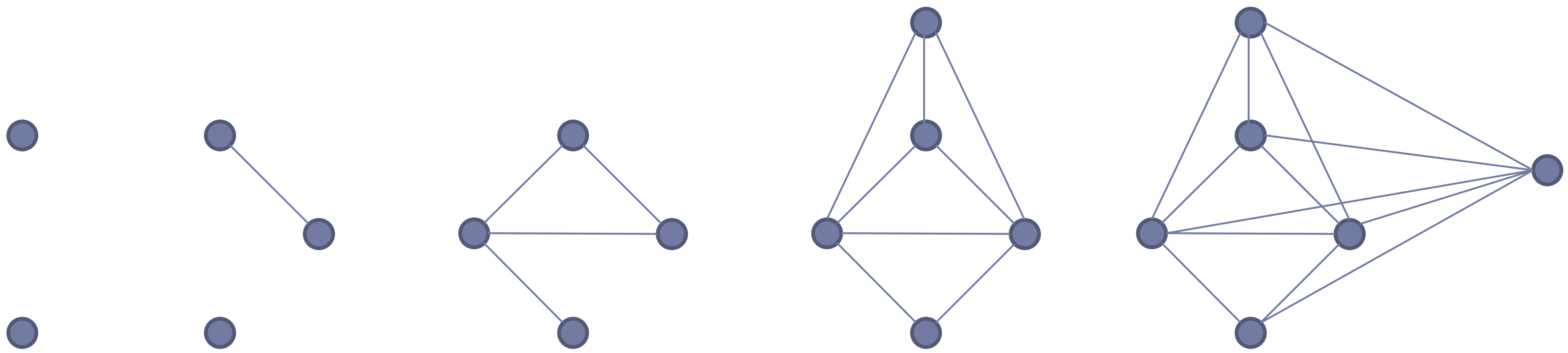


Grafy – przykładowe zastosowania. Definicje. Reprezentacje.

dr Anna Beata Kwiatkowska, UMK Toruń

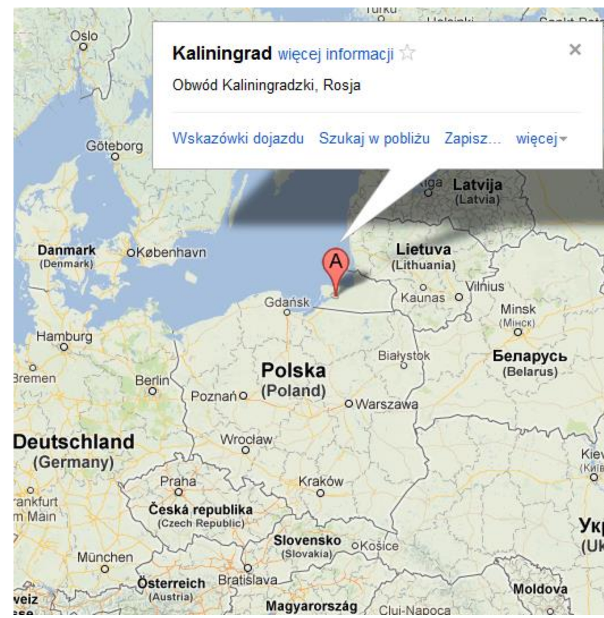
Teoria grafów

„Czytajcie Eulera, czytajcie go
– jest mistrzem nas wszystkich.”
Pierre Simon de Laplace

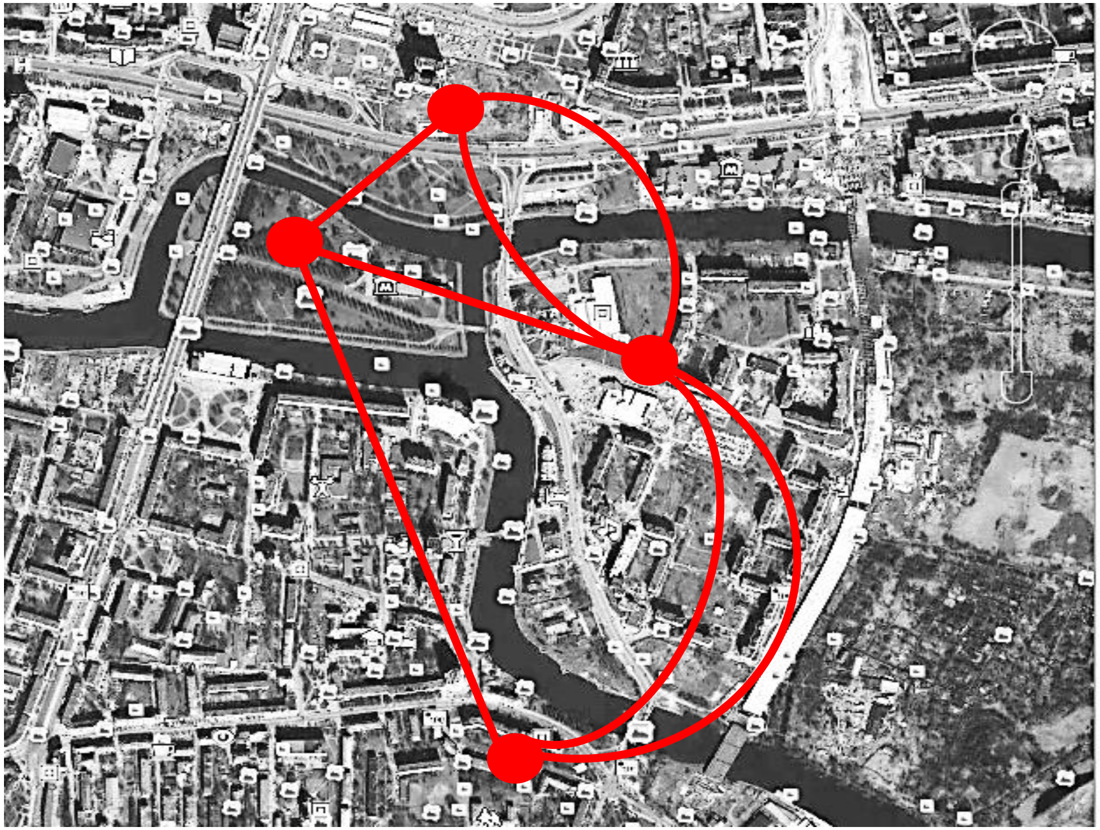
Leonhard Euler – szwajcarski matematyk i fizyk (rachunek różniczkowy, analiza matematyczna, mechanika, optyka, astronomia), jeden z najwybitniejszych naukowców w historii

1736 rok – zagadnienie mostów królewieckich – pierwsza praca na temat teorii grafów

Królewiec (Königsberg) – miasto w Rosji u ujścia rzeki Pregoły do Bałtyku (dzisiaj Kaliningrad)



Model abstrakcyjny w postaci grafu
Google map i problem mostów w Królewcu



Problem istnienia cyklu Eulera:

Czy można przejść przez każdy most tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło?

