PHY118/119
Arbeit, Leistung, Energie

Autor: Simon Flury
Co-Autoren: Nik Dennler, Johannes Lade
E-mail: simon.flury@uzh.ch

October 12, 2017

1 Achtung!

Dieses Dokument ist kein offizielles Vorlesungsmaterial. Es wurde weder von Prof. Kilminster noch vom Hauptassistenten abgesegnet, somit kann sich nicht darauf bezogen werden und es wird auch keine Haftung für Fehler übernommen. Es soll einzig und allein der Lernunterstützung dienen und bezieht sich ausschliesslich auf unsere Übungsstunden.

2 Arbeit, Leistung, Energie

Arbeit

Arbeit im physikalischen Sinne ist definiert als

$$W = F \cdot s \tag{1}$$

also Kraft mal Weg, und trägt die Einheit *Joule*: $J = kg \cdot m/s^2$.
Differentielle Definition:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

Kein Grund zur Verwirrung, es bedeutet lediglich, dass $\frac{dW}{dr} = F$, also die Ableitung der Arbeit nach dem Weg ist gleich der aufgewendeten Kraft. Falls wir Mittelwerte betrachten, wird die Formel zu $\frac{\Delta W}{\Delta r} = F$, wobei Δr eine bestimmte Wegdifferenz ist.
Somit ist die Arbeit die verrichtet wird, wenn man einen Körper vom Punkt 1 zum Punkt 2 bewegt, gleich der aufgewendeten Kraft integriert über die Strecke.

$$W_{1\to2} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{3}$$

Leistung

Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeit, sprich

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{4}$$

und trägt die Einheit Watt was J/s, also Joule pro Sekunde entspricht.

Betrachten wir die Definition der Arbeit, bemerken wir schnell, dass Führungskräfte, welche per Definition immer senkrecht zum Weg stehen, keine Arbeit verrichten. $\vec{F} \cdot \vec{r} \rightarrow F \cdot r \cdot \cos(\phi)$ da Führungskraft senkrecht zum Weg ist $\phi = 90°$ und somit $cos(\phi) = 0$.

Energie und Energiesatz der Mechanik

Wir definieren die kinetische Energie als

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \tag{5}$$

Dann gilt der Energiesatz der Mechanik:

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 dT = W_{1\rightarrow 2} \tag{6}$$

Herleitung:
$\frac{dp}{dt} = F \rightarrow v \cdot \frac{dp}{dt} = F \cdot v \rightarrow m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} = P$, wobei mit P die Leistung gemeint ist. Somit gilt: $\frac{1}{2}m \cdot \frac{dv^2}{dt} = \frac{dW}{dt}$.
Mit der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}mv^2$ folgt

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt} \tag{7}$$

Dies bedeutet, dass die Zunahme der kinetischen Energie gleich der von den Kräften geleisteten Arbeit ist, also

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 dT = W_{1\rightarrow 2} \tag{8}$$

Beispiel: Bremsweg eines Zuges.

Figure 1: Zug mit Bremskraft B und Geschw. v_1

Bremskraft $\vec{B}$
Anfang: $T_1 = \frac{m}{2}v_1^2$
Ende: $T_2 = \frac{m}{2}v_2^2 = 0$ da $v_2 = 0$
Arbeit: $W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 B \cdot dr = -B \int_1^2 dr = -B(r_2 - r_1)$ (das Minus kommt davon, dass B in die entgegengesetzte Richtung von v zeigt.
Nun gilt nach dem Energiesatz: $T_2 - T_1 = W_{1\to 2}$ somit $0 - \frac{m}{2}v_1^2 = -B(r_2 - r_1)$
$\rightarrow r_2 - r_1 = \frac{mv_1^2}{2B}$
Dies ist der benötigte Bremsweg.

2.1 Potentielle Enrgie von konservativen Kraftfeldern

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob man W in jedem Raumpunkt definieren kann? Dazu muss gelten: W, also das Integral über den Weg, muss unabhängig vom gewählten Weg sein. Sprich $W_{1\to 2} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ muss gleich $W_{1\to 2} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sein.

