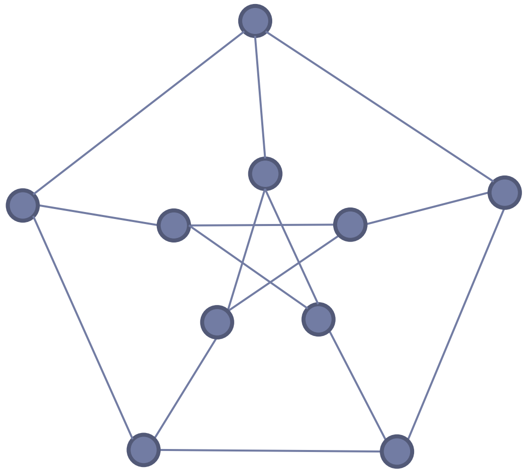
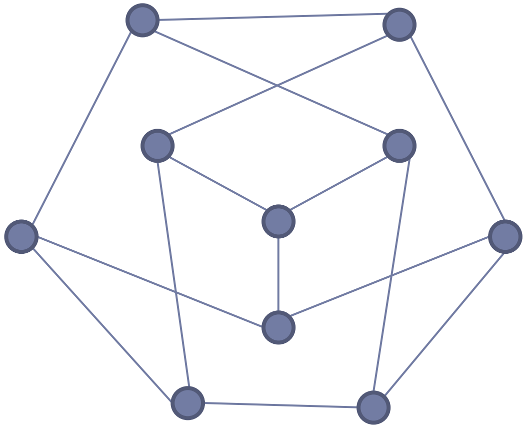




Operacje na grafach
Identyczność i izomorfizm grafów.

dr Anna Beata Kwiatkowska, UMK Toruń

Operacje na grafach

Niech dane będą grafy $G_1=(V_1, E_1)$ i $G_2=(V_2, E_2)$.

Sumą grafów G_1 i G_2 jest graf $G=(V, E)$, ozn. $G = G_1 \cup G_2$
taki że $V = V_1 \cup V_2$ oraz $E = E_1 \cup E_2$.

Przecięciem grafów G_1 i G_2 jest graf $G=(V, E)$, ozn. $G = G_1 \cap G_2$
taki że $V = V_1 \cap V_2$ oraz $E = E_1 \cap E_2$.

Różnicą symetryczną grafów G_1 i G_2 jest graf $G=(V, E)$, ozn. $G = G_1 \oplus G_2$
taki że $V = V_1 \cup V_2$ oraz $E = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$

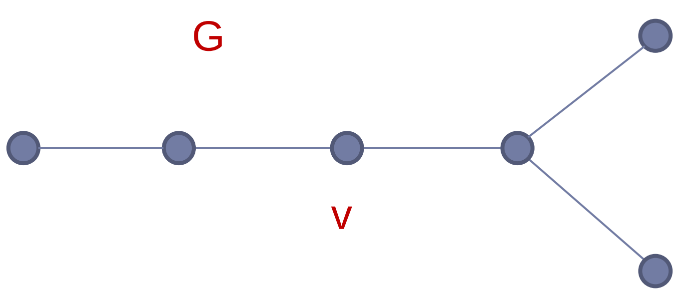
Operacje sumy, przecięcia i różnicy symetrycznej są przemienne.

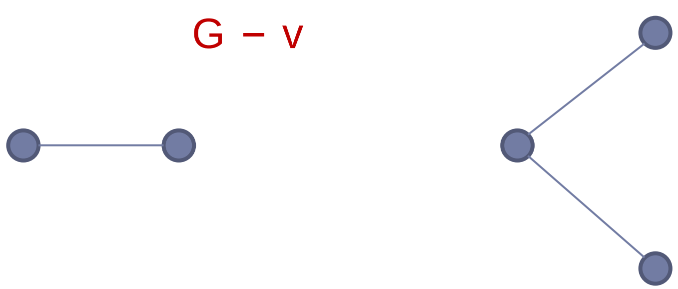
Operacje na grafach

Dekompozycja – mówimy, że graf G został zdekomponowany na dwa podgrafy G_1 i G_2 jeśli $G_1 \cup G_2 = G$ oraz $G_1 \cap G_2$ = graf zerowy. Przy dekompozycji pomijamy wierzchołki izolowane.

Graf zawierający m krawędzi można zdekomponować na 2^{m-1}-1 różnych sposobów na pary podgrafów G_1 i G_2.

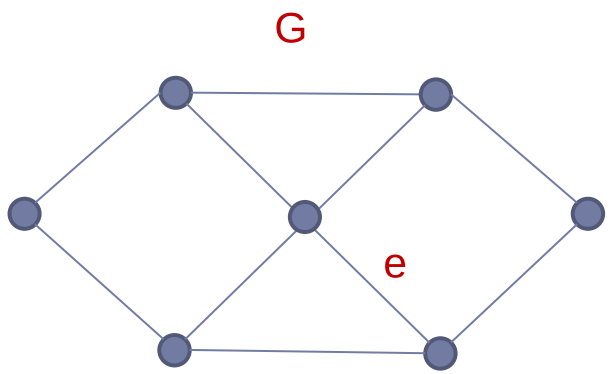
Usuwanie wierzchołka – jeśli v jest wierzchołkiem grafu G, to G – v oznacza podgraf grafu G uzyskany w wyniku usunięcia wierzchołka v z G. Usunięcie wierzchołka zawsze pociąga za sobą usunięcie wszystkich krawędzi z nim incydentnych.

