Teoria Grafów – Notatki do kolokwium

Wykład 1.

Wstęp

Pierwsza praca odnośnie grafów pojawiła się już w roku 1736 i dotyczyła zagadnienia mostów królewieckich (dzisiejszego Kaliningradu). Również wtedy pojawił się problem cyklu Eulera, a mianowicie pytanie czy można przejść przez każdy most dokładnie raz i wrócić do miejsca początkowego?

Definicja grafu

Grafem G nazywamy uporządkowaną parę (V,E), gdzie:

V jest niepustym zbiorem wierzchołków

E jest rodziną (w odróżnieniu od zbioru może zawierać elementy powtarzające się) krawędzi, przy czym E {{v,u}: v ,u V }

Przyjmujemy następująco, że |V| i |E| opisuje odpowiednio liczbę wierzchołków oraz liczbę krawędzi w danym grafie. Dwa wierzchołki są sąsiadami, jeśli łączy ich jedna krawędź, która jest incydentna z każdym z nich.

Definicja Digrafu

Digrafem D nazywamy uporządkowaną parę (czyli krawędzie są skierowane ->) (V, U) gdzie:

V jest niepustym zbiorem wierzchołków

U jest rodziną łuków U {(v,u): v,u V}

Poprzez |V| i |U| oznaczamy odpowiednio liczbę wierzchołków i łuków, natomiast N – (v) oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka v dla krawędzi wchodzących oraz analogicznie N+ (v) dla krawędzi wychodzących.

| N – (v)| = deg– (v) oznacza stopień wierzchołka v dla krawędzi wchodzących, oraz
| N +(v)| = deg+(v) dla krawędzi wychodzących.

Definicja Podgrafu

Graf g jest podgrafem jeśli wszystkie wierzchołki oraz krawędzie z g są w G, oraz każda krawędź z g ma te same wierzchołki końcowe w g jak i w G. Zapisujemy to w postaci: g G

Zauważmy, że:

Każdy graf jest swoim własnym podgrafem

Podgraf podgrafu grafu G jest też podgrafem grafu G

Pojedynczy wierzchołek grafu G jest też podgrafem G

Pojedyncza krawędź grafu G wraz z wierzchołkami końcowymi, jest także podgrafem grafu G

Drogi, ścieżki, cykle

Drogą o długości n w grafie G nazywamy ciąg krawędzi e1,e2, …, en gdzie ei E dla 1 <= i <= n, wraz z ciągkiem wierzchołków v1, v2, … , vn+1, gdzie vi V dla 1 <= i <= n+1 kolejno połączonych z tymi krawędziami (Mówiąc prosto to droga od wierzchołka v do u przechodząca przez n krawędzi).

Droga może być zamknięta, w momencie gdy vn+1 = v1

Ścieżką o długości N nazywamy ciąg wierzchołków v1, v2, … , vn połączonych ze sobą przez e1,e2, …, en-1 krawędzi.

Cykl to droga zamknięta, w której wszystkie krawędzie są różne.

Pętlą nazywamy krawędź ei, dla której vi = vi+1

Jeśli graf zawiera krawędzie wielokrotne (powtarzające się) to nazywamy go multigrafem

Spójność Grafu

Graf g nazywamy spójnym jeśli istnieje co najmniej jedna ścieżka między każdą parą wierzchołków (wszystkie są jakoś połączone). Niespójny występuje w przeciwnym wypadku. Graf niespójny składa się z co najmniej dwóch grafów spójnych i każdy z tych podgrafów jest składową spójności grafu.

Stopnie wierzchołków

Rozpatrzmy graf G = (V,E) o n wierzchołkach i m krawędziach. Ponieważ każda krawędź uwzględniana jest przy obliczaniu stopni dwóch wierzchołków, to suma wszystkich stopni w grafie G jest równa podwójnej liczbie krawędzi grafu G: ∑_(v V)▒〖d(v)=2m〗

Warto też wiedzieć, że liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu w dowolnym grafie zawsze jest parzysta, natomiast jeśli graf ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, to musi istnieć ścieżka łącząca te wierzchołki. Możemy spotkać się również z sytuacją, że znajdziemy jakiś wierzchołek, którego stopnie wejściowe i wyjściowe są równe 0, to taki wierzchołek nazywamy izolowanym.Teoria Grafów – Notatki do kolokwium

Wykład 1.

