Problema de ruteo de vehículos: Formulación

ICT 3464

Profesor Homero Larrain

Contenidos de la clase

Formulando un VRP

Eliminación de subtours

El modelo tradicional

El modelo MTZ

Formulación a tres índices

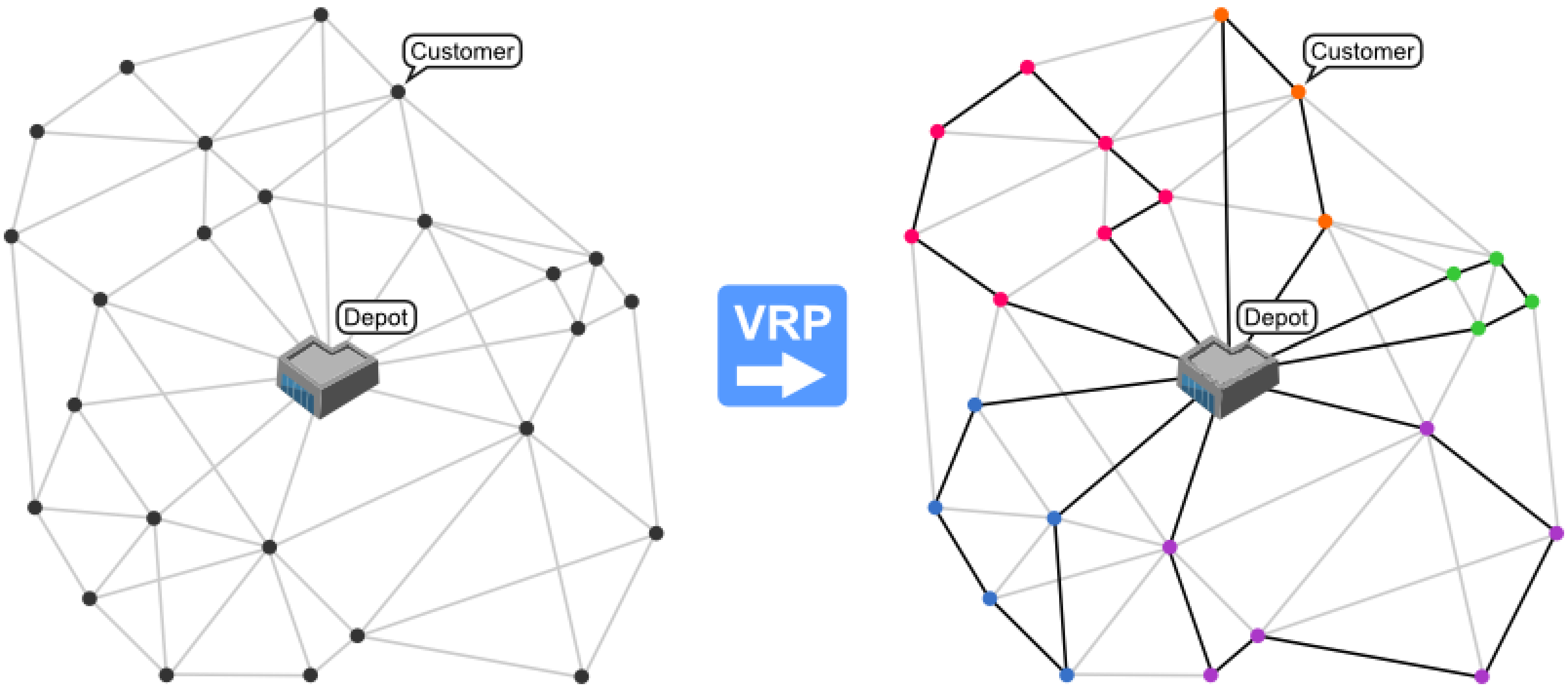
Definición del problema

Dado:

Un conjunto de *requerimientos de transporte* y una *flota de vehículos*.

