-Fontaine curve over $\mathbb{Q}_p$ associated to $C^\flat$. The chosen untilt C of $C^\flat$ gives a closed point $\infty \in |X|$, with residue field C and $\widehat{\mathcal{O}_{X,\infty}} \cong B^+_{dR}(C) = B^+_{dR}$.
The reason why some crucial arguments go through via the Tannakian formalism is the following handy

Lemma 7.4. *Let K be a field of characteristic 0, H a reductive group over K, R a K-algebra and denote by Proj_R the category of finite projective R-modules with the usual additive tensor structure. Then a functor*

$$\omega\colon \operatorname{Rep}_K(H) \to \operatorname{Proj}_R$$

is a fiber functor if and only if it is an additive tensor-functor.

For a proof, see Lemma 5.4. in [**Far20a**]. Since Fargues-Fontaine showed that the categories of trivial vector bundles on the curve and finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector spaces are equivalent as tensor-categories (compatible with direct sums), one deduces from the previous Lemma that the groupoid of trivial G-torsors on X and G-torsors on $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ are equivalent.

Let $G = \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ be the associated generic fiber, an unramified reductive group. Consider a G-torsor $\mathcal{E} \to X$. Under a modification of $\mathcal{E} \to X$ at the chosen point ∞, one understands the datum of a G-torsor $\mathcal{E}' \to X$, together with an isomorphism

$$\iota \colon \mathcal{E}'|_{X-\infty} \simeq \mathcal{E}|_{X-\infty}\ .$$

For a (Galois-orbit of a) co-character $\chi \in X_*(T)^+/\Gamma$, let me recall, what it means that a modification $(\mathcal{E}', \iota)$ is of type χ : the given isomorphism ι corresponds to a double coset, that one gets after pullback of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}'$ along $\mathrm{Spec}(B^+_{dR}) \to X$ and choosing respective trivializations, and forgetting about them again, in

$$G(B^+_{dR})\backslash G(B_{dR})/G(B^+_{dR}).$$

By the Cartan-decomposition, this double quotient is in bijection with $X_*(T)^+/\Gamma$. Then one requires that ι corresponds to $\chi \in X_*(T)^+/\Gamma$.
Now one can state the following theorem, that in the GL_n-case is due to Fargues.

Theorem 7.5. The following categories are equivalent

(a): $\mathcal{G}$-μ^σ windows over $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$, and

(b): tuples $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}', \iota, \mathcal{T})$, where $\mathcal{E}_1$ is a trivial G-torsor on X, $(\mathcal{E}', \iota)$ is a modification of type μ^σ[28] at ∞ of $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{T}$ is a $\mathcal{G}$-torsor on $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, such that if $\mathcal{V}$ is the G-torsor on $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ corresponding to $\mathcal{E}_1$, one requires that

$$\mathcal{T} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathcal{V}.$$

Remark 21. (i): This is a mild generalization of [**SW20**, Theorem 14.1.1.].

(ii): Recall that one has an equivalence between vector bundles on X and φ-modules on $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_C/p)$ (as C is algebraically closed). Using Lemma 7.4 above, one deduces that G-torsors on X and G-torsors with φ-structure on $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_C/p)$ are equivalent. Under this equivalence, the G-bundle $\mathcal{E}$ in the theorem corresponds to the base-change of the window over $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ to $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_C/p)$.

Proof. Let me explain, where one has to depart from Scholzes′s argument in the proof of [**SW20**, Theorem 14.1.1.]. First, one checks, using that $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ is strictly henselian and the local description from Lemma 4.8, that $\mathcal{G}$-μ^σ-windows over $\mathcal{F}_{\mathrm{inf}}$ and $\mathcal{G}$-BKFs over $\mathcal{O}_C$ of type μ^σ are equivalent. Here $\mathcal{G}$-BKFs over $\mathcal{O}_C$ of type μ^σ are simliar defined as modifications of G-bundles on the curve of type μ^σ. In fact, I will actually show that G-BKFs are equivalent to tuples as in the theorem and under this being of type μ^σ coincides. Then one shows, that local mixed characteristic $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-shtuka over $\mathrm{Spa}(C^\flat)$ with a paw at $\varphi^{-1}(x_C)$ uniquely extend to $\mathcal{G}$-BKFs over $\mathcal{O}_C$. To extend φ-modules from $\mathcal{Y}_{[r,\infty)}$ to $\mathcal{Y}_{[r,\infty]}$, where one follows Scholze′s notation and r is some rational number $0 \le r < \infty$, Lemma 7.4 saves one, as this is *not* an exact operation. Then one uses a GAGA-statement originally due to Kedlaya and reproduced in the form needed here e.g. in [**Ans20**, Prop. 5.3.], to transport $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-torsors on $\mathcal{Y}_{[0,\infty]}$ to $\mathcal{G}$-torsors on $\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}})-\{\mathfrak{m}\}$, where $\mathfrak{m}$ denotes the unique maximal ideal of $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$. It remains to extend over the unique closed point, where one can use an old argument of Colliot-Thélène, again reproduced by Anschuetz, see [**Ans20**, Prop. 6.5.]. Using work of Kedlaya-Liu, one easily checks that $\mathcal{G}$-torsors on $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ are equivalent to $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-torsors over $\mathcal{Y}_{[0,r)}$ together with an isomorphism to their Frobenius pullback.[29] Then one has all ingredients one needs to follow the argument given in loc. cit. to conclude. □

To conclude this section, one can state the promised classification of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ^σ displays over $\mathcal{O}_C$ in a purely geometric way by using the Fargues-Fontaine curve.

Corollary 7.6. *The following categories are equivalent:*

(a): *Adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ^σ-displays over $\mathcal{O}_C$,*

(b): *tuples $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}, \iota, \mathcal{T})$, as in the previous theorem, such that* $\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$ *has all HN-slopes < 1, where* $\mathrm{Ad}(\mathcal{E})$ *is the vector bundle on X obtained by pushing out along the adjoint representation.*

Proof. Let $\mathcal{P} = (Q, \alpha)$ be an adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ^σ-display over $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_C)$. Let $\overline{\mathcal{P}}$ be the reduction of $\mathcal{P}$ along the projection of $\mathcal{O}_C$ to the residue-field κ. Then $\overline{\mathcal{P}}$ is determined by $[b] \in B(G)$, where $b = u\mu^\sigma(p)$, for some structure matrix $u \in L^+\mathcal{G}(\kappa)$ describing $\overline{\mathcal{P}}$. Now fix a splitting of the projection $\mathcal{O}_C \to \kappa$, so that one can associate to b a G-bundle $\mathcal{E}_b$ on X.

[28] This is the same as being of type μ.

[29] In other words, one just observes that the equivalence in [**SW20**, Prop. 12.3.5.] respects exact structures.

On the other hand, one can consider the uniquely determined tuple $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}, \iota, \mathcal{T})$, as in the previous theorem, associated to $\mathcal{P}$. It follows from Remark 21 (ii), that (non-canonically)

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_b.$$

Indeed, here one has to use that for a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues module $\mathcal{P}$ over $\mathcal{O}_C$ with reduction $\overline{P}$ over k, one has a φ-equivariant isomorphism of G-torsors over $\mathbb{B}^+_{\text{cris}}(\mathcal{O}_C)$, lifting the identity,

$$\mathcal{P} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C))} \operatorname{Spec}(\mathbb{B}^+_{\text{cris}}(\mathcal{O}_C)) \simeq \overline{\mathcal{P}} \times_{\operatorname{Spec}(W(k)),s} \operatorname{Spec}(\mathbb{B}^+_{\text{cris}}(\mathcal{O}_C)),$$

where one uses the chosen section to make the sense of the second base-change. In the case of GL_n this is contained in, [**BMS18**, Lemma 4.27.], and the statement for G-torsors works similiarly. The adjoint nilpotency condition says that the G-isocrystal $\operatorname{Ad}(b)$ has all slopes > -1. Passing from G-isocrystals to G-bundles on the Fargues-Fontaine curve, the HN-slopes swap signs, thus the condition is that $\operatorname{Ad}(\mathcal{E})$ has all slopes < 1. □

8. Translation of the quasi-isogeny

First, let me recall/introduce the set-up one is working in in this section: Let $p \geq 3$ and $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ be an algebraic closure of $\mathbb{F}_p$. Let R be an integral perfectoid $W(k)$-algebra with perfectoid pseudo-uniformizer $\varpi \in R$. I will suppose that R is p-torsion free, to be able to apply certain descent results, see Lemma 8.2.

As usual $(\mathcal{G}, \mu)$ is the pair of a reductive group scheme over $\mathbb{Z}_p$ and μ is a minuscule cocharacter that is defined over $W(k_0)$, where k_0 is some finite extension of $\mathbb{F}_p$ contained in k.

Let $u_0 \in \mathcal{G}(W(k))$, that fulfills the adjoint nilpotence condition and $\mathcal{P}$ a $\mathcal{G}$-μ-display over R. One gives oneself furthermore a G-quasi-isogeny

$$\rho\colon \mathcal{P}_0 \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}(R/p) \dashrightarrow \mathcal{P} \times_{\operatorname{Spec}(R)} \operatorname{Spec}(R/p).$$

By the crystalline equivalence proven before, Proposition 5.1, one may lift $\mathcal{P}$ uniquely to an adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-window for the frame $\mathcal{F}_{\text{cris}}(R)$, denote it by $(Q_{\text{cris}}, \alpha_{\text{cris}})$. By Prop. 6.1 it corresponds to a $\mathcal{G}$-μ-window for the frame $\mathcal{F}_{\inf}(R)$, which then gives rise to a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues module $(\mathcal{P}, \varphi_{\mathcal{P}})$ over $\operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(R))$, which is of type μ. Finally, let $\mathcal{P}_{\text{cris}} = \mathcal{P} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(R))} \operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{\text{cris}}(R))$ be the base-change, with Frobenius-structure $\varphi_{\mathcal{P}_{\text{cris}}}$. Then the aim is to prove the following statement:

Lemma 8.1. *There is a uniquely determined isomorphism of G-torsors over* $\operatorname{Spec}(\mathbb{B}^+_{\text{cris}}(R/p))$

$$\rho_{\text{cris}}\colon \mathcal{P}_0 \times_{\operatorname{Spec}(W(k))} \operatorname{Spec}(\mathbb{B}^+_{\text{cris}}(R/p)) \simeq \mathcal{P}_{\text{cris}} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{A}_{cris}(R))} \operatorname{Spec}(\mathbb{B}^+_{\text{cris}}(R/p)),$$

which is compatible with the Frobenius-structure and that lifts the given G-quasi-isogeny

$$\rho\colon \mathcal{P}_0 \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}(R/p) \dashrightarrow \mathcal{P} \times_{\operatorname{Spec}(R)} \operatorname{Spec}(R/p).$$

Remark 22. The statement 'that lifts the given G-quasi-isogeny' needs explanation, because one does not know descent for finite projective $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$-modules resp. G-torsors over $\operatorname{Spec}(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$ along faithfully flat étale morphisms $B = R/p \to B'$. Here is what is meant by this: recall that for any integral perfectoid ring R, there is a natural ring homomorphism

$$\chi\colon\ \mathbb{A}_{\text{cris}}(R/p) \to W(R/p),$$

which induces

$$\chi_{\mathbb{Q}}\colon\ \mathbb{B}^+_{\text{cris}}(R/p) \to W_{\mathbb{Q}}(R/p).$$

Now the datum of a G-quasi isogeny

$$\rho\colon \mathcal{P}_0 \times_{\operatorname{Spec}(k)} \operatorname{Spec}(R/p) \dashrightarrow \mathcal{P} \times_{\operatorname{Spec}(R)} \operatorname{Spec}(R/p)$$

comes down to the following data: choose a p-completely faithfully flat étale morphism $R \to R'$ of integral perfectoids rings trivializing the $\mathcal{G}$-μ-display (Q, α) over R; choose a structure matrix $U' \in \mathcal{G}(W(R'))$ representing this base-change. Write $B = R/p$, $B' = R'/p$, $B'^{(2)} = R'/p \otimes_{R/p} R'/p$,

$$B'^{(3)} = R'/p \otimes_{R/p} R'/p \otimes_{R/p} R'/p.$$

Then ρ corresponds to an element $g' \in G(W_{\mathbb{Q}}(B'))$, such that

$$g'^{-1} u_0 \mu(p) F(g') = \overline{U'} \mu(p),$$

such that the two pullbacks $p^{1*}(g'), p^{2*}(g')$ are isomorphic in $G(W_{\mathbb{Q}}(B'^{(2)}))$ and satisfy a cocycle condition in $G(W_{\mathbb{Q}}(B'^{(3)}))$. Similiarly, one can unpack what it means to give an isomorphism of G-torsors over

$\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$ as above, using the upcoming Lemma 8.2 - to apply this I have to assume that R is p-torsion free, so let me assume this from now on: to give onself an isomorphism

$$\rho_{\mathrm{cris}}\colon \mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(W(k))} \mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)) \simeq \mathcal{P}_{\mathrm{cris}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))} \mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)),$$

is equivalent to give oneself an element $g'_{\mathrm{cris}} \in G(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(B'))$ satisfying

$$g'^{-1}_{\mathrm{cris}} u_0 \mu(p) \varphi(g'_{\mathrm{cris}}) = U'_{\mathrm{cris}} \mu(p);$$

here U'_{cris} is a structure matrix representing the banal $\mathcal{G}$-μ-window

$$(Q_{\mathrm{cris}}, \alpha_{\mathrm{cris}}) \times_{\mathrm{Spec}(B)} \mathrm{Spec}(B')$$

for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(B')$. As before one requires that the two pullbacks of g'_{cris} towards $\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(B'^{(2)}))$ become isomorphic and satisfy a cocycle condition over $\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(B'^{(3)}))$.
After this unpacking, one can finally explain what it means that ρ_{cris} lifts the G-quasi isogeny ρ : it just means that

$$\chi_{\mathbb{Q}}(g'_{\mathrm{cris}}) = g',$$

compatible with the isomorphism of the pullbacks and the cocycle condition.

In the following, I will sometimes refer to the datum of an isomorphism of G-torsors ρ_{cris} as above as a crystalline G-quasi-isogeny.
Before I embark on the proof, let me point out here that the principal challenge is that one works with torsors (and thus groupoids) throughout and therefore a notion of 'isogeny' does not make sense; making it impossible to deduce such a statement directly from the crystalline equivalence proven before.
The idea of the proof is simple: first reduce to the case, where the $\mathcal{G}$-μ-display $\mathcal{P}$ is banal, represented by some structure matrix $U \in \mathcal{G}(W(R))$, and then attack this case by direct calculation (getting inspired by the unique lifting lemmas in their different versions).

8.1. Reduction to the banal case. So much for the strategy; as said before, let me first quickly explain how to reduce to the banal case. This will use the following statement:

LEMMA 8.2. *(Drinfeld-Matthew) Let R be a p-torsion free integral perfectoid ring. Consider the functor on the category of integral perfectoid R-algebras, sending $R \to R'$ towards*

$$\mathrm{Isom}_G(\mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(W(k))} \mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R'/p)), \mathcal{P}_{\mathrm{cris}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{cris}(R))} \mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R'/p))).$$

Then this functor is a sheaf for the p-adic étale topology.

To prove this lemma, I will use some heavy machinery; one key input being a result of Drinfeld [**Dri18**] about descent of vector bundles in 'Banachian modules' and the other being the computation of Bhatt-Morrow-Scholze contained in [**BMS19**] of $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(S)/p$, where S is any quasi-regular semiperfect $\mathbb{F}_p$-algebra, which was already used before in verifying the sheaf property for $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(.)$. In the following proof one writes

$$\mathrm{Bun}_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{Bun}(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q})$$

for the groupoid of finite locally free $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}$-modules for any $\mathbb{Z}_p$-flat ring A.

PROOF. The key claim is the following:
Claim: Let R be a p-torsion free integral perfectoid ring. Denote by $B := R/p$ and let $B \to B'$ be a faithfully flat étale covering; observe that by the standing assumption that R is p-torsion free, the ring B is quasi-regular semiperfect and also all $B'^{(n)} = B' \otimes_B ... \otimes_B B'$ are quasi-regular semiperfect - they form a simplicial $\mathbb{F}_p$-algebra $B'_\bullet$. Consider the simplicial ring $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B'_\bullet)$ with n-th component given by $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B'^{(n)})$. Then I claim that the natural morphism induces an equivalence

$$\mathrm{Bun}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)) \to \lim_{\Delta} \mathrm{Bun}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B'_\bullet)).$$

This will be deduced from Drinfeld's result mentioned above using the aforementioned calculation of Bhatt-Morrow-Scholze.
Namely, recall that if $L\Omega_B := L\Omega_{B/\mathbb{F}_p}$ is the (absolute) derived de Rham complex of B, then they check in [**BMS19**, Prop.8.12] that one has an isomorphism

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)/p \simeq L\Omega_B,$$

which is functorial in morphisms of quasi-regular semiperfect $\mathbb{F}_p$-algebras. Next, note that the étale morphism $B \to B'$ gives the following base-change identity for the derived de Rham complex

$$L\Omega_B \otimes_B B' \simeq L\Omega_{B'}.$$

In fact, this may be checked as in Lemma 3.4 by comparing the conjugate filtration. It follows that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')$ is p-completely faithfully flat étale, as modulo p it identifies with the base-change $L\Omega_B \to L\Omega_B \otimes_B B'$ and since $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)$ and $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')$ are p-torsion free, one may use the result of Drinfeld [**Dri18**, Prop. 3.5.4] to obtain that

$$\mathrm{Bun}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)) \simeq \lim_{\Delta} \mathrm{Bun}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')_\bullet),$$

where $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')_\bullet$ is the simplicial p-complete ring with n-th component given by

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')^{(n)} = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')\widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')....\widehat{\otimes}_{\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B').$$

To finish the proof of the above claim, it remains therefore just to identify the simplicial ring $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')_\bullet$ with the simplicial ring $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B'_\bullet)$. By functoriality, there is a morphism of simplicial rings

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')_\bullet \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B'_\bullet).$$

One has to see that it induces isomorphisms

$$\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B')^{(n)} \simeq \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B'^{(n)}).$$

Note that both sides are p-adic and p-torsion free. It therefore suffices to see that they are isomorphic after modding out by p. But this can then be deduced from the formulas $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(B)/p \simeq L\Omega_B$ and $L\Omega_B \otimes_B B' \simeq L\Omega_{B'}$ above.
In other words, one has now verified that the fibered category $\mathrm{Bun}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(\mathcal{R}))$ (with the notation as in Lemma 3.3) is indeed a stack on $\mathrm{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff}}_{\text{ét}}$. As usual, it is not hard to deduce the same descent result for G-torsors, which then implies the statement one is after here. Namely, if one chooses an embedding $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$, then there is a linear representation $\rho\colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}(W)$, where W is a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space, such that one may realize G as the fixer of a line $L \subset W$. Then to give onself a G-torsor $\mathcal{P}$ over $\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R))$ is equivalent to give a finite locally free rank n $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)$-module $\mathcal{E}$, together with a locally direct factor line sub-bundle of $\rho_*(\mathcal{E})$; in this way one may reduce the problem of descending G-torsors to the linear problem one just dealt with. ☐

Using this lemma, it is easy to see that one may reduce to the banal case.

8.2. Proof in the banal case. From now on, I assume that $\mathcal{P}$ is banal, represented by a structure matrix $U \in \mathcal{G}(W(R))$; let me denote by $\overline{U} \in \mathcal{G}(W(R/p))$ the reduction. The G-quasi-isogeny between $\mathcal{P}_0$ and $\mathcal{P}$ is then just the datum of an element $g \in G(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$, such that

$$g^{-1}u_0\mu(p)F(g) = \overline{U}\mu(p), \tag{38}$$

that is

$$u_0\mu(p)F(g)\mu(p)^{-1}\overline{U}^{-1} = g$$

(which is the form I will use later) is satisfied. One can lift U to an element $U_{\mathrm{cris}} \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p))$ that is uniquely determined up to Φ_{cris}-conjugation and which is a structure matrix for the banal $\mathcal{G}$-μ-window $\mathcal{P}_{\mathrm{cris}}$ for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R)$. I will write $\delta\colon W(k) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$ for the ring-homomorphism that gives the $W(k)$-algebra structure on $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$. I recall again that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$ is p-torsion free. By Stacks project, Tag 05GG, $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$ is p-adically complete(and thus separated). Recall that $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p) = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)[1/p]$ is the localization at p. One gives $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)$ the Banach-topology, such that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p) \subseteq \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)$ is open. With this topology, the $\mathbb{Q}_p$-algebra $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)$ has the structure of a Banach-space for the norm

$$|.|\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p) \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

given by

$$|b| = \inf\{|\lambda|_{\mathbb{Q}_p} \colon \lambda \cdot b \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)\}.$$

For later use, let me recall that one has a surjection

$$\chi\colon \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p) \to W(R/p),$$

(which induces the surjection

$$\chi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p) \to W_{\mathbb{Q}}(R/p))$$

whose kernel $K_{\mathrm{cris}} := \ker(\chi)$ is generated by elements

$$[x]^{(n)},$$

for $n \geq 1$ and $x \in \ker(R^\flat \to R/p)$, c.f. [**AB21**, Prop. 5.3.5.]. It follows from ([**Sta22**, Tag 00CT])

$$W_{\mathbb{Q}}(R/p) = \frac{\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)}{K_{\mathrm{cris}}[1/p]},$$

that the kernel of $\chi_{\mathbb{Q}}$ is $K_{\mathrm{cris}}[1/p]$. It identifies with $K_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ as an $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p) = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$-module. In total, one sees that $\ker(\chi_{\mathbb{Q}})$ is generated by elements of the form

$$[x]^{(n)} \otimes \lambda,$$

with $n \geq 1$, x as above and $\lambda \in \mathbb{Q}_p$.
Before I go on, let me discuss a bit topological pathologies for the ring $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$, which come from the fact that R/p has tons of nilpotents, which leads to the ring $W(R/p)$ having a priori unbounded p^∞-torsion, so one gets problems with $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$. First, one gives the ring $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$ the topology given by declaring as a basis of open neighborhoods of zero

$$\{\mathrm{Im}((p^m W(R/p)) \to W_{\mathbb{Q}}(R/p))\}_{m \geq 0}.$$

Here one has to be careful, that this topology is not given by ideals, so that it is not $W(R/p)$-linear. Note that although $W(R/p)$ is p-adic, with the above topology on $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$, this ring is a priori neither separated nor complete. Nevertheless, with these topologies the morphism

$$\chi_{\mathbb{Q}}\colon\ \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p) \to W_{\mathbb{Q}}(R/p)$$

is continous. To get around these worries, look at the ring $W(R/p)^{\mathrm{bdd}} = W(R/p)/W(R/p)[p^\infty]$, where $W(R/p)[p^\infty] = \cup_{n \geq 1} \mathrm{Ann}(p^n)$. In the ring $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}$ the element p is regular. Note that passing to the localization at p, one gets the identity

$$W_{\mathbb{Q}}(R/p) = W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p].$$

I give $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}$ the p-adic topology and $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$ the topology with basis of open neighborhoods of zero given by

$$\{\mathrm{Im}((p^m W(R/p)^{\mathrm{bdd}}) \to W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p])\}_{m \geq 0}.$$

With this topology, the identity morphism $W_{\mathbb{Q}}(R/p) = W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$ is continous and the advantage is now that the topological ring $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$ is separated and complete in the given topology. In fact, one has to explain why this ring stays indeed complete; for this it is enough to explain why $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}$ is p-adic. Here one can use a result of Bouthier-Česnavičius, [**BC20**, Lemma 2.1.11.], which implies that

$$(\widehat{W(R/p)^{\mathrm{bdd}}}) \simeq (\widehat{W(R/p)})^{\mathrm{bdd}} = W(R/p)^{\mathrm{bdd}},$$

where all completions are p-adic and in the equality I am using that $W(R/p)$ is p-adic because R/p is semi-perfect. In Bothier-Česnavičius' notation, one is looking at the Gabber-Romero triple

$$(W(R/p), t = p, I = (1))$$

and what I denote by $(.)^{\mathrm{bdd}}$ they denote by $\overline{(.)}$. Later this will be used as follows: suppose one is given a converging sequence $a_n \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)$ with $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ and such that $\chi(a_n) = c$ is constant for all $n \geq 1$. Then I want to deduce that $\chi(a) = c$. Since the ring $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$ is not separated, so uniqueness of limits fails, this is a priori not clear; but the identity $\chi(a) = c$ can be checked in $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$. Since $\chi_{\mathbb{Q}}$ and $W_{\mathbb{Q}}(R/p) \to W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$ are continous and since the topology on $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$ is separated, the image of $\chi(a)$ in $W(R/p)^{\mathrm{bdd}}[1/p]$ agrees with the image of c, so that $\chi(a) = c$ also in $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$. This will be later used to see that one really lifted the given quasi-isogeny.
Now I can finally come to the statement that one wants to prove in the banal case:

LEMMA 8.3. *There is is a uniquely determined element $g_{\mathrm{cris}} \in G(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$, such that*

$$g_{\mathrm{cris}}^{-1}\delta(u_0)\mu(p)\varphi(g_{\mathrm{cris}}) = U_{\mathrm{cris}}\mu(p) \tag{39}$$

and

$$\chi_{\mathbb{Q}}(g_{\mathrm{cris}}) = g. \tag{40}$$

To prepare the proof, I will now apply the Tannakian reconstruction theorem to give the following interpretation of the datum of the G-quasi-isogeny $g \in G(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$ and of the crystalline G-quasi-isogeny $g_{\mathrm{cris}} \in G(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$ one wants to produce:

LEMMA 8.4. (a): *The datum of the G-quasi-isogeny $g \in G(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$ is equivalent to the following datum: For all $(\rho, T) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G})$, an element*

$$g(\rho, T) \in \mathrm{GL}_r(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_{\mathbb{Q}}(R/p)),$$

such that

$$g((\mathrm{triv}, \mathbb{Z}_p)) = \mathrm{id}_{W_{\mathbb{Q}}(R/p)}, \tag{41}$$

$$g(\rho, T) \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(R/p)} g(\rho', T') = g((\rho, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\rho', T')) \tag{42}$$

inside of $\mathrm{GL}_r(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_{\mathbb{Q}}(R/p))$*, which is furthermore functorial in* $(\rho, T) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G})$ *and such that*

$$g(\rho, T)^{-1} \rho(u_0 \mu(p)) F(g(\rho, T)) = \rho(\overline{U} \mu(p)). \tag{43}$$

(b): *Similiarly everything for* g_{cris} *: The datum of the crystalline G-quasi-isogeny* $g_{\mathrm{cris}} \in G(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$ *is equivalent to the following datum: For all* $(\rho, T) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G})$*, an element*

$$g_{\mathrm{cris}}(\rho, T) \in \mathrm{GL}_r(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)),$$

such that

$$g_{\mathrm{cris}}((\mathrm{triv}, \mathbb{Z}_p)) = \mathrm{id}_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)}, \tag{44}$$

$$g_{\mathrm{cris}}(\rho, T) \otimes_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)} g_{\mathrm{cris}}(\rho', T') = g_{\mathrm{cris}}((\rho, T) \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\rho', T')), \tag{45}$$

inside of $\mathrm{GL}_r(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} T' \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$*, which is furthermore functorial in* $(\rho, T) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G})$ *and such that*

$$g_{\mathrm{cris}}(\rho, T)^{-1} \rho(\delta(u_0) \mu(p)) \varphi(g_{\mathrm{cris}}(\rho, T)) = \rho(U_{\mathrm{cris}} \mu(p)). \tag{46}$$

PROOF. The item (a) follows from the Tannakian re-interpretation of $\mathcal{G}$-μ-displays that was worked out by Patrick Daniels, see [**Dan21**, Lemma 3.27]. Now the item (b) follows similiarly by using the h-frame structure on the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/p)$ that I discussed in section 3.4; fortunately one may use here results that were proven by Daniels in his second paper [**Dan20**]. Namely, let me denote by $\mathcal{F}^h_{\mathrm{cris}}(R/p)$ the h-frame introduced above. Then sending $B = R/p \to B' = R'/p$ towards $\mathcal{F}^h_{\mathrm{cris}}(B')$ defines an étale sheaf of h-frames by descending the Nygaard-filtration; let me momentarily denote by $\underline{S}_{\mathrm{cris}}(B')$ the $\mathbb{Z}$-graded ring corresponding to the h-frame structure (i.e. $\underline{S}_{\mathrm{cris}}(B')_{\geq 0} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{N}^{\geq n}(\mathbb{\Delta}_{B'})$ and $\underline{S}_{\mathrm{cris}}(B')_{\leq 0} = \mathbb{\Delta}_{B'}[t]$). Next, note that the fibered category of finitely generated projective graded $\underline{S}_{\mathrm{cris}}(B')$-modules satisfies descent for $\mathrm{Spec}((R/p)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{\acute{e}t}})$ (i.e. it satisfies p-completely faithfully flat étale descent): to argue as in the proof *loc.cit.*[Prop. A.18.] (coupled with p-completely faithfully flat descent for finite projective modules as provided by the Appendix to [**AB21**] and its extension to finitely generated projetive graded (!) modules) one has to check that if $B \to B'$ is p-completely faithfully flat étale, then

$$\underline{S}_{\mathrm{cris}}(B) \to \underline{S}_{\mathrm{cris}}(B')$$

is p-completely faithfully flat étale, which follows because $\mathbb{\Delta}_B \to \mathbb{\Delta}_{B'}$ is p-completely faithfully flat étale. Furthermore, one has that

$$\mathcal{N}^{\geq n}(\mathbb{\Delta}_B) \otimes_{\mathbb{\Delta}_B} \mathbb{\Delta}_{B'} \simeq \mathcal{N}^{\geq n}(\mathbb{\Delta}_{B'}).$$

Namely, the ring $\mathbb{\Delta}_{B'}$ has then two $\mathbb{N}$-index and descending filtrations $\mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_B) \otimes_{\mathbb{\Delta}_B} \mathbb{\Delta}_{B'}$ and $\mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_{B'})$ and there is a natural morphism of filtrations $\mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_B) \otimes_{\mathbb{\Delta}_B} \mathbb{\Delta}_{B'} \to \mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_{B'})$. To show that this is an isomorphism, it suffices to test this on graded pieces, but then

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}^i(\mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_B) \widehat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B} \mathbb{\Delta}_{B'}) &\simeq \mathrm{gr}^i(\mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_B) \otimes_{\mathbb{\Delta}_B} \mathbb{\Delta}_{B'} \\
&\simeq \mathrm{gr}^i(\overline{\mathbb{\Delta}}_B)\{i\} \otimes_B B' \\
&\simeq \mathrm{gr}^i(\overline{\mathbb{\Delta}}_{B'})\{i\} \\
&\simeq \mathrm{gr}^i(\mathcal{N}^{\bullet}(\mathbb{\Delta}_{B'})),
\end{aligned}$$

where in the first isomorphism one uses that $\mathbb{\Delta}_B \to \mathbb{\Delta}_{B'}$ is p-completely flat and $\mathbb{\Delta}_B, \mathbb{\Delta}_{B'}$ are p-torsion free (so that $.\widehat{\otimes}_{\mathbb{\Delta}_B} \mathbb{\Delta}_{B'}$ is exact), in the second the computation of the graded pieces of the Nygaard-filtration provided by Bhatt-Scholze in [**BS22**, Thm.12.2.], in the third that $B \to B'$ is étale and in the last again [Thm.2.2.]*loc.cit.* In Daniels' words (see [**Dan20**, Def. 3.6], the étale sheaf of $\mathbb{Z}$-graded rings $\underline{S}_{\mathrm{cris}}(.)$ satisfies descent for modules on $\mathrm{Spec}(R/p)^{\mathrm{aff}}_{\mathrm{\acute{e}t}}$. It follows from Lau's computation of the window group

[**Lau21**, Prop. 6.2.2, Rem. 6.3.3] that the version of the window group agrees with the one defined using h-frames. Then one may cite [**Dan20**, Thm. 3.14], to obtain a Tannakian interpretation of $\mathcal{G}$-μ-windows for the frame $\mathcal{F}_{\mathrm{cris}}(R/p)$. Observing that higher windows for the h-frame $\mathcal{F}^h_{\mathrm{cris}}(R/p)$ always admit a normal decomposition (which follows because $\mathbb{A}_B$ is henselian along $\mathcal{N}^{\geq 1}(\mathbb{A}_B)$, so that one may use [**Lau21**, Lemma 3.1.4]), one may redo section 3.4. in [**Dan21**], to obtain the desired Tannakian interpretation of the crystalline G-quasi-isogeny.[30] $\square$

The next observation will be critical for the following arguments to work: denote as usual by φ the Frobenius-lift on $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$. One then has that for $[x]^{(n)}$, x, n as above,

$$\varphi([x]^{(n)}) = \frac{(pn)!}{n!}[x]^{(np)},$$

and inductively that

$$\varphi^m([x]^{(n)}) = \frac{(p^m n)!}{n!}[x]^{(np^m)}.$$

The key point is now that the p-adic valuation of $\frac{(p^m n)!}{n!}$ grows very fast.

LEMMA 8.5. *For $m \geq 1, n \geq 1$, one has that*

$$\nu_p(\frac{(p^m n)!}{n!}) = n\frac{(p^m - 1)}{p-1}.$$

PROOF. Recall the following formula: if $n = n_0 p^0 + n_1 p^1 + ... + n_\ell p^\ell$ is written in base p, let

$$s_p(n) = \sum_{k=0}^{\ell} n_k,$$

then

$$\nu_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}. \tag{47}$$

I claim that $\nu_p((p^m n)!) = n\frac{(p^m-1)}{p-1} + \nu_p(n!)$. This implies the lemma. But one has $s_p(n) = s_p(p^m n)$, so that the above formula (47) gives

$$\nu_p((p^m n)!) = \frac{p^m n - s_p(p^m n)}{p-1} = \frac{p^m n - s_p(n)}{p-1} = n\frac{p^m - 1}{p-1} + \frac{n - s_p(n)}{p-1} = n\nu_p(p^m!) + \nu_p(n!),$$

as desired. $\square$

Now one can turn to the proof of the statement in the banal case:
Uniqueness: To prepare the proof, take a representation

$$\rho\colon \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T)$$

on a finite free rank r $\mathbb{Z}_p$-module.
Of course, $\mu' = \rho \circ \mu$ is not minuscule anymore, but one has the following fact: if

$$M \in \mathrm{Mat}_r(p^{-N}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)),$$

then $\mu'(p)M\mu'(p)^{-1} \in \mathrm{Mat}_r(p^{-(N+c)}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p))$, i.e. conjugation by $\mu'(p)$ makes the denominators worse, but only by a linear amount. This makes it p-adically controllable. To convince oneself of this, note that the cocharacter defined over $W(k_0)[1/p]$

$$\mu'\colon \mathbb{G}_{m,W(k_0)[1/p]} \to G_{W(k_0)[1/p]} \to \mathrm{GL}_{r,W(k_0[1/p])}$$

is given by $z \mapsto \mathrm{diag}(t^{m_1}, ..., t^{m_n})$, where $m_i \in \mathbb{Z}$. Then one may take for $c = \min_{1 \leq i,j \leq n}(m_i - m_j)$, because if B is a $W(k_0)[1/p]$-algebra and $M \in \mathrm{Mat}_r(B)$, then the (i,j)-th entry of $\mu'(p)M\mu'(p)^{-1}$is

$$p^{m_i - m_j}M_{i,j}.$$

Now assume that $g'_{\mathrm{cris}}(\rho, T) \in \mathrm{GL}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$, such that

$$\chi_{\mathbb{Q}}(g'_{\mathrm{cris}}(\rho, T)) = \chi_{\mathbb{Q}}(g_{\mathrm{cris}}(\rho, T)) = g(\rho, T)$$

and which satisfies the equation of a crystalline quasi-isogeny. Consider

$$M = g'_{\mathrm{cris}}(\rho, T) - g_{\mathrm{cris}}(\rho, T) \in \mathrm{End}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)).$$

[30] Is this detailed enough?

The aim is to see that $M=0$. Since $g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)$ and $g'_{\mathrm{cris}}(\rho,T)$ lift $g(\rho,T)$ under $\chi_{\mathbb{Q}}$, one sees that M has coefficients in $\ker(\chi_{\mathbb{Q}})=K_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$. Now let $N_0:=\min_{i,j}(\nu_p(M_{i,j}))$, so that $M\in \mathrm{Mat}_r(p^{N_0}K_{\mathrm{cris}})$. Furthermore, it is true that

$$M=\rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(M)\mu'(p)^{-1}\rho(U_{\mathrm{cris}}^{-1}), \tag{48}$$

since both $g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)$ and $g'_{\mathrm{cris}}(\rho,T)$ satisfy the equations of a crystalline quasi-isogeny. I claim that this implies that $M=0$. Indeed, it is enough to show that the coefficients of M lie in $\cap_{n=1}^{\infty}p^n\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$, because $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$ is p-adically separated. First notice, that the equation (48) implies that

$$M\in \mathrm{Mat}_r(p^{-c}\varphi(p^{N_0}K_{\mathrm{cris}})).$$

Iterating the equation, it follows that

$$M=\rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi[\rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(M)\mu'(p)^{-1}\rho(U_{\mathrm{cris}}^{-1})]\mu'(p)^{-1}\rho(U_{\mathrm{cris}}^{-1}),$$

so that one gets

$$M\in \mathrm{Mat}_r(p^{-c}\varphi(p^{-c}\varphi(p^{N_0}K_{\mathrm{cris}})))\subseteq \mathrm{Mat}_r(p^{-2c}\varphi^2(p^{N_0}K_{\mathrm{cris}})).$$

It follows by induction that for every $m\geq 1$, the following containement is satisfied:

$$M\in \mathrm{Mat}_r(p^{-cm}\varphi^m(p^{N_0}K_{\mathrm{cris}})).$$

But observe that $\varphi^m(K_{\mathrm{cris}})\subseteq p^{\frac{p^m-1}{p-1}}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$. Indeed, a typical element of K_{cris} is of the form

$$[x]^{(n)},$$

$n\geq 1$, $x\in\ker(R^\flat\to R/p)$, as explained above. Then $\varphi^m([x]^{(n)})=\frac{(np^m)!}{n!}[x]^{(np^m)}$, but by the above Lemma,

$$\nu_p(\frac{(np^m)!}{n!})=\nu_p((np^m)!)-\nu_p(n!)=n\frac{p^m-1}{p-1}.$$

It follows that $\varphi^m([x]^{(n)})$ is indeed contained in $p^{n\frac{p^m-1}{p-1}}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$, which itself is then also contained inside $p^{\frac{p^m-1}{p-1}}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$. Observe now that

$$p^{-mc+N_0}\cdot p^{\frac{p^m-1}{p-1}}=p^{\frac{p^m-1}{p-1}-cm+N_0}\to\infty,$$

for $m\to\infty$, because $p\geq 2$ and exponential growth beats any linear growth. In some sense, the fact that the action of φ on $\ker(\chi)$ is very (!) p-adically nilpotent is the key why this argument works.
In total, one deduces the vanishing of M from the fact that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$ is p-adically separated. This finishes the uniqueness.
Functoriality and $\otimes$-compatibility, if a lift exists: Observe first, that the previously proven uniqueness will also imply functoriality of $g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)\in \mathrm{GL}(T\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$, if it exists. Indeed, if $f\colon(\rho,T)\to(\rho',T')$ is a morphism of representations, then both $f(g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)),g_{\mathrm{cris}}(\rho',T')\in \mathrm{GL}(T\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$ satisfy the equation of a crystalline quasi-isogeny (use that $\rho'=\rho\circ f$) and

$$\chi_{\mathbb{Q}}(f(g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)))=f(\chi_{\mathbb{Q}}(g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)))=f(g(\rho,T))=g(\rho',T')=\chi_{\mathbb{Q}}(g_{\mathrm{cris}}(\rho',T')),$$

(use in the first equation that $f\colon \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T)\to\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_p}(T')$ is a group scheme homomorphism and in the third equation known functoriality for the G-quasi-isogeny) so that the uniqueness part proven above implies that actually $f(g_{\mathrm{cris}}(\rho,T))=g_{\mathrm{cris}}(\rho',T')$. A similiar argument also takes care of the $\otimes$-compatibility of the hypothetical lifts $g_{\mathrm{cris}}(\rho,T)$.
Existence: Let a G-quasi-isogeny $g\in G(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$ be given. Take a representation $(\rho,T)\in\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{G})$ of $\mathcal{G}$ on a finite free, rank r $\mathbb{Z}_p$-module. Consider $\rho(g)\in\mathrm{Mat}_r(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$. Because $\chi_{\mathbb{Q}}\colon\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)\to W_{\mathbb{Q}}(R/p)$ is surjective, one can lift $\rho(g)$ arbitrarily to an element

$$M'\in\mathrm{Mat}_r(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)),$$

simply by lifting all the entries in the matrix $\rho(g)$. Define inductively,

$$C_0=M'$$

and

$$C_{m+1}=\rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(C_m)(\rho(U_{\mathrm{cris}})\mu'(p))^{-1}=\rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(C_m)\mu'(p)^{-1}\rho(U_{\mathrm{cris}}^{-1})\in\mathrm{Mat}_r(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)).$$

This is a well-defined element, as $U_{\mathrm{cris}} \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p))$, so that $\rho(U_{\mathrm{cris}}) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p))$ and $\mu'(p)^{-1} \in \mathrm{GL}_r(W_{\mathbb{Q}}(k))$. One finds an integer $N(\rho, T) = N > 0$, (depending on the choice of the representation (ρ, T)) such that all $\rho(\delta(u_0))\mu'(p), \rho(U_{\mathrm{cris}})\mu'(p), C_0$ are contained inside

$$\mathrm{Mat}_r(p^{-N}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)).$$

Using again that conjugation by $\mu'(p)$ leads to a linear amount of growth in denominators of p, it follows that

$$C_m \in \mathrm{Mat}_r(p^{-(N+cm)}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)).$$

Now the claim is that the sequence $\{C_m\}_m$ converges in $\mathrm{Mat}_r(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$ for the topology induced by the Banach-space topology on $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)$ introduced in the beginning of this section.
To show this, one has to see that $\{C_{m+1} - C_m\}_m$ is a zero-sequence for the norm $|b| = \inf\{|\lambda|_{\mathbb{Q}_p} : b \cdot \lambda \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)\}$, so that $\{C_m\}_m$ is Cauchy and it will indeed converge, as $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)$ is complete and separated in the topology induced by the norm $|.|$. Now calculate that

$$C_1 - C_0 = \rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(C_0)(\mu'(p))^{-1}(\rho(U_{\mathrm{cris}}))^{-1} - C_0 \in \mathrm{Mat}_r(K_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p).$$

Indeed, after applying $\chi_{\mathbb{Q}}$ one gets the equation

$$\rho(u_0\mu(p)F(g)\mu(p)^{-1}U^{-1}) - \rho(g) = 0,$$

by the assumption that $g \in G(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$ is a G-quasi-isogeny. Now define $N_1 := \min_{i,j}(\nu_p((C_1 - C_0)_{i,j}))$. Then one has that

$$C_1 - C_0 \in \mathrm{Mat}_r(p^{N_1}K_{\mathrm{cris}}).$$

It follows that

$$C_2 - C_1 = \rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(C_1 - C_0)(\mu'(p))^{-1}(\rho(U_{\mathrm{cris}}))^{-1}$$

is contained inside of

$$\mathrm{Mat}_r(p^{-c}\varphi(p^{N_1}K_{\mathrm{cris}})).$$

By induction, it follows that

$$C_{m+1} - C_m = \rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(C_m - C_{m-1})(\mu'(p))^{-1}(\rho(U_{\mathrm{cris}}))^{-1}$$

is contained inside of

$$\mathrm{Mat}_r(p^{-c}\varphi(p^{-cm}\varphi^m(p^{N_1}K_{\mathrm{cris}}))) \subseteq \mathrm{Mat}_r(p^{-(m+1)c}\varphi^{m+1}(p^{N_1}K_{\mathrm{cris}})),$$

here again the c depends on the choice of the representation (ρ, T). But above it was already explained, that $p^{-cm}\varphi^m(K_{\mathrm{cris}}) \subseteq p^{\frac{p^m-1}{p-1} - cm}\,\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p)$, and using again that

$$p^{-mc+N_1} \cdot p^{\frac{p^m-1}{p-1}} = p^{\frac{p^m-1}{p-1} - cm + N_1} \to \infty,$$

for $m \to \infty$, one sees that the sequence $\{C_{m+1} - C_m\}_m$ indeed converges to zero for the p-adic topology. It remains to see that

$$g_{\mathrm{cris}}(\rho, T) = \lim_{m\to\infty} C_m \in \mathrm{GL}(T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p)),$$

because the equation of a crystalline quasi-isogeny and $\chi_{\mathbb{Q}}(g_{\mathrm{cris}}) = \rho(g)$ are true by construction. Namely, here the discussion of the topological pathologies of the ring $W_{\mathbb{Q}}(R/p)$ becomes relevant; this discussion implies that to show that $\chi_{\mathbb{Q}}(g_{\mathrm{cris}}) = \rho(g)$, one has to convince onself that $\chi_{\mathbb{Q}}(C_m) = \rho(g)$. This is done by induction. First, choose C_0 to be a lift of $\rho(g)$ under $\chi_{\mathbb{Q}}$, so that $\chi_{\mathbb{Q}}(C_0) = \rho(g)$. Assume that one already knows that $\chi_{\mathbb{Q}}(C_m) = \rho(g)$, then one gets

$$\chi_{\mathbb{Q}}(C_{m+1}) = \rho(u_0\mu(p)F(g)\mu(p)^{-1}U) = \rho(g),$$

where it was used that $\chi \circ \varphi = F \circ \chi$, $\chi(U_{\mathrm{cris}}) = U$ and that g is a G-quasi-isogeny between u_0 and U.
Next, one has to show that the p-adic limit $\lim_{m\to\infty} C_m$ is indeed invertible. To see this, lift the matrix $\rho(g^{-1}) \in \mathrm{Mat}_r(W_{\mathbb{Q}}(R/p))$ similiarly to a matrix $N' \in Mat_r(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$. Define inductively, $D_0 = N'$ and

$$D_m = \rho(U_{\mathrm{cris}})\mu'(p)\varphi(D_{m-1})\mu'(p)^{-1}\rho(\delta(u_0))^{-1}.$$

Then one sees by the same arguments as before, that

$$\lim_{m\to\infty} D_m \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R/p))$$

exists. I claim that

$$\mathrm{id}_r - CD = 0.$$

For this, one shows that $\{\mathrm{id}_r - C_m D_m\}_m$ is a zero-sequence. Inductively one sees that

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_r - C_{m+1}D_{m+1} &= \mathrm{id}_r - \rho(\delta(u_0))\mu'(p)\varphi(C_m D_m)\mu'(p)^{-1}\rho(\delta(u_0))^{-1} \\ &= \rho(\delta(u_0))\mu'(p)(\varphi(\mathrm{id}_r - C_m D_m))\mu'(p)^{-1}\rho(\delta(u_0))^{-1}\end{aligned}$$

is contained inside of

$$\mathrm{Mat}_r(p^{-c(m+1)}\varphi^{m+1}(K_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)).$$

By the same argument as before, one sees that $\{\mathrm{id}_r - C_m D_m\}_m$ indeed converges to zero. This finishes the proof.

8.3. Extension to the general case. In the previous section I just considered the case of a p-torsion free integral perfectoid ring R; this was needed to insure that the semi-perfect ring R/p is quasi-regular. Here I want to explain how to extend the translation of the quasi-isogeny towards the case of a general integral perfectoid ring. This will use the same ideas as in section 6.1 to reduce separatly to the case of a perfect ring in characteristic p and to a p-torsion free integral perfectoid ring.
Let me first adress the translation in the case of a perfect ring: let R be a perfect k-algebra, $\mathcal{P}_0 = (\mathcal{Q}_0, \alpha_0)$ an adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-Display over $\mathrm{Spec}(k)$, $\mathcal{P} = (\mathcal{Q}, \alpha)$ a $\mathcal{G}$-μ-Display over R; recall that one can also consider $\mathcal{P}_0$ resp. $\mathcal{P}$ as $\mathcal{G}$-torsors over $\mathrm{Spec}(W(k))$ resp. $\mathrm{Spec}(W(R))$ with additional structure. One is given a G-quasi-isogeny

$$\rho\colon \mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(R) \dashrightarrow \mathcal{P}.$$

Lemma 8.6. *The datum of ρ is equivalent to the datum of an isomorphism of G-torsors*

$$\rho'\colon \mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(W(k))} \mathrm{Spec}(W(R)[1/p]) \simeq \mathcal{P} \times_{\mathrm{Spec}(W(R))} \mathrm{Spec}(W(R)[1/p]),$$

that is compatible with Frobenius-structure.