Wstęp

Pierwsza praca odnośnie grafów pojawiła się już w roku 1736 i dotyczyła zagadnienia mostów królewieckich (dzisiejszego Kaliningradu). Również wtedy pojawił się problem cyklu Eulera, a mianowicie pytanie czy można przejść przez każdy most dokładnie raz i wrócić do miejsca początkowego?

Definicja grafu

Grafem G nazywamy uporządkowaną parę (V,E), gdzie:

V jest niepustym zbiorem wierzchołków

E jest rodziną (w odróżnieniu od zbioru może zawierać elementy powtarzające się) krawędzi, przy czym E {{v,u}: v ,u V }

Przyjmujemy następująco, że |V| i |E| opisuje odpowiednio liczbę wierzchołków oraz liczbę krawędzi w danym grafie. Dwa wierzchołki są sąsiadami, jeśli łączy ich jedna krawędź, która jest incydentna z każdym z nich.

Definicja Digrafu

Digrafem D nazywamy uporządkowaną parę (czyli krawędzie są skierowane ->) (V, U) gdzie:

V jest niepustym zbiorem wierzchołków

U jest rodziną łuków U {(v,u): v,u V}

Poprzez |V| i |U| oznaczamy odpowiednio liczbę wierzchołków i łuków, natomiast N – (v) oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka v dla krawędzi wchodzących oraz analogicznie N+ (v) dla krawędzi wychodzących.

| N – (v)| = deg– (v) oznacza stopień wierzchołka v dla krawędzi wchodzących, oraz

| N +(v)| = deg+(v) dla krawędzi wychodzących.

Definicja Podgrafu

Graf g jest podgrafem jeśli wszystkie wierzchołki oraz krawędzie z g są w G, oraz każda krawędź z g ma te same wierzchołki końcowe w g jak i w G. Zapisujemy to w postaci: g G
Zauważmy, że:

Każdy graf jest swoim własnym podgrafem

Podgraf podgrafu grafu G jest też podgrafem grafu G

Pojedynczy wierzchołek grafu G jest też podgrafem G

Pojedyncza krawędź grafu G wraz z wierzchołkami końcowymi, jest także podgrafem grafu G

Drogi, ścieżki, cykle

Drogą o długości n w grafie G nazywamy ciąg krawędzi e1,e2, …, en gdzie ei E dla 1 <= i <= n, wraz z ciągkiem wierzchołków v1, v2, … , vn+1, gdzie vi V dla 1 <= i <= n+1 kolejno połączonych z tymi krawędziami (Mówiąc prosto to droga od wierzchołka v do u przechodząca przez n krawędzi).

Droga może być zamknięta, w momencie gdy vn+1 = v1

Ścieżką o długości N nazywamy ciąg wierzchołków v1, v2, … , vn połączonych ze sobą przez e1,e2, …, en-1 krawędzi.

Cykl to droga zamknięta, w której wszystkie krawędzie są różne.

Pętlą nazywamy krawędź ei, dla której vi = vi+1

Jeśli graf zawiera krawędzie wielokrotne (powtarzające się) to nazywamy go multigrafem

Spójność Grafu

Graf g nazywamy spójnym jeśli istnieje co najmniej jedna ścieżka między każdą parą wierzchołków (wszystkie są jakoś połączone). Niespójny występuje w przeciwnym wypadku. Graf niespójny składa się z co najmniej dwóch grafów spójnych i każdy z tych podgrafów jest składową spójności grafu.
Stopnie wierzchołków
Rozpatrzmy graf G = (V,E) o n wierzchołkach i m krawędziach. Ponieważ każda krawędź uwzględniana jest przy obliczaniu stopni dwóch wierzchołków, to suma wszystkich stopni w grafie G jest równa podwójnej liczbie krawędzi grafu G: $\sum_{v\ \ V} d(v)=2m$
Warto też wiedzieć, że liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu w dowolnym grafie zawsze jest parzysta, natomiast jeśli graf ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, to musi istnieć ścieżka łącząca te wierzchołki. Możemy spotkać się również z sytuacją, że znajdziemy jakiś wierzchołek, którego stopnie wejściowe i wyjściowe są równe 0, to taki wierzchołek nazywamy izolowanym.
Ciąg graficzny
Ciąg liczbowy, który jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego grafu nazywamy ciągiem graficznym.
Warunkami koniecznymi ale nie wystarczającymi, które musi spełnić ciąg licz całkowitych nieujemnych są:

Di <= n-1, dla i = 1,2,…,n

$\sum_{i=1}^{n} d_i$ jest liczba parzysta

$\sum_{i=1}^{n} d_i \le n(n-1)$

Twierdzenie Havla-Hakimiego:

Ciag s=(d1,d2, … , dn) liczb całkowitych, takich że d1 >= d2 >= … >= dn >= 0, n>2, d1 >= 1 jest graficzny ciag s1= (d2-1, d3-1, … , dd1 + 1 -1, dd1 +2 , dn¬) jest graficzny.
Algorytm:

Posortuj ciąg s nierosnąco

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe 0 to ciąg jest graficzny

Jeżeli w ciągu s począwszy od drugiego elementu jest co najmniej d1 elementów o wartościach dodatnich, to odejmij 1 od d1 elementów począwszy od d2, podstaw 0 za d1 i wróć do kroku 1.