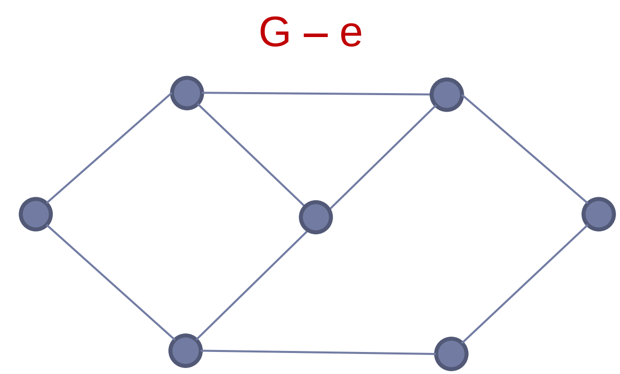




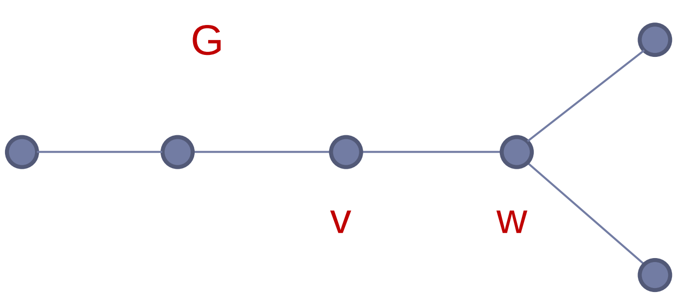
Operacje na grafach

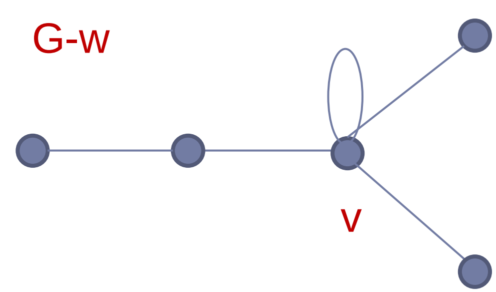
Usuwanie krawędzi – jeśli e jest krawędzią grafu G, to G – e oznacza podgraf grafu G uzyskany w wyniku usunięcia krawędzi e z G. Usunięcie krawędzi nie pociąga za sobą usunięcia wierzchołków końcowych.





Scalanie wierzchołków – jeśli dwa wierzchołki v oraz w zastąpimy jednym wierzchołkiem tak, że każda krawędź incydentna do v lub do w lub do obydwóch jest incydentna do nowego wierzchołka.

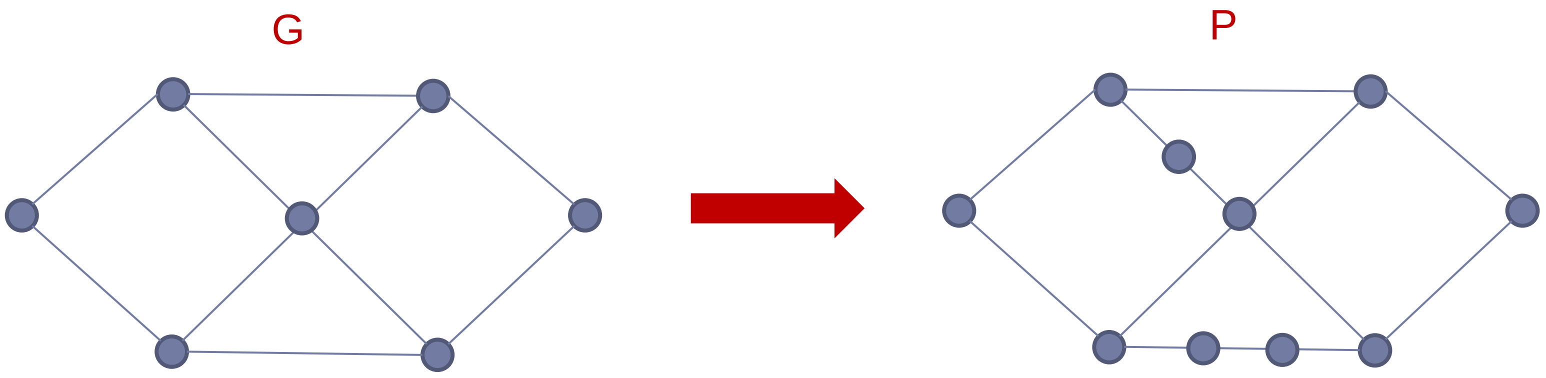




Operacje na grafach

Podpodziałem grafu G nazywany taki graf P, który otrzymujemy z G przez dorysowanie na jego krawędziach co najmniej jednego nowego wierzchołka stopnia 2.

Przykład:

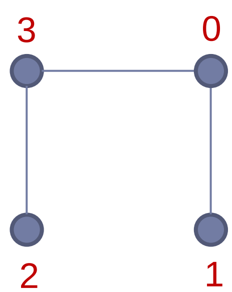


Operacje na grafach

Dopełnieniem grafu nieskierowanego $G=(V,E)$ nazywamy graf $\overline{G}=(V,\overline{E})$, gdzie $\overline{E}=\{(u,v):\ u,v\in V,\ u\neq v\ \ i\ \ (u,v)\notin E\}$

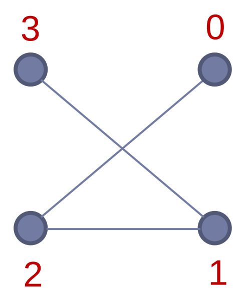
Przykład grafu i jego dopełnienia:

G



$\overline{G}$

G



Inaczej, dopełnieniem grafu G jest graf zawierający dokładnie wszystkie te krawędzie, które nie należą do G.

Identyczność grafów

Dwa grafy proste $G_1=(V_1, E_1)$ i $G_2=(V_2, E_2)$ są identyczne, co zapisujemy $G_1 = G_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy $V_1= V_2$ i $E_1 = E_2$.

Dwa grafy identyczne możemy przedstawić za pomocą tego samego rysunku.

