Seminararbeit

Sebastian Knigge, BSc BSc
Universität Wien

Betreuer
Dipl.-Ing. Martin Glanzer
Department of Statistics and Operations Research
Universität Wien

20. März 2019

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

LSM Least Squares Monte Carlo

bspw. bespielsweise

m.a.W. mit anderen Worten

sog. sogenannt/e/s

ZP Zeitpunkt

Kapitel 1

Theoretische Grundlagen und Hintergründe

1.1 Optionen und reden Bewertung

Diese Arbeit behandelt die Bewertung von Optionen - im Speziellen amerikanischen Put Optionen. Dem Leser soll aber zunächst ein Überblick über die verschiedenen Arten von Optionen und deren Wesen verschafft werden.
Hans Becker beschreibt in Ïnvestitionen und FinanzierungÖptionen als „bedingte Termingeschäfte"(s. S313 Becker (2012)) weil eine Option im Gegensatz zu einem Forward oder Future für den Käufer des Finanztitels nur ein Recht, aber keine Pflicht auf Ausübung des Geschäftes einräumt. Ein Käufer hält eine Position in der „long position" ein Verkäufer in der „short position". Klarerweise ist - je nach dem um welche Partei es sich handelt - die Auszahlung der Option unterschiedlich.
Weiters gibt es zwei Grundtypen vom Optionen. Kaufoptionen, sog. „calls" und Verkaufsoptionen, sog. „puts". Weitere wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Optionen sind der Basiswert oder das „underlying", also der zugrundeliegende Stock (Aktie), im Falle einer Aktienoption. und der Basispreis oder auch „strike price". Für eine „Europäische" Verkaufsoption bspw. hat der Käufer das Recht das underlying zu einem festgelegten Zeitpunkt zu verkaufen, für den Verkäufer, der also die Option in short position hält, besteht die Pflicht das Basisprodukt zu diesem Zeitpunkt zu kaufen, falls die Option vom Käufer ausgeführt wird.
Es gibt eine weitere Unterscheidung von Optionen Hinsichtlich des Ausübungszeitpunktes („expiration date"). Man unterscheidet in „Europäische“und „Amerikanische" Optionen. Europäische Optionen dürfen ausschließlich zum expiration date ausgeführt werden, wohingegen Amerikanische Optionen zu jedem Zeitpunkt bis zum expiration date ausgeführt werden können (vgl. S7 Hull (2011)).
Wie erwähnt soll in dieser Arbeit der Fokus auf einer amerikanischen put Option in long position liegen. Für so eine Option kann im Ausübungszeitpunkt, der vorher freilich nicht bekannt ist die Auszahlung wie im folgenden Plot gezeichnet werden (s. Abbildung 1.1).

