

Trabajo Práctico 2 – Modelado de una Pelota Rebotando

Dinámica de los Sistemas Físicos

Año 2023

En este Trabajo Práctico modelaremos y simularemos un sistema real consistente en una pelota que rebota contra el piso. En el desarrollo del mismo, partiendo del sistema real plantearemos las hipótesis simplificadoras que nos permitan arribar al esquema de un *sistema físico idealizado*. En base a estas simplificaciones, plantearemos un modelo matemático y diseñaremos experimentos que nos permitan obtener valores para los parámetros de dicho modelo. Luego, verificaremos mediante simulación que los parámetros sean correctos (ajustando eventualmente sus valores) y que las hipótesis simplificadoras sean adecuadas (replantando eventualmente parte de las mismas).

El trabajo se llevará a cabo en dos sesiones, debiendo concurrir a las mismas con el trabajo previo correspondiente realizado:

- Como trabajo previo a la primera sesión se deberán realizar los Problemas 1 y 2.
- En la primera sesión se realizará el Problema 3, para lo cual se debe concurrir a la sesión con una pelotita que se utilizará para los experimentos.
- Previo a la segunda sesión deberán realizarse los Problemas 4 y 5.
- En la segunda sesión se realizarán los Problemas 6, 7 y 8.

Problema 1. Formulación del Sistema Físico Idealizado

El sistema considerado será una pelota rebotando contra el piso. El objetivo del modelo será describir el movimiento vertical de la pelota desde que la misma es soltada desde una altura inicial y_0 hasta que transcurre cierto tiempo en el cual la pelota puede rebotar varias veces contra el piso.

Deberá plantearse entonces un esquema del modelo, indicando sus componentes, y considerando dos situaciones: una cuando la pelota está en el aire y otra cuando está en contacto con el piso.

Algunas hipótesis necesarias para describir el sistema físico idealizado son:

1. Se considerará en principio sólo el movimiento vertical del centro de masa de la pelota, teniendo en cuenta la aceleración gravitatoria.
2. El piso se considerará absolutamente indeformable.
3. Se asumirá que parte de la fuerza de interacción entre el piso y la pelota depende de la deformación de la misma y posee una ley no lineal

Problema 2. Formulación del Modelo Matemático

Para cada una de las situaciones (pelota en el aire o en contacto con el piso) se deberá formular un modelo matemático en forma de sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas. Luego, se deberá formular un modelo matemático unificado que incluya la condición de conmutación entre ambas situaciones.

El modelo matemático deberá contener una variable que indique la fuerza de interacción entre el piso y la pelota.

En esta etapa no será necesario determinar los parámetros del modelo y podrá considerarse que entre la deformación de la pelota y la fuerza mencionada en las hipótesis hay una relación no lineal expresada por una función genérica $F - g(\Delta x) = 0$.

Problema 3. Experimentación para Parametrizar

Con el objetivo de obtener los parámetros del modelo, se deberá:

1. Pesar la pelotita y medir su diámetro.
2. Obtener la curva de fuerza vs. deformación. Para esto hay un instrumento adecuado en el Laboratorio de Automatización y Control que permite obtener distintos puntos de la curva modificando la deformación y midiendo la fuerza.
3. Soltar la pelotita desde diferentes alturas filmando las trayectorias correspondientes. La pelotita debe estar junto a un patrón de referencia que permita posteriormente determinar la altura respecto del piso en cada fotograma.

Problema 4. Procesamiento de Datos

Para poder utilizar los datos de las trayectorias filmadas en las etapas posteriores de ajuste de parámetros y validación, se deberán extraer y procesar los mismos de la siguiente manera:

1. Para cada una de las filmaciones obtener las series de datos con los valores del tiempo correspondiente a cada fotograma y la altura de la pelotita en dicho fotograma. Esto puede hacerse automáticamente con el software de código abierto *Tracker* <https://physlets.org/tracker/> o bien manualmente midiendo sobre cada fotograma la posición de la pelota (si se realiza de forma manual, no es necesario medir en todos los fotogramas, sino sólo en los más representativos de la trayectoria).
2. Para poder importar las series de datos en OpenModelica, los mismos deberán grabarse en archivos de texto llamados `exper1.txt`, `exper2.txt`, etc. con el siguiente formato:

Código 1: Formato del archivo de texto con los datos.

```
#1
double datos(9,2)  # comment line
0,      2
0.05,   1.98775
0.1,    1.951
0.15,   1.88975
0.2,    1.804
0.25,   1.69375
0.3,    1.559
0.35,   1.39975
0.4,    1.216
```

donde la primera columna tiene los valores del tiempo y la segunda, los valores de la variable medida.