Algorytm sprawdzania identyczności grafów:

1. Sprawdź, czy grafy mają tę samą liczbę wierzchołków i krawędzi. Jeśli nie, grafy nie są identyczne.
2. Sprawdź, czy wierzchołki o tych samych numerach mają takich samych sąsiadów.

Uwaga:

Aby algorytm miał złożoność liniową, w kroku 2. powołaj pomocniczą strukturę (np. tablica, lista) o wielkości równej liczbie wierzchołków. Dla każdego wierzchołka v każdemu jego sąsiadowi w G_1 przypisz wartość równą 1. Przejrzyj teraz sąsiadów wierzchołka v w grafie G_2 i dla każdego z nich, w strukturze pomocniczej obniż wartość o 1. Jeżeli w trakcie obniżania uzyskasz wartość różną od zera, przerwij algorytm, bo grafy G_1 i G_2 nie są identyczne, w przeciwnym razie grafy są identyczne.

Izomorfizm grafów

Definicja

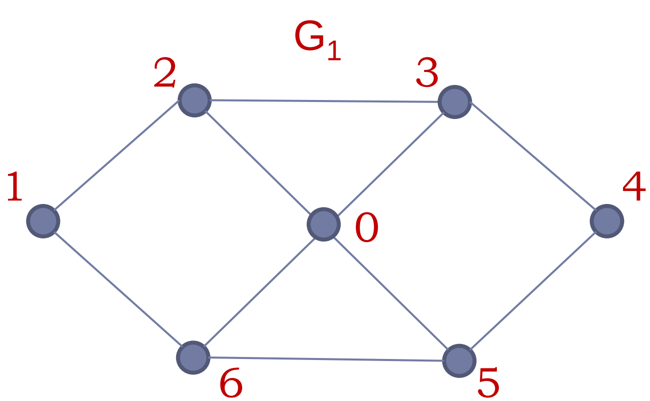
Grafy proste $G_1=(V_1, E_1)$ i $G_2=(V_2, E_2)$ są izomorficzne, ozn. $G_1 \cong G_2$, gdy istnieje bijekcja

$$f : V_1 \to V_2$$

taka, że $\{u,v\} \in E_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{f(v), f(u)\} \in E_2$.

Przykład:

$G_1 \cong G_2$,



f(0) = g

f(1) = a

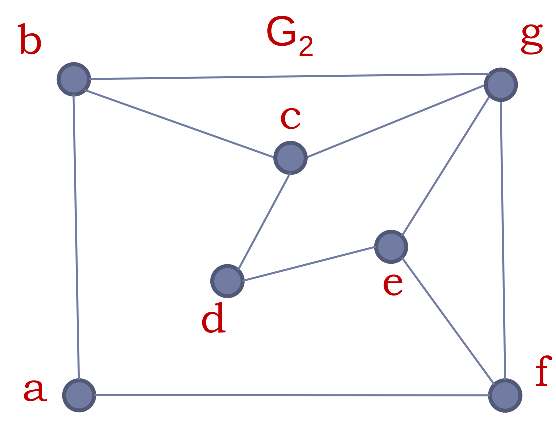
f(2) = b

f(3) = c

f(4) = d

f(5) = e

f(6) = f



Izomorfizm - własności

Własność 2.1.

Dla dowolnych grafów G, H, K

(1) $G \cong G$

(2) Jeżeli $G \cong H$, to $H \cong G$

(3) Jeżeli $G \cong H$ i $H \cong K$, to $G \cong K$

Relacja izomorficzności jest równoważnością.

Warunki konieczne, jakie muszą spełniać grafy izomorficzne:

(1) taka sama liczba wierzchołków

(2) taka sama liczba krawędzi

(3) identyczne rozkłady stopni wierzchołków

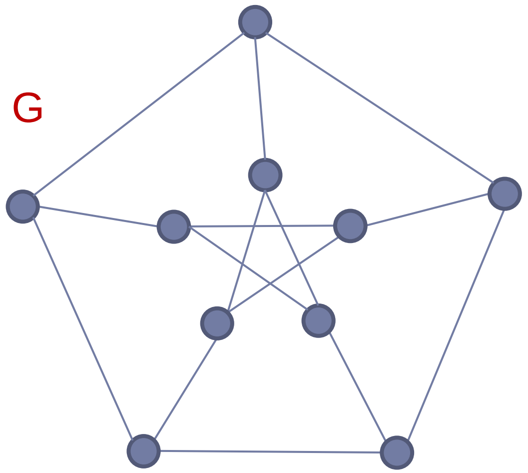
(4) ta sama liczba składowych

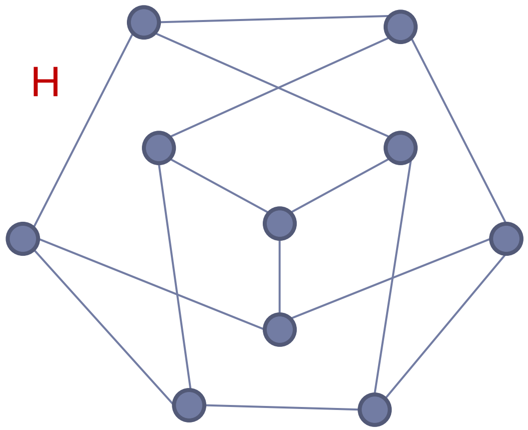
(5) wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkami muszą mieć takie same rozkłady stopni

(6) taka sama liczba cykli o identycznej długości.