Jeśli w ciągu nie ma wystarczającej liczby elementów dodatnich, to ciąg nie jest graficzny

Grafy Eulerowskie

Cykl Eulera to zamknięta droga przechodząca przez każdą krawędź dokładnie raz.

Graf Eulera jest grafem spójnym – nie zawiera wierzchołków izolowanych, natomiast graf spójny jest grafem Eulerowskim wszystkie wierzchołki są stopnia parzystego.

Droga Eulera to droga, niekoniecznie zamknięta przechodzącą przez każdą krawędź dokładnie raz. Graf mający drogę Eulera ma albo dwa wierzchołki stopnia nieparzystego lub wszystkie parzyste.

Rodziny grafów

Graf pusty to graf, którego zbiór krawędzi jest pusty.

Graf pełny to graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są sąsiednie

Drzewo to graf, który jest acykliczny i spójny

Graf acykliczny, który niekoniecznie jest spójny nazywamy lasem

Graf G nazywamy dwudzielnym jeśli zbiór V jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych V1 i V2 takich, że każda krawędź w grafie G łączy wierzchołek ze zbioru V1 z wierzchołkiem ze zbioru V¬2

Graf planarny to graf, który można narysować na płaszczyźnie tak, aby jego krawędzie nie przecinały się ze sobą. Graf taki umieszczony na płaszczyźnie nazywamy płaskim.

Graf regularny to graf, w którym każdy wierzchołek ma taki sam stopień

Grafy platońskie to grafy utworzone przez wierzchołki i krawędzie pięciu wielościanów foremnych: czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu.

Reprezentacje grafów

Macierz incydencji to klasyczny sposób reprezentacji grafu – macierz A -o n wierszach odpowiadających wierzchołkom i m kolumnach odpowiadających krawędziom. W przypadku grafu niezorientowanego, w kolumnie odpowiadającej krawędzi {v,u} zawiera 1 w wierszach odpowiadających v i u oraz zera w pozostałych wierszach.
w przypadku grafu zorientowanego kolumna odpowiadająca krawędzi (v,u) zawiera -1 w wierszu odpowiadającym wierzchołkowi v, 1 w wierszu odpowiadającym wierzchołkowi u, a zera w pozostałych wierszach. Patrząc algorytmicznie jest to najgorszy sposób reprezentacji grafu. Wymaga n*m miejsc pamięci, wiekszość z nich jest wypełniona zerami. Znalezienie krawędzi {v,u} O(1), do jakich wierzcholkow prowadza krawędzie z wierzchołka v? O(m)

Macierz sąsiedztwa to macierz B=[bi,j] o n wierszach i n kolumnach taka, że:
bi,j = 1 jeśli istnieje krawędź od i-tego do j-tego wierzchołka
bi,j = 0 w przeciwnym wypadku
Rozumiemy tu, że krawędź {v,u} grafu niezorientowanego prowadzi zarówno z v do u i z u do v. Znalezienie krawędzi {v,u} O(1), do jakich wierzcholkow prowadza krawędzie z wierzchołka v? O(n)

Tablica (lista) par wierzchołków – Graf o n wierzchołkach i m krawędziach jest reprezentowany przez tablicę T o M wierszach i dwóch kolumnach T[k,1] zawiera wierzchołek początkowy, a T[k,2] wierzchołek końcowy krawędzi k. Pamięc wynosi 2m, znalezienie krawędzi {v,u} O(m), do jakich wierzcholkow prowadza krawędzie z wierzchołka v? O(m)

Listy incydencji (sąsiedztwa) to struktura zawierająca dla każdego wierzchołka v V listę jego sąsiadów. W praktyce każdy element list sąsiadów jest rekordem zawierającym wierzchołek i wskaźnik do następnego rekordu na liście. Pamięc wynosi 2m+n, usuniecie krawędzi {v,u} O(deg(v)), dołożenie krawędzi {v,u}? O(1)