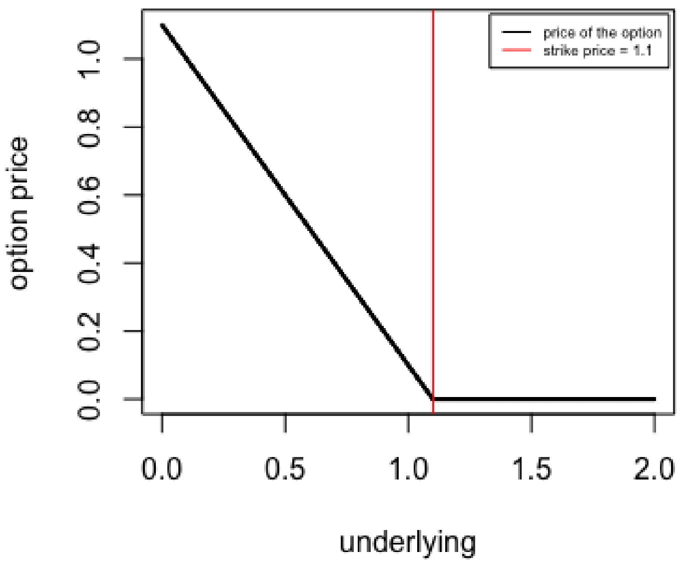

Abbildung 1.1: Auszahlung einer Put Option mit strike 1.1

Für eine europäische Option, bei der der Ausübungszeitpunkt bekannt ist, ist die Bewertung der Option mittels Black-Scholes in geschlossener Form möglich. Hierbei wird die Differentialgleichung des Black-Scholes Modells gelöst und unter Zuhilfenahme eines Maßwechsels folgt eine einfache, geschlossene Formel. Diese ist in Hull (2011) auf S313 zu finden. Weiters führt Hull auch eine Skizze zur Herleitung an.
Die Schwierigkeit bei der Berwertung Amerikanischer Optionen besteht darin, dass der Aus-übungszeitpunkt nicht bekannt ist. Der Käufer der Option muss also zu jedem Zeitpunkt abwägen ob die Option ausgeübt werden sollt, oder ob die Alternative d.h. die Beibehaltung der Option und eine spätere Ausübung sinvoller ist. Es wird also in jedem Zeitpunkt der Auszahlungsbetrag bei Ausübung und der Erwartungswert bei Beibehaltung verglichen (vgl. (Longstaff and Schwartz, 2001, S.114)). Longstaff und Schwartz schätzen diesen bedingten Erwartungswert durch die „fitted values “- also die geschätzten Werte - einer Regression, der Stock prices auf die ex-post Auszahlungen über alle Simulationen.

1.2 Beispiel

Folgendes Beispiel soll helfen den Least Squares Monte Carlo (LSM) Algorithmus zu veranschaulichen. In diesem Beispiel soll eine Amerikanische Put-Option (in long position) bewertet werden. Der aktuelle Preis sei normiert und liegt bei 1. Der Strike Preis (i.e. Ausübungspreis der Option) bei $K = 1.1$. Man gehe wei-

ters davon aus, dass die Option jährlich ausgeübt werden kann und eine Laufzeit von 4 Jahren hat.
Im ersten Schritt werden sog. Pfade simuliert. Hierbei handelt es sich um den Preis des Underlyings. Die Anzahl der Pfade ist dabei beliebig. Um das Beispiel übersichtlich zu gestalten werden wir hier nur 10 Pfade simulieren. Jeder Pfad hat die Länge 4, denn wir simulieren für die gesamte Laufzeit der Option.

Tabelle 1.1 enthält die Matrix der Simulationen des Underlyings. Ein Plot der Pfade findet sich in Abbildung 1.2.

Tabelle 1.1: Simulationsmatrix

	t0	t1	t2	t3	t4
1	1	0.832	1.199	0.879	1.007
2	1	0.931	1.039	0.973	0.885
3	1	1.091	1.588	1.280	1.549
4	1	1.021	1.054	0.836	1.099
5	1	1.039	0.872	0.685	0.931
6	1	1.515	2.051	1.545	1.751
7	1	1.138	1.288	1.539	1.705
8	1	0.620	0.030	0.077	0.058
9	1	0.794	1.004	0.663	0.571
10	1	0.866	0.724	1.101	0.986