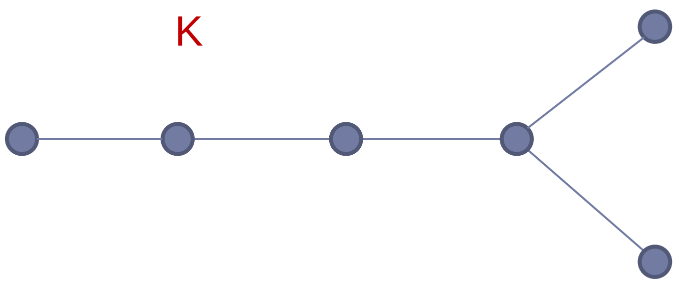
Izomorfizm - przykłady

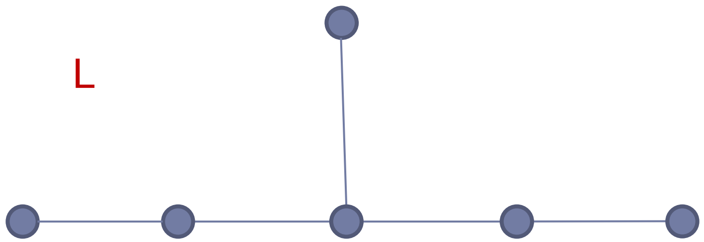
Grafy G i H są izomorficzne - jest to graf Petersena.





Grafy K i L nie są izomorficzne.



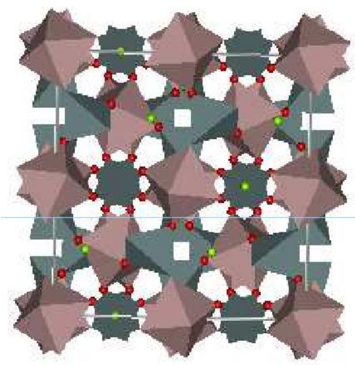


Przykład zastosowania izomorfizmu grafów

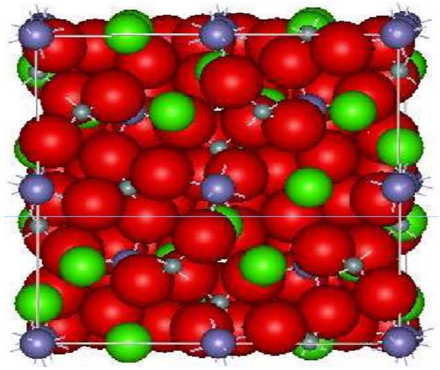
- Substancje chemiczne można przedstawiać za pomocą grafu połączeń pomiędzy atomami.
- Stwierdzenie, czy dwie badane cząsteczki reprezentują tę samą substancję jest pytaniem o to, czy grafy tych cząsteczek są izomorficzne.
- Związki o tej samej strukturze krystalicznej to związki izotypowe - mają zwykle podobne wzory chemiczne.
- Dwie lub więcej substancji izotypowych mogą tworzyć roztwory stałe dzięki zdolności atomów i jonów tych substancji do wzajemnego zastępowania się w sieci krystalicznej.

Granaty

Mg_3Al_2



Ca_3Fe_2



(-;

Badanie izomorfizmu - algorytmy

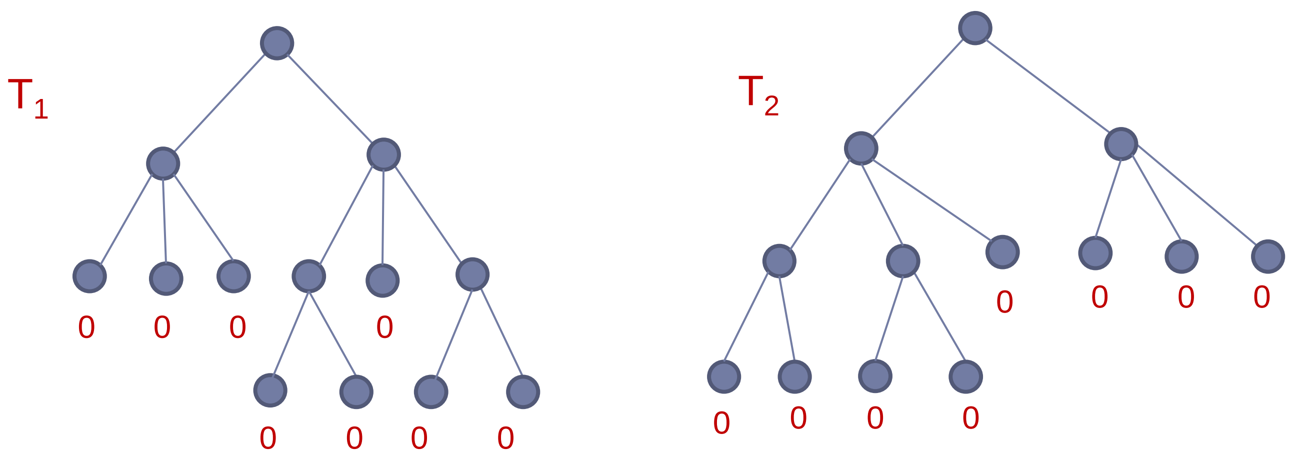
Niech $|V_1|=|V_2|=n$

- Algorytm naiwny wynikający wprost z definicji działa w czasie $O(n!)$
- **Algorytm wielomianowy dla dowolnych dwóch grafów nie jest znany i nie wiadomo, czy problem izomorfizmu grafów jest NP-zupełny.**
- Aktualny wynik uzyskany przez Laszlo Babai w 2016 roku ma złożoność obliczeniową $n^{O((\log n)^c)}$ dla pewnej stałej c.
- Klasy grafów, dla których znane są algorytmy wielomianowe:
  - drzewa ukorzenione,
  - drzewa dowolne,
  - grafy planarne,
  - grafy o stopniu ograniczonym przez stałą d (1983 Babai i Luks) o złożoności $n^{O(d)}$.

Izomorfizm drzew ukorzenionych

Oczywiste jest, że dwa drzewa ukorzenione są izomorficzne, jeśli jedno z tych drzew możemy przekształcić w drugie przez **zmianę porządku, który mają synowie wierzchołków**.