Proof. This follows from the fact that the association $R \to R' \mapsto \underline{\mathrm{Isom}}_G(\mathcal{P}_{0,W(R')[1/p]}, \mathcal{P}_{W(R')[1/p]})$ is a sheaf for the étale topology. For this the argument is as in Lemma 8.2 but easier, using that if $R \to R'$ is a faithfully flat étale morphism of perfect rings, then $W(R) \to W(R')$ is p-completely faithfully flat étale and that if $R'^{\bullet}$ is the Cech-nerve of the covering $R \to R'$, one has that $W(R'^{\bullet}) \simeq W(R')^{\bullet}$, where this is the simplicial object with $W(R')\widehat{\otimes}_{W(R)}...W(R')$ in degree n : now one can again directly apply Drinfeld's descent result for 'Banachian'-modules. $\square$

Now one can turn to the general case: let R be a non-necessarily p-torsion free integral perfectoid $W(k)$-algebra, and fix for later use a perfectoid pseudo-uniformizer $\varpi \in R$ dividing p. Let again $R_1 = R/R[\sqrt{pR}]$, $R_2 = R/\sqrt{pR}$ and $R_3 = R_1/\sqrt{pR_1}$. Then R_1 is p-torsion free integral perfectoid, while R_2 and R_3 are perfect. One then has a crucial pullback and pushout square with the canonical maps

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \arrow[d] \\ R_2 \arrow[r] & R_3, \end{tikzcd}$$

where the morphisms $R_1 \to R_3 \leftarrow R_2$ are both surjective. Then one the following pullback square

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_1) \arrow[d] \\ \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_2) \arrow[r] & \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_3), \end{tikzcd}$$

where $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_1) \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_3) \leftarrow \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R_2)$ is still surjective. Inverting p, one gets similiarly that

$$\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R) \simeq \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_1) \times_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_3)} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_2)$$

and the surjectivity is still satisfied.[31] Let as before $\mathcal{P}_0$ be an adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-Display and $\mathcal{P}$ a $\mathcal{G}$-μ-Display over R. Suppose one is given a G-quasi-isogeny[32]

$$\rho\colon \mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(R/\varpi) \dashrightarrow \mathcal{P} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R/\varpi).$$

[31]Here one has to use that inverting p commutes with a fiber product, which follows because there is a natural morphism from $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)$ into $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_1) \times_{\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_3)} \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_2)$ and for the bijectivity, which is a question about abelian groups, one uses that filtered colimits commute with finite limits.

[32]Note that as $\sqrt{pR} = \bigcup_n (\varpi^{1/p^n})$, the image of ϖ in R_1 and R_3 is zero and therefore one may apply the case discussed in lemma 8.6 to the base change of ρ.

Then the $\mathcal{G}$-μ-Display $\mathcal{P}$ is adjoint nilpotent and by Prop. 6.1 corresponds to a $\mathcal{G}$-μ-window for the frame $\mathcal{F}_{\inf}(R)$, which then gives rise to a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues modulo $(\mathcal{P}, \varphi_{\mathcal{P}})$ over $\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(R))$, which is of type μ. Finally, let $\mathcal{P}_{\mathrm{cris}} = \mathcal{P} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\inf}(R))} \mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R))$ be the base-change, with Frobenius-structure $\varphi_{\mathcal{P}_{\mathrm{cris}}}$.

Lemma 8.7. [33] *There is a uniquely determined isomorphism of G-torsors over* $\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R))$

$$\rho_{\mathrm{cris}} \colon \mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(W(k))} \mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)) \simeq \mathcal{P}_{\mathrm{cris}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{cris}(R))} \mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)),$$

which is compatible with the Frobenius-structure and that lifts the given G-quasi-isogeny

$$\rho \colon \mathcal{P}_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(R/p) \dashrightarrow \mathcal{P} \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(R/p).$$

Proof. Consider $X = \underline{\mathrm{Isom}}_G(\mathcal{P}_{0,\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)}, \mathcal{P}_{\mathrm{cris}\,\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)})$; as G is smooth and affine, this functor is representable by a flat and affine scheme over $\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R))$. Then one is in a situation, where one can use [**BC20**, Prop. 2.2.15], to deduce

$$X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R)) \simeq X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_1)) \times_{X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_3))} X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_2)). \tag{49}$$

As explained before, one can use the given G-quasi-isogeny ρ, to produce uniquely determined elements $x, y \in X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_1)) \times X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_2))$, which have the property that mapping towards $\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_3))$ they both agree, i.e. $z = (x, y) \in X(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R))$. This isomorphism z is still compatible with Frobenius structures and gives then the desired lift. ☐

9. Applications to the Bültel-Pappas moduli problem

9.1. Recollections on the Bültel-Pappas moduli problem. Let $(G, \{\mu\}, [b])$ be an unramified local Shimura-datum over $\mathbb{Q}_p$, (c.f. [**SW20**, Def. 24.1.1.], unramified means here just that the reductive group G over $\mathbb{Q}_p$ is unramified, i.e. is quasi-split and split after an unramified extension) and E the local Shimura-field; an unramified extension of $\mathbb{Q}_p$. Write as usual $\breve{E}$ for the completion of the maximal unramified extension of E and denote by k its residue-field. Let $\mathcal{G}$ be a reductive group scheme over $\mathbb{Z}_p$, which is an integral model of G. One may and do assume that one finds a representative $\mu \in \{\mu\}$, which extends integrally, i.e. is given by a minuscule cocharchter

$$\mu \colon \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_E} \to \mathcal{G}_{\mathcal{O}_E}.$$

Here one use the assumption that one is working in the unramified case. Then its $\mathcal{G}(\mathcal{O}_E)$-conjugation class is well-defined (c.f. the discussion in [**BP20**, section 4.1.1.]). Let $K = \mathcal{G}(\mathbb{Z}_p) \subseteq G(\mathbb{Q}_p)$ and Sh_K the local Shimura variety with maximal hyperspecial level structure K associated to $(G, \{\mu\}, [b], K)$ by Scholze, [**SW20**, Def. 24.1.3].
Next, I want to consider the moduli problem of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays up to isogeny; to have this well-defined I will add the following further assumptions to the present set-up: I assume that the σ-conjugacy $[b] \in B(G, \mu)$ has a representative $b = u_0\mu(p)$, for some $u_0 \in \mathcal{G}(W(k))$ (in total one considers an integral unramified local Shimura-datum as in [**BP20**, Def. 4.1.2]) and then one requires that it satisfies the adjoint nilpotency condition, i.e. the isocrystal which is constructed from b using the adjoint representation has all slopes > -1.
Let then $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}} = \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$ be the moduli problem of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays up to isogeny, that was introduced by Bültel-Pappas in [**BP20**, section 4.2.]. Furthermore, denote by $\mathcal{P}_{u_0}$ the banal $\mathcal{G}$-μ-display over k constructed from u_0. Recall the following conjecture put forward by Bültel-Pappas.

Conjecture 9.1. (Bültel-Pappas [**BP20**, Conjecture 4.2.1.]) The functor

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}} \colon \mathrm{Nilp}_W^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},$$

is representably by a formal scheme, which is locally formally of finite type and formally smooth over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$.

Concerning the special fiber, after the work of Bhatt-Scholze [**BS17**] on the projectivity of the Witt vector affine Grassmannian, one knows that the restriction of $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$ towards perfect k-schemes is representable by a perfect scheme, locally perfectly of finite type. In the rest of this section I want to work in the direction of putting also a geometric structure on the generic fiber of this moduli problem. To explain what is meant by this generic fiber, I borrow from Scholze-Weinstein [**SW13**, section 2.2] a general procedure how to associate to a functor like $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$ defined on $\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}_{\breve{E}}}$ a functor defined on

[33] For peace of mind, I recall that $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R) = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/p) = \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}(R/\varpi)$, since $R^\flat = \lim_{\mathrm{Frob}} R/pR = \lim_{\mathrm{Frob}} R/\varpi R$.

complete affinoid Huber-pairs $\mathrm{CAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}$.
First define a pre-sheaf on $\mathrm{CAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}$ as follows: if $(R,R^+)\in \mathrm{CAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}$, then let

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta,\mathrm{pre}}(R,R^+)=\operatorname*{colim}_{R_0\subseteq R^+}\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}(\mathrm{Spf}(R_0)),$$

where the colimit runs over all open and bounded $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-subalgebras of R^+. The point is here that open and bounded $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-subalgebras of R^+ will have the p-adic topology and one can evaluate

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}(\mathrm{Spf}(R_0))=\lim_n \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}(\mathrm{Spec}(R_0/p^n)).$$

Now equip the oppposite category $\mathrm{CAffd}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}$ with the structure of a site, where one declares the coverings to be generated by coverings for the analytic topology on $\mathrm{Spa}(R,R^+)$; more precisely, a family of morphisms

$$(R,R^+)\to(R_i,R_i^+)$$

such that $(R_i,R_i^+)=(\mathcal{O}_X(U_i),\mathcal{O}_X^+(U_i))$ for a covering $\{U_i\}_{i\in I}$ of $X=\mathrm{Spa}_{\mathrm{top}}(R,R^+)$ is declared to a covering in $\mathrm{CAffd}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}$ (c.f. [**SW13**, Def. 2.1.5]). Then by definition

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}\colon \mathrm{CAffd}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Spa}(\breve{E},\mathcal{O}_{\breve{E}})}\to \mathrm{Set}$$

is the analytic sheafification of the pre-sheaf $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta,\mathrm{pre}}$. The Proposition 2.2.2. in loc.cit. makes sure that if the above conjecture, Conjecture 9.1, would be satisfied, it would follow that $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}$ is representable by the usual Berthelot generic fiber of $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$. Now the aim of this section can be stated more precisely as showing directly that $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}$ is representable by the local Shimura-variety Sh_K .

9.2. Representability of the Diamond. Recall that previously I considered the following sheaf for the analytic topology on complete affinoid adic spaces over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$:

$$\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}\colon \mathrm{CAffd}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{Spa}(\breve{E})}\to \mathrm{Set}\,.$$

Now I will consider a diamantine version of it; let Perf_k be the category of affinoid perfectoid spaces over k. Then $(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit}\to \mathrm{Spd}(\breve{E})$ is the sheaf for the analytic topology on affinoid perfectoid spaces over k :

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit}\colon \mathrm{AffdPerf}^{\mathrm{op}}_k\to \mathrm{Set},$$

which sends $S=\mathrm{Spa}(R,R^+)\in\mathrm{Perf}_k$, towards equivalence classes of pairs $((S^\sharp,\iota),x)$, where $S^\sharp$ is an affinoid perfectoid space over $\breve{E}$, $\iota\colon (S^\sharp)^\flat\simeq S$ and $x\in\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}(S^\sharp)$. Two points $((S'^\sharp,\iota'),x')$ and $((S^\sharp,\iota),x)$ are equivalent, if there is an isomorphism $f\colon S^\sharp\simeq S'^\sharp$, such that $\iota'\circ f^\sharp=\iota$ and $f^*(x')=x\in\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}(S^\sharp)$.

Remark 23. If $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$ would be representable by a formal scheme, locally formally of finite type over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$, then $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta}$ would describe the functor of points of its Berthelot generic fiber and $(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit}$ the functor of points of the diamond associated to this generic fiber.

The basic aim of this sub-section is then to show the following

Proposition 9.2. There is an isomorphism of analytic sheaves on $\mathrm{AffdPerf}^{\mathrm{op}}_k$

$$\psi\colon(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit}\simeq(\mathrm{Sh}_K)^{\diamondsuit},$$

over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$.

Remark 24. Since $(\mathrm{Sh}_K)^{\diamondsuit}$ is already known to be a sheaf for the much finer v-topology on Perf_k, (c.f. [**Sch22**], Prop. 11.9.) this in particular shows that also $(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit}$ is one.

Proof. One first uses the previous results to obtain that a $S=\mathrm{Spa}(R,R^+)$-valued point of $(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_{\eta})^{\diamondsuit}$ can be concretely described as follows: one gives an untilt $S^\sharp=\mathrm{Spa}(R^\sharp,R^{\sharp+})$ over $\breve{E}$, a covering by rational opens $\bigcup_{i\in I}U_i^\sharp=S^\sharp$, $U_i^\sharp=\mathrm{Spa}(R_i^\sharp,R_i^{\sharp+})$, a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues-module $(\mathcal{M}_i,\varphi_{\mathcal{M}_i})$ over $\mathrm{Spec}(R_i^{\sharp+})$ of type μ, and a crystalline G-quasi-isogeny

$$\rho_i\colon \mathcal{P}_{u_0}\times_{\mathrm{Spec}(W(k))}\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_i^{\sharp+}/p))\simeq\mathcal{M}_i\times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(R_i^{\sharp+}))}\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_i^{\sharp+}/p)).$$

This data $((\mathcal{M}_i,\varphi_{\mathcal{M}_i}),\rho_i)$ is required to be isomorphic on overlaps $U^\sharp_{i,j}=U_i^\sharp\cap U_j^\sharp$ and to satisfy a cocycle condition on triple overlaps $U^\sharp_{i,j,k}=U_i^\sharp\cap U_j^\sharp\cap U_k^\sharp$.
The precise statements that have been used are the following: the translation between $\mathcal{G}$-μ-displays over

integral perfectoid rings and Breuil-Kisin-Fargues modules, Corollary 7.3[34]; together with the translation of the G-quasi-isogeny, Lemma 8.1 (and that $R_i^{+\sharp}$ is open bounded of course and since $\mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{+\sharp})$ is an untilt over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$ one may work with p as the pseudo-uniformizer, so that the $R_i^{+\sharp}$ will carry the p-adic topology; furthermore note that all $R_i^{\sharp+}$ will be p-torsion free as subrings of $R_i^\sharp$, where p is invertible. Therefore the running assumptions in the translation statements between $\mathcal{G}$-μ-displays and $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues modules of type μ are met).
To construct the map of analytic sheaves over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$

$$\psi\colon (\mathcal{M}_\eta^{\mathrm{BP}})^\diamond \simeq (\mathrm{Sh}_K)^\diamond$$

one can restrict the Breuil-Kisin-Fargues modules, which are torsors over $\mathrm{Spec}(W(R_i^+))$, towards

$$\mathrm{Spa}(W(R_i^+)) - V([\varpi]) = \mathcal{Y}_{[0,\infty)}(\mathrm{Spa}(R_i, R_i^+)),$$

to obtain a local shtuka over U_i with a leg at $U_i^\sharp$ and singularities bounded by μ. Using the inclusions

$$H^0(\mathcal{Y}_{[1/p^p,1]}, \mathcal{O}) \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R_i^+/p) \subset H^0(\mathcal{Y}_{[1/p^{p-1},1]}, \mathcal{O}),$$

one sees that the quasi-isogeny ρ_i then translates as required to the trivialization of the local shtuka near infinity. Now analytic descent for local shtuka produces the desired point of $(\mathrm{Sh}_K)^\diamond$.

9.2.1. *Injectivity of the morphism ψ.* First, I want to explain why the morphism ψ is injective; this will use the following statement:

LEMMA 9.3. *Let A be an integral perfectoid k-algebra with perfectoid pseudo-uniformizer $\varpi \in A$ (in particular; it is assumed that this element is regular).*

(a): *There is an equivalence of categories between algebraic $\mathcal{G}$-torsors over* $\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$ *and analytic $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-torsors over* $\mathrm{Spa}(W(A), W(A)) - V(p, [\varpi])$, *where one equips $W(A)$ as usual with the $(p, [\varpi])$-adic topology.*

(b): *The restriction functor from $\mathcal{G}$-torsors over* $\mathrm{Spec}(W(A))$ *towards $\mathcal{G}$-torsors over* $\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$ *is fully faithful.*

PROOF. The statement (a) follows from a result of Kedlaya [**Ked20**, Thm. 3.8], which tells us that there is an exact tensor equivalence between the category of algebraic vector bundles on

$$\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$$

and analytic vector bundles on $\mathrm{Spa}(W(A)) - V(p, [\varpi])$. Now one may use the Tannakian formalism on both sides, to obtain the desired statement (see [**SW20**, Thm. 19.5.1], for the algebraic side and Thm. 19.5.2. for the analytic side).
For statement (b), first observe that the restriction functor from vector bundles on $\mathrm{Spec}(W(A))$ towards vector bundles on $\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$ is fully faithful: By passing to inner-Hom's it is enough to see that

$$H^0(\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi]), \mathcal{O}) = W(A),$$

which follows from the fact that $(p, [\varpi])$ form a regular sequence in $W(A)$; note that more generally this shows that for any vector bundle $\mathcal{E}$ on $\mathrm{Spec}(W(A))$ one has that

$$H^0(\mathrm{Spec}(W(A)), \mathcal{E}) = H^0(\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi]), \mathcal{E}|_{\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p,[\varpi])}). \tag{50}$$

Now consider two $\mathcal{G}$-torsors $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ on $\mathrm{Spec}(W(A))$. Then the functor of isomorphisms,

$$Y = \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$$

is representable by an affine scheme over $\mathrm{Spec}(W(A))$, which is of finite presentation. It is then enough to see that sections of Y restricted to $\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$ extend uniquely to sections over $\mathrm{Spec}(W(A))$. Taking a closed embedding $Y \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{W(A)}$, one sees from (50) that a $\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$-section of Y extends uniquely to a $\mathrm{Spec}(W(A))$-section of $\mathbb{A}^n_{W(A)}$, which by the uniqueness has to factor over Y.[35] $\square$

[34] I use here that a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues module equipped with a crystalline quasi-isogeny towards $\mathcal{P}_{u_0}$ lies in the essential image; for this one may reduce to the banal case and one has to see that the banal $\mathcal{G}$-μ-window for the crystalline frame that corresponds to the trivial $\mathcal{G}$-BKF of type μ satisfies the adjoint nilpotency condition as in Definition 14. But this follows from the existence of the crystalline G-quasi isogeny together with the running assumption on the slopes of b.

[35] Namely, if $Y = V(f_1, ..., f_k)$, and if $s_1, ..., s_n \in W(A)$ is the extended section, then one has to see that $f_j(s_1, ..., s_n) = 0$ for all $1 \leq j \leq k$. But the zero section and the sections $f_j(s_1, ...s_n)$ of $\mathbb{A}^1_{W(A)} \to \mathrm{Spec}(W(A))$ agree on $\mathrm{Spec}(W(A)) - V(p, [\varpi])$, so that by uniqueness again, one deduces that $f_j(s_1, ..., s_n) = 0$.

To conclude the verification of the injectivity of ψ, take two points $(\mathcal{M}, \varphi_{\mathcal{M}}, \rho)$ and $(\mathcal{M}', \varphi_{\mathcal{M}'}, \rho')$, over some $S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$, where $(\mathcal{M}^?, \varphi_{\mathcal{M}^?})$ are $\mathcal{G}$-BKFs over $R^{+\sharp}$ of type μ and $\rho^?$ are crystalline G-quasi-isogenies, such that their images under ψ agree. It follows in particular, that the $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-torsors over $\mathrm{Spa}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$, which one constructs from glueing the shtuka over $\mathcal{Y}_{[0,\infty)}(S)$ with the trivial $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-torsor over $\mathcal{Y}_{[0,\infty]}(S)$ constructed from b along the trivializations ι resp. ι' are isomorphic. By part (a) of the above lemma their algebraic counterparts are isomorphic and then by part (b) also $\mathcal{M}$ and $\mathcal{M}'$ have to be isomorphic (which gives an isomorphism respecting the Frobenius-structure and the quasi-isogeny).[36]

9.2.2. *Surjectivity of the morphism ψ.* The only interesting point is therefore the surjectivity, where the claim is basically that one may extend $\mathcal{G}$-torsors over $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$ after passing to a covering by rational opens of $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ towards the whole spectrum.
Start with an $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$-valued point of $(\mathrm{Sh}_K)^\diamond$. It is given by a triple $(S^\sharp, ((\mathcal{E}, \varphi_{\mathcal{E}}), \iota))$ as before. The untilt $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{+\sharp})$ gives in particular rise to a degree one primitive element $\xi \in W(R^+)$.
Now one may proceed as before and use the trivialization near infinity, given by ι, to glue the shtuka $(\mathcal{E}, \varphi_{\mathcal{E}})$ over $\mathcal{Y}_{[0,\infty)}(S)$ and the trivial torsor over $\mathcal{Y}_{[r,\infty]}(S)$, with Frobenius-equivariance given by $b_0 = u_0\mu(p)$, to obtain a $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-torsor over $\mathrm{Spa}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$, which corresponds then to a $\mathcal{G}$-torsor over $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$; I will denote it by $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}$. It is this $\mathcal{G}$-torsor, which one wants to extend.
Let me first explain why for the proof of the surjectivity of the morphism ψ, it is indeed enough to check that this $\mathcal{G}$-torsor extends to whole spectrum after passing to a rational covering of $\mathrm{Spa}(R, R^+)$. The observations are simply the following: that on the one hand the given Frobenius-structure on the $\mathcal{G}^{\mathrm{adic}}$-shtuka $(\mathcal{E}, \varphi_{\mathcal{E}})$ induces a Frobenius-structure

$$\varphi_{\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}} \colon \varphi^*(\mathcal{E}^{\mathrm{approx}})[1/\xi] \simeq \mathcal{E}^{\mathrm{approx}}[1/\xi].$$

Here I wrote φ for the morphism induced on $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$ via the Witt vector Frobenius φ on $W(R^+)$ and the notation $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}[1/\xi]$ is a short hand notation for restricting the $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}$ over $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$ towards the open subscheme, which is the complement of

$$V(\xi) \cap \mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi]).$$

This behaviour was insured in the definition of a mixed-characteristic shtuka, because there one requires that the Frobenius-structure $\varphi_{\mathcal{E}}$ is meromorphic along the closed Cartier divisor $S^\sharp \hookrightarrow \mathcal{Y}(S)$ (c.f. [**SW20**, Def. 23.1.1]). On the other hand, the trivialization

$$\iota \colon \mathcal{E}|_{\mathcal{Y}_{[r,\infty)}(S)} \simeq \mathcal{E}_b|_{\mathcal{Y}_{[r,\infty)}(S)},$$

for r large enough, gives naturally rise to a morphism of locally ringed spaces

$$\mathcal{Y}_{[r,\infty)}(S) \to \mathcal{E}^{\mathrm{approx}} \times_{\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p,[\varpi])} D(p),$$

here $D(p) = \mathrm{Spec}(W(R^+)[1/p]) \subset \mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$. Since $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}} \to \mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$ is a torsor under an affine group scheme, one deduces that this morphism of locally ringed spaces is equivalent to a morphism of rings of global sections. Using the Frobenius pullback trick as in [**SW20**, Prop. 22.1.1.], one can make sure that one can use the inclusions

$$H^0(\mathcal{Y}_{[1/p^p,1]}, \mathcal{O}) \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R^+/p) \subset H^0(\mathcal{Y}_{[1/p^{p-1},1]}, \mathcal{O}),$$

to construct the desired section $\mathrm{Spec}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{cris}}(R^+/p)) \to \mathcal{E}^{\mathrm{approx}}$; using compatibility with Frobenius structures, this gives a crystalline G-quasi-isogeny.
Now one turns to the problem of extending the $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}$. I will need some properties of henselian pairs, which I want to collect here: Let A be a commutative ring and $I \subset A$ be an ideal. Recall ([**Sta22**, Tag 09XE]) that the pair (A, I) is called henselian, if I is contained in the Jacobson radical of A and whenever $f \in A[T]$ is a monic polynomial with factorization

$$\overline{f} = g_0 \cdot h_0,$$

where $g_0, h_0 \in A/I[T]$ are monic polynomials generating the unit ideal in $A/I[T]$, then there exists a factorization $f = g \cdot h$, with $g, h \in A[T]$ monic and $\overline{g} = g_0$ and $\overline{h} = h_0$. See [**Sta22**, Tag 09XI] for equivalent conditions. If the ring A is I-adically complete, the pair (A, I) is henselian ([**Sta22**, Tag 0ALJ]). Henselian pairs are closed under filtered (!)[37] colimits ([**Sta22**, Tag 0FWT]), direct limits ([**Sta22**, Tag 0EM6]),

[36] The fact that one carries along the datum of the quasi-isogeny saves one here from the objection that the restriction from Breuil-Kisin-Fargues modules towards shtuka is not fully faithfull.