Dwie tablice są pewną odmianą list sąsiadów. Jeśli przeglądanie grafu (digrafu) nie jest związane z dołączaniem i usuwaniem krawędzi (łuków), można pozbyć się wskaźników i pamiętać tylko kolejnych sąsiadów. Dla grafu reprezentacja ta zajmuje (n+1)+2m miejsc w pamięci, dla digrafu (n+1)+m miejsc. Usuniecie krawędzi {v,u} O(m), Dołożenie krawędzi {v,u}? O(m) Przeglądanie wszystkich sąsiadów wierzchołka v? O(deg(v))

Wykład 2.

Operacje na grafach

Podczas pracy na grafach, musimy wiedzieć ze dozwolonych jest kilka operacji. Pierwsze trzy względem siebie są przemienne:

Sumą grafów G1 i G2 jest graf G=(V,E), ozn. G = G1 u G2 taki że V = V1 V2 oraz E = E1 E2

Przecięciem grafów G1 i G2 jest graf G=(V,E), ozn. G = G1 G2 taki że V = V1 V2 oraz E = E1 E2

Różnicą symetryczną grafów G1 i G2 jest graf G=(V,E), ozn. G = G1 G2 taki że V = V1 V2 oraz E =(E1 E2) \ (E1 E2)

Dekompozycja – mówimy, że graf G został zdekomponowany na dwa podgrafy G1 i G2 jeśli G1 G2 = G oraz G1 G2 = graf zerowy. Przy dekompozycji pomijamy wierzchołki izolowane. Graf, który zawiera m krawędzi można zdekomponować na 2m-1-1 różnych sposobów na pary podgrafów G1 i G2.

Usuwanie wierzchołka – jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to G – v oznacza podgraf grafu G uzyskany w wyniku usunięcia wierzchołka v z G. Usunięcie wierzchołka zawsze pociąga za sobą usunięcie wszystkich krawędzi z nim incydentnych.

Usuwanie krawędzi – jeśli e jest krawędzią grafu G, to G – e oznacza podgraf grafu G uzyskany w wyniku usunięcia krawędzi e z G. Usunięcie krawędzi nie pociąga za sobą usunięcia wierzchołków końcowych.

Scalanie wierzchołków – jeśli dwa wierzchołki v oraz w zastąpimy jednym wierzchołkiem tak, że każda krawędź incydentna do v lub do w lub do obydwóch jest incydentna do nowego wierzchołka.

Podpodziałem grafu G nazywamy taki graf P, który otrzymujemy z G poprzez dorysowanie na jego krawędziach co najmniej jednego nowego wierzchołka stopnia 2.

Dopełnieniem grafu nieskierowanego G=(V,E) nazywamy graf G = (V, E), gdzie E = {(u,v): u,v V, u v i (u,v) V. Inaczej, dopełnieniem grafu G jest graf zawierający dokładnie wszystkie te krawędzie, które nie należa do G.

Identyczność grafów

Dwa grafy proste G1 = (V1,E1) i G2 = (V2,E2) są identyczne, co zapisujemy G1+G2 gdy, V1=V2 i E1=E2. Dwa identyczne grafy można przedstawić za pomocą tego samego rysunku.

Algorytm sprawdzania identyczności grafów:

Sprawdź czy grafy mają taka samą liczbę wierzchołków i krawędzi. Jeśli nie to nie są identyczne.

Sprawdź czy wierzchołki o tych samych numerach mają takich samych sąsiadów.

Izomorfizm grafów

Grafy proste G1 = (V1,E1) i G2 = (V2,E2) są izomorficzne, ozn. G1 G¬¬2 gdy istnieje bijekcja f: V1 -> V2 taka, że {u,v} E1 {f(v), f(u)} E2

Warunkami koniecznymi, jakie muszą spełniać grafy izomorficzne to:

Taka sama liczba wierzchołków i krawędzi

Identyczne rozkłady stopni wierzchołków

Ta sama liczba składowych

Wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkami muszą mieć takie same rozkłady stopni

Taka sama liczba cykli o identycznej długości

Izomorfizm drzew ukorzenionych

Drzewa ukorzenione są izomorficzne, jeśli jedno z tych drzew możemy przekształcić w drugie za pomocą zmiany porządku, który mają synowie wierzchołków. Algorytm sprawdzający, czy dwa drzewa ukorzenione są izomorficzne przypisuje liściom index 0. Następnie przechodzimy w kierunku korzenia nadając indeksy wierzchołkom w tak określony sposób, że drzewa są izomorficzne, gdy ich korzeniom przypisany jest ten sam indeks.