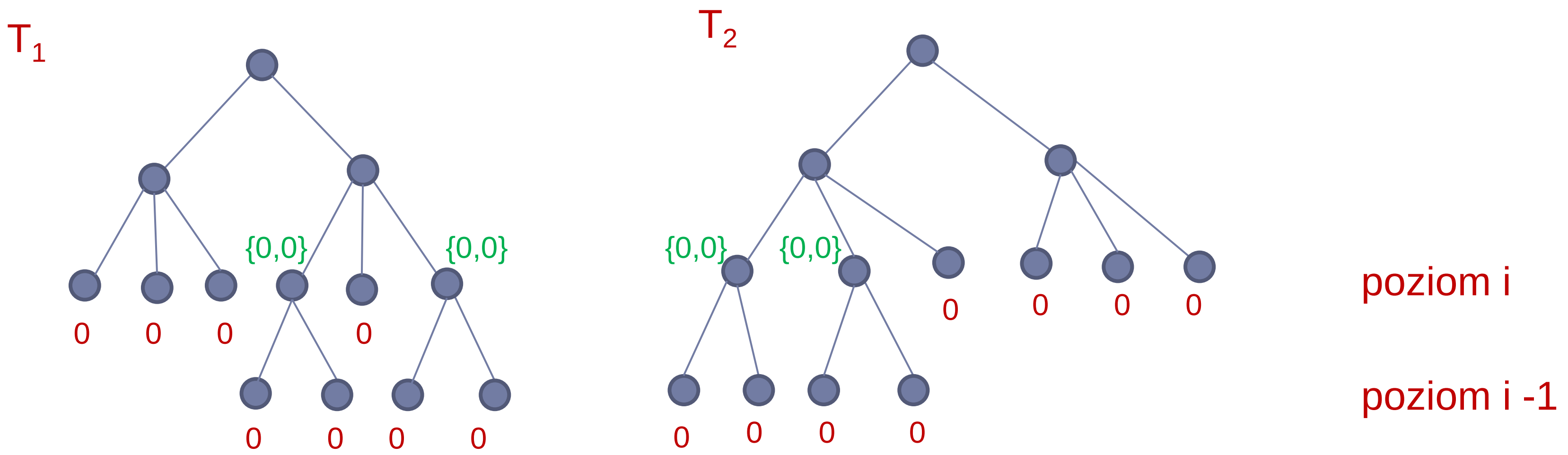
Algorytm sprawdzający, czy dwa drzewa ukorzenione sa izomorficzne przypisuje liczby całkowite (indeksy) wierzchołkom obu drzew poczynając od liści, którym nadaje indeks 0. Przechodzimy w nim w kierunku korzenia nadając indeksy wierzchołkom w sposób tak określony, że drzewa są izomorficzne, gdy ich korzeniom przypisany jest ten sam indeks.



Przykładowe drzewa izomorficzne.

Izomorfizm drzew ukorzenionych

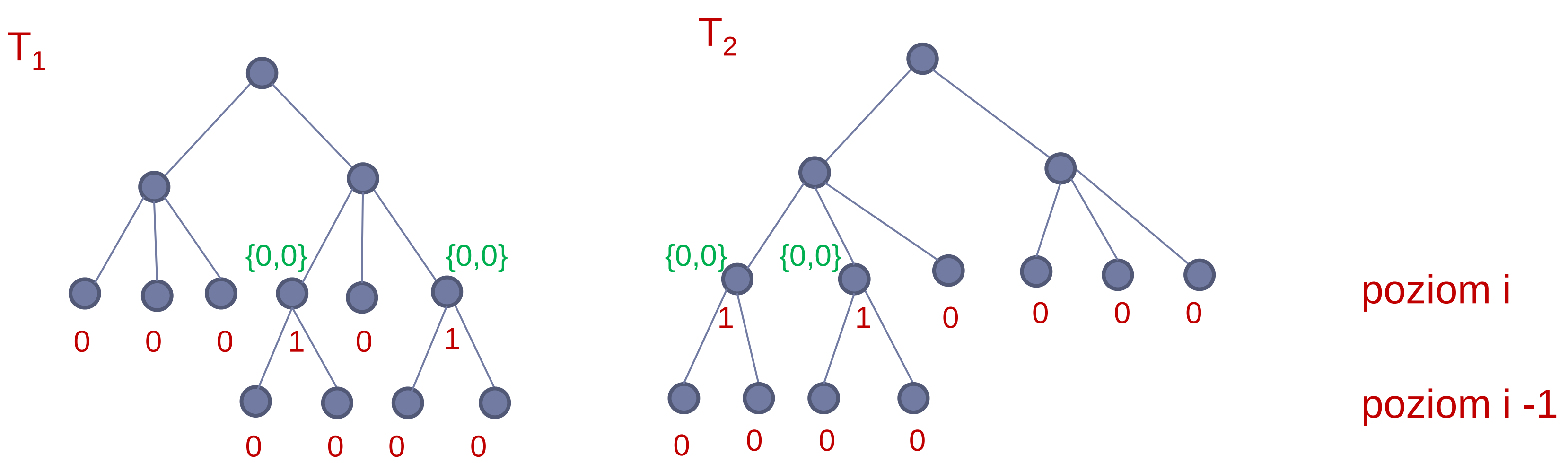
Po przypisaniu liściom indeksów równych zeru, zajmujemy się wierzchołkami z następnego poziomu w kierunku korzenia, które nie są liśćmi. Rozpatrujemy multizbiory indeksów ich dzieci (kolor zielony).



Izomorfizm drzew ukorzenionych

Aby nadać indeksy wierzchołkom, multizbiory przechowujemy w mapie (dla C++) lub słowniku (dla Pythona) o elementach `klucz: multizbiór`.