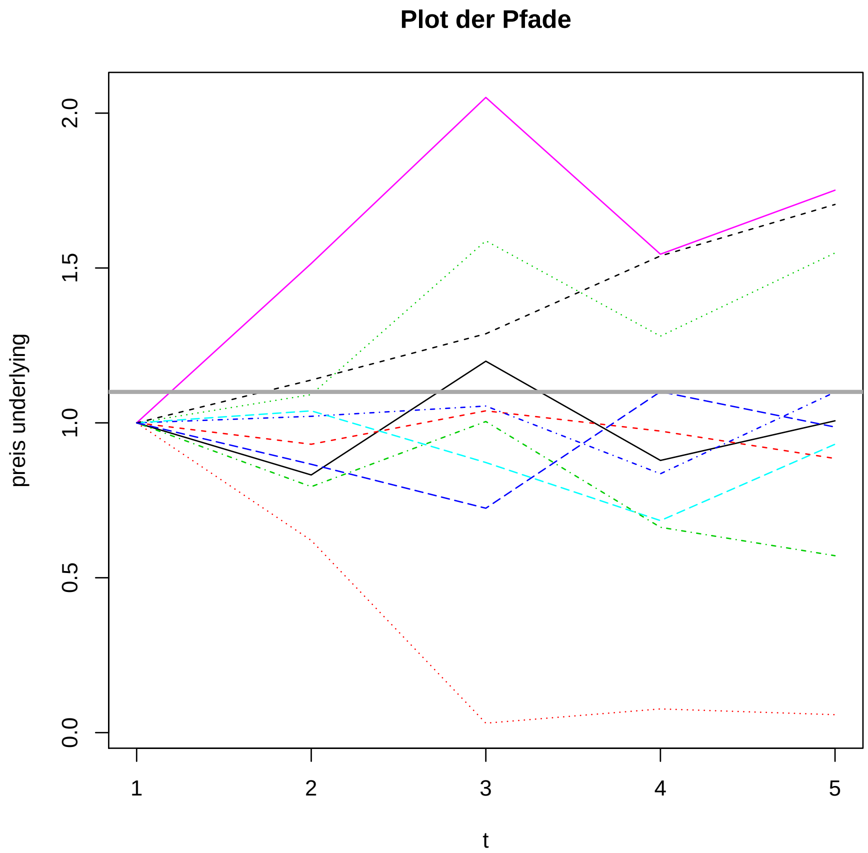

Abbildung 1.2: Plot der sumulierten 10 Pfade; Strikepreis in grau eingezeichnet

LSM ist ein rekursiver Algorithmus (Longstaff and Schwartz, 2001, S.116). D.h. wir beginnen die Iterationen mit dem Laufzeitende (hier t=4). Die Auszahlung am Laufzeitende für eine Put Option berechnet sich mit $A_T = max(K - x_T, 0)$ (allgmein $A_t = max(K - x_t, 0)$, wobei x_t der Preis des Underlyings mit $t \in \{1, ..., T\}$).

Tabelle 1.2: Auszahlungsmatrix im Zeitpunkt t=4

	t0	t1	t2	t3	t4
1					0.093
2					0.215
3					0
4					0.001
5					0.169
6					0
7					0
8					1.042
9					0.529
10					0.114

Nun gilt es die erwarteten Auszahlungen der Option in $t = 4$ zu schätzen, ausgehend von den simulierten Preisen des Unterlyings im Zeitpunkt $t = 3$. Um den Zeitwert der Auszahlungen zu berücksichtigen wird um eine Periode abgezinst. I.e. die auf den Zeitpunkt t um eine Periode abgezinste Auszahlung $A_t(-1)$ bei einem Zinssatz r berechnet sich aus der Auszahlung A_t wie folgt:

$$A_t(-1) = A_t * exp(-r)$$

Um den Erwartungswert in Abhängigkeit vom Simulierten Underlying zu schätzen, verwenden wir folgendes lineares Modell.

$$y_i = x_i * \beta_1 + x_i^2 * \beta_2 + u_i$$

wobei y_i $A_t(-1)$ des jeweiligen Pfades $i = 1, ...10$ und x_i der Preis des undelyings x_t des jeweiligen Pfades. Für den ersten Regressionschritt ist $t = 3$ in unserem Beispiel.
In der Tabelle 1.3 sind die Daten für die Regression zusammengefasst. Es werden nur die Pfade verwendet, bei denen die Option in $t = 3$ ausgeführt würde, also bei denen es in $t = 3$ einen Cash Flow gibt (m.a.W. in the money).

Tabelle 1.3: Datenmatrix zur Regression im ZP t=3

	Y	X
1	0.088	0.221
2	0.203	0.127
4	0.001	0.264
5	0.159	0.415
8	0.981	1.023
9	0.498	0.437

Wir betrachten nun also die Werte des Schätzers $\hat{y_i} = x_i * \hat{\beta_1} + x_i^2 * \hat{\beta_2}$ und vergleichen diese mit den Werten, wenn wir die Option in $t = 3$ ausüben würden.