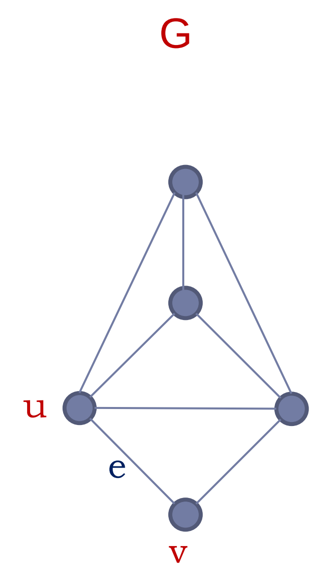
Graf

Definicja

Grafem G nazywamy uporządkowaną parę (V,E), gdzie:

- V jest niepustym zbiorem wierzchołków,
- E jest rodziną* krawędzi, przy czym $E \subseteq \{\{v, u\}: v, u \in V\}$,

zapisujemy to G=(V,E).



Przyjmujemy oznaczenia:

$|V| = n$ liczba wierzchołków,

$|E| = m$ liczba krawędzi.

Wierzchołki $v, u \in V$ są sąsiadami, jeśli istnieje krawędź $e \in E$ grafu G łącząca te wierzchołki. Krawędź e jest wtedy incydentna z każdym z tych wierzchołków.

$N(v)$ – zbiór sąsiadów wierzchołka v

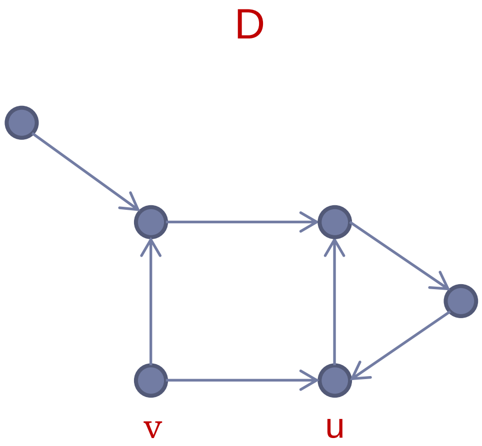
$|N(v)| = deg(v)$ – stopień wierzchołka v

* Rodzina w odróżnieniu od zbioru może zawierać elementy powtarzające się.

Digraf – graf zorientowany, skierowany

Definicja

Digrafem D nazywamy uporządkowaną parę (V,U), gdzie:
V jest niepustym zbiorem wierzchołków,
U jest rodziną łuków, przy czym $U \subseteq \{ (v, u): v, u \in V \}$,
zapisujemy D=(V,U).



$|V| = n$ liczba wierzchołków,
$|U| = m$ liczba łuków.

$N-(v)$ – zbiór sąsiadów wierzchołka v dla krawędzi wchodzących do v
$N+(v)$ – zbiór sąsiadów wierzchołka v dla krawędzi wychodzących z v

$|N-(v)| = deg-(v)$ stopień wierzchołka v dla krawędzi wchodzących
$|N+(v)| = deg+(v)$ stopień wierzchołka v dla krawędzi wychodzących

Graf i digraf przykłady

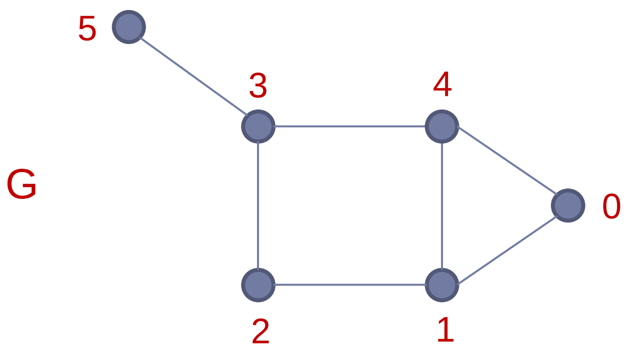
G=(V, E)

$|V| = 6$

$|E| = 7$

$N(4) = \{0, 1, 3\}$

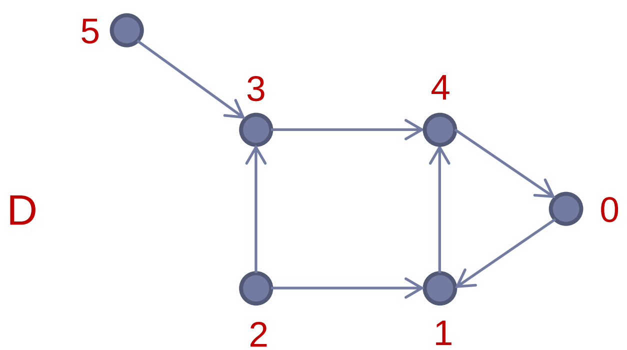
$\deg(4) = |N(4)| = 3$



D=(V, U)

$\deg^-(4) = |N^-(4)| = 2$

$\deg^+(4) = |N^+(4)| = 1$



Drogi, ścieżki i cykle w grafie

Niech dany będzie graf G=(V,E).

Drogą o długości n w grafie G nazywamy ciąg krawędzi e_1, e_2, …,e_n, gdzie $e_i \in$ E dla $1 \leq i \leq n$, wraz z ciągiem wierzchołków v_1, v_2, …, v_{n+1}, gdzie $v_i \in$ V dla $1 \leq i \leq n+1$, kolejno połączonych z tymi krawędziami.

Ścieżką o długości n nazywamy ciąg wierzchołków v_1, v_2, …, v_n połączonych krawędziami e_1, e_2, …,e_{n-1}.

Droga jest drogą zamkniętą, gdy $v_{n+1} = v_1$.