Jeśli multizbiór istnieje w mapie (słowniku), wierzchołek otrzymuje indeks równy reprezentującemu go kluczowi, jeśli zbiór nie istnieje w mapie, powołujemy nowy klucz równy kolejnej liczbie całkowitej. Klucz ten zostaje identyfikatorem wierzchołka.

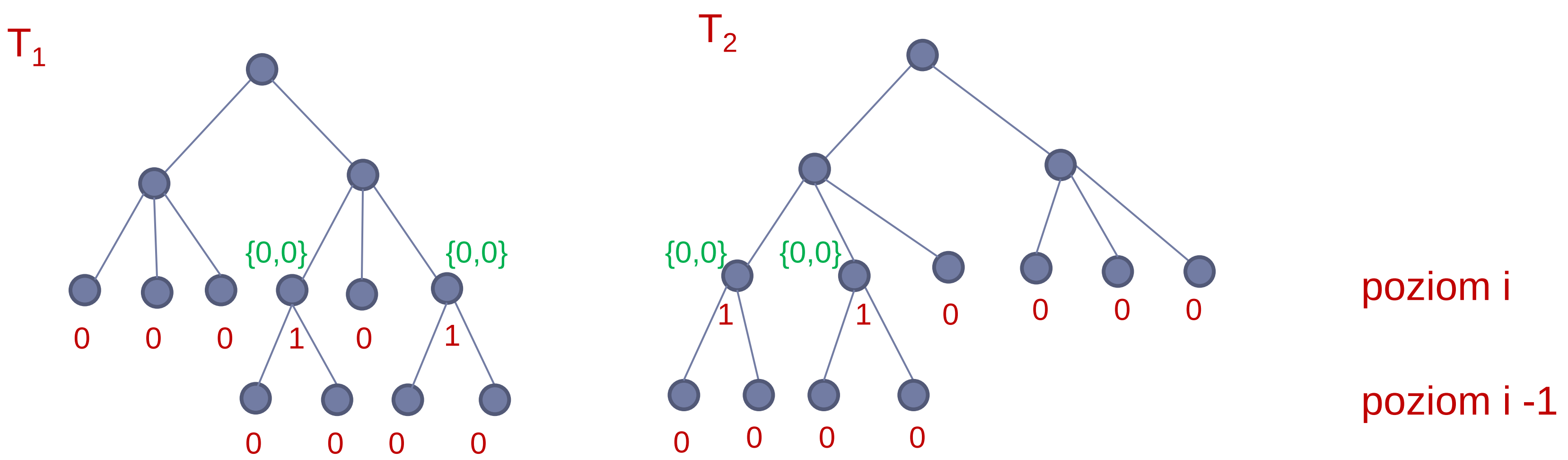


Izomorfizm drzew ukorzenionych

Na każdym etapie porównjemy multizbiory złożone z identyfikatorów przyporządkowanych wszystkim wierzchołkom z danego poziomu rozpatrywanych drzew.

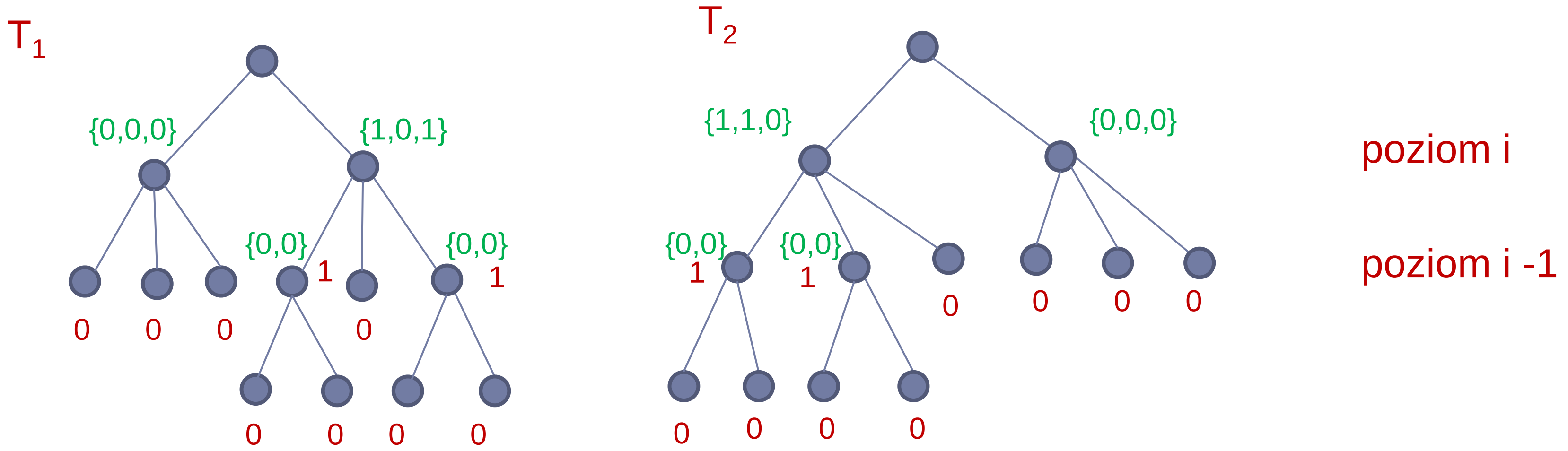
W przykładzie mamy na poziomie i-tym T_1: {0,0,0,1,0,1}, dla T_2: {1,1,0,0,0,0}.

Jeśli te multizbiory są równe, kontynuujemy algorytm dla wyższego poziomu. Jeśli multizbiory nie są równe, drzewa nie są izomorficzne i przerywamy działanie algorytmu.