Tabelle 1.4: Vergleiche Ausueben vs. Beibehalten im ZP t=3

	beibehalten	ausueben
1	0.121	0.221
2	0.023	0.127
4	0.166	0.264
5	0.322	0.415
8	0.953	1.023
9	0.345	0.437

Beim Vergleich der Werte in Tabelle 1.4 sollte jeweils in t=3 ausgeübt werden, wenn Ausüben>Beibehalten und umgekehrt. Es fällt auf, dass zu t=3 in allen Pfaden, die in the money sind (also 1,2,4,5,8 und 9) ausgeübt werden soll. An diesen Pfaden übernehmen wir den Wert in die Auszahlungsmatrix und setzen den Wert in t=4 auf null, weil die Amerikanische Option nur einmal ausgeübt werden kann.

Tabelle 1.5: Auszahlungsmatrix im Zeitpunkt t=3

	t0	t1	t2	t3	t4
1				0.221	0
2				0.127	0
3				0	0
4				0.264	0
5				0.415	0
6				0	0
7				0	0
8				1.023	0
9				0.437	0
10				0	0.114

Nun modellieren wir eine linieare Regression wie oben mit den Preisen des Underlying zu $t = 2$ als X. Y sei der vorausgegangene Wert der Option bei Ausübung, abgezinst auf den Zeitpunkt t.

Tabelle 1.6: Datenmatrix zur Regression im ZP t=2

	Y	X
2	0.119	0.061
4	0.249	0.046
5	0.391	0.228
8	0.964	1.070
9	0.412	0.096
10	0.101	0.376

Tabelle 1.7: Vergleiche Ausueben vs. Beibehalten im ZP t=2

	beibehalten	ausueben
2	0.203	0.061
4	0.192	0.046
5	0.315	0.228
8	0.884	1.070
9	0.226	0.096
10	0.415	0.376

Im ZP t=2 wird nur im den Pfad 8 ausgeübt, ansonsten wird beibahalten. Das führt zur Auszahlungsmatrix Tabelle 1.8.

Tabelle 1.8: Auszahlungsmatrix im Zeitpunkt t=2

	t0	t1	t2	t3	t4
1			0	0.221	0
2			0	0.127	0
3			0	0	0
4			0	0.264	0
5			0	0.415	0
6			0	0	0
7			0	0	0
8			1.070	0	0
9			0	0.437	0
10			0	0	0.114

Für den letzten Schritt t=1 verfahren wir genauso.

Tabelle 1.9: Auszahlungsmatrix im Zeitpunkt t=1

	t0	t1	t2	t3	t4
1		0	0	0.221	0
2		0	0	0.127	0
3		0.009	0	0	0
4		0	0	0.264	0
5		0	0	0.415	0
6		0	0	0	0
7		0	0	0	0
8		0	1.070	0	0
9		0	0	0.437	0
10		0	0	0	0.114

Im ZP t=0 kann die Option nicht ausgeübt werden, deswegen ist t=0 irrelevant. Die Auszahlungen der Option werden jeweils auf den Zeitpunkt t=0 diskontiert.

Tabelle 1.10: Diskontierte Auszahlungsmatrix

	t1	t2	t3	t4
1	0	0	0.185	0
2	0	0	0.106	0
3	0.008	0	0	0
4	0	0	0.221	0
5	0	0	0.347	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0.949	0	0
9	0	0	0.365	0
10	0	0	0	0.089

Der Preis der Option berechnet sich durch Mitteln der diskontierten Auszahlungen. In diesem Beispiel: 0.173

Kapitel 2

Anwendung

Angenommen man möchte nun LSM auf eine amerikanische Put Option anwenden. Zum Stock (dem Underlying der Option) sei der Mittelwert und die Varianz bekannt. Wir gehen in diesem Fall von einer Laufzeit von einem Jahr und einem strike price von 1.1 aus. Innerhalb dieses Jahres, kann die Option zu jedem Handelstag ausgeübt werden. Zur Bepreisung dieser Option müssen wir nun in einem ersten Schritt ausreichend viele Trajektorien über den Zeitraum der Laufzeit hinweg simulieren. Dann, lässt sich LSM auf diese Simulation anweden.