Złożoność: O(n)

Izomorfizm drzew nieskierowanych

Aby sprawdzić, czy dwa drzewa T1 i T2 są izomorficzne, należy je ukorzenić i wykonać algorytm dla drzew ukorzenionych.

Znajdujemy najdłuższą ścieżkę w każdym z tych drzew. Jeśli są one różnej długości to drzewa nie są izomorficzne.

Jeśli najdłuższe ścieżki są nieparzystej długości, ukorzeniamy każde z drzew w wierzchołku k, który jest środkiem jego najdłuższej ścieżki i stosujemy algorytm dla drzew ukorzenionych.

Jeśli najdłuższe ścieżki są parzystej długości, każda ma dwa wierzchołki środkowe k1,k2. Ukorzeniamy drzewo T1 w jednym z wierzchołków środkowych i sprawdzamy izomorfizm z drzewem T2 ukorzenionym najpierw w jednym i jeśli nie ma izomorfizmu, w drugim wierzchołku.

Wykład 4

Pojęcia

Drzewo - graf spójny bez cykli
Cechy drzewa:

- Graf prosty, bez pętli i krawędzi równoległych
- W drzewie istnieje tylko jedna droga pomiędzy każdą parą wierzchołków
- Wierzchołek wiszący - wierzchołek drzewa o stopniu 1
- Dla n wierzchołków, drzewo ma n-1 krawędzi

Las - graf bez cykli
Drzewo spinające - podgraf grafu będący drzewem łączącym wszystkie wierzchołki grafu.
Liczba cyklomatyczna - Liczba usuniętych krawędzi w trakcie usuwania cykli w grafie by utworzyć drzewo. Liczba wynosi m - (n - k), gdzie k to składowe
Metryka - odległość między wierzchołkami grafu spójnego. Cechy metryki: nieujemność, symetria, nierówność trójkąta.
Ekscentryczność wierzchołka r(v) - odległość v do najdalej położonego wierzchołka (u)
Centrum - wierzchołek o najmniejszej ekscentryczności.
Każde drzewo ma jedno albo 2 centra
Promień drzewa - ekscentryczność centrum.
Średnica drzewa - Długość najdłuższej ścieżki w drzewie.
Centroid - wierzchołek dzielący drzewa na poddrzewa o liczbie wierzchołków nie większej niż połowa wierzchołków drzewa.
Wierzchołki drzewa:

- Korzeń - wyróżniony wierzchołek
- Wierzchołki wewnętrzne - wierzchołki, nie liście, w drzewach ukorzenionych - węzły
- Liście - Wierzchołki wiszące

Przodek wierzchołka - wierzchołek pomiędzy wskazywanym wierzchołkiem a korzeniem
Potomek wierzchołka - wierzchołek znajdujący się w przeciwnym kierunku od korzenia.
Syn - potomek sąsiadujący z wierzchołkiem
Ojciec - przodek sąsiadujący z wierzchołkiem
Wysokość węzła x - liczba krawędzi na ścieżce prostej z x do najdalszego drzewa.
Wysokość drzewa - wysokość jego korzenia
Głębokość węzła x - liczba krawędzi na ścieżce prostej od korzenia do węzła.

Drzewo binarne

Drzewo, w którym dokładnie jeden wierzchołek jest stopnia drugiego, a każdy pozostały jest albo stopnia trzeciego albo drugiego. Każdy węzeł albo nie ma dzieci albo ma dwójkę dzieci.
Własności drzewa binarnego:

- Liczba wierzchołków jest zawsze nieparzysta.
- Jeśli p jest liczbą wierzchołków wiszących w drzewie binarnym T o n wierzchołkach, to p=(n+1)/2.

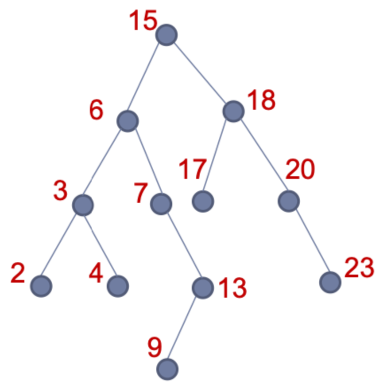
Pełne drzewo binarne - Każdy wierzchołek ma dwójkę dzieci
Własności pełnego drzewa binarnego:

- Pełne drzewo binarne o wysokości h ma 2h+1-1 wierzchołków
- Wysokość pełnego drzewa binarnego o t liściach jest równa $h=\log_2 t$

Drzewo poszukiwań binarnych - to drzewo binarne, w którym dla każdego wierzchołka wszystkie wartości w lewym poddrzewie są mniejsze (ew. mniejsze równe) od wartości w tym wierzchołku, a wszystkie wartości w prawym poddrzewie są większe (ew. większe równe)
Metody przeszukiwania drzewa:
preorder - środek, lewo, prawo - można uzyskać idąc pierwszy raz DFS

Algorytm preorder(r):
1. wypisz klucz znajdujący się w korzeniu
2. wykonaj **preorder** na lewym poddrzewie
3. wykonaj **preorder** na prawym poddrzewie

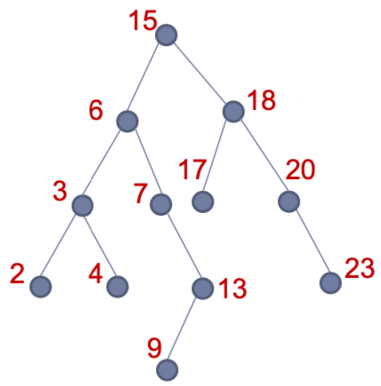
Przykład: Porządek preorder dla drzewa po prawej
15, 6, 3, 2, 4, 7, 13, 9, 18, 17, 20, 23



postorder - zaczynamy od najniższego i najbardziej po lewej i idziemy w zwyż sprawdzając czy w głąb jest coś niżej i po lewej, można uzyskać idąc DFS w kolejności wycofywania się z wierzchołków

Algorytm postorder(r):
1. wykonaj **postorder** na lewym poddrzewie
2. wykonaj **postorder** na prawym poddrzewie
3. wypisz klucz znajdujący się w korzeniu

Przykład: Porządek postorder dla drzewa po prawej
2, 4, 3, 9, 13, 7, 6, 17, 23, 20, 18, 15

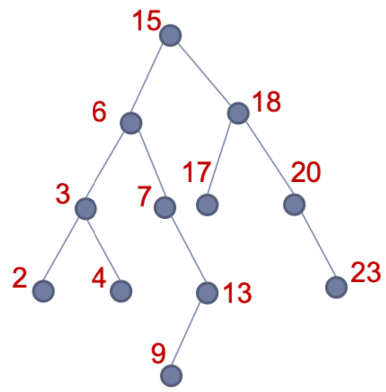


inorder - od najbardziej lewej, zawsze: lewy środek, prawy, tak że jest rosnąco

Algorytm inorder(r):

1. wykonaj **inorder** na lewym poddrzewie
2. wypisz klucz znajdujący się w korzeniu
3. wykonaj **inorder** na prawym poddrzewie

Przykład: Porządek inorder dla drzewa po prawej
2, 3, 4, 6, 7, 9, 13, 15, 17, 18, 20, 23



Złożoności przeszukiwania drzewa binarnego:
O(n) - pesymistyczna dla wstawiania, usuwania, szukania elementów
Średnia liczba porównać - O(nlogn)

Drzewo przedziałowe - przykład drzewa binarnego zrównoważonego, binarne jest niezrównoważone
Zastosowanie drzewa przedziałowego - rozwiązywanie problemów własności obiektu z danego przedziału: suma, max, min, liczba wyróżnionych znaków

Wykład 5

Pojęcia

Digraf acykliczny - graf niezwierający cykli zorientowanych, tzn. poruszając się od dowolnego wierzchołka zgodnie z kierunkiem łuków, nigdy nie powrócimy do tego samego wierzchołka.
Źródło - wierzchołek do którego nie wchodzi żaden łuk
Ujście - wierzchołek z którego nie wychodzi żaden łuk

Zastosowania digrafu acyklicznego:
- obliczenia numeryczne
- przetwarzanie potokowe
- tworzenie układów kombinacyjnych z bramek logicznych,
- kompresja,
- kompilatory,
- diagramy przepływu,
- przepływ danych czy zasobów (transport, energia elektryczna, woda), porządek topologiczny (patrz poprzednie wykłady

Graf ważony - graf którego krawędzie mają wagi
Długość d podgrafu - suma wag podgrafu
Możliwe sposoby reprezentowania sieci: n - wierzchołki m - krawędzie
- Macierz sąsiedztwa - n^2
- Lista sąsiadów m + n^2 / m + n^2
- Rozbudowania lista sąsiadów 4m/2m