Izomorfizm drzew ukorzenionych

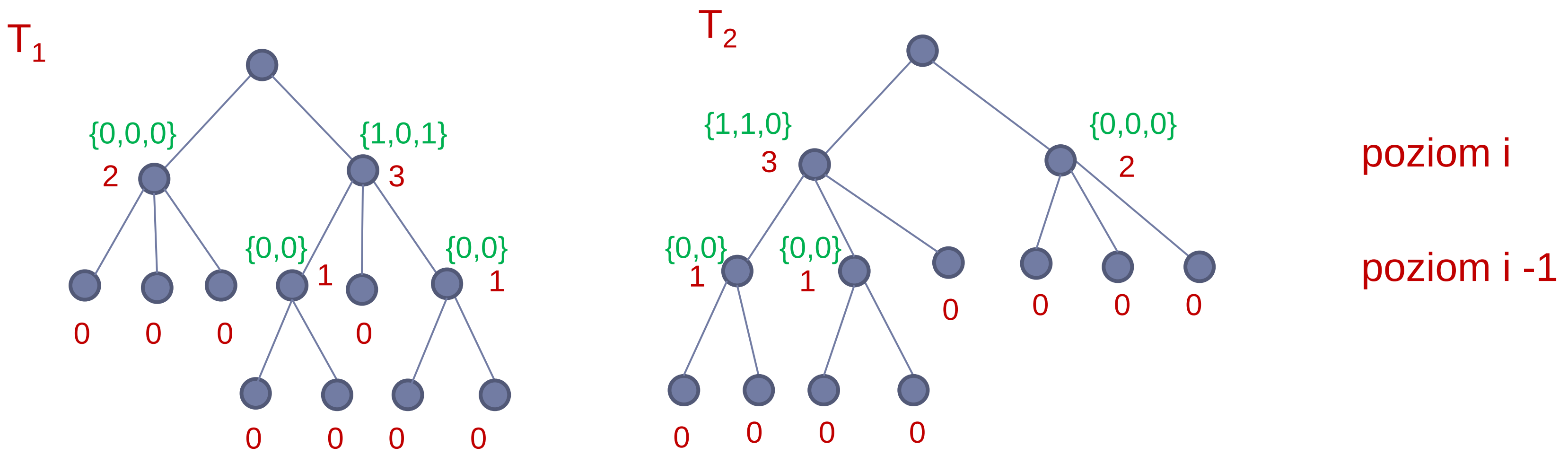
Kontynuujemy algorytm dla kolejnych etapów.



Izomorfizm drzew ukorzenionych

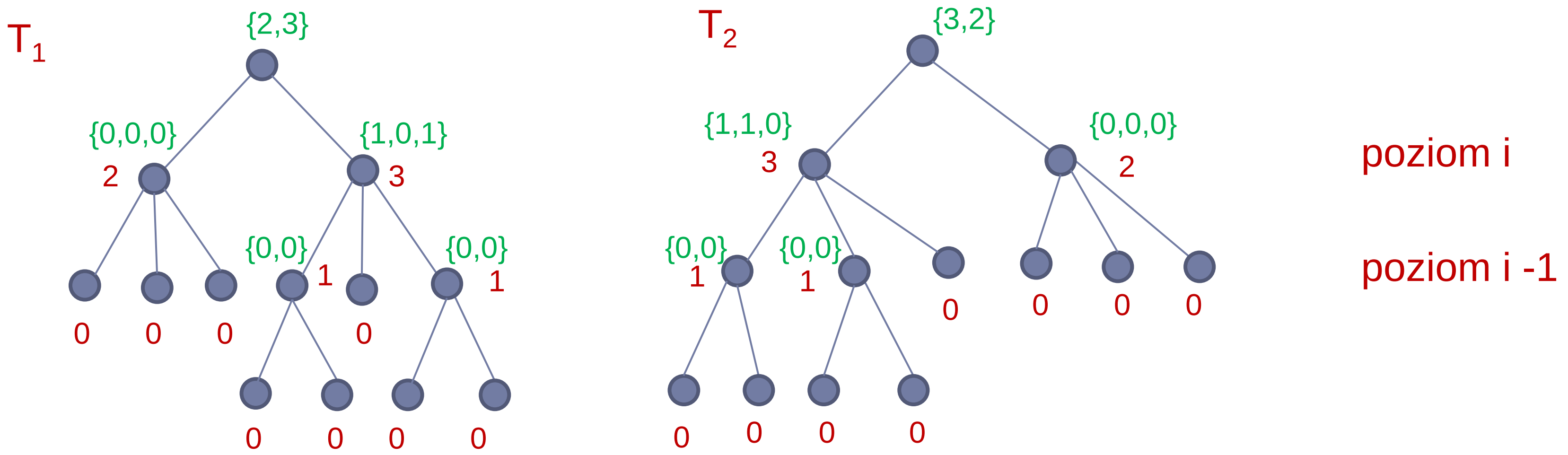
Kontynuujemy algorytm dla kolejnych etapów.

Pamiętamy, że na każdym etapie porównujemy multizbiory złożone z identyfikatorów przyporządkowanych wszystkim wierzchołkom z danego poziomu rozpatrywanych drzew.