Cykl to droga zamknięta, w której wszystkie krawędzie są różne.

Pętlą nazywamy krawędź e_i, dla której $v_i = v_{i+1}$.

Graf acykliczny to graf, który nie zawiera cykli.

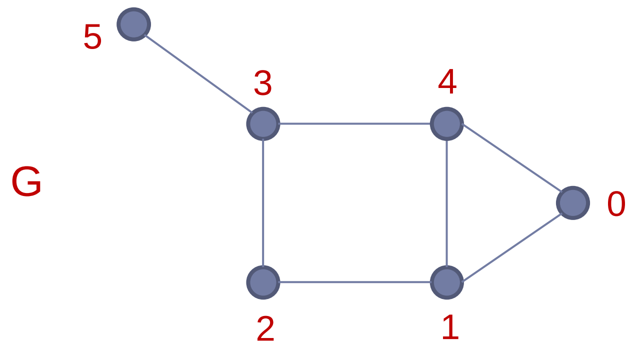
Jeśli rodzina krawędzi zawiera krawędzie powtarzające się, to takie krawędzie nazywamy krawędziami wielokrotnymi, a graf multigrafem.

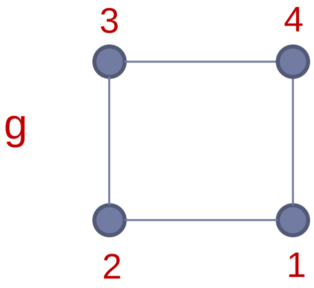
W naszych rozważaniach zazwyczaj bierzemy pod uwagę grafy bez pętli i wielokrotnych krawędzi, czyli grafy zwyczajne (proste).

Podgrafy

Graf g jest podgrafem grafu G, jeśli
- wszystkie wierzchołki oraz wszystkie krawędzie z g są w G,
- oraz każda krawędź z g ma te same wierzchołki końcowe w g jak w G.

To, że g jest podgrafem grafu G zapisujemy w postaci znanej z teorii mnogości: $g \subset G$.





Można zauważyć, że:

1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf podgrafu grafu G jest podgrafem grafu G.
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G wraz z wierzchołkami końcowymi, jest także podgrafem grafu G.

Spójność grafu

Graf G nazywamy spójnym jeśli istnieje co najmniej jedna ścieżka między każdą parą wierzchołków.

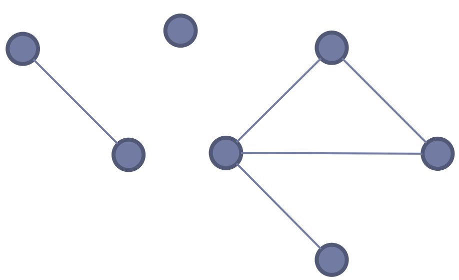
Graf G jest niespójny w przeciwnym wypadku.

Graf niespójny składa się z dwóch lub więcej grafów spójnych. Każdy z tych podgrafów jest składową spójności grafu.

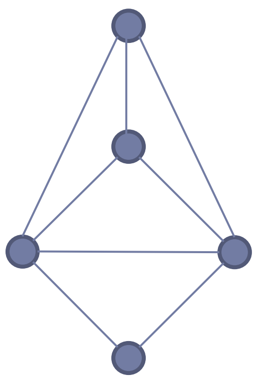
Graf G_1 jest grafem niespójnym i ma trzy składowe spójności.

Graf G_2 jest grafem spójnym.

G_1



G_2



Spójność grafu

Twierdzenie 1.1.

Graf G jest niespójny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego wierzchołków można rozbić na dwa niepuste, rozłączne podzbiory V_1 i V_2 takie, że nie istnieje w G krawędź, której jeden wierzchołek końcowy jest w podzbiorze V_1 a drugi w podzbiorze V_2.

Dowód:

← Przypuśćmy, że istnieje taki podział. Niech a, b będą wierzchołkami takimi, że $a \in V_1$, $b \in V_2$. Droga pomiędzy wierzchołkami a oraz b nie istnieje, bo w przeciwnym razie musiałaby istnieć co najmniej jedna krawędź, której jeden wierzchołek końcowy należałby do V_1 a drugi do V_2. Nie istnieje zatem ścieżka pomiędzy wierzchołkami a i b. Stąd, jeśli istnieje podział, to graf jest niespójny.

→ Niech G będzie grafem niespójnym. Rozważmy wierzchołek a w grafie G. Niech V_1 będzie zbiorem wszystkich wierzchołków połączonych jakąś ścieżką z a. Ponieważ graf G jest niespójny, V_1 nie zawiera wszystkich wierzchołków z G. Pozostałe wierzchołki będą tworzyć niepusty zbiór V_2. Żaden z wierzchołków zbioru V_1 nie łączy się krawędzią z żadnym wierzchołkiem ze zbioru V_2. Otrzymamy zatem żądany podział. □

Fakty o stopniach wierzchołków grafów

Rozpatrzmy graf G=(V,E) o n wierzchołkach i m krawędziach.

Pytanie: Ile jest równa suma stopni wierzchołków grafu G?

Ponieważ każdą krawędź uwzględnia się przy obliczaniu stopni dwóch wierzchołków, więc suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie G jest równa podwojonej liczbie krawędzi grafu G, tzn.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Twierdzenie 1.2.

Liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest w dowolnym grafie zawsze parzysta.

Dowód:

Rozpatrzmy oddzielnie wierzchołki o nieparzystych i parzystych stopniach, wtedy:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v\, st.parz.} d(v) + \sum_{v\, st.niep.} d(v)$$

Ponieważ lewa strona równania jest parzysta i pierwsze wyrażenie po prawej stronie równania jest parzyste, drugie wyrażenie musi być również parzyste. □

Fakty o stopniach wierzchołków digrafów

Wierzchołek digrafu nazywamy izolowanym, jeśli jego stopnie wejściowy i wyjściowy są równe zeru.

Wierzchołek v digrafu nazywamy wiszącym jeśli $d^{-}(v) = d^{+}(v) = 1$

Własność 1. 1.

W digrafie D(V,U), |U| = m suma wejściowych stopni wierzchołków jest równa sumie stopni wyjściowych i jest równa liczbie łuków.

