

Lista zadań nr 1 z rozwiązaniami
Teoria Grafów – podstawowe własności grafów
dr Anna Beata Kwiatkowska

Zadanie 1.

Wykazać, że w dowolnej grupie ludzi znajdziemy dwie osoby mające tę samą liczbę znajomych.

Graf znajomości. W grafie prostym istnieją co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia. Możliwe stopnie wierzchołków w grafie o n wierzchołkach to $0, 1, 2, \dots, n-1$. Jeśli istnieje wierzchołek stopnia 0 , to nie może istnieć wierzchołek stopnia $n-1$ i odwrotnie. Stąd różnych stopni wierzchołków może być co najwyżej $n-1$. Ponieważ graf ma n wierzchołków, muszą istnieć dwa wierzchołki tego samego stopnia.

Zadanie 2.

Dla jakich wartości n i d istnieje graf regularny o n wierzchołkach stopnia d ? Podaj warunek konieczny.

Dla n wierzchołkowego grafu regularnego o wierzchołkach stopnia d zachodzi, że suma stopni wierzchołków jest równa nd . Zatem liczba krawędzi $m = nd/2$. Warunkiem koniecznym jest zatem, że n i d nie mogą być jednocześnie liczbami nieparzystymi.

Zadanie 3.

Wyrazy ciągu liczb całkowitych $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ spełniają warunki:

- a) $\sum_{i=1}^n d_i$ jest liczbą parzystą
- b) $d_1 \leq d_2 + d_3 + \dots + d_n$

Wykazać, że są to warunki konieczne na to, aby istniał graf niezorientowany o stopniach wierzchołków d_1, d_2, \dots, d_n . Podać przykład takiego grafu.

a) jasne

c) Przez sprzeczność:

Niech $d_1 > d_2 + d_3 + \dots + d_n$. Ponieważ suma stopni jest równa $2m$ (m -liczba krawędzi), to suma bez d_1 jest równa $2m - d_1$. Mamy więc $d_1 > 2m - d_1$ czyli $d_1 > m$, co jest niemożliwe.

Przykładem jest gwiazda – wierzchołek środkowy połączony z $n-1$ ramionami.

Zadanie 4.

Narysować wszystkie grafy zwyczajne regularne stopnia 3 o liczbie wierzchołków $n \leq 8$.

Zadanie 5.

Na pewnym wydziale studiuje $n_1=60$ kobiet i pewna liczba mężczyzn, ozn. n_2 . Każda kobieta zna dokładnie 8 mężczyzn, a każdy mężczyzna zna dokładnie 6 kobiet. Ilu mężczyzn studiuje na tym wydziale?

Mamy graf dwudzielny odpowiednio o $n_1=60$ i n_2 wierzchołkach. Stopnie wierzchołków reprezentujących kobiety to $d_1=8$, mężczyzn $d_2=6$. Zbiór kobiet jest połączony ze zbiorem mężczyzn za pomocą $n_1 \cdot d_1 = 480$ krawędzi. Stąd $n_2 = m/d_2 = 480/6 = 80$.

Zadanie 6.

Które z następujących grafów są graficzne?

- a) 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1
- b) 7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1
- c) 5, 5, 5, 4, 4, 3
- d) 5, 4, 3, 2, 1

Dla ciągów graficznych skonstruować grafy o podanych stopniach wierzchołków.

Zadanie 7.

Napisz program, który sprawdza czy podany ciąg stopni wierzchołków jest graficzny na podstawie twierdzenia o obniżaniu stopni wierzchołków.

Zadanie 8.

Napisz program, który sprawdza czy podany ciąg stopni wierzchołków jest graficzny na podstawie twierdzenia P. Erdos, T. Gallai 1960.

Zadanie 9.

Przedstaw wybrany graf w każdej z reprezentacji podanej na wykładzie.

Zadanie 10.

Napisz program wypisujący na ekranie reprezentacje z zadania 9.