[37] This is wrong without this condition; for example for co-products there is a counter-example due to Moret-Baily [**Sta22**, Tag 0FWU].

under integral morphisms (e.g. surjections) in the sense that if (A, I) is a henselian pair and $A \to A'$ is integral, then (A', IA') is henselian ([**Sta22**, Tag 09XK]) and under nilpotent thickenings.

Lemma 9.4. [38] *Let $x \in S = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in \mathrm{Perf}_k$ be a point, $\kappa(x)$ the completed residue field at x and $\kappa(x)^+ \subseteq \kappa(x)$ the corresponding valuation subring. Then one has that*

(a):
$$\operatorname*{colim}_{x \in U} H^1(\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(U))), \mathcal{G}) \simeq H^1(\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+)), \mathcal{G}),$$
(b):
$$\operatorname*{colim}_{x \in U} H^1(\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(U))) - V(p, [\varpi]), \mathcal{G}) \simeq H^1(\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+) - V(p, [\varpi]), \mathcal{G}).$$

Here both colimits run over rational opens $U \subseteq S$, which contain $x \in S$ and the isomorphism is induced via pullback towards $\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+))$ *resp.* $\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+)) - V(p, [\varpi])$.

Proof. *(of the Lemma)* Recall that $\kappa(x) = \mathrm{Frac}(\widehat{R/\mathrm{supp}(x))}_{|\cdot|_x}$ and that $\kappa(x)^+$ is the valuation ring corresponding to the valuation x. If $\mathcal{O}_{S,x}^+ = \mathrm{colim}_{x \in U} \mathcal{O}_S^+(U)$ is the un-completed stalk of $\mathcal{O}_S^+$ at $x \in S$, it is true that

$$\widehat{(\mathcal{O}_{S,x}^+)}_{\varpi} \simeq \kappa(x)^+. \tag{51}$$

Now consider $A = \mathrm{colim}_{x \in U} W(\mathcal{O}_S^+(U))$. The first observation is that if $A_1 = \widehat{A}_{[\varpi]}$ and $A_2 = \widehat{A_1}_p$, then one has that
$$A_2 \simeq W(\kappa(x)^+).$$
Namely, since $W(\kappa(x)^+)$ is $(p, [\varpi])$-adically complete and separated (thus also p-adic and $[\varpi]$-adic), the natural map $A \to W(\kappa(x)^+)$ induces a morphism as above. Now observe first that p is regular in A_2 and in $W(\kappa(x)^+)$: for $W(\kappa(x)^+)$ this is clear, since $\kappa(x)^+$ is perfect in characteristic p, and for A_2 it suffices to see that p is regular in A_1 (since completing along a regular element keeps the property that this element was regular). Observe now that $[\varpi] \in A$ is regular. Indeed, by exactness of filtered colimits, it is enough to check that $[\varpi] \in W(\mathcal{O}_S^+(U))$ is regular. Then one uses the following small statement:

Lemma 9.5. *Let A be a ring, $f, g \in A$ non-zero elements, such that A is g-adic and $g \in A$ is regular. If $\overline{f} \neq 0 \in A/g$ is regular, also $f \in A$ is regular.*

Proof. Let $x \in A$, such that $f \cdot x = 0$. One has to see that $x = 0$. Modulo g this reads as $\overline{f} \cdot \overline{x} = 0$ in A/g. By assumption that $\overline{f} \neq 0$ is regular, this implies that $x \in gA$, i.e. $x = g \cdot x'$, for some $x' \in A$. It follows that $g \cdot (f \cdot x') = f \cdot x = 0$ and, since g is regular in A, that $f \cdot x' = 0$. As before, one gets $x' \in gA$. Continuing in this fashion, one sees x is infinitely g divisible, which implies that $x = 0$. ☐

Then also $[\varpi] \in A_1$ is regular and it suffices to show that p is regular in $A/[\varpi]$, by the previous lemma. Observe that ϖ is regular in $A/pA = \mathrm{colim}_U \mathcal{O}_S^+(U)$, since this element was by assumption a perfectoid pseudo-uniformizer in (R, R^+), thus also in all $(\mathcal{O}_S(U), \mathcal{O}_S^+(U))$. Now the torsion exchange lemma tells one that p is regular in $A/[\varpi]A$, as desired.[39]
The fact that p is a non-zero divisor in A_2 will now be used as follows: since A_2 is by construction p-adic, it suffices to show that the morphism $A_2 \to W(\kappa(x)^+)$ is an isomorphism modulo p. Just to be on the same page, here is the statement one uses:

Lemma 9.6. *Let $\psi\colon A \to B$ be a ring homomorphism and let $f \in A$ such that A is f-adic and f-torsion free and B is $\psi(f)$-adic and $\psi(f)$-torsion free. If ψ is an isomorphism modulo f, then ψ is an isomorphism.*

Proof. The morphism ψ is surjective by Nakayama's lemma. Consider $\ker(\psi)$; this ideal is derived g-complete. Then it suffices to see that $\ker(\psi) \otimes_A A/g = 0$. If one knows that tensoring with A/g the exact sequence
$$0 \longrightarrow \ker(\psi) \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$$
one gets the exact sequence
$$0 \longrightarrow \ker(\psi) \otimes_A A/g \longrightarrow A \otimes_A A/g \longrightarrow B \otimes_A A/g \longrightarrow 0,$$

[38] I wish to thank Matthew Morrow for discussions surrounding this lemma; he was pushing me in the right direction and was suggesting me to look into [**BC20**].

[39] This lemma says the following: If A is some commutative ring, $f, g \in A$ are regular, then $(A/f)[g] \simeq (A/g)[f]$. This can be seen by considering the first homology of the Koszul-complex $K^\bullet(A; f, g) \simeq K^\bullet(A; g, f)$.

it would follow that $\ker(\psi) \otimes_A A/g = 0$, as desired. The obstruction to this sequence being exact is $\mathrm{Tor}^1_A(B, A/g)$. Tensoring the exact sequence

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot f} A \longrightarrow A/f \longrightarrow 0$$

with B over A, one sees that $\mathrm{Tor}^1_A(B, A/g)$ identifies with the g-torsion in B. By assumption it therefore vanishes. $\square$

One is therefore left with showing that

$$A_2/pA_2 \simeq W(\kappa(x)^+)/pW(\kappa(x)^+)$$

is an isomorphism. For this it then suffices to see that

$$\widehat{A}_{[\varpi]}/p\widehat{A}_{[\varpi]} \simeq (\widehat{A/pA})_{[\varpi]}$$

by the formula (51) above. To see this, one uses that $p \in A$ is regular, to obtain the following triangle

$$A \xrightarrow{\cdot p} A \longrightarrow A/pA \xrightarrow{+1} .$$

Applying the derived $[\varpi]$-adic completion, the following triangle

$$\widehat{A}^{\mathbb{L}}_{[\varpi]} \xrightarrow{\cdot p} \widehat{A}^{\mathbb{L}}_{[\varpi]} \longrightarrow (\widehat{A/pA})^{\mathbb{L}}_{[\varpi]} \longrightarrow$$

follows. Since A is $[\varpi]$-torsion free, one obtains $\widehat{A}^{\mathbb{L}}_{[\varpi]} \simeq \widehat{A}_{[\varpi]}$; similiarly A/pA is ϖ-torsion free, so that one gets $(\widehat{A/pA})^{\mathbb{L}}_{[\varpi]} \simeq (\widehat{A/pA})_{[\varpi]}$. Furthermore, recall that p is regular in $\widehat{A}_{[\varpi]}$. Comparing with the short exact sequence

$$0 \longrightarrow \widehat{A}_{[\varpi]} \xrightarrow{\cdot p} \widehat{A}_{[\varpi]} \longrightarrow \widehat{A}_{[\varpi]}/p\widehat{A}_{[\varpi]} \longrightarrow 0,$$

one deduces the claim.
Now let me first quickly explain why (a) is true: since $\mathrm{Spec}(A) = \lim_{x \in U} \mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}^+_S(U)))$ and then by the behaviour of $\mathcal{G}$-torsors on inverse limits of qcqs schemes along affine maps, one has that

$$\operatorname*{colim}_{x \in U} H^1(\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}^+_S(U))), \mathcal{G}_{\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}^+_S(U)))}) \simeq H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{G}_{\mathrm{Spec}(A)}).$$

In fact, recall here that one is working with $\mathcal{G}$ smooth, so that one may take the non-abelian cohomology in the étale topology and then one can cite [**Mar07**, Thm. 2.1]. Then consider the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & W(\mathcal{O}^+_{S,x}) \arrow[r] \arrow[d] & W(\kappa(x)^+) \arrow[d] \\ \mathcal{O}^+_{S,x} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathcal{O}^+_{S,x} \arrow[r] & \kappa(x)^+. \end{tikzcd}$$

Here the morphism $A \to \mathcal{O}^+_{S,x}$ is induced by the colimit of the reduction modulo p maps

$$W(\mathcal{O}^+_S(U)) \to \mathcal{O}^+_S(U).$$

Note that all downward arrows are surjections with henselian kernel: for $W(\kappa(x)^+) \to \kappa(x)^+$ and $W(\mathcal{O}^+_{S,x}) \to \mathcal{O}^+_{S,x}$ this is just the fact that the relevant rings of Witt vectors are p-adic (one takes here just the ring of Witt vectors of perfect rings in char p) and for the last surjection, just use the same observation and the fact that henselian surjections are closed under filtered colimits.
Furthermore, note that $\mathcal{O}^+_{S,x}$ is a filtered colimit of the ϖ-henselian rings $\mathcal{O}^+_S(U)$. Using invariance of $\mathcal{G}$-torsors under henselian pairs, as supplied by Bouthier-Česnavičius [**BC20**, Thm 2.1.6], for both $(\mathcal{O}^+_{S,x}, (\varpi))$ and $(\kappa(x)^+, (\varpi))$, one obtains that

$$H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^+_{S,x}), \mathcal{G}) \simeq H^1(\mathrm{Spec}(\kappa(x)^+), \mathcal{G}).$$

The above commutative diagram induces a corresponding commutative diagram on isomorphism classes of $\mathcal{G}$-torsors:

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathrm{Spec}(A),\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}^+_{S,x})),\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+)),\mathcal{G}) \arrow[d, "\simeq"] \\
H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^+_{S,x}),\mathcal{G}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & H^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^+_{S,x}),\mathcal{G}) \arrow[r, "\simeq"] & H^1(\mathrm{Spec}(\kappa(x)^+),\mathcal{G}).
\end{tikzcd}$$

Here I am allowed to write the isomorphism symbols in the above commutative diagram, because one may use invariance under henselian pairs again. This terminates the verification of part (a).
Now let me turn to part (b). Here the key input will be yet another result of Bouthier-Češnavičius, which one applies twice.
Recall that I still denote $A = \mathrm{colim}_{x\in U} W(\mathcal{O}^+_S(U))$. I explained before that A is $[\varpi]$-torsion free. Then $(A,[\varpi],I=(1))$ is a bounded Gabber-Ramero triple, c.f. [**BC20**, section 2.1.9]. Recall that they call a Gabber-Ramero triple (A,t,I) henselian, if the pair (A,tI) is henselian. Since all the rings $W(\mathcal{O}^+_S(U))$ are also $[\varpi]$-adic and henselian pairs are closed under filtered colimits, one sees that $(A,[\varpi],I=(1))$ is a henselian Gabber-Ramero triple. Denote by $(A_1,[\varpi],I=(1))$ with $A_1 = (\widehat{A})_{([\varpi])}$ the bounded Gabber-Ramero triple corresponding to the $[\varpi]$-adic completion of A (recall that $[\varpi]$ is still regular in A_1); this is again a henselian Gabber-Ramero triple and the morphism of Gabber-Ramero triples $(A,[\varpi],I=(1)) \to (A_1,[\varpi],I=(1))$ satisfies the requirements of [**BC20**] Theorem 2.3.3. (c) (note that by assumption $\mathcal{G}$ is smooth over $\mathbb{Z}_p$ and affine, all their requirements for the group are met).
Then one has the inclusions

$$\mathrm{Spec}(A[1/[\varpi]]) \subseteq \mathrm{Spec}(A) - V(p,[\varpi]) \subseteq \mathrm{Spec}(A),$$

and $\mathrm{Spec}(A_1) - V(p,[\varpi]) \to \mathrm{Spec}(A) - V(p,[\varpi])$ is the pullback

$$\mathrm{Spec}(A) - V(p,[\varpi]) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A_1) \to \mathrm{Spec}(A) - V(p,[\varpi]),$$

so that one can apply their statement to get an isomorphism

$$H^1(\mathrm{Spec}(A) - V(p,[\varpi]),\mathcal{G}) \simeq H^1(\mathrm{Spec}(A_1) - V(p,[\varpi]),\mathcal{G}).$$

Next, consider the Gabber-Ramero triple $(A_1,p,I=(1))$. For the boundedness, recall that it was already verified that p is regular in A_1. Next, observe that (A_1,p) is henselian. For this, it is enough (because henselian pairs are closed under limits and nilpotent thickenings) to see that $A_1/[\varpi] = A/[\varpi]$ is henselian along p, which is ok because A is henselian along p and henselian pairs are preserved under quotients. Now, since also

$$\mathrm{Spec}(A_1[1/p]) \subseteq \mathrm{Spec}(A_1) - V(p,[\varpi]) \subseteq \mathrm{Spec}(A_1),$$

one can apply [**BC20**, Theorem 2.3.3.(c)] again - but this time applied to the morphism of bounded and henselian Gabber-Ramero triples $(A_1,p,I=(1)) \to (\widehat{A_1}_{(p)},p,I=(1))$, to conclude that

$$H^1(\mathrm{Spec}(A_1) - V(p,[\varpi]),\mathcal{G}) \simeq H^1(\mathrm{Spec}(\widehat{A_1}_{(p)}) - V(p,[\varpi]),\mathcal{G}).$$

To get the statement of the sub-Lemma, I am proving right now, on uses the previous discussion comparing completions, which implied that

$$\widehat{A_1}_{(p)} \simeq W(\kappa(x)^+).$$

□

Having this lemma in the pocket, one may finish the proof the main statement, I am hunting right now: recall $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}$ the $\mathcal{G}$-torsor over $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p,[\varpi])$ that was constructed previously via glueing. Let $x \in \mathrm{Spa}(R,R^+)$ be a point, then consider the morphism on 'punctured spectra'

$$\dot{f}_x\colon\ \mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+)) - V(p,[\varpi]) \to \mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p,[\varpi])$$

and the pullback $\dot{f}_x^*(\mathcal{E}^{\mathrm{approx}})$.
Then one can find a unique, up to isomorphism, $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{M}'_x$ which is defined on $\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+))$, extending $\dot{f}_x^*(\mathcal{E}^{\mathrm{approx}})$: here one uses on the one hand a result of Kedlaya, [**Ked20**, Thm. 2.7] (c.f. also with [**SW20**, Prop. 14.2.6.], which is verbatim the statement I am using here), and on the other hand a Lemma of Anschütz, [**Ans20**, Prop. 8.5].
By part (a) of the above lemma, one finds a $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{M}_U$, which is defined over $\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}^+_S(U)))$, such

that its pullback along $\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+)) \to \mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(U)))$ is isomorphic to $\mathcal{M}'_x$. Now a priori, the pullback $\mathcal{E}'_U$ of the given $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{E}^{\mathrm{approx}}$ over $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$ towards $\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(U))) - V(p, [\varpi])$ may not be isomorphic to the restriction of $\mathcal{M}_U$ towards the 'punctured spectrum' $\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(U))) - V(p, [\varpi])$. But by construction both are isomorphic when further pulled back to $\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+)) - V(p, [\varpi])$, so that by part (b) of the above lemma, one finds a rational open $x \in V \subseteq U$, such that they are both isomorphic over $\mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(V))) - V(p, [\varpi])$.
Therefore, consider the $\mathcal{G}$-torsor $\mathcal{M}_V = f_{U,V}^*(\mathcal{M}_U)$, where $f_{U,V}\colon \mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(V))) \to \mathrm{Spec}(W(\mathcal{O}_S^+(U)))$; it extends the $\mathcal{G}$-torsor $\dot{f}_V^*(\mathcal{E}^{\mathrm{approx}})$. It follows that the Frobenius-structure and quasi-isogeny on

$$\dot{f}_V^*(\mathcal{E}^{\mathrm{approx}})$$

induces the same-structure on $\mathcal{M}_V$, so that one gets a $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues module $(\mathcal{M}_V, \varphi_{\mathcal{M}_V})$ of type μ over $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S^\sharp}^+(V^\sharp))$ with a G-quasi-isogeny ρ_V.
Running over all points $x \in \mathrm{Spa}(R, R^+)$, one obtains the desired covering by rational opens of S. It remains to see that the tuples $((\mathcal{M}_V, \varphi_{\mathcal{M}_V}), \rho_V)$ are isomorphic on overlaps and satisfy the cocycle condition. Since one already knows at this point that ψ is injective, one can deduce that the tuples $((\mathcal{M}_V, \varphi_{\mathcal{M}_V}), \rho_V)$ are isomorphic on overlaps and they satisfy the cocycle condition because the restriction from $\mathcal{G}$-Breuil-Kisin-Fargues modules over some integral perfectoid ring A towards $\mathcal{G}$-shtuka is faithful (but not fully faithful in general! c.f. [**PR21**, Proposition 2.2.6]. [40]). □

Remark 25. [41] Here I want to give a slightly different argument for the extension after passing to an analytic covering of $\mathrm{Spa}(R, R^+)$, which , instead of using the results of Bouthier-Česnavičius, makes use of results of Bhatt [**Bha16**] ; I will stick to the case of $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n$ for simplicity.
One looks at the following functor parametrizing all possible extensions of the vector bundle $\mathcal{N}$ on $\mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$:

$$\mathit{Extn}(\mathcal{N})\colon \text{Affd perfectoids}/\operatorname{Spa}(R, R^+)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set},$$

sending $g\colon \mathrm{Spa}(S, S^+) \to \mathrm{Spa}(R, R^+)$ towards pairs, up to equivalence,

$$\{\mathcal{M} \text{ rank } n \text{ vector bundle on } \mathrm{Spec}(W(S^+)), \rho\colon \mathcal{M}[\frac{1}{(p, [\varpi])}] \simeq \dot{g}^*(\mathcal{N})\}.$$

Here I denote by

$$\dot{g}\colon \mathrm{Spec}(W(S^+)) - V(p, [\varpi]) \to \mathrm{Spec}(W(R^+)) - V(p, [\varpi])$$

the induced morphism on 'punctured spectra' (well, $V(p, [\varpi])$ is not really a point here anymore...) and by $\mathcal{M}[\frac{1}{(p,[\varpi])}]$ the restriction of $\mathcal{M}$ to this 'punctured spectrum'. Let $x \in \mathrm{Spa}(R, R^+)$. Then one can use again the result of Kedlaya [**Ked20**, Thm. 2.7], which implies that one has a point $(\mathcal{M}_x, \rho_x = \mathrm{can}) \in \mathit{Extn}(\mathcal{N})(\mathrm{Spa}(\kappa(x), \kappa(x)^+))$. The key claim is now that

$$\mathit{Extn}(\mathcal{N})(\mathrm{Spa}(\kappa(x), \kappa(x)^+)) = \operatorname*{colim}_{x \in U} \mathit{Extn}(\mathcal{N})(\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_S(U), \mathcal{O}_S^+(U))),$$

where the colimit runs over all rational opens $U \subseteq S$ containing x. This would be sufficient to construct the desired extension after passing to a rational covering. As

$$\kappa(x)^+ = \widehat{(\operatorname*{colim}_{x \in U} \mathcal{O}_S^+(U))}_{(\varpi)},$$

the previous claim is really about commutation with completed colimits and to handle this I will use Bhatt's results on generalizations of Beauville-Laszlo glueing : if $\pi\colon Y \to X$ is a morphism of schemes, $Z \subset X$ is a constructible closed, $U = X - Z$, $V = Y - \pi^{-1}(Z)$, such that

$$Z \times_X^L Y \simeq Z,$$

then

$$\mathrm{Vect}(X) \simeq \mathrm{Vect}(Y) \times_{\mathrm{Vect}(V)} \mathrm{Vect}(U).$$

[40]The worry with fullness in general is that when one restricts φ-modules from $\mathcal{Y}_{[\rho,\infty]}$ towards $\mathcal{Y}_{[\rho,\infty)}$ the target category does not care about the '+'-component of the affinoid Huber pair, while the source category certainly does.

[41]This remark was born after a remark given to me by Johannes Anschütz after I told him about the previous lemma.

This is [**Bha16**], Prop. 5.6. - taken together with loc.cit. Lemma 5.12. I want to apply this statement with $X = \mathrm{Spec}(A), Z = V(p, [\varpi]), Y = \mathrm{Spec}(\widehat{A}_{(p,[\varpi])})$, where $A = \mathrm{colim}_{x \in U} W(\mathcal{O}_S^+(U))$; recall that $\widehat{A}_{(p,[\varpi])} \simeq W(\kappa(x)^+)$.[42] The task is therefore to see that

$$A/(p,[\varpi]) \otimes_A^L \widehat{A}_{(p,[\varpi])} \simeq \widehat{A}_{(p,[\varpi])}/(p,[\varpi]),$$

since this is just $A/(p,[\varpi])$. For this, recall that $(p,[\varpi])$ was a regular sequence in both A and $\widehat{A}_{(p,[\varpi])}$. It follows that the Koszul-complex $K_A^\bullet(p,[\varpi])$ is a free resolution of $A/(p,[\varpi])$ and that $K^\bullet_{\widehat{A}_{(p,[\varpi])}}(p,[\varpi])$ is a free resolution of $\widehat{A}_{(p,[\varpi])}/(p,[\varpi])$. Then calculate that

$$\begin{aligned} A/(p,[\varpi]) \otimes_A^L \widehat{A}_{(p,[\varpi])} &\simeq K_A^\bullet(p,[\varpi]) \otimes_A \widehat{A}_{(p,[\varpi])} \\ &\simeq K^\bullet_{\widehat{A}_{(p,[\varpi])}}(p,[\varpi]) \\ &\simeq \widehat{A}_{(p,[\varpi])}/(p,[\varpi]) \\ &\simeq A/(p,[\varpi]), \end{aligned}$$

as desired. The hypothesis in Bhatt's result are therefore satisfied and one has that

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Spec}(A)) \simeq \mathrm{Vect}(\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+))) \times_{\mathrm{Vect}(\mathrm{Spec}(W(\kappa(x)^+) - V(p,[\varpi]))} \mathrm{Vect}(\mathrm{Spec}(A) - V(p,[\varpi])).$$

Since Vect(.) commutes with filtered colimits, one may deduce that

$$Extn(\mathcal{N})(\mathrm{Spa}(\kappa(x),\kappa(x)^+)) = \operatorname*{colim}_{x \in U} Extn(\mathcal{N})(\mathrm{Spa}(\mathcal{O}_S(U), \mathcal{O}_S^+(U))),$$

and this finishes the proof.

9.3. Towards the representability of the generic fiber: some conjectures. Keep the set-up from the previous sections: $(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$ is an integral unramified local Shimura-datum over $\mathbb{Q}_p$ and one still assumes that all slopes of the isocrystal associated to $\mathrm{Ad}(b)$ are > -1. Associated to this data one had the Bültel-Pappas moduli problem of deformations of adjoint nilpotent $\mathcal{G}$-μ-displays $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$. Still, I have to assume unfortunately that $p > 2$.
As said before, it would follow from the representability of the functor $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}$ that the functor $(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})_\eta$ defined on $\mathrm{Affd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E}, \mathcal{O}_{\breve{E}})}$ from above is representable by a rigid analytic space over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$. Using the previous result, Proposition 9.2, I want to explain how one could go about proving the representability of the generic fiber $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_\eta$; at least inside the category of smooth adic spaces over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$.[43]
Therefore, let $\mathrm{SmAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E})}$ be the category of smooth and complete affinoid adic spaces over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$; one may equip this category either with the analytic or étale topology. Now one can restrict both sheaves $\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_\eta$ and Sh_K towards the category $\mathrm{SmAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E})}$ and the previous results will directly imply the existence of a comparison morphism of sheaves.
Namely, if $\mathrm{Spa}(R, R^\circ) \in \mathrm{SmAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E})}$, with associated diamond $\mathrm{Spd}(R, R^\circ)$ over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$, and if

$$\mathrm{Spa}(R, R^\circ) \to \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_\eta$$

is a $\mathrm{Spa}(R, R^\circ)$-valued point, then one can apply the diamond functor to obtain a morphism of pro-étale sheaves over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$,

$$\mathrm{Spd}(R, R^\circ) \to (\mathcal{M}^{\mathrm{BP}}_\eta)^\diamondsuit.$$

Then use the comparison of the diamonds, i.e. Prop. 9.2, to obtain a morphism of pro-étale sheaves over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$

$$\mathrm{Spd}(R, R^\circ) \to (\mathrm{Sh}_K)^\diamondsuit.$$

[42]Indeed, I checked above that $\widehat{(\widehat{A}_{[\varpi]})}_p \simeq W(\kappa(x)^+)$, but note that this also implies that $\widehat{A}_{(p,[\varpi])} \simeq W(\kappa(x)^+)$. Namely, since $(p,[\varpi])$ is a regular sequence, one obtains that

$$\widehat{A}_{(p,[\varpi])} \simeq R\lim_n K_A^\bullet(p^n, [\varpi]^n) = \widehat{A}^{\mathbb{L}}_{(p,[\varpi])}.$$

But then, $\widehat{A}^{\mathbb{L}}_{(p,[\varpi])} \simeq \widehat{(\widehat{A}^{\mathbb{L}}_{[\varpi]})}^{\mathbb{L}}_p$, but one knows already that both completions on the right agree with their classical counterpart; finishing the small argument.