Dowód:

Łuk skierowany od wierzchołka u do v zwiększa o jeden stopień wyjściowy wierzchołka u i stopień wejściowy wierzchołka v. Ponieważ liczba łuków wynosi m, to:

$$\sum_{v \in V} d^{-}(v) = \sum_{v \in V} d^{+}(v) = m$$

□

Spójność grafu a stopnie jego wierzchołków

Twierdzenie 1.3.

Jeśli graf (spójny, niespójny) ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, to musi istnieć ścieżka łącząca te wierzchołki.

Dowód:

Niech G będzie grafem, który ma dokładnie dwa wierzchołki v_1, v_2 o nieparzystym stopniu. Z twierdzenia 2. muszą one należeć do jednej składowej spójności, bo żaden graf, czyli również żadna składowa grafu nie może zawierać nieparzystej liczby wierzchołków nieparzystego stopnia. Dlatego musi istnieć ścieżka pomiędzy v_1 i v_2.

□

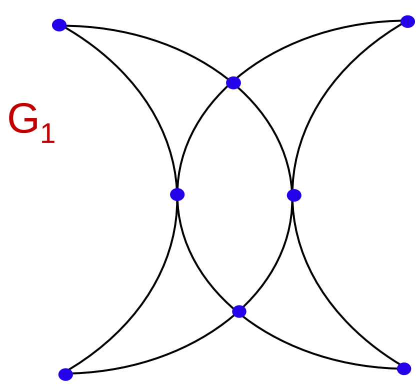
Grafy Eulera

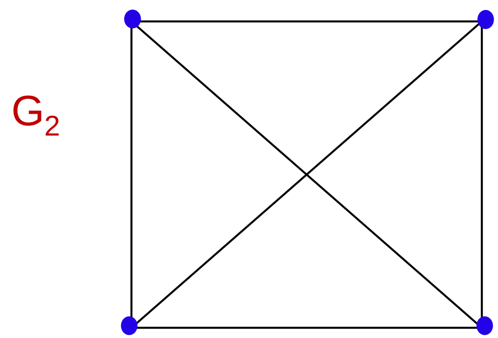
Cyklem Eulera nazywamy drogę zamkniętą przechodzącą przez każdą krawędź dokładnie raz.

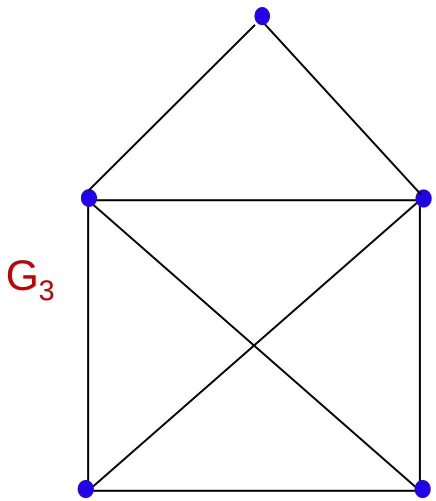
Graf, który składa się z cyklu Eulera i nie zawiera wierzchołków izolowanych nazywamy grafem Eulera. Graf Eulera jest zatem grafem spójnym.

Drogą Eulera nazywamy drogę (niekoniecznie zamkniętą) przechodzącą przez każdą krawędź dokładnie raz.

Pytanie: Który z poniższych grafów jest grafem Eulera, a który ma drogę Eulera?







Rozwiązanie zagadki Eulera

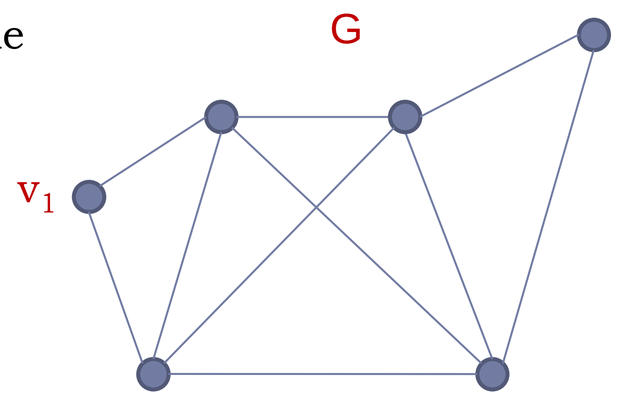
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

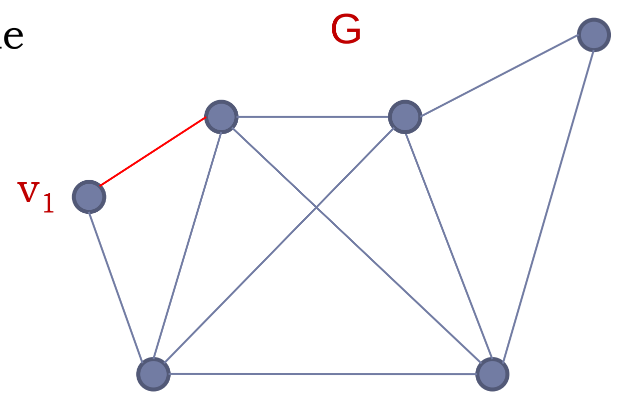
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

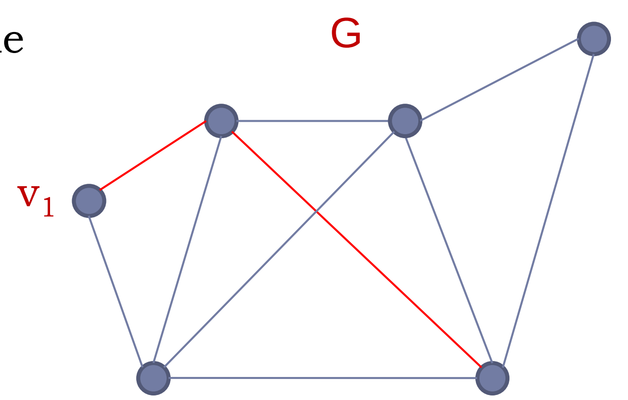
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