Tarea:

Determinar un conjunto de *rutas* para satisfacer los requerimientos con la flota dada a *costo mínimo*. En particular, decidir qué vehículo se hace cargo de qué requerimiento y en qué secuencia, de forma de que todas las rutas puedan ser ejecutadas en forma factible.



Fuente: http://neo.lcc.uma.es/

Consideremos el caso de una red completa dirigida $G(N, A)$. El nodo 0 corresponde al depósito, y el resto de los nodos corresponden a clientes.

- N: conjunto de clientes $i \in N = \{1,2, \ldots., n\}$ de la red.
- A: conjunto de arcos (i, j) en la red.
- c_{ij}: costo por utilizar el arco (i, j) en la solución.
- q_i: demanda del cliente i.
- $|K|$: número de vehículos disponibles (homogéneos).
- Q: capacidad de los vehículos.
- x_{ij}: variable binaria asociada a la decisión de utilizar el arco (i, j) en la solución.

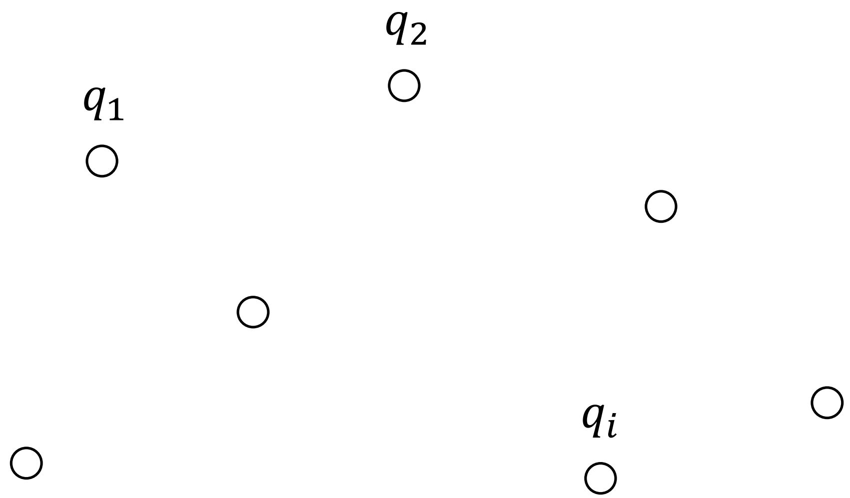
¿Cómo prevenir la aparición de sub-tours en las soluciones para este caso?

¿Cómo asegurar que las rutas no superen la capacidad de los vehículos?

Eliminación de sub-tours

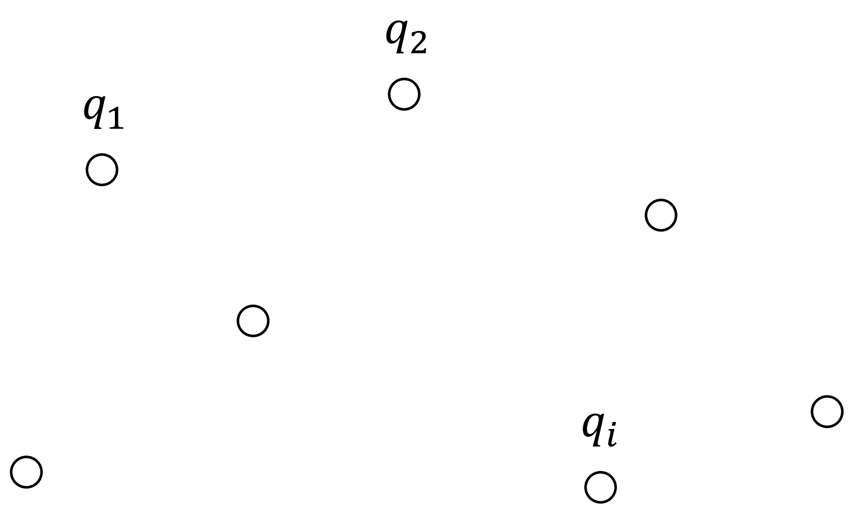
En el CVRP estas dos condiciones se imponen en forma simultánea.

