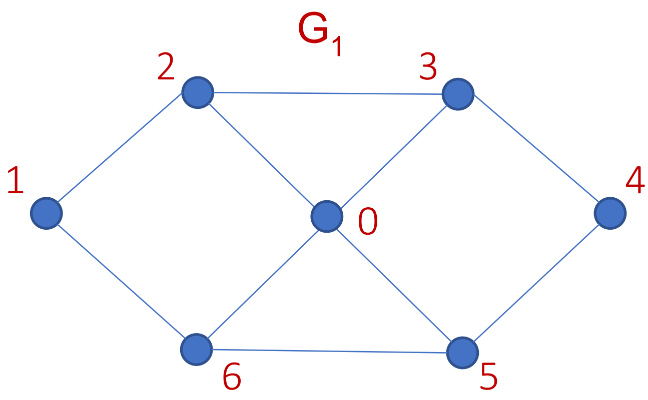
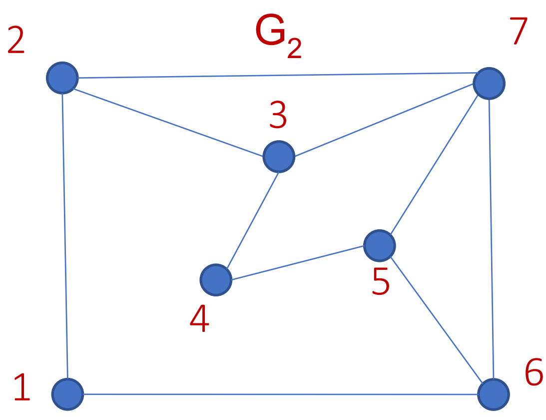
Lista zadań nr 6
Teoria Grafów – metody algebraiczne dla grafów, grafy cykliczne, grafy hamiltonowskie
dr Anna Beata Kwiatkowska

Zadanie 1.
Podaj interpretację wektorów AI i A^2I, gdzie I jest wektorem jednostkowym oraz A jest macierzą sąsiedztwa grafu G.

Zadanie 2.
G jest grafem o macierzy sąsiedztwa A. Jaka jest interpretacja grafowa elementów diagonalnych a_{ii}^3 macierzy sąsiedztwa A^3?

Zadanie 3.
Wykorzystaj twierdzenie 6.2 do wykazania, że grafy G_1 i G_2 są izomorficzne. Znajdź macierz permutacji T.





Zadanie 4.
Zdefiniujmy graf Z_7^2 na ciele 7-elementowym (zbiorze reszt modulo 7) w ten sposób, że dla x,y ∈ Z_7, xy jest krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $x-y \in \{1,-1,2,-2\}$. Podobnie definiujemy Z_7^3 warunkiem $x - y \in \{1,-1,3,-3\}$. Są to tzw. grafy cykliczne. Narysuj te grafy, a następnie rozstrzygnij czy są one izomorficzne.

Zadanie 5.
Udowodnij, że jeśli w grafie istnieją dwa różne cykle zwierające tą samą krawędź e, to istnieje w nim cykl nie zawierający e.

Zadanie 6.
Dany jest digraf D, dwa jego wierzchołki v i u oraz liczba naturalna k. Napisz program, który znajdzie liczbę wszystkich marszrut długości k, łączących te wierzchołki.

Zadanie 7.
Udowodnij, że w grafie G=(V,E) o n wierzchołkach jeśli dowolna para wierzchołków u, v spełnia, że det(u)+det(v) ≥ n-1, to graf G jest spójny.

Szkic dowodu:
Przypuśćmy, że G jest niespójny i ma dwie składowe o liczbie wierzchołków k>1 i n-k. Wtedy stopień wierzchołka pierwszej składowej jest równy co najwyżej k-1 a drugiej n-k-1. Jeśli v należy do

pierwszej składowej, a u należy do drugiej składowej to det(u)+det(v) ≤ k-1+n-k-1= n-2. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem.

Zadanie 8.

Udowodnij, że grafie pełnym liczba różnych cykli Hamiltona jest równa $\frac{(n-1)!}{2}$.

Zadanie 9.

Udowodnij, że w grafie pełnym o n ≥ 3 wierzchołkach i nieparzystej wartości n jest $l = \frac{n-1}{2}$ krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona.

Szkic dowodu:

Graf zupełny o n wierzchołkach ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.
Każdy cykl Hamiltona składa się z n krawędzi, zatem liczba krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona nie przekracza $\frac{n-1}{2}$.
Niech wierzchołki będą ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi. Można skonstruować l krawędziowo rozłącznych cykli Hamiltona C_1, C_2, … , C_l w następujący sposób:

$$C_i = \left(i, i-1, i+1, i-2, \dots, i+\frac{n-1}{2}, i\right),\ dla\ i = 1,2,\dots,l$$

Operacje wykonujemy mod(n).

Zadanie 10.

Podaj przykład grafu ilustrujący, że:

- warunek $d(v) \geq \frac{n}{2}$ występujący w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpiony warunkiem $d(v) \geq \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$
- twierdzenie Orego jest silniejsze niż twierdzenie Diraca,
- twierdzenie Posy jest silniejsze od twierdzenia Orego.
- Twierdzenie Chvatala jest silniejsze od twierdzenia Posy.