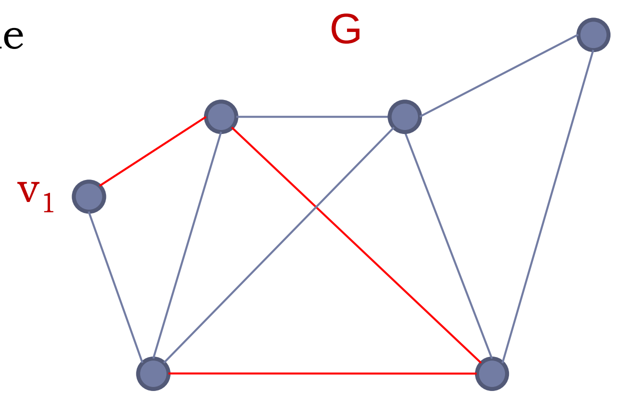
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

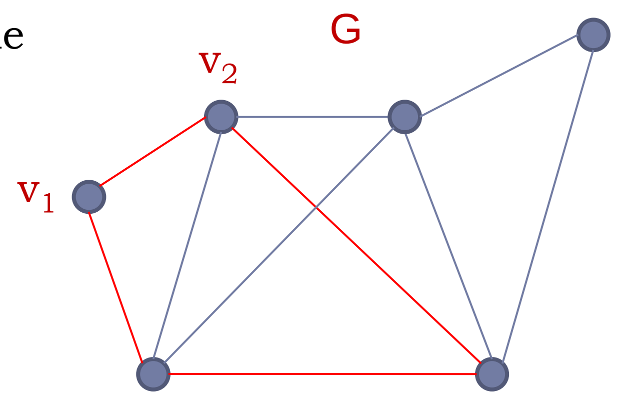
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

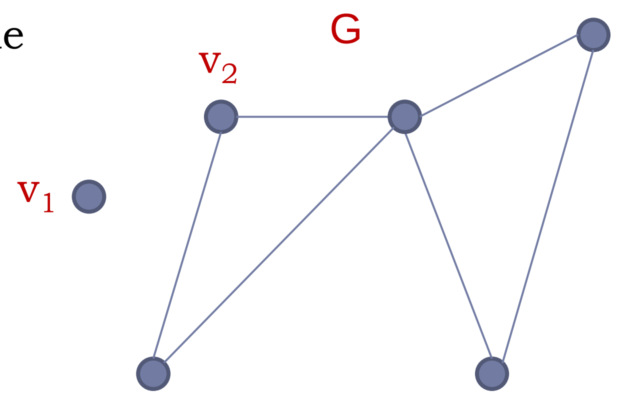
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

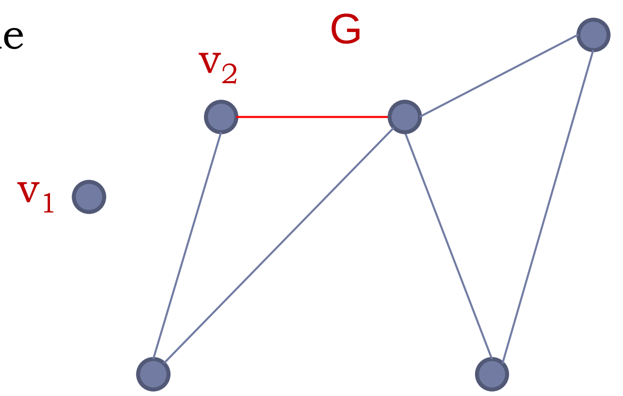
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



□

Grafy Eulera

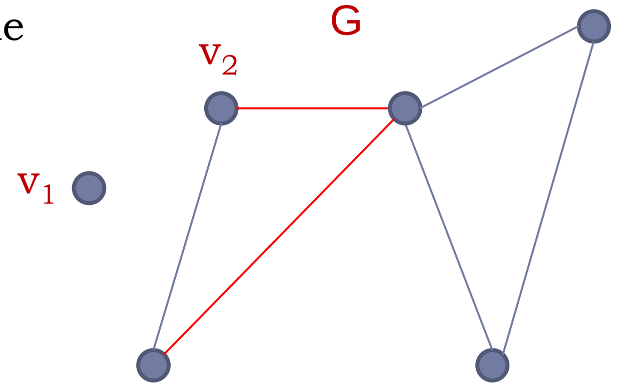
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



□

Grafy Eulera

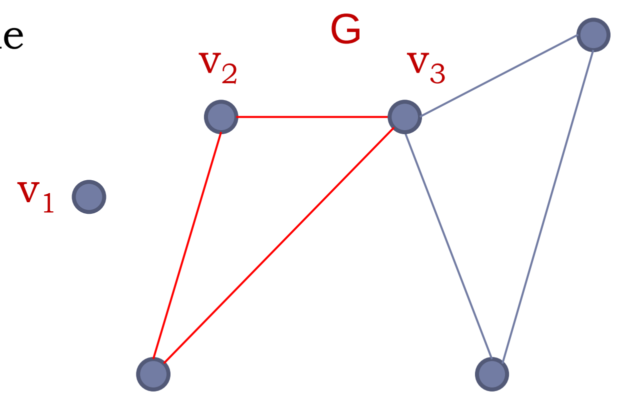
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



□

Grafy Eulera

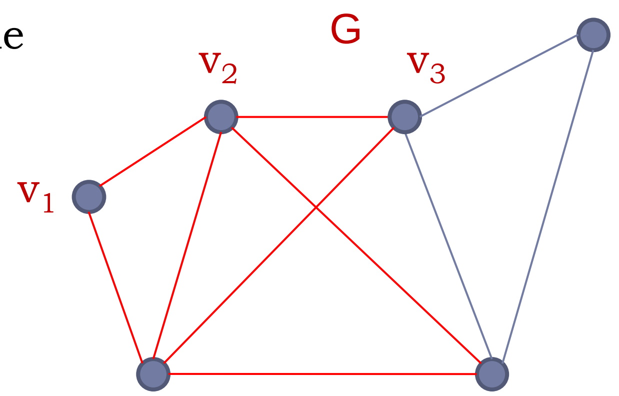
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

$\rightarrow$ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

$\leftarrow$ Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

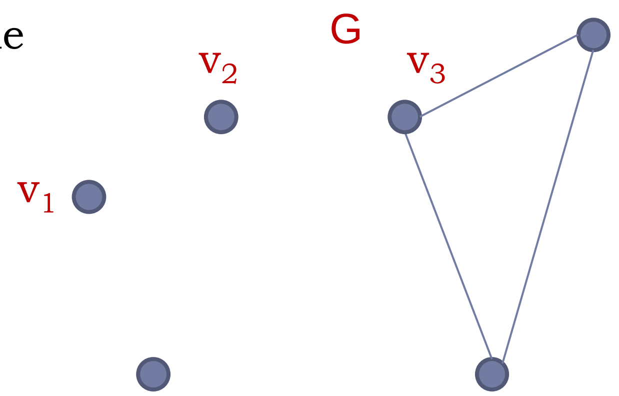
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