Bemerkung: LSM ist eine Heuristik ausschließlich gedacht zur Ermittlung eines fairen Preises einer Option, nicht zur Berechnung des optimalen Ausübungszeitpunktes.

2.1 Simulation via Black-Scholes

Für diese Arbeit sollen die Preise anhand des Black-Scholes Modells Stockpreise für ein Jahr simuliert werden. Man gehe von einem Börsenjahr aus. D.h. für 2019: 252 Handelstage (Börse, 2018).
Man gehe davon aus, dass ein Stock zum ersten Börsentag mit dem Preis S_0 startet. Hier sei $S_0 = 1$. Der risikofreie Zinssatz r betrage 1%. Der Wiener Prozess zur Simulation der Black Scholes Stock Preise sei mit dem Parameter $\mu = 0$ für alle Trajektorien spezifiziert. Für jede Trajektorie sind die Parameter σ und μ des Wiener Prozess gleich und stammen von den geschätzten Parametern des stocks (i.e. $\sigma \equiv \sqrt{\hat{\sigma^2}}$ ... Schätzer für Volatilität und $\mu \equiv \hat{\mu}$ ... Schätzer für den Drift). Damit ergibt sich ein Prozess mit Martingaleigenschaft:

$$S^*(t) = S_0 exp\left\{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right\}$$

Wobei W_t ein Wiener Prozess mit Drift μ und Varianz σ^2 ist.

In der Abbildung 2.1 ist exemplarisch ein Plot mit 15 Pfaden angeführt.