Problemy najkrótszych dróg:
- najkrótsza droga z jednego wierzchołka do pozostałych
- najkrótsza droga z jednego wierzchołka do innego przechodząca przez konkretne wierzchołki
- wszystkie, najkrótsze drogi

Problemy pokrewne:
- najdłuższa droga
- najbardziej niezawodna droga
- droga o największej przepustowości
- wyznaczanie tras objazdu

Algorytmy

Algorytm Dijkstry - znajdowanie najkrótszej drogi do każdego z wierzchołków, algorytm zachłanny, złożoność: n^2 lub ElogV lub E + VlogV, działa tylko dla wag nieujemnych
Algorytm Moore'a-Bellmana - znajduje drogę pomiędzy różnymi wierzchołkami w sieci skierowanej o dowolnych wagach.

Algorytm Floyda-Warshalla - Wyznaczanie najkrótszych dróg **między każda parą wierzchołków** w sieciskierowanej o dowolnych wagach łuków, nie zwierającej cykli ujemnej długości. Złożoność n^3
Drzewo rozpinające - wyznaczenie minimalnej ilości krawędzi w grafie zawierające wszystkie wierzchołki
Minimalne drzewo rozpinające - drzewo rozpinające o najmniejszej sumie wag krawędzi.
Własności minimalnego drzewa rozpinającego:

1. Jeśli wszystkie wagi są różnej długości, to istnieje tylko jedno drzewo rozpinające

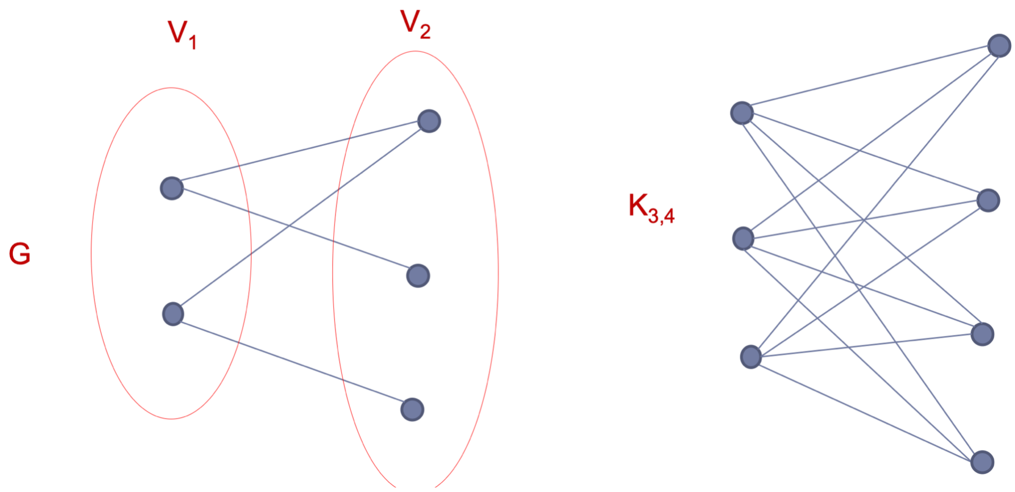
Algorytm Kruskala - algorytm znajdujący minimalne drzewo rozpinające dla spójnej sieci, algorytm zachłanny. Sieć w algorytmie przechowywana w postaci tablicy krawędzi z wagami. Każdy podzbiór reprezentowany jest przez drzewo z korzeniem identyfikującym podzbiór.
Algorytm Prima-Dijkstry - algorytm polegający na wyznaczeniu najkrótszego drzewa rozpinającego metodą najbliższego sąsiada. Złożoność O(n^2) z listą sąsiedzctwa, z listą jest qlogn, stosując kopiec Fibonaciego q + nlogn

Wykład 6

Własności macierzy sąsiedztwa

- Jeśli symetryczna to graf jest niezorientowany
- Jeśli po skosie są same zera, to graf nie ma pętli własnych
- Jeśli macierz ma tylko wartości 0 i 1, to nie ma krawędzi równoległych
- Jeśli macierz jest symetryczna, ma same zera po skosie i wartości 0 i 1, to jest to graf prosty.
- Stopień i-tego wierzchołka grafu niezorientowanego jest równy liczbie jedynek w i-tym wierszu (kolumnie), dla digrafu stopień wyjściowy jest równy liczbie jedynek w i-tym wierszu, stopień wejściowy jest równy liczbie jedynek w i-tej kolumnie

Graf dwudzielny - jeśli zbiór V jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych V1 i V2 takich, że każda krawędź w grafie G łączy wierzchołek ze zbioru V1 z wierzchołkiem ze zbioru V2



Można go przedstawić za pomocą takiej macierzy:

A	0	1	2	3	4
0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
2	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0

Jeśli G jest grafem prostym o macierzy sąsiedztwa A, to element (i, j) macierzy A^2 jest równy:

- stopniowi i-tego wierzchołka, gdy $i = j$;
- liczbie dróg o długości 2 łączących wierzchołek i-ty z j-tym, gdy $i \neq j$.