Izomorfizm drzew ukorzenionych

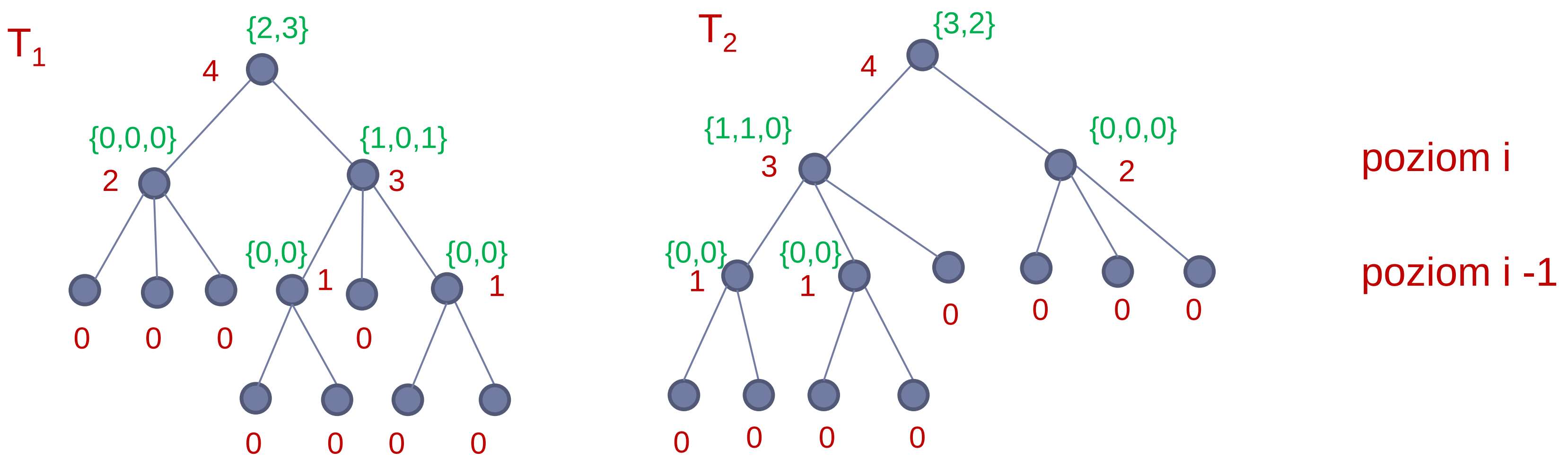
Kontynuujemy algorytm dla kolejnych etapów.



Izomorfizm drzew ukorzenionych

Kontynuujemy algorytm dla kolejnych etapów.

Drzewa są izomorficzne, gdy ich korzeniom przypisany jest ten sam indeks.



Złożoność algorytmu dla drzew ukorzenionych

Twierdzenie 2.1

To, czy liczące po n wierzchołków drzewa są izomorficzne można rozstrzygnąć w czasie O(n).

Dowód:

Dowód twierdzenia jest wynikiem formalizacji algorytmu. Praca pochłaniana przez przypisanie liczb całkowitych wierzchołkom z poziomu i-tego jest proporcjonalna do liczby wierzchołków z poziomu i-1.

- Można tworzyć ciąg indeksów dzieci od razu uporządkowany – patrz film załączony w kursie wykładu.
- Można też zamiast multizbiorów przypisywanych wierzchołkom rozpatrywać uporządkowane ciągi indeksów dzieci. Na i-tym etapie ciągi te sortuje się leksykograficznie i porównuje liniowo – patrz A. Aho, J. Hopcoft, J. Ullman „Projektowanie i analiza algorytmów".

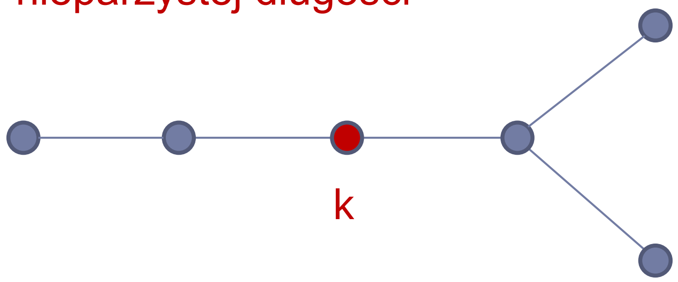
Sumowanie po wszystkich poziomach daje czas O(n). □

Izomorfizm dowolnych drzew nieskierowanych

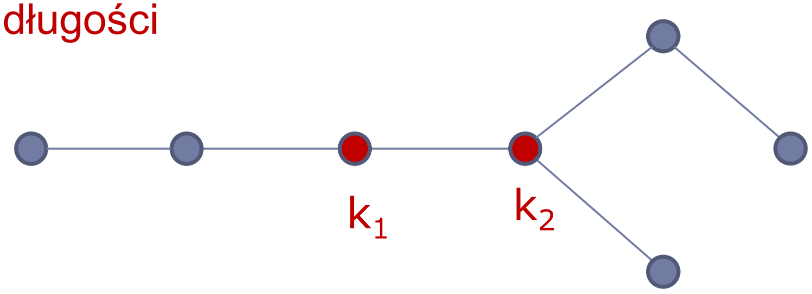
Aby sprawdzić, czy dwa drzewa T_1 i T_2 są izomorficzne, należy je ukorzenić i wykonać algorytm dla drzew ukorzenionych.

1. Znajdujemy w każdym z drzew najdłuższą ścieżkę. Jeśli są one różnej parzystości, drzewa T_1 i T_2 nie są izomorficzne.
2. Jeśli najdłuższe ścieżki są nieparzystej długości, ukorzeniamy każde z drzew w wierzchołku k, który jest środkiem jego najdłuższej ścieżki i stosujemy algorytm dla drzew ukorzenionych.
3. Jeśli najdłuższe ścieżki są parzystej długości, każda ma dwa wierzchołki środkowe k_1, k_2. Ukorzeniamy drzewo T_1 w jednym z wierzchołków środkowych i sprawdzamy izomorfizm z drzewem T_2 ukorzenionym najpierw w jednym i jeśli nie ma izomorfizmu, w drugim wierzchołku.

Drzewo z najdłuższą ścieżką nieparzystej długości



Drzewo z najdłuższą ścieżką parzystej długości



Dziękuję z uwagę

dr Anna Beata Kwiatkowska

aba@mat.umk.pl

tel. 602 184 813