[43]The reason one has to restrict for now to smooth adic spaces is that I will use the fully faithfullness of the diamond functor; in fact semi-normality would be enough here.

By fully faithfulness of the diamond functor, [**SW20**, Prop. 10.2.3.], from smooth adic spaces over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$ towards diamonds over $\mathrm{Spd}(\breve{E})$ (one has to remember the structure morphism!), one now obtains a morphism of smooth adic spaces over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$,

$$\mathrm{Spa}(R, R^\circ) \to \mathrm{Sh}_K .$$

This association is functorial in $\mathrm{Spa}(R, R^\circ)$, so that in total one constructed a comparison morphism of sheaves

$$\Upsilon^{\mathrm{sm}} \colon (\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})_\eta \,|_{\mathrm{SmAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E})}} \to \mathrm{Sh}_K \,|_{\mathrm{SmAffd}_{\mathrm{Spa}(\breve{E})}} .$$

Then there is no way around making the following

CONJECTURE 9.7. The above morphism of sheaves Υ^{sm} is an isomorphism.

To attack this conjecture, one can break it up into two pieces: the injectivity and surjectivity. The injectivity should follow from the 'right' construction of the period morphism in terms of $\mathcal{G}$-μ-displays.

9.4. A conjecture on prismatic crystals. In this subsection I want to state a conjecture which paves the way to showing that the previously constructed morphism Υ^{sm} is actually an epimorphism.
Saying that Υ^{sm} is surjective boils down to the following: let $\mathcal{V}$ be the 'universal crystalline' pro-étale $\underline{G(\mathbb{Q}_p)}$-torsor over the admissible locus $\mathcal{F}l^{\mathrm{adm}}(G, \{\mu\}, [b])$, which falls out of the definition of the admissible locus as those modification of G-bundles on the relative Fargues-Fontaine curve, which are fiberwise trivial; plus the translation between fiberwise trivial G-torsors on the relative Fargues-Fontaine curve and pro-étale $\underline{G(\mathbb{Q}_p)}$-torsors on the perfectoid bases one is working over. Now to give oneself a morphism

$$f \colon \mathrm{Spa}(R, R^\circ) \to \mathrm{Sh}_K,$$

where $\mathrm{Spa}(R, R^\circ)$ is a smooth affinoid rigid-analytic space over $\mathrm{Spa}(\breve{E})$, is equivalent to give oneself a reduction of the $\underline{G(\mathbb{Q}_p)}$-torsor $f^*(\mathcal{V})$ towards a $\underline{\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}$-torsor.
The surjectivity of Υ^{sm} means that one can extend this data - after admissible blow up of a chosen formal model of $\mathrm{Spa}(R, R^\circ)$ - towards a $\mathcal{G}$-μ-display, together with a quasi-isogeny.
One observes that this looks like a relative version of the recent result of Bhatt-Scholze [**BS21**] classifying lattices in crystalline Galois-representations in terms of absolute prismatic F-crystals.
In this direction, I will make the following conjecture in the case of the most basic local Shimura-datum $(\mathrm{GL}_n, \{\mu_{n,d}\}, [b])$ and in the setting, where the smooth, affinoid test adic space $\mathrm{Spa}(R, R^\circ)$ admits a smooth p-adic formal model.
To state this conjecture, I have to introduce a minimum of set-up. Let $\mathrm{Spf}(A)$ be a p-adically smooth affine formal scheme over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Let A_{qsyn} denote the quasi-syntomic site, which, as A is in particular quasi-syntomic, admits as a basis quasi-regular semiperfectoid A-algebras; on this basis one has the prismatic structure sheaf $\Delta_\bullet$, and also the sheaves $\Delta_\bullet[1/p], \Delta_\bullet[1/I], \widehat{\Delta_\bullet[1/I]}_p, \Delta_\bullet\{I/p\}$, see [**BS21**], Construction 6.2. In the following, I will use $\mathrm{Vect}(A_{\mathrm{qsyn}}, ?)$, where

$$? \in \{\Delta_\bullet, \Delta_\bullet[1/p], \Delta_\bullet[1/I], \widehat{\Delta_\bullet[1/I]}_p, \Delta_\bullet\{I/p\}\}$$

as in loc.cit. Notation 2.1. Then one defines

$$\mathrm{Vect}^\varphi(A_{\mathrm{qsyn}}, \Delta_\bullet[1/(p,I)]) = \mathrm{Vect}^\varphi(A_{\mathrm{qsyn}}, \Delta_\bullet[1/p]) \times_{\mathrm{Vect}^\varphi(A_{\mathrm{qsyn}}, \Delta_\bullet[1/p,1/I])} \mathrm{Vect}^\varphi(A_{\mathrm{qsyn}}, \Delta_\bullet[1/I]),$$

and an object in this category has as a crystalline specialization: just apply $. \otimes_{\Delta_\bullet[1/p]} \Delta_\bullet\{I/p\}[1/p]$; and an étale specialization: just apply $. \otimes_{\Delta_\bullet} \widehat{\Delta_\bullet[1/I]}_p$. Recall that Bhatt-Scholze check that $\mathbb{Z}_p$-local systems on the generic fiber of $\mathrm{Spf}(A)$ correspond to $\mathrm{Vect}^\varphi(A_{\mathrm{qsyn}}, \widehat{\Delta_\bullet[1/I]}_p)$, see loc.cit. Cor. 3.8. It therefore makes sense to require that the étale specialization of an object $(\mathcal{N}, \varphi_{\mathcal{N}}) \in \mathrm{Vect}^\varphi(A_{\mathrm{qsyn}}, \Delta_\bullet[1/(p,I)])$ coincides with a given $\mathbb{Z}_p$-local system $\mathcal{T}$.
I will use Koshikawa's log-generalization of prismatic cohomology, as developed in [**Kos21**], which allows one to give a definition of the absolute log-prismatic site. Here and in the following I will use the terminology of Hartl [**Har03**, Def. 1.1 and Prop. 1.2.] for what it means to be a semi-stable p-adic formal scheme. Let $\mathrm{Spf}(A')$ be a p-adic semi-stable affine formal scheme over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Then one equips $\mathrm{Spf}(A')$ with the log-structure coming from the special fiber being given by normal crossing divisors to obtain a p-adic log formal scheme as in [**Kos21**]. I will denote the monoid giving this log-structure

by $M_{\rm ss}$. The category $\mathrm{Spf}(A')_{\Delta_{\log}}$ is the category opposite to the category of all bounded log-prisms (R, I, M_R) as in loc.cit. Def. 3.3. together with a morphism of p-adic formal schemes

$$f\colon \mathrm{Spf}(R/I) \to \mathrm{Spf}(A'),$$

and an exact closed immersion of log-formal schemes

$$(\mathrm{Spf}(R/I, f^*(M_{\rm ss})) \to (\mathrm{Spf}(R), M_R)^a.$$

As in loc. cit., after Def. 4.1., one has the structure sheaf $\mathcal{O}_{\Delta_{\log}}$ on the category $(\mathrm{Spf}(A'))_{\Delta_{\log}}$, which allows one to make sense of the category of log-prismatic crystals in vector bundles, i.e. of $\mathrm{Vect}((\mathrm{Spf}(A'))_{\Delta_{\log}}, \mathcal{O}_{\Delta_{\log}})$. Similiarly as before, one can define

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Spf}(A'))_{\Delta_{\log}}, \mathcal{O}_{\Delta_{log}}[1/(p, I_{\Delta_{\log}})]).$$

Let me give A the trivial log-structure, denoted by $M_{\rm triv}$. Assume one is given a morphism of affine log-formal schemes

$$g\colon (\mathrm{Spf}(A'), M_{\rm ss}) \to (\mathrm{Spf}(A), M_{\rm triv}).$$

One can pull back the object

$$\mathcal{N} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Spf}(A)_{\Delta}, \mathcal{O}_{\Delta}[1/(p, I_{\Delta})])$$

towards an object

$$g^*(\mathcal{N}) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Spf}(A')_{\Delta_{\log}}, \mathcal{O}_{\Delta_{\log}}[1/(p, I_{\Delta_{\log}})]).$$

Then it makes sense to require the existence of an $\mathcal{M} \in \mathrm{Vect}((\mathrm{Spf}(A'))_{\Delta_{\log}}, \mathcal{O}_{\Delta_{\log}})$, which extends $g^*(\mathcal{N})$.

Conjecture 9.8. [44] Let $\mathrm{Spf}(A)$ be an affine smooth p-adic formal scheme over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ and let $(\mathcal{T}, \rho)$ be a pair, where $\mathcal{T}$ is a rank n étale $\mathbb{Z}_p$-local system on the generic fiber $\mathrm{Spf}(A)^{\rm ad}_{\eta}$ and

$$\rho\colon \mathcal{T} \otimes_{\underline{\mathbb{Z}_p}} \underline{\mathbb{Q}_p} \simeq f^*(\mathcal{V}).$$

(a): There exists a finite locally free prismatic F-crystal on $(A_{\rm qsyn}, \Delta_\bullet[1/(p, I)])$, whose étale specialization is $\mathcal{T}$ and whose crystalline specialization is $(D, \varphi_D) \otimes_{W(k)[1/p], \varphi} \Delta_\bullet\{I/p\}[1/p]$; here (D, φ_D) is some isocrystal representing the class $[b] \in B(\mathrm{GL}_n, \mu_{n,d})$.

(b): Let $\mathcal{N} \in \mathrm{Vect}(A_{\rm qsyn}, \Delta_\bullet[1/(p, I)])$ be a finite locally free crystal. Then there exists a composition of an rig-étale morphism, followed by an admissible blow-up, of p-adic formal schemes over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$

$$g\colon \mathrm{Spf}(A') \to \mathrm{Spf}(A),$$

where $\mathrm{Spf}(A')$ is a semi-stable p-adic formal $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$, and a finite locally free log-prismatic for $\mathcal{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Spf}(A')_{\Delta_{\log}}, \mathcal{O}_{\Delta_{\log}})$, which extends $\mathcal{N}$.

Remark 26. (i): Let me admit right away that a conjecture in this direction for the local Shimura-datum

$$(\mathrm{GL}_n, \{\mu_{n,d}\}, [b])$$

is probably not so interesting, since in this case one can translate everything back to p-divisible groups and use the representability of the corresponding raw Rapoport-Zink space; needless to say the idea is here to find a direct argument, which does not make use of the representability and which also generalizes to a situation where one considers $\mathcal{G}$-torsors - in fact, I am rather optimistic that once the above linear case is understood, one can adapt to the more general situation.

(ii): I do not know whether an object as in (a) is uniquely determined.

(iii): In contrast, I imagine that an object as in (b) is uniquely determined.

Finally let me point out, that in the perfectoid setting one could see the arguments in the proof of Prop. 9.2 as basically verifying the above conjecture.

[44] I thank Peter Scholze for an exchange in November 2020 concerning this statement and giving me more confidence in it than I had before our exchange.

9.5. Formal models of the tubes. As a not too suprising application of the previous results, I want to explain how to check the 'local' representability statement conjectured by Pappas-Rapoport [**PR21**, Conjecture 3.3.4] in the easier non-ramified case. I will use the notation from loc.cit. section 3.3.1.
Let $(\mathcal{G}, \{\mu\}, [b])$ be an integral non-ramified local Shimura-datum over $\mathbb{Z}_p$ and $p \geq 3$. In this case, one may take for the local model simply the Flag-variety $\mathcal{G}/P_\mu$ and then consider the Scholze v-sheaf $\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}}$ as in [**SW20**, Def. 25.1.1.]. Using the main results of the PhD-thesis of Gleason [**Gle21**], for a point $x \in X_\mu(b)(k)$, one may consider the formal completion

$$\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}},$$

(c.f. [**PR21**] section (3.3.4.)). This should be a qcqs small v-sheaf over $\mathrm{Spd}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$, but I did not find this exact statement in the literature.

Proposition 9.9. The conjecture [**PR21**, Conjecture 3.3.4] is satisfied.

Proof. Since the perfect affine Deligne-Lustzig variety $X_\mu(b)$ is isomorphic to the perfection of the reduced locus of the Bültel-Pappas moduli problem, one can consider $x \in X_\mu(b)$ as the datum of a pair $(\mathcal{P}_x, \rho) \in \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}(k)$.
Now consider the following deformation problem: Let Art_k be the category of augmented local Artin $\mathcal{O}_{\breve{E}}$-algebras (i.e. local Artin-algebras $(A, \mathfrak{m})$, with an isomorphism $A/\mathfrak{m} \simeq k$). Let

$$\mathrm{Def}_x \colon \mathrm{Art}_k \to \mathrm{Set}$$

be the functor classifying deformations of $\mathcal{P}_x$. By [**BP20**, section 3.5.9.] this functor is pro-representable by a complete noetherian local and regular ring (in fact, a power series ring over $\mathcal{O}_{\breve{E}}$) A_{univ}. Since

$$W_{\mathbb{Q}}(A_{\mathrm{univ}}/\mathfrak{m}^n_{\mathrm{univ}}) = W_{\mathbb{Q}}(k),$$

one may lift the quasi-isogeny ρ, to get a compatible system of objects $(\mathcal{P}_n, \rho_n) \in \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}(A_{\mathrm{univ}}/\mathfrak{m}^n_{\mathrm{univ}})$, i.e. one obtains a morphism

$$\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{univ}}) \to \mathcal{M}^{\mathrm{BP}}.$$

Passing to associated v-sheaves on $\mathrm{Perf}_{\overline{k}_E}$, and using the extension of the lifting result for crystalline quasi-isogenies as provided by Lemma 8.7, one constructs easily a morphism of v-sheaves over $\mathrm{Perf}_{\overline{k}_E}$,

$$(\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})_v \to \mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}}.$$

The composition

$$(\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{univ}}))_v \longrightarrow (\mathcal{M}^{\mathrm{BP}})_v \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}}$$

factors over $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}}$. The induced morphism

$$(\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{univ}}))_v \to \widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}}$$

is qcqs[45]: $(\mathrm{Spf}(A_{\mathrm{univ}}))_v \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})_v$ is qcqs and $\widehat{\mathcal{M}^{\mathrm{int}}_{\mathrm{Scholze}/_x}} \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})_v$ is qs (as a composite of an open immersion and since the Scholze v-sheaf is quasi-separated over $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})_v$ by a result of Gleason [**Gle21**, Prop. 2.25]), so that by e.g. [**SGA71**, Prop. 1.8. (iii)] this induced morphism is in fact qcqs. It therefore suffices to check it is an isomorphism on geometric points. This then follows from the results in section 7 in characteristic 0 and is direct in characteristic p. □

[45]I thank George Pappas for making me aware of this.

Chapitre 4

The universal special formal $\mathcal{O}_D$-module in dimension one

1. Introduction

One of the most widely studied objects in p-adic geometry is the non-archimedean analogue of the upper half plane:

$$\Omega^d_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{P}^{d-1,\mathrm{ad}}_{\mathbb{Q}_p} - \mathcal{H},$$

where $\mathcal{H}$ is the union of all $\mathbb{Q}_p$-rational hyperplanes inside $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{Q}_p}$. One source of fascination comes from the fact that the base-change $\Omega^d \times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)$[1] has a tower of highly non-trivial finite étale coverings, which incodes Langlands (and Jacquet-Langlands) correspondences in both ℓ-adic ([**Fal94**]) and p-adic local Langlands ([**CDN20**] for $d = 2$).

These covering spaces were constructed by Drinfeld in his seminal and very short paper [**Dri76**]; an article which is both famous and infamous for it's importance and lack of details. To explain how Drinfeld goes about constructing these covering spaces, one needs actually to work with an integral model of the rigid-analytic variety $\Omega^d_{\mathbb{Q}_p}$.

The following construction of this integral model is due to Deligne: Let $\mathcal{BT}(\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p))$ be the Bruhat-Tits building of the group PGL_d. The set of vertices (=0-simplices) is given by homothety classes of $\mathbb{Z}_p$-lattices inside of $\mathbb{Q}_p^d$. A collection of vertices $[\Lambda_{i_0}], ..., [\Lambda_{i_r}]$ forms a simplex, if there are representatives $\Lambda_{i_0}, ..., \Lambda_{i_r}$, such that

$$p\Lambda_{i_r} \subset \Lambda_{i_0} \subset ... \subset \Lambda_{i_r}.$$

Now one associates to a simplex Δ inside of $\mathcal{BT}(\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p))$ an affine p-adic formal scheme as the solution of the following moduli problem: fix a set of representatives $\Lambda_{i_0}, ..., \Lambda_{i_r}$ for the simplex Δ and let

$$\widehat{U}_\Delta \colon \mathrm{Nilp}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$$

be the functor which sends a scheme S on which p is Zariski-locally nilpotent[2] towards equivalence classes of triples $(\mathcal{L}_{i_k}, \alpha_{i_k}, \Pi_k)$, where $\mathcal{L}_{i_k}$ are line bundles on S, $\alpha \colon \Lambda_{i_k} \to \mathcal{L}_{i_k}$ are $\mathbb{Z}_p$-linear morphisms and $\Pi_k \colon \mathcal{L}_{i_k} \to \mathcal{L}_{i_{k+1}}$ are $\mathcal{O}_S$-linear morphisms. This data is required to give rise to a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
p\Lambda_{i_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i_{r-1}}/p"] & \Lambda_{i_0}... \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i_0}"] & \Lambda_{i_{r-1}} \arrow[d, "\alpha_{i_{r-1}}"] \\
\mathcal{L}_{i_{r-1}} \arrow[r, "\Pi_{r-1}"] & \mathcal{L}_{i_0}... \arrow[r, "\Pi_{i_0}"] & \mathcal{L}_{i_{r-1}}.
\end{tikzcd}$$

Furthermore, one requires that the following condition is satisfied:

(Deligne): For $m \in \Lambda_{i_{k+1}} - \Lambda_{i_k}$ (resp. $m \in \Lambda_{i_0} - p\Lambda_{i_r}$), the section $\alpha_{i_{k+1}}(m) \in \mathcal{L}_{i_{k+1}}$ (resp. $\alpha_{i_0}(m) \in \mathcal{L}_{i_0}$) does not vanish on S.

One checks that this functor in fact does not depend on the choice of the representatives which were implicit in the construction. Then it is not hard to see that $\widehat{U}_\Delta$ is representable by an affine p-adic formal scheme $\mathrm{Spf}(A_\Delta)$. For example, if Δ is a maximal simplex, then one has (non-canonically)

$$A_\Delta \simeq \mathbb{Z}_p\{X_1, ..., X_d, u^{-1}\}/(X_1 \cdot ... \cdot X_d - p),$$

where

$$u = \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{F}_p^{d-1}} u_{i,\lambda}$$

with

$$u_{i,\lambda} = 1 + \lambda_1 X_{i-1} + \lambda_2 X_{i-1} X_{i-2} + ... \lambda_{d-1} X_{i-1} X_{i-2} \cdots X_{1+i-d}.$$

[1]Recall that $\breve{\mathbb{Q}}_p$ denotes the completion of the maximal unramified extension of $\mathbb{Q}_p$.

[2]In the following I write Nilp for the category of these schemes.

If Δ' is a subsimplex of Δ, then the natural morphism $\widehat{U}_{\Delta'} \to \widehat{U}_\Delta$ is an open immersion and one defines

$$\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p} = \operatorname*{colim}_{\Delta \in \mathcal{B}T(\mathrm{PGL}_d(\mathbb{Q}_p))} \widehat{U}_\Delta.$$

This is a p-adic semi-stable formal scheme which is indeed a formal model of $\Omega^d_{\mathbb{Q}_p}$.
Drinfeld's key observation was that $\widehat{\Omega}^d_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ admits a moduli interpretation. To introduce this moduli problem one needs a bit more set-up: let D be a central simple algebra of Brauer-invariant $1/d$, with ring of integers $\mathcal{O}_D$ and fixed uniformizer $\Pi \in \mathcal{O}_D$. Denoting by $K_d/\mathbb{Q}_p$ the degree d unramified extension with ring of integers $\mathcal{O}_{K_d}$ and choosing an embedding $K_d \hookrightarrow D$, one gets a presentation of $\mathcal{O}_D$ as a non-commutative polynomial ring over $\mathcal{O}_{K_d}$ in the variabel Π.

Definition 17. Let $S \in \mathrm{Nilp}$. A special formal $\mathcal{O}_D$-module over S is the datum of a pair (X, ι), where X is a p-divisible group over S and ι is a $\mathbb{Z}_p$-algebra homomorphism

$$\iota \colon \mathcal{O}_D \to \mathrm{End}(X),$$

such that the following axiom is satisfied:

(Drinfeld): at all geometric points of S the action of $\mathcal{O}_{K_d}$ splits the Lie-algebra of X into a sum of d distinct characters.

Fix a special formal $\mathcal{O}_D$-module $\mathbb{X}$ over $k = \overline{\mathbb{F}}_p$, which is of height d^2 and dimension d. It is an important fact that up to $\mathcal{O}_D$-linear isogeny there is precesily one such special formal $\mathcal{O}_D$-module over k.
Then Drinfeld considered the following moduli problem, defined over $\breve{\mathbb{Z}}_p = W(k)$,

$$\mathcal{D} \colon \mathrm{Nilp}^{\mathrm{op}}_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \to \mathrm{Set}$$

sending $S \in \mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ towards pairs (X, ρ) up to equivalence, where X is a special formal $\mathcal{O}_D$-module over S and

$$\rho \colon \mathbb{X} \times_{\mathrm{Spec}(k)} \overline{S} \dashrightarrow X \times_S \overline{S}$$

is a $\mathcal{O}_D$-linear quasi-isogeny of height 0, which is defined over $\overline{S} = V(p) \subset S$.

Theorem 1.1. (Drinfeld)
The functor $\mathcal{D}$ is representable by the formal scheme $\widehat{\Omega}^d_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$.

The system of finite étale coverings of $\Omega^d_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ is then constructed as the generic fiber of the p^n-torsion points of the universal object over $\widehat{\Omega}^d_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$.
The basic aim of this note is to give a new proof of this theorem for $d = 2$ by explicitely constructing the display of the universal object.
Let me outline the construction. The idea is to construct first a special formal $\mathcal{O}_D$-module, together with a $\mathcal{O}_D$-linear quasi isogeny of height 0 towards the fixed framing object $\mathbb{X}$, over the special fiber

$$\overline{\Omega}^2_k := \widehat{\Omega}^d_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)} \mathrm{Spec}(k).$$

This morphism

$$\Upsilon_0 \colon \overline{\Omega}^2_k \to \overline{\mathcal{D}}$$

should be constructed in such a way that on k-rational points one automatically gets a bijection. In section 3 below, I explain in detail how this can be done; roughly the idea is to construct explicitely an inverse to the morphism

$$\Phi_k \colon \mathcal{D}(k) \to \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p}(k)$$

constructed by Drinfeld. The display of the inverse image of a point $x \in \overline{U}_{\{\Lambda\}}(k)$ will depend on a scalar $\lambda \in k$, which is not $\mathbb{F}_p$-rational. Letting this scalar vary one obtains a display over $\overline{U}_{\{\Lambda\}}$ with exactly one critical index. If one has a simplex

$$\Delta : p\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda$$

one now wants to glue the two families over $\overline{U}_{\{\Lambda\}}$ and $\overline{U}_{\{\Lambda'\}}$. For this, one observes that the previously constructed families also extend over the locus where the variable vanishes and over this locus these two families are identified. This extension step for $d = 2$ is automatic and I don't know how to do it for $d > 2$.