Problema 5. Construcción del Modelo Matemático en Modelica

Utilizando el lenguaje Modelica, construir el modelo matemático planteado con los parámetros medidos y utilizando valores arbitrarios para los que no se hayan podido medir. Para implementar la función que interpola la curva de fuerza vs. deformación a partir de la tabla de valores, se puede utilizar un código como el siguiente (reemplazando los valores de los datos por los obtenidos):

Código 2: Función de Modelica que implementa interpolación lineal sobre una tabla de datos

```
function LookUpTable
  input Real x;
  output Real y;
  protected
    parameter Real xdata[:] = {-2,-1,-0.5,0,0.5,1,2};
    parameter Real ydata[:] = {-8,-1,-0.1,0,0.1,1,8};
    Integer k;
  algorithm
    k:=1;
    while x>xdata[k+1] and k<size(xdata,1)-1 loop
      k:=k+1;
    end while;
    y:=(ydata[k+1]-ydata[k])/(xdata[k+1]-xdata[k])*(x-xdata[k])+ydata[k];
  end LookUpTable;
```

Esta función `LookUpTable` se puede definir dentro de un modelo e invocar desde las ecuaciones del mismo como si fuera una función cualquiera. Por ejemplo, una ecuación podría tener la forma `F = LookUpTable(delta x) = 0;`.

Por otro lado, para implementar la conmutación entre los modelos utilizando condiciones arbitrarias, se puede utilizar una variable discreta de tipo `Boolean` que indique si la pelota está o no en contacto con el piso. Para esto, puede usarse parte del código siguiente:

Código 3: Parte de un modelo que utiliza una variable booleana.

```
model BBall
  Boolean contact(start=false);
  Real var1, var2, ..., varn;
  parameter Real par1, par2, ..., parp;
equation
  expr1 = if contact then expr2 else expr3;
  expr4 = expr5;
algorithm
  when cond1 then
    contact:=true;
  end when;
  when cond2 then
    contact:=false;
  end when;
end BBall;
```

Problema 6. Simulación y Ajuste de Parámetros

Para ajustar los parámetros del modelo, se deberá hacer lo siguiente:

1. Elegir una trayectoria filmada para ajustar los parámetros. La serie de datos correspondiente debe estar grabada con el formato explicado en el Problema 4 y, para importarlos en OpenModelica, se puede utilizar el siguiente modelo, que lee la serie temporal guardada en el archivo `exper1.txt` y la asigna en la variable `ydata`:

Código 4: Modelo que lee los datos de un archivo de texto.

```
model FromFile
  Real ydata;
  Modelica.Blocks.Sources.CombiTimeTable table(fileName = "/path_to_file/exper1.txt", tableName = "datos",
    tableOnFile = true);
equation
  ydata=table.y[1];
end FromFile;
```

En este modelo, el texto `"/path_to_file/exper1.txt"` debe reemplazarse por la ubicación y el nombre utilizados para el archivo que contiene los datos. Al simular este modelo, puede graficarse la variable `ydata` que contendrá los datos leídos del archivo.

2. Simular el modelo desarrollado en el Problema 5 utilizando OpenModelica y comparar los resultados con los de la trayectoria elegida en el punto anterior. Modificar los parámetros que considere necesario hasta que la simulación y el experimento coincidan lo mejor posible.

Problema 7. Simulación y Validación del Modelo

Una vez finalizada la parametrización, se procederá a validar el modelo realizando para esto las siguientes actividades:

1. Simular el modelo desde las distintas condiciones iniciales correspondientes a los distintos experimentos grabados. Comparar en cada caso las trayectorias experimentales con las obtenidas por simulación. Sacar conclusiones sobre la validez de las hipótesis formuladas.
2. Observar el retrato de fases graficando velocidad y posición de la pelotita.
3. Graficar la fuerza de interacción entre el piso y la pelotita y verificar que no se observe alguna anomalía en la misma. Si hubiera algún problema, revisar y eventualmente cambiar alguna de las condiciones de conmutación.

Problema 8. Extensión a un modelo en dos dimensiones

Extender el modelo a dos dimensiones suponiendo la presencia de un frontón. Si se asume que ambos movimientos están desacoplados, se puede lograr esto creando un nuevo modelo que contenga dos instancias del modelo del movimiento vertical, una de ellas con el parámetro que representa la gravedad g cambiado a un valor nulo.

Notar que, para simular el movimiento horizontal, se deberá dar una condición inicial positiva a la posición y una negativa a la velocidad (de modo que la pelota comience a la derecha del frontón y avance hacia él).