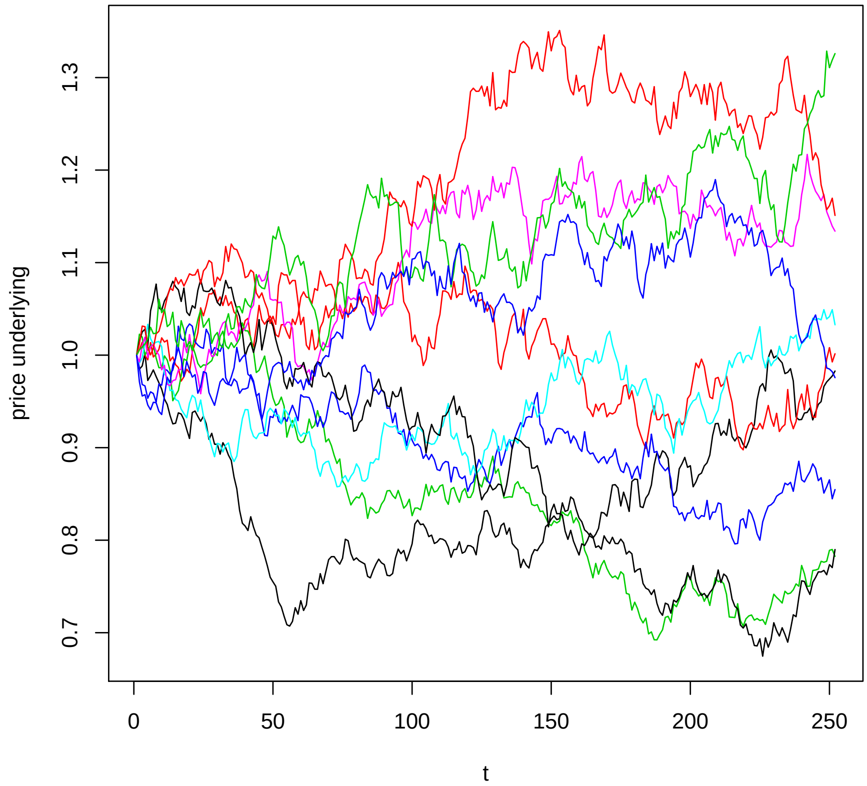

Abbildung 2.1: Plot einer Simulation von 15 Pfaden über 252 Tage

Es soll überprüft werden, ob der simulierte Prozess tatsächlich ein Martingal darstellt. Angenommen ein Prozess $(X_t)_{t\geq 1}$ sei integrierbar und adaptiert (d.h. $\mathcal{F}_n$ meßbar für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathcal{F}_n$ eine Filtration zum ZP n). Dann ist der Prozess ein Martingal wenn er die folgende Martingaleigenschaft erfüllt:

$$\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t \quad f.s. \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Für unseren simulierten Fall würde das bedeuten, dass der Prozess einen konstanten, diskontierten Erwartungswert hat, was es zu überprüfen gilt. Im Folgenden wird also der Erwartungswert für alle t durch das arithmetische Mittel geschätzt. Um validere Ergebnisse zu erhalten sollen nun 1000 Pfade simuliert werden (Plot im Appendix Abbildung 3). Der Plot in Abbildung 2.2 zeigt die Schätzer für alle Beobachtungen.

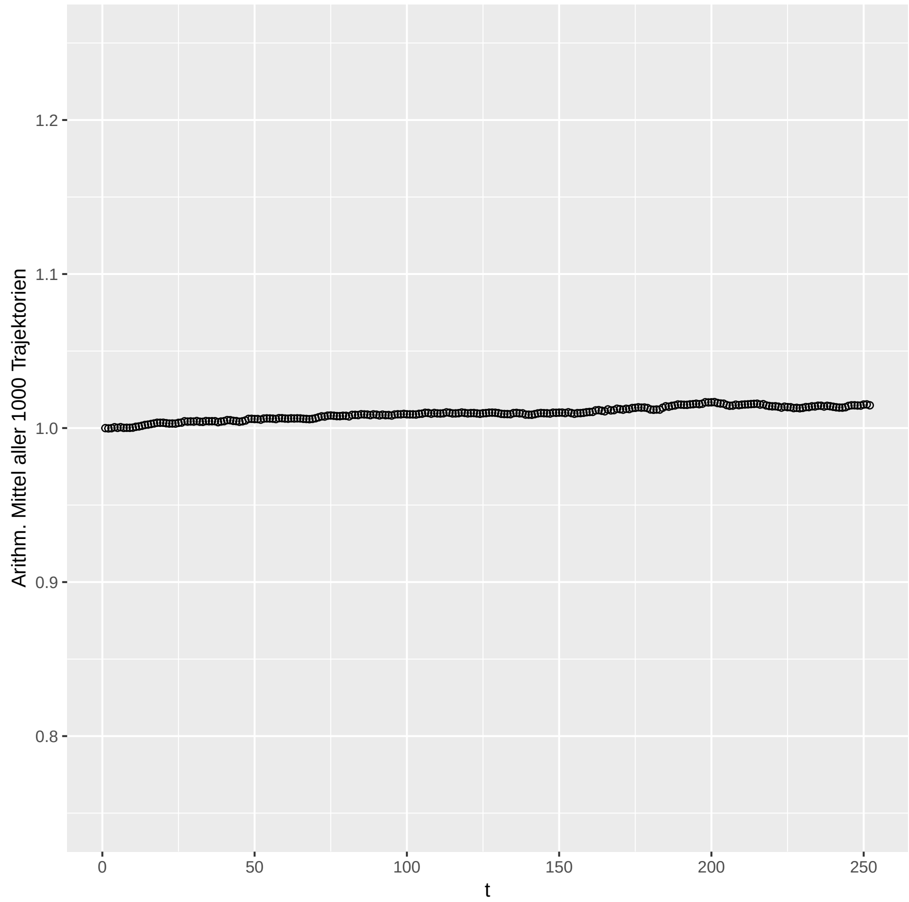

Abbildung 2.2: Plot der geschätzten Erwartungswerte (d.h. arithm. Mittel) für den Prozess mit 1000 Pfaden

Der Plot der Mittel in Abbildung 2.2 stützt die Annahme, dass der Erwartungswert für alle $t \in \mathbb{N}$ konstant ist. Man kann also davon ausgehen, dass es sich bei dem simulierten Prozess um ein Martingal handelt.