Observemos un subconjunto S de clientes:



¿Cuál es el menor número de vehículos necesarios para atender este subconjunto de nodos?

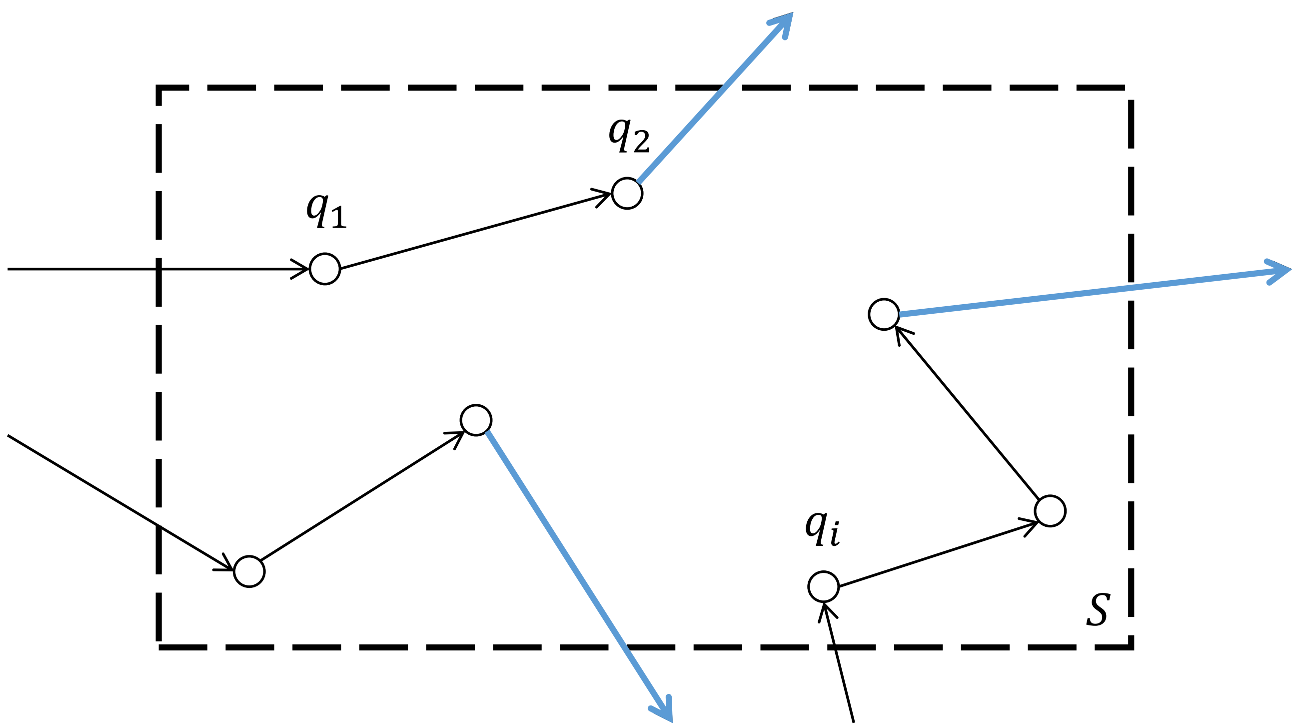
Si tenemos que la demanda total del subconjunto es $\sum_{i \in S} q_i$, y que la capacidad de cada vehículo es Q, entonces una cota inferior para el número de vehículos necesarios es $\lceil \sum_{i \in S} q_i / Q \rceil$.



¿Cómo exigir entonces que al menos $\lceil \sum_{i \in S} q_i / Q \rceil$ vehículos atiendan al subconjunto S?

Debemos imponer que al menos $\lceil \sum_{i \in S} q_i / Q \rceil$ arcos salientes de S sean utilizados en la solución, es decir:

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \sum_{i \in S} q_i / Q \right\rceil, \qquad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$



Estas restricciones cumplen una doble función: eliminan sub-tours, y aseguran el cumplimiento de la restricción de capacidad de los vehículos.