Jeśli D jest digrafem prostym o macierzy sąsiedztwa A, to element (i, j) macierzy A2 jest równy liczbie dróg zorientowanych o długości 2 łączących wierzchołek i-ty z j-tym.

Jeśli D jest digrafem prostym o macierzy sąsiedztwa A, to element (i, j) macierzy

$A1 + A2 + ... + An-1$

jest równy liczbie wszystkich dróg zorientowanych (marszrut) łączących wierzchołek i-ty z j-tym.

Izomorfizm grafu

Grafy proste G1=(V1, E1) i G2=(V2, E2) są izomorficzne, ozn. G1 G2, gdy istnieje bijekcja pozwalająca za pomocą transformacji przekształcić macierz jednego grafu sąsiedztwa w drugą:

Graf G1 o macierzy sąsiedztwa A1 i graf G2 o macierzy sąsiedztwa A2, obydwa o n wierzchołkach, są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy macierz A1 jest transformowalna do macierzy A2 przez permutacje macierzy i kolumn

Macierz incydencji

Na podstawie macierzy incydencji grafu można poczynić następujące spostrzeżenia:

- Ponieważ każda krawędź jest incydentna do dokładnie dwóch wierzchołków, więc każda kolumna macierzy incydencji zawiera dokładnie dwie jedynki.
- Liczba jedynek w każdym wierszu jest równa stopniowi odpowiadającego mu wierzchołka.
- Wiersz z samych zer reprezentuje wierzchołek izolowany (nie ma krawędzi incydentnych do niego)
- Krawędzie równoległe w grafie tworzą identyczne kolumny w jego macierzy incydencji.
- Jeśli graf jest niespójny i składa się z dwóch składowych G_1 i G_2, to macierz incydencji B grafu G może być zapisana w formie blokowej B= 0 B_2, gdzie B_1 i B_2 są macierzami incydencji składowych G_1 i G_2. B_1 0
- Permutacja dowolnych dwóch wierszy lub kolumn w macierzy incydencji odpowiada przeetykietowaniu wierzchołków i krawędzi tego samego grafu.
- W macierzy incydencji C digrafu suma elementów w każdej kolumnie wynosi 0

Algorytm	Złożoność	Rodzaj	Struktura	Jaki problem rozwiązuje
Halaza Hamiego	N/A	Zachłanny	N/A	Sprawdza czy ciąg jest graficzny
N/A	O(n)	N/A	Lista sąsiedztwa	Sprawdza czy grafy są identyczne
Izomorfizm grafów	n! - naiwny O(n^2) / O(n)	N/A	N/A	n! dla wszystkich grafów O(n^2) / O(n) - tylko dla niektórych grafów
BFS	O(n+m)		Lista sąsiadów	Przeszukiwanie wszerz / wszystkie najkrótsze drogi
DFS	O(n+m)		Lista sąsiadów	Przeszukiwanie w głąb
Przeszukiwanie drzew BST	O(nlogn) Pesymistycznie: O(n)	N/A	N/A	
Dijkstra	O(n^2)	Zachłanny	Lista/Macierz sąsiedztwa	Szukanie najtańszej drogi w grafie ważonym o wagach nieujemnych
Algorytm Moore'a-Bellmana	O(n^2)	Zachłanny	Lista/Macierz sąsiedztwa	Szukanie najtańszej drogi w grafie ważonym , również dla wag ujemnych
Algorytm Floyda-Warshalla	O(n^3)	Zachłanny	Lista/Macierz sąsiedztwa	Szukanie najtańszej drogi w grafie ważonym , również dla

				wag ujemnych, a przy tym dla dróg równoległych
Algorytm Kruskalla	O(ElogV)	Zachłanny	Lista + drzewo ukorzenione	Znalezienie minimalnego drzewa rozpinającego
Algorytm Prima-Dikstry	O(ElogV)	Zachłanny	Lista + drzewo ukorzenione	Znalezienie minimalnego drzewa rozpinającego