2.2 Anwendung von LSM auf simulierte Preise

Nun wollen wir LSM auf die simulierten Preise anweden um einen fairen Preis für die Option zu berechnen. Dazu soll die Funktion *LSM()* (s. Appendix) dienen, die die simulierte Matrix als Argument übernimmt.

Der gemittelte Ertrag pro Ausübung beträgt nach LSM 0.129

Wir haben im einführenden Beispiel und für den LSM Algorithmus oben ein Polynom 2. Grades für das lineare Modell gewählt. Nun stellt sich die Frage: wie unterschiedlich sind die Ergebnisse für verschiedene Modelle?
Weil es diese Arbeit im Umfang nicht zulässt alle möglichen Modelle zu evalu-

ieren, möchte ich im Folgenden nur eine Übersicht über einige wenige ALternativen geben. Interessant ist möglicherweise der Vergleich zu einem einfachen linearen Modell ohne Transformation, einem linearen Modell mit einer Transformation zu einem Polynom dritten Grades, und eines mit einem Polynom 10ten Grades.

Bemerkung: Diese Modelle sind willkürlich gewählt und sollen dem Leser nur einen Überblick vermitteln.

Tabelle 2.1:

	Modell	Optionspreis
1	einfach	0.128830
2	Polynom 2	0.128830
3	Polynom 3	0.128830
4	Polynom 10	0.128830

Wir beobachten, dass die Optionspreise ident sind. Es ist nicht mit Sicherheit zu sagen, woran das liegt, aber es liegt nahe, dass die Information der simulierten Werte ausreicht, um selbst mit dem einfachen linearen Modell an den selben Zeitpunkten entscheidet auszuüben, wie auch bei den koplexeren Modellen.

Literaturverzeichnis

Becker, H. P. (2012). *Investition und Finanzierung*. 5. Gabler.

Börse, W. (2018). Börsenfeiertage der wiener börse 2019.

Hull, J. C. (2011). *Options, futures, and other derivatives*. Prentice Hall, 8th edition.

Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (2001). Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach. *The Society for Financial Studies*, 14(1):113–147.