El modelo tradicional

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in N$$

$$\sum_{i\in\delta^-(j)} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in N$$

$$\sum_{j\in\delta^+(0)} x_{0j} = |K|$$

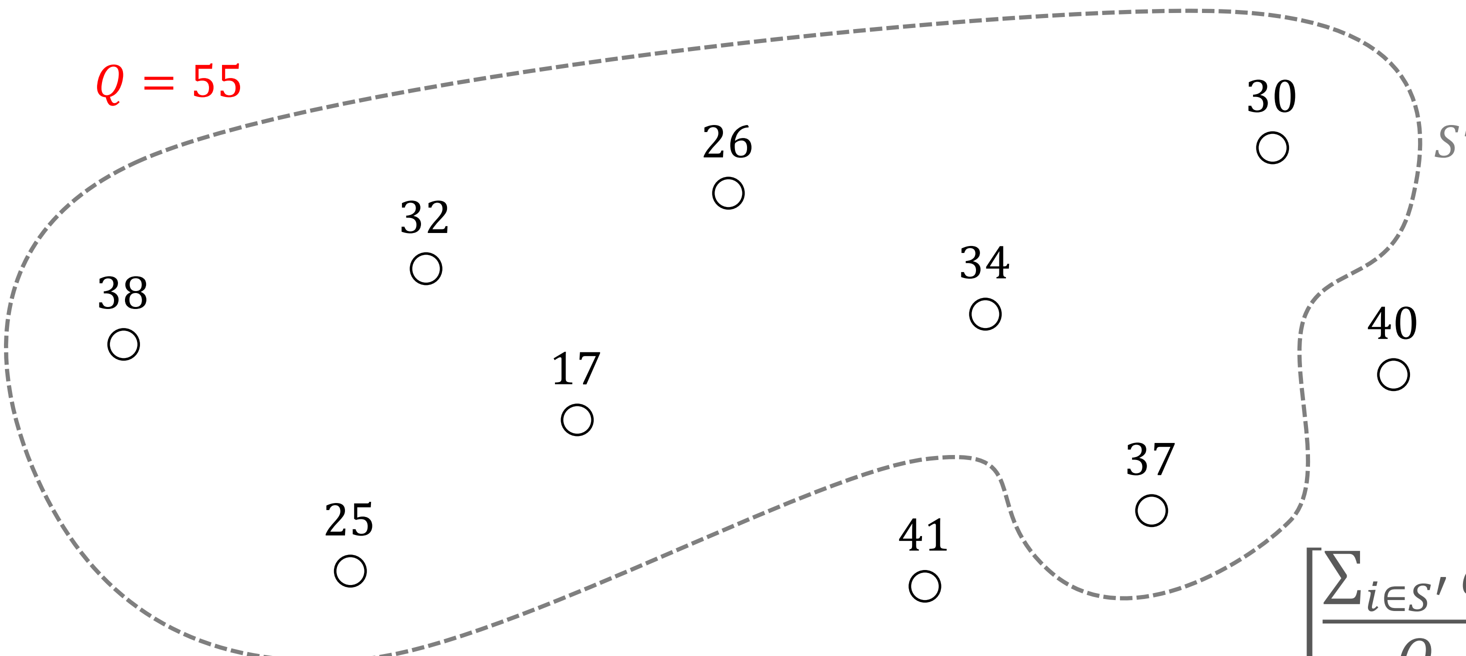
$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \sum_{i\in S} q_i/Q \right\rceil, \qquad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A$$

¿Es $\lceil \sum_{i \in S} q_i / Q \rceil$ la mejor cota que podemos utilizar?

$$\left\lceil \frac{\sum_{i \in S} q_i}{Q} \right\rceil = 6$$

Asumiendo que los pedidos no se pueden dividir entre vehículos, ¿es posible satisfacer estos clientes usando 6 vehículos?