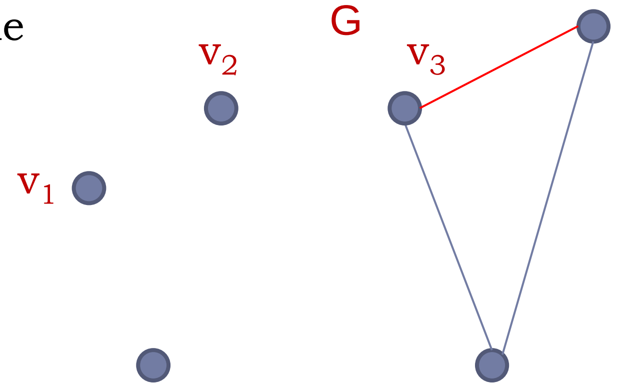
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

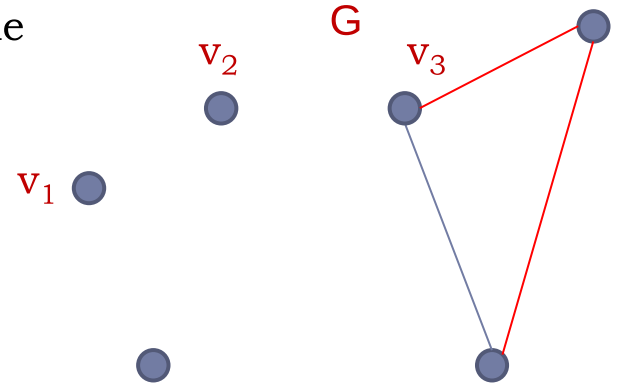
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

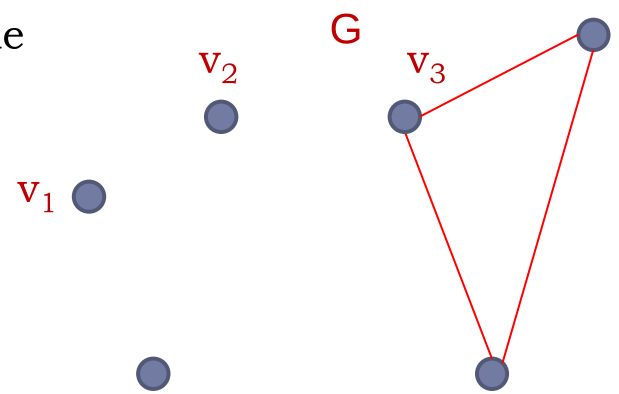
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



Grafy Eulera

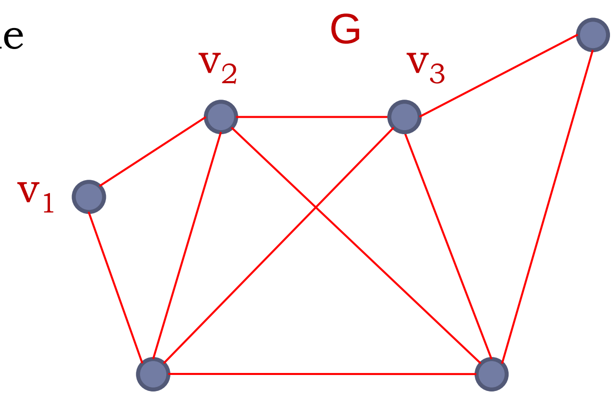
Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

Dowód

→ Wychodząc z dowolnego wierzchołka cyklu Eulera, poruszając się po tym cyklu usuwamy krawędzie, po których przeszliśmy. Gdy dochodzimy do wierzchołka, usuwamy jedną krawędź dochodzącą do niego i jedną z niego wychodzącą. W każdym wypadku to usuwanie spowoduje zmniejszenie stopnia wierzchołka o 2. Ostatecznie zostaną usunięte wszystkie krawędzie i wszystkie wierzchołki będą miały stopień 0. Zatem wszystkie wierzchołki musiały mieć na początku stopień parzysty.

← Konstrukcyjnie



□

Grafy Eulera – opis konstrukcji cyklu Eulera

Twierdzenie 1.4.

Rozważamy graf spójny G. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki G są stopnia parzystego.

← Opis konstrukcji

Niech wszystkie wierzchołki grafu G będą stopnia parzystego.

Konstruujemy drogę zaczynając od dowolnego wierzchołka v_1 i przechodząc przez krawędzie G tak, że żadnej krawędzi nie przechodzimy więcej niż raz. Ponieważ wszystkie wierzchołki są stopnia parzystego musimy dojść ponownie do wierzchołka v_1 otrzymując cykl. Jeśli cykl zawiera wszystkie krawędzie to G jest Eulerowski.

Jeśli nie, korzystamy ze spójności G, która gwarantuje, że musi istnieć wspólny wierzchołek v_2 wyznaczonego cyklu i pozostałego podgrafu grafu G. Usuwamy dotychczas odwiedzone krawędzie. Wszystkie wierzchołki pozostałego podgrafu są stopnia parzystego. Analogicznie konstruujemy nowy cykl od wierzchołka v_2 i dołączamy go do wcześniej znalezionego cyklu w wierzchołku v_2.

Konstrukcję powtarzamy, aż otrzymamy drogę zamkniętą przechodzącą przez wszystkie krawędzie grafu G.

Graf G jest zatem grafem Eulera. □

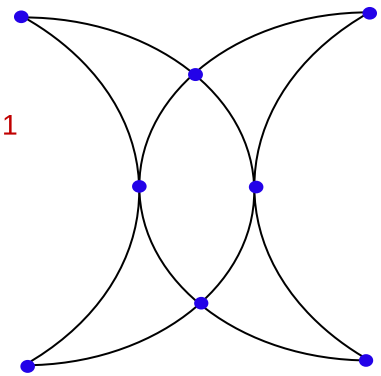
Droga Eulera

Wniosek 1.1:

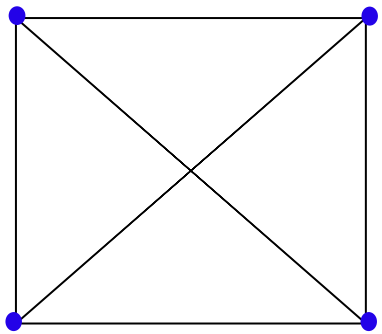
Graf mający drogę Eulera ma albo dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, albo nie ma w ogóle wierzchołków stopnia nieparzystego.