Afterwards one uses Ferrand-glueing, to obtain a family of displays over $\overline{U}_\Delta$. One has now constructed the desired morphism

$$\Upsilon_0 \colon \overline{\Omega}^2_k \to \overline{\mathcal{D}}.$$

By construction one has that $\Upsilon_0(k)$ is a bijection. Afterwards one uses Grothendieck-Messing deformation theory to lift the previously constructed family over $\overline{\Omega}^2_k$ to all p-adic thickenings. To conclude that this morphism

$$\Upsilon \colon \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \to \mathcal{D}$$

is an isomorphism one argues as Drinfeld does by checking that it is enough to show that Υ_0 is an isomorphism; for this one just has to convince oneself that this morphism is étale which is handled again by using Grothendieck-Messing deformation theory.
Here is a quick overview of the sections below: In the first section I set up some notations. In the second section I explain how to reformulate the moduli problem $\mathcal{D}$ completly in terms of displays; furthermore, basics of the deformation theory of special $\mathcal{O}_D$-displays are discussed. The third section explains in depth how to find the right displays over the special fiber. Afterwards, in section four, the family of special $\mathcal{O}_D$-displays over $\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ is constructed. After some reductions in section five, in the final section it is checked that the natural transformation Υ is really an isomorphism.

1.1. Acknowledgment. This project was given to me by my mentor Thomas Zink many years ago; most of the idea here are clearly due to him. I want to thank him for the significant role he played in my mathematical upbringing and I wish to aplogize for the long time it took to make this publicly available and that I never managed to work out the case $d > 2$.

1.2. Notations. I will work over $K = \mathbb{Q}_p$, $d \geq 2$ is some integer, which will mostly be just $d = 2$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ is a fixed algebraic closure, inducing an algebraic closure $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ of $\mathbb{F}_p$, which I use to built the maximal unramified extension $W(\overline{\mathbb{F}}_p)[1/p] = \breve{\mathbb{Q}}_p$, contained inside of $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Sometimes I will write $W = W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ and $\sigma \in \mathrm{Aut}(W)$ always denotes the Wittvector-Frobenius on W. Let $\mathbb{F}_{p^d}$ be the degree d extension of $\mathbb{F}_p$, contained inside of $\overline{\mathbb{F}}_p$ and $K_d = W(\mathbb{F}_{p^d})[1/p]$ denotes the unramified extension of degree d of $\mathbb{Q}_p$, with Frobenius-automorphism denoted by $\tau_d \in \mathrm{Gal}(K_d/\mathbb{Q}_p)$, and which comes by the set-up with a canonical embedding

$$\psi_0 \colon K_d \hookrightarrow \breve{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p,$$

D is a central simple $\mathbb{Q}_p$-algebra of Brauer-invariant $1/d$, with ring of integers $\mathcal{O}_D$ and I fix throughout a uniformizer $\Pi \in \mathcal{O}_D$, which then satisfies $\Pi^d = p$. Choosing an embedding $\mathcal{O}_{K_d} \subseteq \mathcal{O}_D$, one gets the presentation $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{K_d}[\Pi]$ as the non-commutative polynomial ring in Π with the conditions that $\Pi^d = p$ and $\Pi \cdot x = \tau_d(x) \cdot \Pi$. A p-adic ring will always mean a p-adically complete and seperated ring. If R is some $\mathbb{Z}_p$-algebra, I write Nilp_R for the category of R-schemes on which Zariski-locally p is nilpotent.

2. Reformulating the moduli problem

The aim of this section is to reformulate Drinfeld's moduli problem of special formal $\mathcal{O}_D$-modules using Zink's theory of displays.
Let $R \in \mathrm{Nilp}$ and consider a special formal $\mathcal{O}_D$-module over $\mathrm{Spec}(R)$. Let me start with the following comments concerning this concept:

Remark 27. (i): In general, the height of a special formal $\mathcal{O}_D$-module over S is locally constant and given by a multiple of d^2 : To see this, let S be connected, so that the height is constant. Let $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(k) \to S$ be a geometric point and since $\mathrm{ht}(X) = \mathrm{ht}(\bar{x}^*(X))$, one has to determine the height of the pullback $\bar{x}^*(X)$. Here one can use Dieudonné-theory to replace $\bar{x}^*(X)$ by a tuple $(M, V, F, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}-\mathrm{grad})$ as in Lemma 2.1. Since $\Pi\colon M_i \to M_{i+1}$ is an isomorphism after inverting p, one sees that $\mathrm{rk}_W(M_i) = \mathrm{rk}_W(M_{i+1})$ for all i. Let $r = \mathrm{rk}_W(M_0)$ be this common value of the rank. By the special-condition, it follows that $\mathrm{lg}_W(\mathrm{coker}(\Pi_i)) = \mathrm{lg}_W(\mathrm{coker}(\Pi_{i+1}))$ for all i. Then one gets, using that $\Pi^d = \cdot p$ and that Π is thus injective,

$$\begin{aligned} r =& \dim_k[M_0 : \Pi^d M_0] \\ =& \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{lg}_W(\mathrm{coker}(\Pi_i)) \\ =& d \cdot \mathrm{lg}_W(\mathrm{coker}(\Pi_0)). \end{aligned}$$

In total, one sees that $\mathrm{rk}_W(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{rk}_W M_i = d \cdot \mathrm{rk}_W(M_0) = d^2 \cdot \mathrm{lg}_W(\mathrm{coker}(\Pi_0))$.

(ii): I recall the important fact that over k there is up to $\mathcal{O}_D$-linear isogeny only one special formal $\mathcal{O}_D$-module of height d^2 and dimension d (c.f. [**RZ96**, Lemma 3.60]). This is the key reason why the formal scheme representing the Drinfeld moduli problem is p-adic and the Drinfeld case is basically the only case of RZ-spaces where such a phenomen can be observed.

(iii): A special formal $\mathcal{O}_D$-module of height d^2 and dimension d is automatically a formal p-divisible group, i.e. at all geometric points of S it has no étale part. Again, one may check this at a geometric point $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}(k) \to S$ and use Dieudonné-theory there to replace $\bar{x}^*(X)$ by a tuple $(M, F, V, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}-\mathrm{grad})$ as before. Then it suffices to see that V is topologically nilpotent on M, i.e. it suffices that V is nilpotent on $M/pM = M/\Pi^d M$. Now $M/\Pi^d M$ has a descending filtration given by $\Pi^i M/\Pi^d M$, $i = 1, ..., d-1$, whose graded pieces are always given by $M/\Pi M$. It follows inductively then that it suffices to show that V acts nilpotently on $M/\Pi M$. But this follows from the fact that there exists at least one critical index: for all i, the morphism

$$\bar{V}\colon\ \mathrm{coker}(\Pi_i) \to \mathrm{coker}(\Pi_{i+1})$$

is either an isomorphism or the zero morphism (here I use the condition on the height: it implies by the previous remark (i) above that $\mathrm{lg}_W(M_{i+1}/\Pi M_i) = 1$); if it were always an isomorphism, then also $\bar{V}\colon M/\Pi M \to M/\Pi M$ would be an isomorphism, so that also $\bar{\Pi}\colon\ \mathrm{Lie}(X) \to \mathrm{Lie}(X)$ would be an isomorphism, which is wrong since one finds a critical index. Here I recall that an index $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ is called critical if the induced morphism

$$\Pi\colon\ \mathrm{Lie}(X)_i \to \mathrm{Lie}(X)_{i+1}$$

is the zero morphism.

(iv): One can formulate condition (a) equivalently as follows: étale locally on S (here it suffices to take the étale covering $S \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_d})) \to S$), if one looks at the eigenspace decomposition

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\psi\colon \mathcal{O}_{K_d} \hookrightarrow \mathcal{O}_S} (\mathrm{Lie}(X))_\psi,$$

where $\mathcal{O}_{K_d} \subset \mathcal{O}_D$ acts on $\mathrm{Lie}(X)_\psi$ via ψ, then all $(\mathrm{Lie}(X))_\psi$ are line-bundles over S.

Part (iii) of the previous remark opens the way to describe a special formal $\mathcal{O}_D$-module via Zink's theory of displays ([**Zin02**]); amplified by a theorem of Lau ([**Lau08**]), which says that Zink's classification of formal p-divisible groups by nilpotent displays extends to all p-adic rings. Using this, the next lemma is rather formal and well-known:

Lemma 2.1. *Let* $\mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ *. Then there is an equivalence of categories between special formal* $\mathcal{O}_D$*-modules of height* d^2 *and dimension* d *over* $\mathrm{Spec}(R)$ *and the data of triples* $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$, *where* $\mathcal{P}$ *is a display over* R*, which is locally free on* R *of rank* d^2, $\Pi \in \mathrm{End}_{\mathrm{Displ}}(\mathcal{P})$ *and the datum of* *a $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-grading $P = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} P_i$, $Q = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} Q_i$, such that $Q_i = P_i \cap Q$, $\deg(F) = \deg(\dot{F}) = +1$, $\deg(\Pi) = +1$, $\Pi^d = \cdot p$, all P_i/Q_i are locally free of rank 1 over R.*[3]

Proof. Recall that I fixed one embedding $\psi_0 \colon K_d \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, so that one has

$$\mathrm{Hom}(K_d, \overline{\mathbb{Q}}_p) \simeq \{\psi_0 \circ \tau_d^{-i} \colon i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\}.$$

Let me denote $\psi_i = \psi_0 \circ \tau_d^{-i}$. Using the Cartier-morphism $\triangle\colon \breve{\mathbb{Z}}_p \to W(\breve{\mathbb{Z}}_p)$, One can then give $W(R)$ the structure of a $\mathcal{O}_{K_d}$-algebra via ψ_i, i.e. one considers the composition

$$\mathcal{O}_{K_d} \xrightarrow{\psi_i} \breve{\mathbb{Z}}_p \longrightarrow W(\breve{\mathbb{Z}}_p) \longrightarrow W(R),$$

which I will again denote by ψ_i. Since R is a $\breve{\mathbb{Z}}_p$-algebra, for a given special formal $\mathcal{O}_D$-module (X, ι) the $\mathcal{O}_S$-module $\mathrm{Lie}(X)$ already splits under the action of $\mathcal{O}_{K_d}$ into eigenspaces which are line-bundles (i.e. one does not need to pass to any étale covering of $\mathrm{Spec}(R)$). Now let $\mathcal{P} = (P, Q, F, \dot{F})$ be the nilpotent display over R associated to the p-divisible group X over $\mathrm{Spec}(R)$. By the full faithfullness part of the equivalence of categories between nilpotent displays and formal p-divisible groups, one gets a $\mathbb{Z}_p$-algebra homomorphism

$$\iota\colon \mathcal{O}_D \to \mathrm{End}_{\mathrm{Displ}}(\mathcal{P}).$$

The $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-grading is then simply defined as follows:

$$P_i = \{x \in P\colon \iota(a)(x) = \psi_i(a)\cdot x \text{ for all } a \in \mathcal{O}_{K_d}\},$$

and

$$Q_i = \{y \in Q\colon \iota(a)(y) = \psi_i(a)\cdot y \text{ for all } a \in \mathcal{O}_{K_d}\}.$$

Then one has that $P = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} P_i$, because it is the decomposition induced on P by the isomorphism $W(R) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{K_d} \simeq \prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (W(R))_{\psi_i}$, and similiarly for Q. The datum of $\Pi \in \mathrm{End}_{\mathrm{Displ}}(\mathcal{P})$ is then simply $\iota(\Pi)$ and the condition $\deg(F) = \deg(\dot{F}) = +1$ follows, since these are F-linear morphisms, while $\deg(\Pi) = +1$ follows from the equation $\Pi\cdot a = \tau_d(a)\cdot\Pi$ inside of $\mathcal{O}_D$. Now, recall that the finite projective R-module P/Q identifies with the R-module $\mathrm{Lie}(X)$ and P_i/Q_i corresponds then under this identification to the ψ_i-eigenspace, so that it has to be finite locally free of rank 1; it is easy to see that one may reverse this whole process and get from the triple $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ a special formal $\mathcal{O}_D$-module (X, ι) over $\mathrm{Spec}(R)$ and this finishes the proof. □

One can furthermore translated quasi-isogenies as follows:

Lemma 2.2. *Let $R \in \mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$ and X, Y be special formal $\mathcal{O}_D$-modules over $\mathrm{Spec}(R)$ and let $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ be the corresponding special $\mathcal{O}_D$-displays. Then the datum of a $\mathcal{O}_D$-linear quasi-isogeny*

$$\rho\colon X \dashrightarrow Y$$

is equivalent to the datum of a $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-graded, Π-compatible isomorphism of isodisplays

$$\rho\colon \mathcal{P}(X)[1/p] \simeq \mathcal{P}(Y)[1/p].$$

For the definition of isodisplays, please see [**Zin02**, Definition 61] and then *loc.cit.* Example 63 how to associate to a display an isodisplay.

Proof. This follows because a quasi-isogeny between formal p-divisible groups translates into an isomorphism of the isodisplays corresponding to the nilpotent displays of the respective formal p-divisible groups. □

In total, this allows one to reformulate the moduli problem of special formal $\mathcal{O}_D$-modules up to isogeny completly in terms of displays: Let (N, φ_N, ι) be the $\mathcal{O}_D$-isodisplay associated to the special $\mathcal{O}_D$-display of $\mathbb{X}$. The functor

$$\mathcal{D}\colon \mathrm{Nilp}_W^{op} \to \mathrm{Set}$$

introduced in the introduction is isomorphic to the functor that sends a p-nilpotent W-algebra R to equivalence classes of tuples $\{(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad}, \rho)\}/\sim$ where $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ is a special $\mathcal{O}_D$-display over R and

$$\rho\colon N \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(k)} W_{\mathbb{Q}}(R/pR) \simeq \mathcal{P}_{R/pR}[1/p],$$

[3]Note that such a triple $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ is automatically a nilpotent display: at all geometric points of $\mathrm{Spec}(R)$, the display identifies with a Dieudonné-module and one can argue as in Remark 27 (iii).

is an isomorphism of special $\mathcal{O}_D$-Isodisplays, which is of height 0. Two pairs $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad}, \rho)$ and $(\mathcal{P}', \Pi', \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad}, \rho')$ are equivalent, if the $\mathcal{O}_D$-linear quasi-isogeny

$$\rho' \circ \rho^{-1} \colon \mathcal{P}'_{R/pR} \dashrightarrow \mathcal{P}_{R/pR}$$

lifts to an isomorphism of special $\mathcal{O}_D$-displays $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad}) \simeq (\mathcal{P}', \Pi', \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$.
I next discuss a bit the deformation theory of special formal $\mathcal{O}_D$-modules from the point of view of displays. Let me consider a pd-thickening of p-nilpotent $\breve{\mathbb{Z}}_p$-algebras $S \twoheadrightarrow R$ with kernel denoted by $\mathfrak{a}$. One requires that the pd-structure γ on $\mathfrak{a}$ is compatible with the natural one on $p\mathbb{Z}_p$. Recall that one then has Zink's relative Witt-frame $\mathcal{W}(S/R)$, which comes with a strict nil-crystalline frame-morphism

$$\epsilon_{S/R} \colon \mathcal{W}(S/R) \to \mathcal{W}(R).$$

This frame is defined as follows: let

$$\mathrm{Fil}(W(S)) := \ker(W(S) \to R) = W(\mathfrak{a}) + I_S.$$

Zink's logarithmic ghost components (c.f. [**Zin02**, section 1.4.]) define an isomorphism

$$\log \colon W(\mathfrak{a}) \simeq \prod_{i=0}^{\infty} \mathfrak{a}.$$

This gives the splitting $W(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \oplus I(\mathfrak{a})$, where $I(\mathfrak{a}) = V(W(\mathfrak{a}))$ and $\mathrm{Fil}(W(S)) = \mathfrak{a} \oplus I(S)$. Using this one can define (c.f. [**Zin02**, Lemma 38])

$$\dot{F} \colon \mathrm{Fil}(W(S)) \to W(S)$$

via $\dot{F}|_{I(S)} = V^{-1}$ and $\dot{F}|_{\mathfrak{a}} = 0$. In total, one has the frame with constant p

$$\mathcal{W}(S/R) = (W(S), \mathrm{Fil}(W(S)), R, F, \dot{F}).$$

The main theorem of the deformation theory of displays ([**Zin02**, Thm. 44]) says that

$$\epsilon_{S/R} \colon \mathcal{W}(S/R) \to \mathcal{W}(R)$$

induces an equivalence of categories between nilpotent displays over R and nilpotent windows over the frame $\mathcal{W}(S/R)$.

Lemma 2.3. *The category of special $\mathcal{O}_D$-displays of height d^2 and dimension d over R is equivalent to the category of triples $(\widetilde{\mathcal{P}}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$, where $\widetilde{\mathcal{P}}$ is a nilpotent $\mathcal{W}(S/R)$-window of height d^2, $\Pi \in \mathrm{End}_{\mathcal{W}(S/R)}(\widetilde{\mathcal{P}})$, such that $\Pi^d = \cdot p$, and one has a $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-grading $\widetilde{P} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \tilde{P}_i$, $\widetilde{Q} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \tilde{Q}_i$, $\tilde{Q}_i = \tilde{Q} \cap \tilde{P}_i$, $\deg(\dot{F}) = \deg(F) = +1$, $\deg(\Pi) = +1$ and for the finite projective R-module $\tilde{P}/\tilde{Q}$, one requires that all graded parts $\tilde{P}_i/\tilde{Q}_i$ are finite locally free R-modules of rank 1.*

Proof. This follows formally by chasing the additional structures through the equivalence of categories induced by the frame morphism $\epsilon_{S/R}$. $\square$

The statement I will actually need for the construction of the universal special $\mathcal{O}_D$-display is the following:

Lemma 2.4. *Let $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ be a special $\mathcal{O}_D$-display over R. Denote by $(\widetilde{\mathcal{P}}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ the uniquely determined lift, as provided by the previously lemma. Then to give a lift of $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ towards a special $\mathcal{O}_D$-display over S is the same as giving oneself a colletion of surjections of finite projective S-modules*

$$\tilde{P}_i / I(S)\tilde{P}_i \twoheadrightarrow L_i,$$

for $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, and morphisms $L_i \to L_{i+1}$, such that

(a): *For all $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ one has a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} \tilde{P}_i \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & \tilde{P}_{i+1} \arrow[d] \\ L_i \arrow[r] & L_{i+1}, \end{tikzcd}$$

,

(b): *this is a lift of the Hodge-filtration $P_i/I(R)P_i \twoheadrightarrow P_i/Q_i$ (so that all L_i are automatically line bundles on S) and of the corresponding commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_{i+1} \arrow[d] \\ P_i/Q_i \arrow[r] & P_{i+1}/Q_{i+1}. \end{tikzcd}$$

Proof. This is a formal consequence of the fact that lifts of nilpotent displays along pd-thickenings correspond to lifts of the Hodge-filtration [**Zin02**, Thm. 48]. The additional assumptions one puts on this lift of the Hodge-filtration take care of the structure of a $\mathcal{O}_D$-display. □

3. How to find the displays over the special fiber

In this section I want to explain how one can find the right displays over the special fiber; at least over the opens where exactly (!) one (resp. a certain number of) indice(s) is (are) critical. Let me first explain what I mean by the right displays: The idea is to first construct a morphism

$$\Upsilon_0 \colon \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)} \mathrm{Spec}(k) \to \mathcal{D} \times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)} \mathrm{Spec}(k),$$

which, since $\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)} \mathrm{Spec}(k)$ is constructed from glueing all the $\overline{U}_\Delta = \mathrm{Spec}(\overline{A}_\Delta)$, just amounts to giving oneself compatible special $\mathcal{O}_D$-displays $(\mathcal{P}_\Delta, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ over $\overline{U}_\Delta = \mathrm{Spec}(\overline{A}_\Delta)$, together with a $\mathcal{O}_D$-linear quasi-isogeny ρ_Δ to the chosen standard $\mathcal{O}_D$-isodisplay over k. Compatible means that whenever one has a sub-simplex $\Delta' \subseteq \Delta$ and $j \colon \overline{U}_{\Delta'} \hookrightarrow \overline{U}_\Delta$ denotes the canonical open immersion, then

$$j^*(\mathcal{P}_\Delta) \simeq \mathcal{P}_{\Delta'}.$$

Then these displays should be constructed in such a way, that Υ_0 induces automatically a bijection on $\mathrm{Spec}(k)$-rational points. To achieve this, the idea is simply to start with the morphism

$$\Phi_k \colon \mathcal{D}(k) \to \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p}(k)$$

constructed by Drinfeld and then use its inverse. This will then naturally lead to the wanted displays.
Let me first recall this map Φ_k : I denoted by $\mathbb{X}$ the chosen special formal $\mathcal{O}_D$-module of height d^2 and dimension d over $\mathrm{Spec}(k)$. Denote by $(M(\mathbb{X}), V, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ the corresponding Dieudonné-module and by $(N, V, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ the associated $\mathcal{O}_D$-Isocrystal over k. Then one will build the p-adic formal scheme $\widehat{\Omega}^d_{\mathbb{Z}_p}$ with respect to the Bruhat-Tits building of the group $\mathrm{PGL}(N_0^{V^{-1}\Pi})$.
Now I will choose a trivialization of the framing isocrystal. Denote by $e_1, ..., e_d$ the standardbasis of $W_{\mathbb{Q}}(k)^d$. Then let $N_i = W_{\mathbb{Q}}(k)^d$ for all $i \in \{0, ..., d-1\}$ and for $i \neq d-1$ let $\Pi \colon N_i \to N_{i+1}$ be the identity while finally $\Pi \colon N_{d-1} \to N_0$ is the homothety given by multiplication with p. Furthermore, for $i \neq d-1$, $V \colon N_i \to N_{i+1}$ is given by σ^{-1} and $V \colon N_{d-1} \to N_0$ is given by $\sigma^{-1} \cdot p$. Having all this set up, one can finally recall the construction of Φ_k : Let $(M, V, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ be a special $\mathcal{O}_D$-Dieudonné-module over k and one is given an inclusion $\rho \colon M \hookrightarrow N$, which is compatible with all additional structure; this determines the operators V and Π on the Dieudonné-module. Now let $\{i_1, ..., i_r\}$ be the collection of critical indices for M. Then $V^{-1}\Pi \colon M_{i_k} \to M_{i_k}$ is well-defined and by an easy Eigenbasis-lemma (here one uses e.g. that k is algebraically closed), one sees that $\Lambda_{i_k} = M_{i_k}^{V^{-1}\Pi}$ is a free $\mathbb{Z}_p$-module of rank d, which is via the quasi-isogeny canonically identified with a lattice inside of $\mathbb{Q}_p^d = N_0^{V^{-1}\Pi}$. In total, one sees that the collection of these lattices $\{\Lambda_{i_1}, ..., \Lambda_{i_r}\}$ inside of $N_0^{V^{-1}\Pi}$ gives a simplex Δ in the Bruhat-Tits building of $\mathrm{PGL}(N_0^{V^{-1}\Pi})$. One can now consider the diagram

$$\begin{tikzcd} \Lambda_{i_r} \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda_{i_1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots & {} \arrow[r] & \Lambda_{i_r} \arrow[d] \\ M_{i_r}/VM_{i_r-1} \arrow[r, "0"] & M_{i_1}/VM_{i_1-1} \arrow[r, "0"] & \ldots & {} \arrow[r, "0"] & M_{i_r}/VM_{i_r-1}. \end{tikzcd}$$

I claim that this defines indeed a point of $\widehat{U}_\Delta(\mathrm{Spec}(k))$.
To verify this, one has to see that the condition (Deligne) is satisfied, i.e. argueing by contradiction one has to see that if $m \in M_{i_k}^{V^{-1}\Pi=1}$, such that m vanishes under the morphism $M_{i_k}^{V^{-1}\Pi=1} \to M_{i_k}/VM_{i_k-1}$, then it is the image under Π of some element $n \in M_{i_{k-1}}^{V^{-1}\Pi=1}$. First, recall that the index i_k being critical means that the morphism induced by Π on Lie-algebras, $\mathrm{Lie}_{i_k} \to \mathrm{Lie}_{i_k+1}$ is constant zero. This implies

that Lie_{i_k} is isomorphic to $\ker(\bar{V}\colon M_{i_k}/\Pi M_{i_k-1} \to M_{i_k+1}/\Pi M_{i_k})$ by the snake lemma: here one looks at the following commutative diagram of short exact sequences