$$\left\lceil \frac{\sum_{i \in S'} q_i}{Q} \right\rceil = 5$$

Si asumimos que en general $r(S)$ representa una cota inferior para el número de vehículos necesarios para satisfacer la demanda, podemos reescribir el modelo en su forma más general reemplazando la restricción de capacidad/sub-tours por:

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} \geq r(S), \qquad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

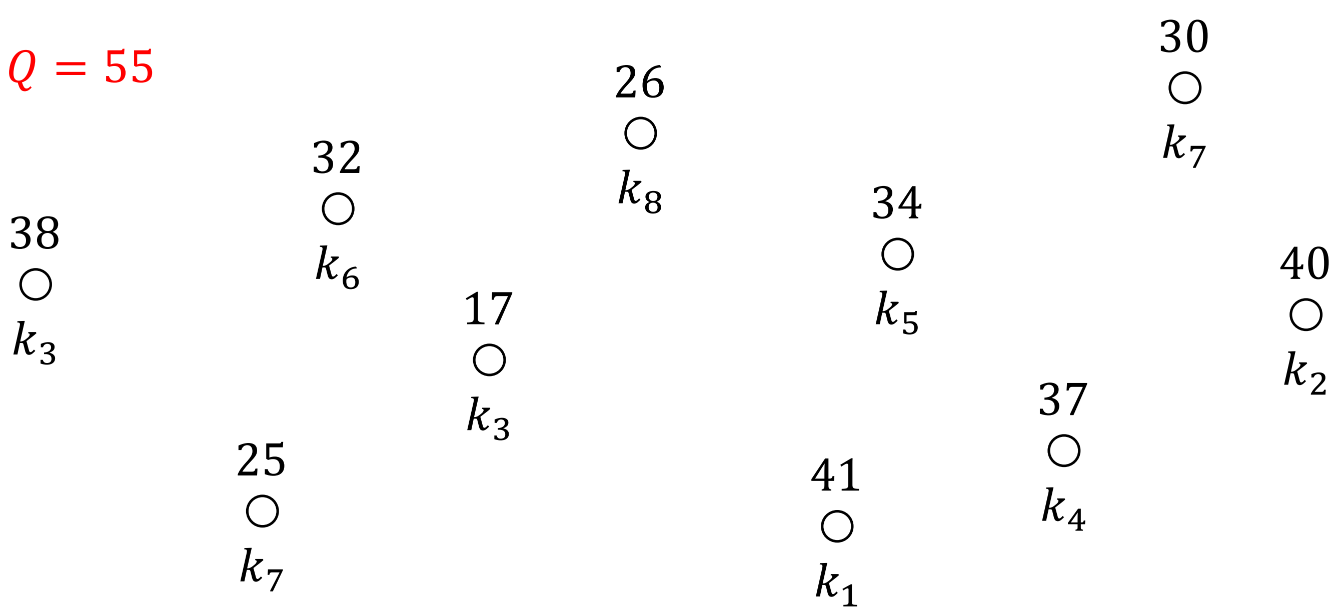
Bin packing

El problema de determinar el mínimo número de vehículos necesarios para un grupo de clientes es conocido como bin packing problem.

Éste es un problema NP-hard, pero existen buenas heurísticas para resolverlo en forma aproximada, tal como la heurística *first-fit*.

Heurística first-fit

1. Ordenar los clientes de acuerdo a sus demandas en forma decreciente.
2. Por turnos, asignar clientes al primer vehículo donde quede capacidad libre.



Notación compacta

Habíamos ya definido los conjuntos $\delta^+(i)$ y $\delta^-(i)$ como los conjuntos de arcos salientes y el de arcos entrantes desde el nodo i. En el caso simétrico, $\delta(i)$ corresponde al conjunto de arcos incidentes en el nodo i.

Podemos generalizar esta notación para conjuntos: diremos por ejemplo que $\delta^+(I)$ representa a los arcos que salen de cierto conjunto I.