Pytanie: Czy dany graf można narysować bez odrywania ołówka od kartki?

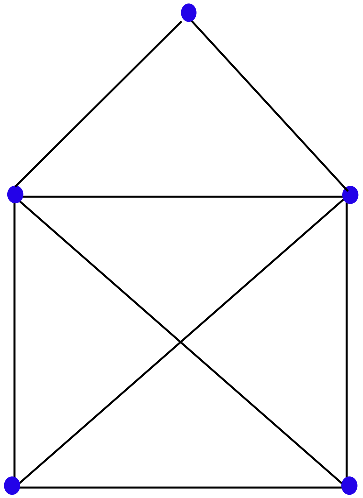
G_1



G_2



G_3



Istnienie grafu o zadanym ciągu stopni wierzchołków

Ciąg liczbowy, który jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego grafu nazywamy ciągiem graficznym.

Pytanie:

Jaki warunek musi spełniać ciąg nieujemnych liczb całkowitych $d_1, d_2, \ldots, d_n$, aby był ciągiem stopni wierzchołków pewnego grafu?

Warunki konieczne wynikające z dotychczasowych rozważań:

- $d_i \leq n - 1$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$
- $\sum_{i=1}^{n} d_i$ jest liczbą parzystą
- $\sum_{i=1}^{n} d_i \leq n(n-1)$

Nie są to warunki wystarczające, np. dla ciągu 3, 3, 3, 1 nie istnieje graf o takim ciągu stopni wierzchołków.

Istnienie grafu o zadanym ciągu wierzchołków

Twierdzenie 1.5.

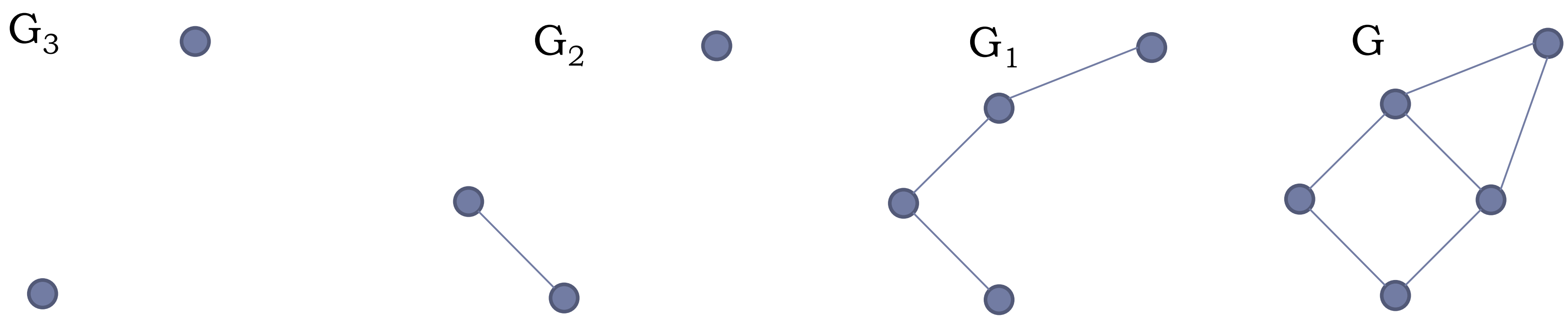
Ciąg $s = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ liczb całkowitych takich, że $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0, n > 2, d_1 \geq 1$ jest graficzny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $s_1 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_n)$ jest graficzny.

Przykład:

Rozważamy ciąg 3, 3, 2, 2, 2. Ciąg ten spełnia warunki konieczne. Mamy d_1=3. Stosujemy wielokrotnie twierdzenie 3.

s_1: 2, 1, 1, 2, a po posortowaniu s1: 2, 2, 1, 1. Teraz d_1 = 2 , s_2: 1, 0, 1 i po przesortowaniu s_2: 1, 1, 0. Teraz d_1 = 1 i s_3: 0, 0.

Otrzymujemy graf złożony z dwóch wierzchołków izolowanych. Konstruujemy kolejne grafy G_4, G_3, G_2, G_1 aż do grafu pierwotnego G:



Algorytm testowania czy ciąg jest graficzny

Dane:

Ciąg liczb n nieujemnych $s = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$

Wynik:

Odpowiedź na pytanie, czy ciąg s jest graficzny.

Należy sprawdzić najpierw warunki konieczne, aby uniknąć niepotrzebnych obliczeń.

Algorytm:

1. Posortuj ciąg *s* nierosnąco.
2. Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe zeru, to ciąg jest graficzny (czyli po posortowaniu d_1 jest równe 0)
3. Jeżeli w ciągu *s* począwszy od drugiego elementu jest co najmniej d_1 elementów o wartościach dodatnich, to odejmij 1 od d_1 elementów ciągu począwszy od d_2, podstaw 0 do d_1 i wróć do kroku 1.
4. Jeżeli w ciągu nie ma wystarczającej liczby elementów dodatnich to znaczy, że ciąg *s* nie jest graficzny.

Uwaga: Aby zbudować graf należy wierzchołek o maksymalnym stopniu w danej iteracji łączyć z wierzchołkami, w których zmniejszaliśmy stopień o jeden.

Istnienie grafu o zadanym ciągu wierzchołków inne kryterium

Twierdzenie 1.6. (P. Erdos, T. Gallai 1960)

Ciąg liczb naturalnych $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, jest graficzny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \text{ jest liczbą parzystą,}$$

oraz dla każdej liczby całkowitej $1 \leq k \leq n$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}.$$

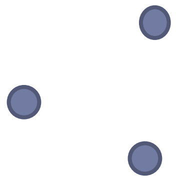
Przykład: Rozważymy ciąg liczb 5, 5, 5, 5, 3, 3. Suma wyrazów ciągu jest parzysta. Rozważamy k=1, 2, 3, 4, 5, 6.

np. dla k=1 mamy $\sum_{i=1}^{1} d_i = 5$ oraz $\sum_{i=2}^{6} \min\{k, d_i\} = 5$ nierówność jest spełniona

np. dla k=4 mamy $\sum_{i=1}^{4} d_i = 20$ oraz $\sum_{i=5}^{6} \min\{k, d_i\} = 6$ nierówność nie jest spełniona.