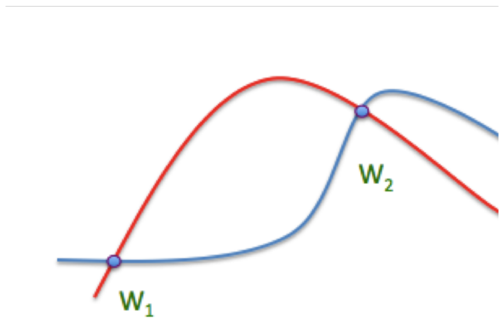

Figure 2: Darstellung zweier möglicher Wege, mit Kreuzpunkten 1 und 2

Ist dies der Fall so spricht man von einer **konservativen Kraft**.

Die potentielle Energie einer konservativen Kraft wird nun wie folgt definiert:

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{9}$$

In differentieller Schreibweise gilt

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{10}$$

Damit gilt nun $W_{1\to 2} = T_2 - T_1$ und $W_{1\to 2} = -(V_2 - V_1)$, woraus folgt $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$. Anders ausgedrückt, gilt

$$V + T = const \tag{11}$$

Dies ist der **Energieerhaltungssatz der Mechanik für konservative Kräfte**. (Achtung: Reibungskräfte sind Beispiele für nicht-konservative Kräfte!)

Was passiert eigentlich wenn es sich um einen geschlossenen Weg handelt?

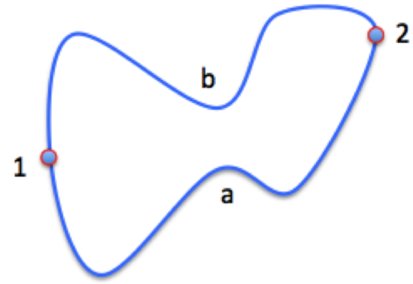

Figure 3: Darstellung eines geschlossenen Weges.

$W_{1\to 2} = \int_{1b}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{2a}^{1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{1b}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{1a}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ (=0 falls wegunabhängig)

Kraftfeld ist konservativ $\Leftrightarrow W_{1\to 1} = 0$ (geschlossener Weg)

$$\int_{1}^{1} \vec{F} d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (12)$$

daher gilt: Kraftfeld ist konservativ $\Leftrightarrow \exists$ potentielle Energie V
(Falls ihr irritiert seit, wir schreiben immer $T \to E_{kin}$ und $V \to E_{pot}$)

Für die Aufgaben, sowie allgemein für diese Vorlesung benötigt ihr jedoch lediglich diese Definitionen der verschiedenen Energien:

- $E_{pot} = mgh$ (Vorsicht, dass Nullniveau eures Systems könnt ihr selbst wählen, müsst jedoch konsistent bleiben.)
- $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
- $E_{Feder} = \frac{1}{2}Dx^2$ (Potentielle Federenergie mit Federkonstanten D)

3 Impulserhaltung

Eine der wichtigsten physikalischen Eigenschaften eines Systems ist die Impulserhaltung, welche immer gilt. $p_i = p_f$ sprich der gesamte Impuls am Anfang ist gleich dem gesamten Impuls am Ende eines Vorgangs.
Gesamtimpuls: $\vec{p} = \sum m_i \cdot \vec{v_i}$
Die Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äusseren Kräfte: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{aussen}$
Ein gutes Beispiel für Impulserhaltung sind jegliche Stossprozesse:

- **elastische Stösse**: Körper bleiben unverändert, es gilt Energie und Impulserhaltung.
- **inelastische Stösse**: Körper verformen sich, mechanische Energie ist nicht erhalten, der Impuls jedoch schon.

Bei einen Zusammenstoss zweier Körper kommt es zu einer Impulsübetragung durch einen Kraftstoss.
Kraftstoss:

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_i^f \vec{F} \cdot dt \tag{13}$$