Además, para cualquier variable o coeficiente z_i con $i \in J$, para cualquier $I \subseteq J$ diremos que $z(I)$ equivale a $\sum_{i \in I} z_i$. Esta definición se puede extender a variables o coeficientes con multiples índices.

Por ejemplo,

$$\sum_{i \in \delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad x\big(\delta^-(j)\big) = 1$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} q_i}{Q} \right\rceil \quad \Rightarrow \quad x\big(\delta^+(S)\big) \geq \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil$$

Actividad:

Reescriba el modelo para el CVRP usando notación compacta.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j\in\delta^+(i)} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in N$$

$$\sum_{i\in\delta^-(j)} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in N$$

$$\sum_{j\in\delta^+(0)} x_{0j} = |K|$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(S)} x_{ij} \geq r(S), \qquad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A$$

El modelo, usando notación compacta, se puede reescribir como:

$$\min c^{\mathrm{T}} x$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
x\left(\delta^{+}(i)\right) &= 1, && \forall i \in N \\
x\left(\delta^{-}(j)\right) &= 1, && \forall j \in N \\
x\left(\delta^{+}(0)\right) &= |K| && \\
x(\delta^{+}(S)) &\geq r(S), && \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset \\
x_a &\in \{0,1\}, && \forall a \in A
\end{aligned}$$

VRP sobre redes no dirigidas

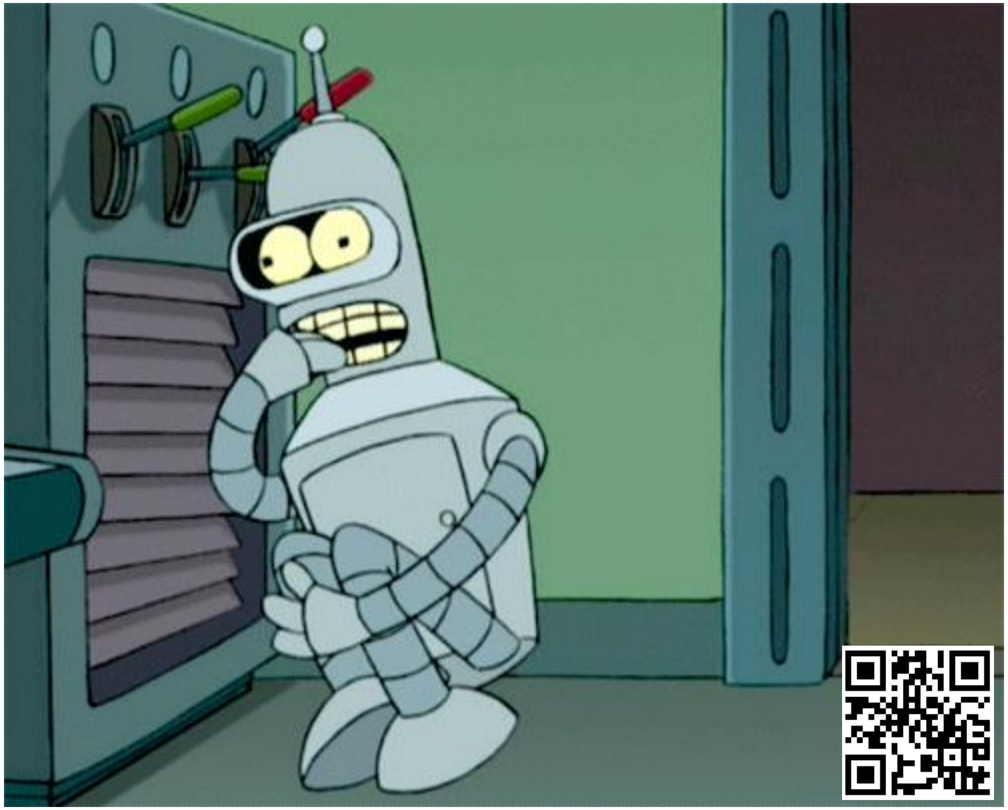
Consideremos el caso de una red completa no dirigida $G(N, E)$, donde N es el conjunto de nodos i de la red, y E es el conjunto de arcos (i, j) con ($i < j$) de la red. El resto de los parámetros y variables son similares al caso dirigido.