Appendix

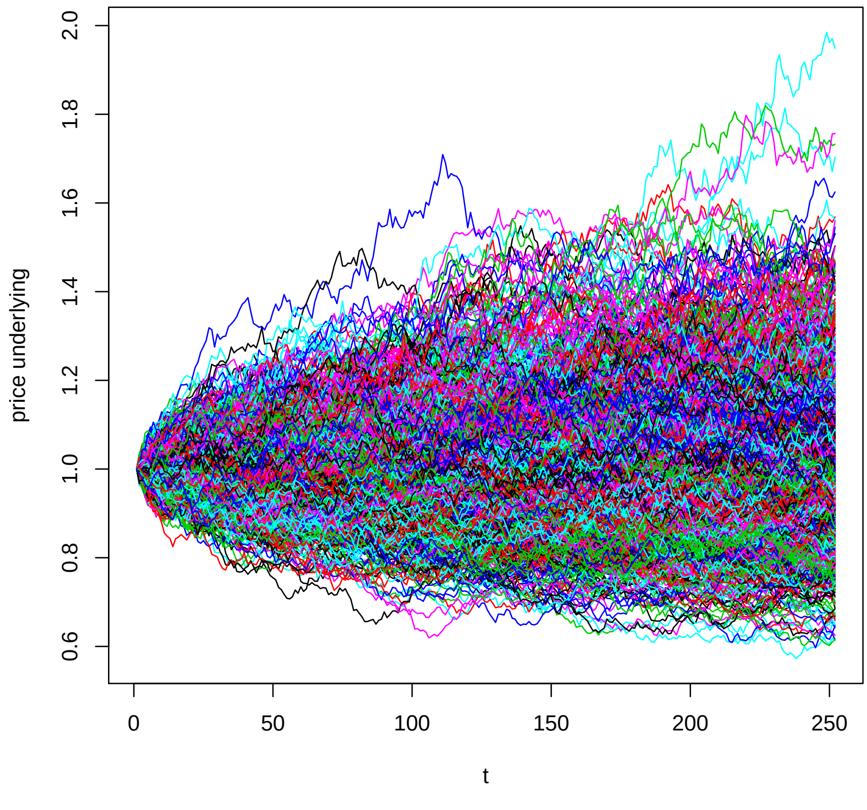

Abbildung 3: Plot der Simulation mit 1000 Pfaden

Funktion *simMatrix()* um die Matrix der stock Preise zu simulieren.

```
simMatrix <- function(S0=100, Nsimulations=100, r=0.01,
                      sigma=0.2, se=123){
  # simMatrix is a function, simulating a Matrix of stock
```

```
  # prices for one year. The number of simulations can be
  # set by the parameter Nsimulations.
  # The function simulates the Stock prices using the
  # Black-Scholes Model. The Stock price for t>0 is given
  # by: S_t = S_0 * exp{r-sigma^2/2)*t + sigma*W_t}, where W_t is
  # a Brownian Motion with mu=0 and variance is the time increment.
  # Nsimulations ... Number of simulations (int)
  # S0 ............. Starting value (int)
  # r .............. risk free interest rate (int)
  # sigma .......... the parameter sigma for the Black Scholes
  #                  simulation.
  # se ............. set seed (int)

  set.seed(se)
  M <- matrix(NA, nrow=Nsimulations, ncol=252)
  N <- 252
  for (i in 1:Nsimulations){

    # Brownian Motion
    m <- 0
    dW <- rnorm(n=N, mean=m, sd=sqrt(1/252))
    W <- c(0, cumsum(dW))

    t <- 1:N
    S <- S0*exp((r-(sigma^2)/2)*(t/252)+sigma*W[t])
    M[i,] <- S
  }
  colnames(M) <- 1:252
  rownames(M) <- paste("sim", 1:Nsimulations)
  return(M)
}
```

Funktion *LSM* um ein LSM Algoritmus auf die Simulation anzuwenden.

```
LSM <- function(M, K=1.1, r=0.06){
  # This function performs the Least Squares Monte Carlo
  # algorithm for any simulated matrix M. The output
  # is the mean of the discounted cash flow of returns
  # where the option was exercised.
  # M ... simulated matrix
  # K ... strike price
  # r ... interest rate
  T <- ncol(M)
  t <- T-1
  N <- nrow(M)
  Ai <- matrix(0, nrow=N, ncol=T)
  lapply(M[,t+1],function(x) max(K-x,0))  %>% unlist -> Ai[,t+1]

  for (t in (T-1):2){
```

```
    lapply(M[,t],function(x) max(K-x,0))  %>% unlist %>%
      Filter(f=function(x) x!=0)-> im
    names(im) %>% as.numeric() -> ind
    # discounting
    Y <- rep(0,length(ind))
    for (i in 1:(T-t)){
      Y <- Y+exp(-r*i)*Ai[ind,t+i]
    }
    X <- im
    lm1 <- lm(Y~X+(X^2))
    f1 <- lm1$fitted.values
    # exercise vs keep
    df <- data.frame(beibehalten=f1, ausueben=im)
    ind2 <- apply(df,1, function(x) ifelse(x[2]>x[1], x[2], 0))
    Ai[ind,t] <- ind2
    # set all following to 0
    Ai[Ai[,t]!=0,(t+1):T] <- 0
  }

  Ai <- Ai[,2:T]
  Y <- rep(0,N)
  for (i in 1:(T-1)){
    Y <- Y+exp(-r*i)*Ai[,i]
  }
  return(mean(Y))
}
```