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "V"] & M_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "V"] & M_{i+1}/\Pi M_i \arrow[r] \arrow[d, "\bar{V}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & M_{i+2} \arrow[r] \arrow[d] & M_{i+2}/\Pi M_{i+1} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Lie}_{i+1} \arrow[r, "\bar{\Pi}"] & \mathrm{Lie}_{i+2}\,. & &
\end{tikzcd}$$

Now consider $m \in M_{i_k}^{V^{-1}\Pi=1}$. Since $V(m) = \Pi(m)$, it follows that

$$m \in \ker(\bar{V}\colon M_{i_k}/\Pi M_{i_k-1} \to M_{i_k+1}/\Pi M_{i_k}).$$

If the image of m is zero under

$$M_{i_k}^{V^{-1}\Pi=1} \to M_{i_k}/VM_{i_k-1},$$

then it follows from the previously explained isomorphism

$$\mathrm{Lie}_{i_k} \simeq \ker(\bar{V}\colon M_{i_k}/\Pi M_{i_k-1} \to M_{i_k+1}/\Pi M_{i_k})$$

that also the image of m in $M_{i_k}/\Pi M_{i_k-1}$ vanishes. This means that one finds a uniquely determined (since Π is injective) $m' \in M_{i_k-1}$, such that

$$\Pi(m') = m.$$

The next step is to construct a uniquely determined element $m'' \in M_{i_k-2}$, such that

$$\Pi(m'') = m'.$$

Here the assumption that i_{k-1} is not critical is crucial: by definition this means that

$$\overline{\Pi}\colon\ \mathrm{Lie}_{i_k-1} \simeq \mathrm{Lie}_{i_k}\,.$$

Using the snake lemma and again the commutative diagram above, this implies

$$\overline{V}\colon M_{i_k-1}/\Pi M_{i_k-2} \simeq M_{i_k}/\Pi M_{i_k-1}.$$

To see that the image $\overline{m'}$ of m' in $M_{i_k-1}/\Pi M_{i_k-2}$ vanishes, it therefore suffices to see that

$$\overline{V}(\overline{m'}) = 0.$$

This would be the case, if $V(m') = \Pi(m')$. Since Π is injective, this equality can be checked after application of Π, where it then follows from the assumption that $m \in M_{i_k}^{V^{-1}\Pi=1}$. Continuing in this fashion, one sees that the condition (Deligne) is really satisfied.
Now I want to construct the inverse of the previously constructed morphism Φ_k. For this, I have to explain how to reconstruct from a given $\mathrm{Spec}(k)$-valued point of $\widehat{U}_\Delta$ a special $\mathcal{O}_D$-Dieudonné-module, which is included into $(N, V, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$. Here Δ is a simplex $\{[\Lambda_{i_1}], ..., [\Lambda_{i_r}]\}$ and in the following I will choose representatives sitting in a chain

$$p\Lambda_{i_r} \subset \Lambda_{i_1} \subset ... \subset \Lambda_{i_r}.$$

For the special formal $\mathcal{O}_D$-Dieudonné-module I am about to construct exactly the indices $i_1, ..., i_r$ will be critical and for a critical index i_k one can set $M_{i_k} = \Lambda_{i_k} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(k)$, so that one has to find the right graded pieces $M_{i_k-1}, ..., M_{i_{k-1}+1}$, sitting inside $N_{i_k-1}, ..., N_{i_{k-1}+1}$ such that the operators V and Π of $(N, V, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ will induce $V, \Pi\colon M_{i_k-l-1} \to M_{i_k-l}$. Now for i_{k-1} one looks at the arrow $M_{i_k} \to L_{i_k}$, which is given (by the point in the Omega). If one would already know M_{i_k-1}, one would have $L_{i_k} = M_{i_k}/VM_{i_k-1}$, so that one is led to consider

$$I_{i_k-1} = \ker(M_{i_k} \to L_{i_k}).$$

This is a free W-module of rank d. I define then $M_{i_k-1} = W \otimes_{F,W} I_{i_k-1}$, still a free W-module of rank d, which I equip with

$$V\colon M_{i_k-1} \to I_{i_k-1} \subseteq M_{i_k},$$

given by $w \otimes m \mapsto \sigma^{-1}(w) \cdot m$. To define the operator Π, recall that I consider M_{i_k} as included inside of the isocrystal N, on which I have the operator $U = V^{-1}\Pi$ given and one knows that $U(M_{i_k}) \subseteq M_{i_k}$. It therefore makes sense to define

$$\Pi = U \circ V \colon M_{i_k-1} \to M_{i_k}.$$

Next I will consider the index $i_k - 2$: To motivate the construction of M_{i_k-2}, recall that if one would already know M_{i_k-2}, then one would have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} M_{i_k-2} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & M_{i_k-1} \arrow[d] \\ \mathrm{Lie}_{i_k-2} \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Lie}_{i_k-1}, \end{tikzcd}$$

where the lower horizontal arrow would be an isomorphism. It would follow that

$$\ker(M_{i_k-2} \to \mathrm{Lie}_{i_k-2}) \simeq \{m \in M_{i_k-2} \colon \Pi(m) \in \ker(M_{i_k-1} \to \mathrm{Lie}_{i_k-1})\}.$$

This is the reason, why I define

$$I_{i_k-2} = \{m \in M_{i_k-1} \colon \Pi(m) \in I_{i_k-1}\}$$

and $M_{i_k-2} = W \otimes_{F,W} I_{i_k-2}$, and $V \colon M_{i_k-2} \to I_{i_k-2} \subseteq M_{i_k-1}$ as before. To define the operator Π, note that I can also write $I_{i_k-2} = \{m \in M_{i_k-1} \colon U(m) \in M_{i_k-1}\}$, so that $\Pi = U \circ V \colon M_{i_k-2} \to M_{i_k-1}$ is well-defined. This algorithm permits one then to define the inverse morphism to Φ_k. In particular, it allows one to write down some explicit equations, as I explain now:

One can for example look at the case, where only the index $i = d-1$ is critical. Then I can take for the $d-1$-th graded piece just the W-sublattice of N_{d-1} generated by $e_1, ..., e_d$ and say Lie_{d-1} is generated by the image of e_1. Then I find uniquely determined scalars $\xi_2, ..., \xi_d \in k$, such that $\ker(P_{d-1} \to \mathrm{Lie}_{d-1})$ has the basis $pe_1, e_2 - [\xi_2]e_1, ..., e_d - [\xi_d]e_1$ and this is exactly Q_{d-1}. Now P_{d-2} is simply the image under $\dot{F}$, i.e. under applying the Wittvector-Frobenius, so that this W-module has a basis given by $f_1^{[d-2]} = pe_1, f_2^{[d-2]} = e_2 - [\xi_2^p]e_1, ..., f_d^{[d-2]} = e_d - [\xi_d^p]e_1$. Since I assumed that $i = d-2$ is not critical, one can compute Q_{d-2} as follows: If I denote by $\lambda_i^{[(d-2)]} \in k$ the uniquely determined scalar, such that $\lambda_i^{[(d-2)]} \cdot e_1 = \mathrm{Im}(f_i^{[(d-2)]})$ inside of $\mathrm{Lie}_{(d-1)}$, then I have that

$$Q_{(d-2)} = \langle pe_1, pe_2, ..., [\lambda_j^{[(d-2)]}] f_2^{[(d-2)]} - [\lambda_2^{(d-2)}] f_j^{[(d-2)]}, ... \rangle_W.$$

Here one has of course that $\lambda_i^{[(d-2)]} = [\xi_i^p] - [\xi]$. Continuing this algorithm, one gets equations for the special $\mathcal{O}_D$-displays with only the index $i = d-1$ critical.

4. The basic construction

From now on I have to restrict to the case $d = 2$ unfortunately. The first aim is to construct two special $\mathcal{O}_D$-displays $\mathcal{P}^{(0)}$ resp. $\mathcal{P}^{(1)}$ over $\mathrm{Spec}(k[X, \frac{1}{X-X^p}])$ resp. $\mathrm{Spec}(k[Y, \frac{1}{Y-Y^p}])$, which are included in the standard Isodisplay I fixed:

$$N_0 \xrightarrow{\Pi = id} N_1 \xrightarrow{\Pi = \cdot p} N_0.$$

Recall that I have chosen a trivialization of N, i.e. a $W_{\mathbb{Q}}(k)$-basis of e_1, e_2 of N_0. Then I define

$P^{(0)} = P_0^{(0)} \oplus P_1^{(0)}$, $Q^{(0)} = Q_0^{(0)} \oplus Q_1^{(0)}$

via

- $P_0^{(0)} = \langle pe_1, e_2 - [X^p]e_1 \rangle_{W(k[X, \frac{1}{X-X^p}])}$
- $P_1^{(0)} = \langle e_1, e_2 \rangle_{W(k[X, \frac{1}{X-X^p}])}$
- $Q_0^{(0)} = \langle pe_1, pe_2 \rangle_{W(k[X, \frac{1}{X-X^p}])}$
- $Q_1^{(0)} = \langle pe_1, e_2 - [X]e_1 \rangle_{W(k[X, \frac{1}{X-X^p}])}$

With the following operators:

- $\Pi \colon P_0^{(0)} \to P_1^{(0)}$ is induced by

$$\Pi = \mathrm{id} \colon N_0 \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(k)} W_{\mathbb{Q}}(k[X, \frac{1}{X-X^p}]) \to N_1 \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(k)} W_{\mathbb{Q}}(k[X, \frac{1}{X-X^p}])$$

and $\Pi \colon P_1^{(0)} \to P_0^{(0)}$ is induced by

$$\Pi = \cdot p \colon N_1 \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(k)} W_{\mathbb{Q}}(k[X, \frac{1}{X - X^p}]) \to N_0 \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(k)} W_{\mathbb{Q}}(k[X, \frac{1}{X - X^p}]).$$

- $\dot{F} \colon Q_0^{(0)} \to P_1^{(0)}$ given by F/p and $\dot{F} \colon Q_1^{(0)} \to P_0^{(0)}$ given by F.

This construction is summarized in the following diagram:

$$\begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 0 \\
P: & pe_1, e_2 - [X^p]e_1 & e_1, e_2 & pe_1, e_2 - [X^p]e_1 \\
Q: & pe_1, pe_2 & pe_1, e_2 - [X]e_1 & pe_1, pe_2.
\end{array}$$

Note, that one has then the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
P_0^{(0)} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_1^{(0)} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_0^{(0)} \arrow[d] \\
\mathrm{Lie}(P^{(0)})_0 \arrow[r, "0"] & \mathrm{Lie}(P_1^{(0)}) \arrow[r, "X - X^p"] & \mathrm{Lie}(P_0^{(0)}).
\end{tikzcd}$$

Next, I define the second family $\mathcal{P}^{(1)}$: I define $P^{(1)} = P_0^{(1)} \oplus P_1^{(1)}$, $Q^{(1)} = Q_0^{1)} \oplus Q_1^{(1)}$ via

- $P_0^{(1)} = \langle pe_1, e_2 \rangle_{W(k[Y, \frac{1}{Y - Y^p}])}$
- $P_1^{(1)} = \langle e_1, e_1 - [Y^p]e_2/p \rangle_{W(k[Y, \frac{1}{Y - Y^p}])}$
- $Q_0^{(1)} = \langle pe_1 - [Y]e_2, pe_2 \rangle_{W(k[Y, \frac{1}{Y - Y^p}])}$
- $Q_1^{(1)} = \langle pe_1, e_2 \rangle_{W(k[Y, \frac{1}{Y - Y^p}])}$.

Here I take the same operators as before. Again, one can summarize this construction in the following diagram:

$$\begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 0 \\
P: & pe_1, e_2 & e_1 - [Y^p]e_2/p, e_2 & pe_1, e_2 \\
Q: & pe_1 - [Y]e_2, pe_2 & pe_1, e_2 & pe_1 - [Y]e_2, pe_2.
\end{array}$$

Note that one has the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
P_0^{(1)} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_1^{(1)} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_0^{(1)} \arrow[d] \\
\mathrm{Lie}(P_0^{(1)}) \arrow[r, "Y - Y^p"] & \mathrm{Lie}(P_1^{(1)}) \arrow[r, "0"] & \mathrm{Lie}(P_0^{(1)}).
\end{tikzcd}$$

The next step is now to glue these families $\mathcal{P}^{(0)}$ and $\mathcal{P}^{(1)}$ to one family $\mathcal{P}^{(0,1)}$ over

$$\mathrm{Spec}(k[X, Y, \frac{1}{1 - X^{p-1}}, \frac{1}{1 - Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)),$$

in such a way that if one restricts to the open $D(X)$, one gets back the family $\mathcal{P}^{(0)}$ and if one restricts to the open $D(Y)$ one gets back the family $\mathcal{P}^{(1)}$. This glueing will be done using Ferrand-glueing.
For this the key observation is that $\mathcal{P}^{(0)}$ resp. $\mathcal{P}^{(1)}$ are defined also when $X = 0$ resp. $Y = 0$ and then they are indeed just identical.

Note first, that the ring $k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)$ identifies with the following fiber product[4]

$$\begin{tikzcd}
k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}] \times_k k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}] \arrow[r] \arrow[d] & k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}] \arrow[d, "Y\mapsto 0"] \\
k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}] \arrow[r, "X\mapsto 0"] & k.
\end{tikzcd}$$

Observe that the functor of taking p-typical Wittvectors commutes with fiberproducts, so that one gets the cartesian diagram

$$\begin{tikzcd}
W(k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & W(k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]) \arrow[d, "j_1"] \\
W(k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}]) \arrow[r, "j_2"] & W(k).
\end{tikzcd}$$

This will allow one to construct a special $\mathcal{O}_D$-display $(\mathcal{P}^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad})$, which admits an inclusion, that is compatible with all extra structure, towards

$$N \otimes_{W_{\mathbb{Q}}(k)} W_{\mathbb{Q}}(k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)).$$

It will have the crucial property, that now one can set either the zeroth or the first index critical and such that over $D(X)$, one gets back the family $\mathcal{P}^{(0)}$ and over $D(Y)$, one gets back the family $\mathcal{P}^{(1)}$. The idea is to glue the two families $(\mathcal{P}^{(0)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}, \rho^{(0)})$ and $(\mathcal{P}^{(1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}, \rho^{(1)})$ along the closed point of intersection, which is where both indices are critical, i.e. where $X = 0$ resp. $Y = 0$.
First note, that both families are also defined over $k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}]$ resp. $k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]$. One then has an isomorphism of special $\mathcal{O}_D$-displays

$$\text{id}\colon \mathcal{P}^{(1)} \otimes_{W(k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]), j_2} W(k) \simeq \mathcal{P}_0 \simeq \mathcal{P}^{(0)} \otimes_{W(k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}]), j_1} W(k). \tag{52}$$

Let me write in the following $\overline{A}_{\Delta^{\text{std}}} = k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)$.
I will construct a nilpotent display $\mathcal{P}^{(0,1)} = (P^{(0,1)}, Q^{(0,1)}, \dot{F}, F)$ as follows: Let $P^{(0,1)} \subset P^{(0)} \times P^{(1)}$ be the abelian subgroup given by pairs (p_0, p_1), such that $j_1(p_0) = j_2(p_1)$. I give it the structure of a $W(\overline{A}_{\Delta^{\text{std}}})$-module by

$$a \cdot (p_0, p_1) = (i_1(a) \cdot p_0, i_2(a) \cdot p_1).$$

Next define $L^{(0,1)} \subset P^{(0)}/Q^{(0)} \times P^{(1)}/Q^{(1)}$ similiarly as pairs agreeing upon applications of j_1 resp. j_2. Then $P^{(0,1)}$ resp. $L^{(0,1)}$ are free $W(\overline{A}_{\Delta^{\text{std}}})$ resp. $\overline{A}_{\Delta^{\text{std}}}$-modules of rank 4 resp. 2. Then define the free $W(\overline{A}_{\Delta^{\text{std}}})$-module $Q^{(0,1)} \subset P^{(0,1)}$ by

$$\ker(P^{(0,1)} \to L^{(0,1)}).$$

The operators $\dot{F}^{(0)}, \dot{F}^{(1)}$ resp. $F^{(0)}, F^{(1)}$ induce uniquely determined operators $\dot{F}^{(0,1)}\colon Q^{(0,1)} \to P^{(0,1)}$ and $F\colon P^{(0,1)} \to P^{(0,1)}$. This completes the construction of the display $\mathcal{P}^{(0,1)}$.
The extra structure on $\mathcal{P}^{(0)}$ resp. $\mathcal{P}^{(1)}$ induces the respective extra structure on $\mathcal{P}^{(0,1)}$, so that I get in total a special $\mathcal{O}_D$-display $(\mathcal{P}^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}, \rho)$. Note that one has the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
P_0^{(0,1)} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_1^{(0,1)} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_0^{(0,1)} \arrow[d] \\
\text{Lie}(P_0^{(0,1)}) \arrow[r, "Y-Y^p"] & \text{Lie}(P_1^{(0,1)}) \arrow[r, "X-X^p"] & \text{Lie}(P_0^{(1)}).
\end{tikzcd}$$

It remains to lift this construction to all p-adic thickenings. To do this, one has to give a lift of the Hodge-Filtration of $(\mathcal{P}^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad})$. In order to prepare the use of Grothendieck-Messing deformation theory, I will perform the variabel transformation $Y - Y^p \mapsto Y'$, $X - X^p \mapsto X'$ (this is an isomorphism,

[4]Indeed, the fiber product is given by pairs of polynomials $(f_1, f_2) \in k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}] \times k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]$, whose constant coefficient agree. This defines an element of $k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)$. Conversely, an element $P \in k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)$ has no mixed terms in X and Y, so one can uniquely write it as $a_0 + f_1(X) + f_2(X)$, where $(f_1, f_2) \in k[X, \frac{1}{1-X^{p-1}}] \times k[Y, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]$ have no constant term. This gives the inverse.

since I inverted $1-X^{p-1}$ resp. $1-Y^{p-1}$).
I consider the pd-thickening

$$A_{\Delta^{\mathrm{std}},n} \to A_{\Delta^{\mathrm{std}},0},$$

where $A_{\Delta^{\mathrm{std}},n} = \breve{\mathbb{Z}}_p[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y - p, p^n)$ and $A_{\Delta^{\mathrm{std}},0} = k[X, Y, \frac{1}{1-X^{p-1}}, \frac{1}{1-Y^{p-1}}]/(X \cdot Y)$.

Then one finds a uniquely determined special $\mathcal{O}_D$-$\mathcal{W}(A_{\Delta^{\mathrm{std}},n}/A_{\Delta^{\mathrm{std}},0})$-window $(\mathcal{P}^{(\tilde{0},1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad})$, which lifts the just constructed special $\mathcal{O}_D$-Display over $A_{\Delta,0}$ by Lemma 2.3. One finds a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^{(\tilde{0},1)}{}_0/I(A_{\Delta^{\mathrm{std}},n}) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & \mathcal{P}^{(\tilde{0},1)}{}_1/I(A_{\Delta^{\mathrm{std}},n}) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & \mathcal{P}^{(\tilde{0},1)}{}_0/I(A_{\Delta^{\mathrm{std}},n}) \arrow[d] \\
A_{\Delta^{\mathrm{std}},n} \arrow[r, "\cdot X"] & A_{\Delta^{\mathrm{std}},n} \arrow[r, "\cdot Y"] & A_{\Delta^{\mathrm{std}},n},
\end{tikzcd}$$

which after the variabel transformation one performed previously lifts the corresponding diagram relating the Hodge-Filtrations for $(\mathcal{P}^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad})$. By the above Lemma 2.4, this suffices to construct a lift $(\mathcal{P}_n^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad})$ of $(\mathcal{P}^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad})$ to a special $\mathcal{O}_D$-display over $A_{\Delta^{\mathrm{std}},n}$. Since the quasi-isogeny lifts uniquely along nilpotent thickenings, one therefore has constructed a point

$$(\mathcal{P}_n^{(0,1)}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}, \rho_n) \in \mathcal{D}^{(0)}(\mathrm{Spec}(A_{\Delta^{\mathrm{std}},n})).$$

The reason I wrote before Δ^{std} is that this is the standard simplex in $\mathcal{B}T(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p))$: It is given by $\Lambda^{\mathrm{std}} = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{Z}_p}$, $\Lambda'^{\mathrm{std}} = \langle pe_1, e_2 \rangle_{\mathbb{Z}_p}$. Then I have that

$$\widehat{U}_{\Delta^{\mathrm{std}}} = \mathrm{Spf}(A_{\Delta^{\mathrm{std}}})$$

(in general this isomorphism is non canonical, since it depends on the choice of a basis). Using that the group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ acts transitively on maximal simplices in the building, one may then use the group-action to extend the construction of the special formal $\mathcal{O}_D$-Display, with quasi-isogeny, to all simplices. By construction, these displays agree on overlaps and one therefore has constructed a morphism

$$\Upsilon \colon \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \to \mathcal{D},$$

which one forced to be equivariant for the $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-action.

5. Reductions

I first start with a reduction lemma, which says the following: To show that the natural transformation

$$\Upsilon \colon \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p} \to \mathcal{D}$$

is an isomorphism, it is enough to do so, when restricted to test-objects $\mathrm{Spec}(R) \in \mathrm{Nilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$, such that $pR = 0$. For this, let me fix the following notation: Let $\mathrm{AlgNilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p,n}$ be the category of $\breve{\mathbb{Z}}_p$-algebras R, such that $p^n R = 0$ and let Υ_n be the restriction of Υ to these test-objects.