El modelo, usando notación compacta, se puede plantear como:

$$\min c^{\mathrm{T}} x$$

Sujeto a:

$$
\begin{gathered}
x\big(\delta(i)\big) = 2, \qquad \forall i \in N \\
x\big(\delta(0)\big) = 2|K| \\
x(\delta(S)) \geq 2r(S), \qquad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset \\
x_e \in \{0,1,2\}, \qquad \forall e \in \delta(0) \\
x_e \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E \setminus \delta(0)
\end{gathered}
$$



$$x_e \in \{0,1,2\}, \qquad \forall e \in \delta(0)$$
$$x_e \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E \setminus \delta(0)$$

El modelo MTZ

Para el caso no dirigido, definimos las variables u_i para $i \in N$ que representan la demanda acumulada ya atendida por el vehículo al momento de llegar al cliente i.

Las restricciones de eliminación de sub-tours y capacidad asociadas a esta formulación son las siguientes:

$$u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j, \qquad \forall (i,j) \in A(N)$$
$$q_i \leq u_i \leq Q, \qquad \forall i \in N$$

Con esto, el modelo MTZ para el CVRP corresponde a:

$$\min c^{\mathrm{T}} x$$

Sujeto a:

$$
\begin{gathered}
x\big(\delta^{+}(i)\big) = 1, \qquad \forall i \in N \\
x\big(\delta^{-}(j)\big) = 1, \qquad \forall j \in N \\
x\big(\delta^{+}(0)\big) = |K| \\
u_i - u_j + Q x_{ij} \leq Q - q_j, \qquad \forall (i,j) \in A(N) \\
q_i \leq u_i \leq Q, \qquad \forall i \in N \\
x_a \in \{0,1\}, \qquad \forall a \in A
\end{gathered}
$$

Tal como en el caso del TSP, el modelo MTZ para el CVRP permite construir un modelo con un número mucho menor de restricciones, pero cuya relajación lineal es mucho menos compacta, lo que lo hace menos eficiente de resolver en general.

Formulación en tres índices

Los modelos estudiados hasta ahora asumen que los ciclos son indistinguibles.

Una nueva formulación se obtiene si consideramos en forma explícita qué vehículo atiende a cada cliente.

Redefinimos entonces la variable de ruteo como x_{ijk}, que indica si el vehículo k recorre el arco (i, j) en su ruta, e incorporamos además la variable y_{ik} que indica si el vehículo k visita al cliente i.

La red también es redefinida en esta formulación. El nodo depósito (0) será ahora representado por un nodo de origen o y uno de destino d. El conjunto de vértices de la red queda definido como $V = N \cup \{o, d\}$ y los arcos de la red quedan dados por $A = V^2$.

La formulación en tres índices del CVRP corresponde entonces a:

$$\min \sum_{k \in K} c^{\mathrm{T}} x_k$$

Sujeto a:

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1, \qquad \forall i \in N$$

$$x_k\big(\delta^+(i)\big) - x_k\big(\delta^-(i)\big) = \begin{cases} 1, & i = o \\ 0, & i \in N \end{cases} \qquad \forall i \in V \setminus \{d\}, k \in K$$

$$y_{ik} = x_k\big(\delta^+(i)\big), \qquad \forall i \in V \setminus \{d\}, k \in K$$

$$y_{dk} = x_k\big(\delta^-(d)\big), \qquad \forall k \in K$$

$$u_{ik} - u_{jk} + Q x_{ijk} \leq Q - q_j, \qquad \forall (i,j) \in A, k \in K$$

$$q_i \leq u_{ik} \leq Q, \qquad \forall i \in V, k \in K$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A, k \in K$$

$$y_{ik} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in V, k \in K$$