Lemma 5.1. *Let $n \geq 1$ be some integers and assume that Υ_n is an isomorphism, then also Υ_{n+1} is one.*

Proof. I will follow the argument of Drinfeld ([**Dri76**, Prop. 2.5.]); though of course here the natural transformation goes in the other direction. One first shows the following: let Δ be some simplex in the Bruhat-Tits tree for $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and consider $B \in \mathrm{AlgNilp}_{\breve{\mathbb{Z}}_p,n+1}$ and let $B' = B/p^n B$ and $f \colon B \to B'$ the quotient morphism. Fix a point $\alpha \in \widehat{U}_\Delta(\mathrm{Spec}(B'))$, which corresponds to a pair $(\alpha_1, \alpha_2) \in B'$, such that $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = p$ and $1 - \alpha_1^{p-1}, 1 - \alpha_2^{p-1} \in (B')^*$. Let $\Upsilon_\Delta(\alpha) \in \mathcal{D}(\mathrm{Spec}(B'))$ be the image of α. Then consider

$$\widehat{U}_{\Delta f,\alpha}(B) = \{\beta \in \widehat{U}_\Delta(\mathrm{Spec}(B)) \colon f(\beta) = \alpha\}$$

and

$$\mathcal{D}_{f,\Upsilon_\Delta(\alpha)}(B) = \{y \in \mathcal{D}(\mathrm{Spec}(B)) \colon f(y) = \Upsilon_\Delta(\alpha)\},$$

so that one gets an induced morphism $\Upsilon_\Delta \colon \widehat{U}_{\Delta f,\alpha}(B) \to \mathcal{D}_{f,\Upsilon_\Delta(\alpha)}(B)$. The key point to verify is the following: if $\mathcal{D}_{f,\Upsilon_\Delta(\alpha)}(B) \neq \emptyset$, then also $\widehat{U}_{\Delta f,\alpha}(B) \neq \emptyset$.
Let $y \in \mathcal{D}_{f,\Upsilon_\Delta(\alpha)}(B)$, which corresponds to a pair $((\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}), \rho)$ over B. The quasi-isogeny

always deforms uniquely along nilpotent thickening. Let me denote by $f^*((\mathcal{P},\Pi,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}-\mathrm{grad}))$ the base-change along $f\colon B\to B'$. Then by assumption, there is an isomorphism $f^*((\mathcal{P},\Pi,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}-\mathrm{grad}))\simeq\mathcal{P}_{\Upsilon(\alpha)}$. Recall that all graded-pieces of $P_{\Upsilon(\alpha)}/Q_{\Upsilon(\alpha)}$ are by construction free B'-modules of rank 1. It follows therefore, that $P_i/Q_i\otimes_B B'\simeq P_{i,\Upsilon(\alpha)}/Q_{i,\Upsilon(\alpha)}$ are also free of rank 1. Now, since P_i/Q_i is finite-projective over B, so that $\mathrm{Tor}^1_B(B',P_i/Q_i)=0$ and the ideal p^nB is nilpotent, it follows that also P_i/Q_i is free of rank 1 (c.f. [**Sta22**, Tag 051H]). I consider the diagram

$$\begin{tikzcd}
P_0/I(B)P_0 \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_1/I(B)P_1 \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_0/I(B)P_1 \arrow[d] \\
P_0/Q_0 \arrow[r, "\cdot c_1"] & P_1/Q_1 \arrow[r, "\cdot c_2"] & P_0/Q_0,
\end{tikzcd}$$

where $c_1,c_2\in B$ and the commutativity of this diagram says that $c_1\cdot c_2=p$. Again, by the assumption that $f^*((\mathcal{P},\Pi,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}-\mathrm{grad}))\simeq\mathcal{P}_{\Upsilon(\alpha)}$ and the fact that in the commutative diagram for $\mathcal{P}_{\Upsilon(\alpha)}$ as the one I used just now, the lower horizontal maps are given by multiplication with α_1 resp. α_2, one sees that $f(c_1)=\alpha_1$ and $f(c_2)=\alpha_2$. This implies in particular, that $1-c_1^{p-1}$ and $1-c_2^{p-1}$ are invertible in B (since this is a condition one may check modulo a nilpotent ideal). In total, one constructed the desired morphism

$$\mathrm{Spec}(B)\to\widehat{U}_{\Delta,f,\alpha}.$$

Now, since Υ is constructed via glueing of all the Υ_Δ, one also gets (with the obvious meaning of this notation) the following: If $\mathcal{D}_{f,\Upsilon(\alpha)}(\mathrm{Spec}(B))\neq\emptyset$, then also $\widehat{\Omega}^2_{f,\alpha}(\mathrm{Spec}(B))\neq\emptyset$.
From here, one may run the same argument as Drinfeld does: It is enough to show that Υ induces an isomorphism between $\widehat{\Omega}^2_{f,\alpha}(\mathrm{Spec}(B))$ and $\mathcal{D}_{f,\Upsilon(\alpha)}(\mathrm{Spec}(B))$. By deformation theory one sees that if $\widehat{\Omega}^2_{f,\alpha}(\mathrm{Spec}(B))\neq\emptyset$ resp. $\mathcal{D}_{f,\Upsilon(\alpha)}(\mathrm{Spec}(B))\neq\emptyset$, then these are principal homogenouse spaces under the groups $\widehat{\Omega}^2_{f,\alpha}(B'[I])$ resp. $\mathcal{D}_{f,\Upsilon(\alpha)}(B'[I])$, where $I=p^nB, B'[I]=B'\oplus I$, with $I^2=0$. From the assumption that Υ_n is an isomorphism, one deduces then that both groups are isomorphic and by the previous step one can then conclude that Υ induces an isomorphism between $\widehat{\Omega}^2_{f,\alpha}(\mathrm{Spec}(B))$ and $\mathcal{D}_{f,\Upsilon(\alpha)}(\mathrm{Spec}(B))$, as desired. □

One is therefore left with showing that

$$\Upsilon_0\colon\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p}\times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)}\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)\to\mathcal{D}\times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)}\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

is an isomorphism. Here, I will use the following, almost trivial, statement:

Lemma 5.2. *Let k be an algebraically closed field and $f\colon X\to Y$ be a morphism between projective varieties over $\mathrm{Spec}(k)$. Assume that f is a bijection on $\mathrm{Spec}(k)$-valued points and in addition étale, then f is an isomorphism.*

Proof. Let $s\colon X\to\mathrm{Spec}(k)$ and $t\colon Y\to\mathrm{Spec}(k)$ be the two structure-morphisms. Since t is seperated and $s=t\circ f$ is proper, also f is proper. Now an étale morphism is in particular quasi-finite and quasi-finite plus proper implies finite. Since k is algebraically closed and $f(k)$ is a bijection, it follows that f is finite étale of degree 1, i.e. an isomorphism. □

Lemma 5.3. *The functor $\mathcal{D}\times_{\mathrm{Spf}(\breve{\mathbb{Z}}_p)}\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ can be written as $\mathrm{colim}_{n,m\in\mathbb{Z}}\overline{\mathcal{M}}_{n,m}$, where $\mathcal{D}_{0,n,m}$ are subfunctors, which are representable by projective $\overline{\mathbb{F}}_p$-schemes.*

Proof. If I take a point $(X,\rho)\in\mathcal{D}_0(\mathrm{Spec}(R))$, R a k-algebra, then I find some n, such that $p^n\rho\colon\mathbb{X}_R\to X$ is a $\mathcal{O}_D$-linear isogeny. Then let $\mathcal{D}_{0,n,m}$ be the subfunctor parametrizing pairs (X,ρ), such that $p^n\rho$ is a $\mathcal{O}_D$-linear isogeny of height m. Then it follows that $\mathcal{D}_0=\mathrm{colim}_{n,m}\mathcal{D}_{0,n,m}$ and using the representability of the Hilbert-scheme it is easy to see that $\mathcal{D}_{0,n,m}$ are representable by projective schemes. □

Now let $((\mathcal{P}_{\widehat{\Omega}},\Pi,\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}-\mathrm{grad}),\rho_{\widehat{\Omega}})$ be the object one constructed before over $\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p}$. Then one can look at the sublocus of Ω^2_k, where $p^n\rho_\Omega$ is a $\mathcal{O}_D$-linear isogeny of height m; let me denote it by $\Omega^2_{k,n,m}$. This a projective k-scheme which is locally closed inside the whole Ω^2_k, such that $\Omega^2_k=\mathrm{colim}_{n,m}\Omega^2_{k,n,m}$ and the natural transformation respects this union, i.e. one has

$$\Upsilon_0=\mathrm{colim}_{n,m}\Upsilon_{0,n,m},$$

where $\Upsilon_{0,n,m}\colon \Omega^2_{k,n,m} \to \mathcal{D}_{0,n,m}$ is the induced morphism, to which one is then able to apply the above Lemma. In total, after these reductions one is left with showing that $\Upsilon(k)$ is a bijection and that Υ_0 is étale.

6. End of the proof

6.1. The special fiber.

LEMMA 6.1. *The map $\Upsilon(k)$ is a bijection.*

PROOF. This property was insured by construction. ☐

6.2. Deformationtheory. The aim of this section is to show the following

LEMMA 6.2. *The morphism Υ_0 is étale.*

To this end, I will first study lifts of a point $x = (\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad}, \rho) \in \mathcal{D}(\mathrm{Spec}(k))$ towards $k[\epsilon]$, $\epsilon^2 = 0$. By rigidity of quasi-isogeny, this means that I have to understand possible lifts of the $\mathcal{O}_D$-display $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$. The next statement is easy to check:

LEMMA 6.3. *The tangent space $T_{\mathcal{D},x}$ of $\mathcal{D}$ at the point x is isomorphic to the k-vector space*

$$\{u \in \mathrm{Hom}_k(Q/pP, (\epsilon) \otimes_k P/Q)\colon\ \deg(u) = 0, u\Pi = \Pi u\}.$$

Now the k-dimension of this tangent space depends on how many indices of $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$ are critical.

LEMMA 6.4. (a): *If only one index is critical for* $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$, *then* $\dim_k(T_{\mathcal{D},x}) = 1$.
(b): *If both indices are critical for* $(\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad})$, *then* $\dim_k(T_{\mathcal{D},x}) = 2$.

PROOF. First observe that the index $i = 0$ is critical if and only if $\Pi\colon Q_1/pP_1 \to Q_0/pP_0$ is the zero morphism and the index $i = 1$ is critical if and only if $\Pi\colon Q_0/pP_0 \to Q_1/pP_1$ is the zero morphism (use that i is critical if and only if $\Pi P_i = Q_{i+1}$). It follows that the equation $\Pi u_i = u_{i+1}\Pi$ can only be satisfied in the case where i is critical, but not $i+1$, when $u_{i+1} = 0$. In case both indices are critical, these identities are always satisfied. ☐

Now one can turn to the proof of Lemma 6.2.

PROOF. Let $x \in \widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p}(\mathrm{Spec}(k))$ and $\Upsilon(x) \in \mathcal{D}(k)$ the image. I will write

$$\Upsilon(x) = (\mathcal{P}_0, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad}, \rho_0).$$

Then I have to show that the natural transformation Υ induces an isomorphism on tangentspaces:

$$d\Upsilon\colon T_{\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p},x} \to T_{\mathcal{D},\Upsilon(x)}.$$

This morphism is explicitley given as follows: Let Δ be some simplex, such that $x \in \overline{U}_\Delta$. Then one has that

$$T_{\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p},x} = T_{\bar{U}_\Delta,x} = \{\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \in k[\varepsilon]^2\colon 1 - \alpha_i^{p-1} \in (k[\varepsilon])^*, \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 0, \alpha \equiv x(\mathrm{mod})(\varepsilon)\},$$

in the case where Δ is a maximal simplex. Then the image $d\Upsilon(\alpha)$ is the deformation $\mathcal{P}'$ of $\mathcal{P}_x$, whose Hodge-Filtration is described by the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd} P_0' \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_1' \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d] & P_0' \arrow[d] \\ \mathrm{Lie}(P_0') \arrow[r, "\cdot\alpha_1"] & \mathrm{Lie}(P_1') \arrow[r, "\cdot\alpha_2"] & \mathrm{Lie}(P_0'). \end{tikzcd}$$

I will first make the following observations:

(a): Recall that $(\mathcal{P}_0, \Pi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} - \mathrm{grad}, \rho_0)$ was the image $\Upsilon(x)$. Assume that the index i is critical for $\mathcal{P}_0$ and let $\mathcal{P}'$ be some deformation of $\mathcal{P}_0$ to $k[\varepsilon]$. Via Lemma 6.3 it corresponds to a pair $u = (u_1, u_2)$. Then the index i is critical for $\mathcal{P}'$ if and only if $u_{i+1} = 0$.

(b): Let $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in T_{\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p},x}$ and $\mathcal{P}'$ be the deformation $d\Upsilon(\alpha)$ of $\mathcal{P}$. Assume that i is critical for $\mathcal{P}'$ (so that $\alpha_i = 0$). Then $i+1$ is critical if and only if $u_i = 0$ if and only if $\alpha_{i+1} = 0$.

Now I start showing that $d\Upsilon$ is an isomorphism. Let me first look at the case where x is not a $\mathbb{F}_p$-rational point, which implies that $\Upsilon(x) = (\mathcal{P}, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}, \rho)$ is such that exactly one index is critical. It follows then that both tangent spaces $T_{\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p},x}$ and $T_{\mathcal{D},\Upsilon(x)}$ are one-dimensional. Thus it suffices to show that $d\Upsilon$ is not the zero-morphism; this will be a direct calculation:
Let x correspond to the map $\breve{\mathbb{Z}}_p[X] \to k, S \mapsto \zeta$. Then a point of the tangent space to x corresponds to the map $\breve{\mathbb{Z}}_p[X] \to k, S \mapsto \zeta + \epsilon\varrho$. The associated display $\mathcal{P}_1$ over $k[\epsilon]$ is given by the structural matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & [\zeta^{q^2}] - [\zeta - \epsilon\varrho] & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denote by $\mathcal{P}'_0$ the trivial lift of $\mathcal{P}_0$ given by the inclusion $k \to k[\epsilon]$. One has to calculate the element $u \in T_{\mathcal{P}_0}$, such that $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}'_0 + u$.

Every lift of $\mathcal{P}_0$ is of the form $\mathcal{P}_\alpha$ for some $\alpha\colon P_0 \to \epsilon P_0$ (for the definition of these displays, please see [**Zin02**, Example 22, pg. 21-22]). To calculate u one calculates α for the lift $\mathcal{P}_1$. One has that $(P_1, Q_1) = (P_0, Q_0)$, so I just write P and Q instead.

Define ^{F}-linear maps

$$g\colon P \longrightarrow W(\epsilon) \otimes_{W(k[\epsilon])} P$$

and

$$h\colon Q \longrightarrow W(\epsilon) \otimes_{W(k[\epsilon])} P$$

by

$$F_1(x) = F_0(x) - g(x), x \in P,$$
$$\dot{F}_1(y) = \dot{F}_0(y) - h(y), y \in Q.$$

Then $\alpha\colon P_0 \to \epsilon P_0$ is given by the equations $\alpha(F_0(x)) = g(x)$ and $\alpha(\dot{F}_0(y)) = h(y)$. A calculation shows that $\alpha(b_j) = 0$ for all $j \neq 3$ and $\alpha(b_3) = \epsilon\varrho b_1$.

To determine u I first note that there is a canonical isomorphism $\epsilon P \cong \epsilon \otimes_{k_0} P/\pi P$, then α factorizes through

$$\bar{\alpha} : P/\pi P \longrightarrow \epsilon \otimes_k P/\pi P$$

and I have

$$u\colon Q/\pi P \subset P/\pi P \longrightarrow \epsilon \otimes_k P/\pi P \longrightarrow \epsilon \otimes_k P/Q.$$

Therefore $u \neq 0$.
Next, I consider the case, when x is $\mathbb{F}_p$-rational. Then $\Upsilon(x) = (\mathcal{P}_0, \Pi, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} - \text{grad}, \rho)$ is such that both indices are critical and both tangent spaces are 2-dimensional. The tangentspace $T_{\widehat{\Omega}^2_{\breve{\mathbb{Z}}_p},x}$ has two 1-dimensional subspaces given by the conditions $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1$. If one restricts $d\Upsilon$ to one of these 1-dimensional subspaces, I get an induced morphism to the space of deformations of $\mathcal{P}$, such that $i = 0$ resp. $i = 1$ is critical for that deformation. By observation (a) above these subspaces of $T_{\mathcal{D},\Upsilon(x)}$ are one-dimensional and by observation (b) this induced morphism is injective, thus an isomorphism. The images of these induced morphisms are distinct in $T_{\mathcal{D},\Upsilon(x)}$, so that $d\Upsilon$ has to be an isomorphism. □

Bibliographie

[AB21] Johannes Anschütz and Arthur-César Le Bras. Prismatic dieudonné theory, 2021.

[Ans20] Johannes Anschütz. Extending torsors on the punctured spectrum of ainf, 2020.

[BC20] Alexis Bouthier and Kestutis Cesnavicius. Torsors on loop groups and the hitchin fibration, 2020.

[Ber93] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 78 :5–161, 1993.

[BGR84] S. Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, volume 261. Springer, Cham, 1984.

[Bha16] Bhargav Bhatt. Algebraization and Tannaka duality. *Camb. J. Math.*, 4(4) :403–461, 2016.

[BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. Integral p-adic Hodge theory. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 128 :219–397, 2018.

[BMS19] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. Topological Hochschild homology and integral p-adic Hodge theory. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 129 :199–310, 2019.

[BP20] O. Bültel and G. Pappas. (G,μ)-displays and Rapoport-Zink spaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, 19(4) :1211–1257, 2020.

[BS17] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. Projectivity of the Witt vector affine Grassmannian. *Invent. Math.*, 209(2) :329–423, 2017.

[BS21] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. Prismatic f-crystals and crystalline galois representations, 2021.

[BS22] Bhargav Bhatt and Peter Scholze. Prisms and prismatic cohomology, 2022.

[Bue13] Oliver Bueltel. Pel modulispaces without -valued points, 2013.

[CDN20] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, and Wiesława Nizioł. Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld : Le cas de la dimension 1. *J. Am. Math. Soc.*, 33(2) :311–362, 2020.

[CDN21] Pierre Colmez, Gabriel Dospinescu, and Wiesława Nizioł. Cohomologie des courbes analytiques p-adiques, 2021.

[CFS21] Miaofen Chen, Laurent Fargues, and Xu Shen. On the structure of some p-adic period domains. *Camb. J. Math.*, 9(1) :213–267, 2021.

[CGP15] Brian Conrad, Ofer Gabber, and Gopal Prasad. *Pseudo-reductive groups.*, volume 26. Cambridge : Cambridge University Press, 2015.

[CL17] Bryden Cais and Eike Lau. Dieudonné crystals and Wach modules for p-divisible groups. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 114(4) :733–763, 2017.

[CS21] Kestutis Cesnavicius and Peter Scholze. Purity for flat cohomology, 2021.

[Dan20] Patrick Daniels. g-displays of hodge type and formal p-divisible groups, 2020.

[Dan21] Patrick Daniels. A Tannakian framework for G-displays and Rapoport-Zink spaces. *Int. Math. Res. Not.*, 2021(22) :16963–17024, 2021.

[de 95] A. J. de Jong. Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces. *Compos. Math.*, 97(1-2) :89–118, 1995.

[Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. Sém. Bourbaki 1970/71, Lect. Notes Math. 244, 123-165 (1971)., 1971.

[Dri76] V. G. Drinfel'd. Coverings of p-adic symmetric regions. *Funct. Anal. Appl.*, 10 :107–115, 1976.

[Dri18] Vladimir Drinfeld. A stacky approach to crystals, 2018.

[EG21] Matthew Emerton and Toby Gee. Moduli stacks of étale (phi,gamma)-modules and the existence of crystalline lifts, 2021.

[Fal94] Gerd Faltings. The trace formula and Drinfeld's upper halfplane. *Duke Math. J.*, 76(2) :467–481, 1994.

[Far15] Laurent Fargues. Quelques resultats et conjectures concernant la courbe. In *De la géométrie algébrique aux formes automorphes (I). Une collection d'articles en l'honneur du soixantième anniversaire de Gérard Laumon*, pages 325–374. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2015.

[Far20a] Laurent Fargues. G-torseurs en théorie de Hodge p-adique. *Compos. Math.*, 156(10) :2076–2110, 2020.

[Far20b] Laurent Fargues. Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classes local. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 53(1) :89–124, 2020.

[FF18] Laurent Fargues and Jean-Marc Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*, volume 406. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2018.

[FS21] Laurent Fargues and Peter Scholze. Geometrization of the local langlands correspondence, 2021.

[Fuj02] Kazuhiro Fujiwara. A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In *Algebraic geometry 2000, Azumino. Proceedings of the symposium, Nagano, Japan, July 20–30, 2000*, pages 153–183. Tokyo : Mathematical Society of Japan, 2002.

[FW79] Jean-Marc Fontaine and Jean-Pierre Wintenberger. Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, 288 :367–370, 1979.

[Gab81] Ofer Gabber. Some theorems on Azumaya algebras. Groupe de Brauer, Sémin., Les Plans-sur-Bex 1980, Lect. Notes Math. 844, 129-209 (1981)., 1981.

[Gir71] Jean Giraud. *Cohomologie non abélienne*, volume 179. Springer, Cham, 1971.

[Gle21] Ian Gleason. Specialization maps for scholzes category of diamonds, 2021.

[Gro66] Alexander Grothendieck. Le groupe de Brauer. II : Théorie cohomologique. Dix Exposés Cohomologie Schémas, Adv. Stud. Pure Math. 3, 67-87 (1968) ; Sém. Bourbaki 1965/66, Exp. No. 297, 21 p. (1966)., 1966.

[Har03] Urs T. Hartl. Semi-stable models for rigid-analytic spaces. *Manuscr. Math.*, 110(3) :365–380, 2003.

[HP04] Urs Hartl and Richard Pink. Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc. *Compos. Math.*, 140(3) :689–716, 2004.

[Hub94] Roland Huber. A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties. *Math. Z.*, 217(4) :513–551, 1994.

[Hub96] Roland Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, volume E30. Wiesbaden : Vieweg, 1996.

[Ito21] Kazuhiro Ito. p-complete arc-descent for perfect complexes over integral perfectoid rings, 2021.

[Ked16] Kiran S. Kedlaya. Noetherian properties of Fargues-Fontaine curves. *Int. Math. Res. Not.*, 2016(8) :2544–2567, 2016.

[Ked19] Kiran S. Kedlaya. Sheaves, stacks, and shtukas. In *Perfectoid spaces. Lectures from the 20th Arizona winter school, University of Arizona, Tuscon, AZ, USA, March 11–17, 2017. With an introduction by Peter Scholze*, pages 45–191. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2019.

[Ked20] Kiran S. Kedlaya. Some ring-theoretic properties of $\mathbf{A}_{\text{inf}}$. In *p-adic Hodge theory. Proceedings of the Simons symposium, Schloss Elmau, Germany, May 7–13, 2017*, pages 129–141. Cham : Springer, 2020.

[Kim18] Wansu Kim. Rapoport-Zink spaces of Hodge type. *Forum Math. Sigma*, 6 :110, 2018. Id/No e8.

[KL15] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu. *Relative p-adic Hodge theory : foundations*, volume 371. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2015.

[KL19] Kiran S. Kedlaya and Ruochuan Liu. Relative p-adic hodge theory, ii : Imperfect period rings, 2019.

[Kos21] Teruhisa Koshikawa. Logarithmic prismatic cohomology i, 2021.

[Kot85] Robert E. Kottwitz. Isocrystals with additional structure. *Compos. Math.*, 56 :201–220, 1985.

[Kre14] Martin Kreidl. On p-adic lattices and Grassmannians. *Math. Z.*, 276(3-4) :859–888, 2014.

[Lau08] Eike Lau. Displays and formal p-divisible groups. *Invent. Math.*, 171(3) :617–628, 2008.

[Lau10] Eike Lau. Frames and finite group schemes over complete regular local rings. *Doc. Math.*, 15 :545–569, 2010.

[Lau13] Eike Lau. Smoothness of the truncated display functor. *J. Am. Math. Soc.*, 26(1) :129–165, 2013.

[Lau18] Eike Lau. Dieudonné theory over semiperfect rings and perfectoid rings. *Compos. Math.*, 154(9) :1974–2004, 2018.

[Lau21] Eike Lau. Higher frames and G-displays. *Algebra Number Theory*, 15(9) :2315–2355, 2021.

[Lie04] Max Lieblich. *Moduli of twisted sheaves and generalized Azumaya algebras*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2004. Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology.

[Lie08] Max Lieblich. Twisted sheaves and the period-index problem. *Compos. Math.*, 144(1) :1–31, 2008.

[Mar07] Benedictus Margaux. Passage to the limit in non-abelian Čech cohomology. *J. Lie Theory*, 17(3) :591–596, 2007.

[Nor75] Peter Norman. An algorithm for computing local moduli of Abelian varieties. *Ann. Math. (2)*, 101 :499–509, 1975.

[NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*, volume 323. Berlin : Springer, 2008.

[Pap18] Georgios Pappas. Arithmetic models for shimura varieties, 2018.

[Pap21] G. Pappas. On integral models of shimura varieties, 2021.

[PR21] Georgios Pappas and Michael Rapoport. p-adic shtukas and the theory of global and local shimura varieties, 2021.

[RV14] Michael Rapoport and Eva Viehmann. Towards a theory of local Shimura varieties. *Münster J. Math.*, 7(1) :273–326, 2014.

[RZ96] M. Rapoport and Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 1996.

[Sch92] Claus Scheiderer. Quasi-augmented simplicial spaces, with an application to cohomological dimension. *J. Pure Appl. Algebra*, 81(3) :293–311, 1992.

[Sch12] Peter Scholze. Perfectoid spaces. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 116 :245–313, 2012.

[Sch22] Peter Scholze. Etale cohomology of diamonds, 2022.

[SGA71] Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1966/67, SGA 6.Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussilia, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Lecture Notes in Mathematics. 225. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. XII, 700 p. (1971)., 1971.

[SGA72] Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). Un séminaire dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki , P. Deligne, B. Saint-Donat. Tome 2. Exposes V à VIII. Lecture Notes in Mathematics. 270. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. 418 p. DM 50.00 ; \$ 15.90 (1972)., 1972.

[She20] Xu Shen. On some generalized Rapoport-Zink spaces. *Can. J. Math.*, 72(5) :1111–1187, 2020.

[Sta22] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*, 2022.

[SW13] Peter Scholze and Jared Weinstein. Moduli of p-divisible groups. *Camb. J. Math.*, 1(2) :145–237, 2013.

[SW20] Peter Scholze and Jared Weinstein. *Berkeley lectures on p-adic geometry*, volume 207. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2020.

[Zhu17] Xinwen Zhu. Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed characteristic. *Ann. Math. (2)*, 185(2) :403–492, 2017.

[Zin] Thomas Zink. Lectures on p-divisible groups and displays.

[Zin01] Thomas Zink. Windows for displays of p-divisible groups. In *Moduli of abelian varieties. Proceedings of the 3rd Texel conference, Texel Island, Netherlands, April 1999*, pages 491–518. Basel : Birkhäuser, 2001.

[Zin02] Thomas Zink. The display of a formal p-divisible group. In *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (I)*, pages 127–248. Paris : Société Mathématique de France, 2002.