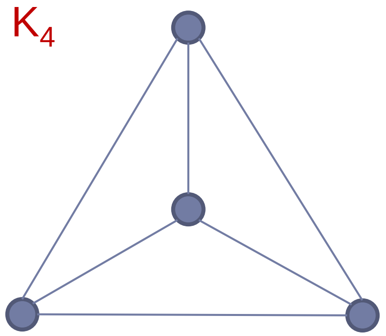
Przykłady rodzin grafów

Graf pusty to graf, którego zbiór krawędzi jest pusty.

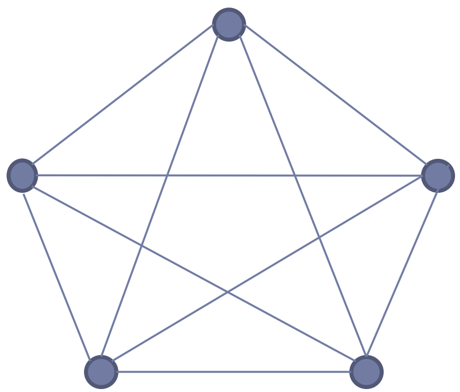


Graf pełny to graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są sąsiednie, ozn. K_n

K_4



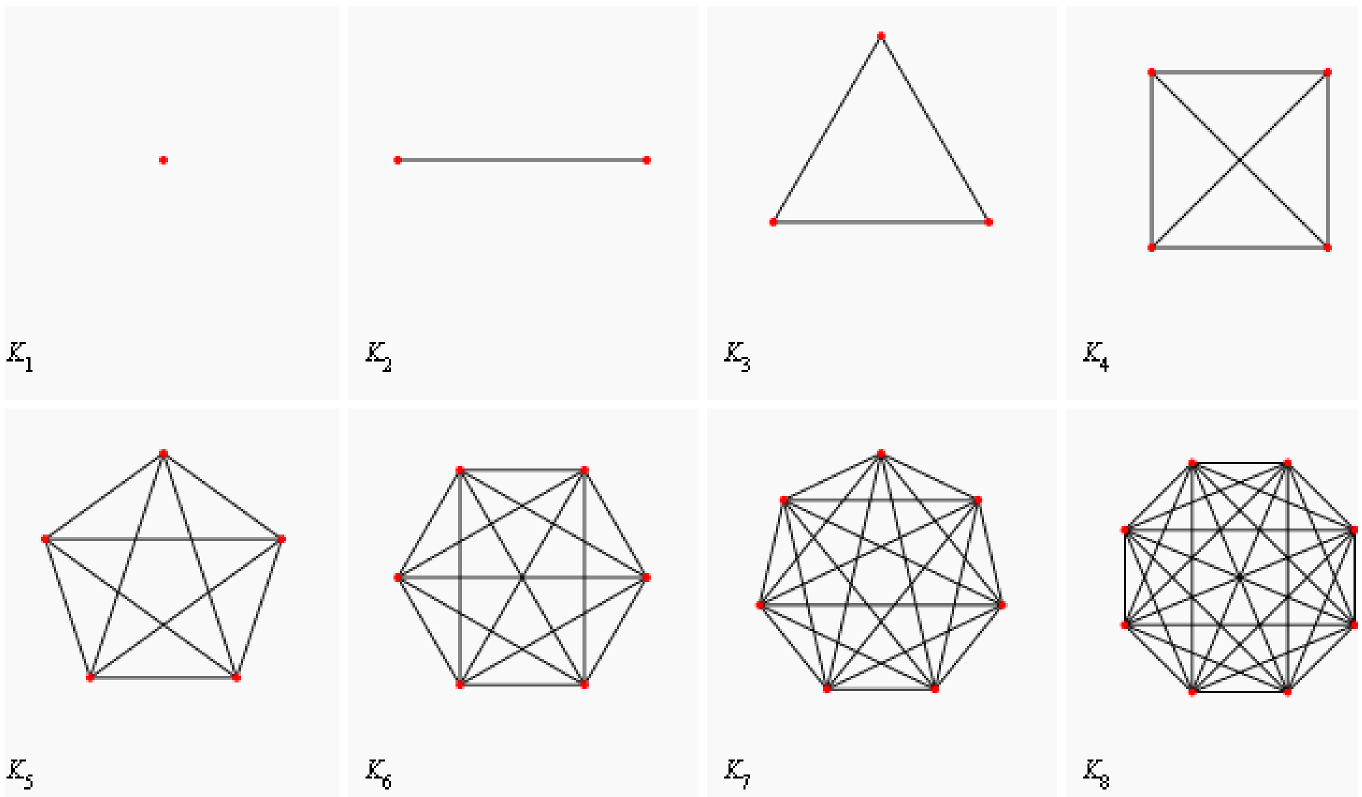
K_5



Pytanie: Ile krawędzi ma graf pełny o n wierzchołkach? Jaki jest stopień każdego wierzchołka w tym grafie?

Rodzina grafów pełnych

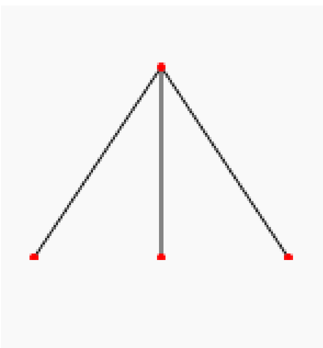
Pytanie: Ile nastąpi uściśnięć rąk wśród n osób jeśli wita się każdy z każdym?

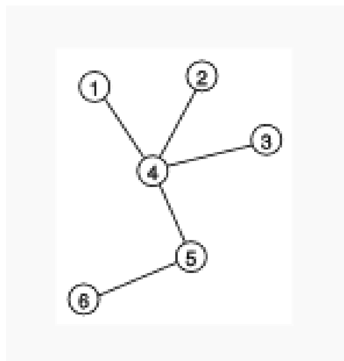


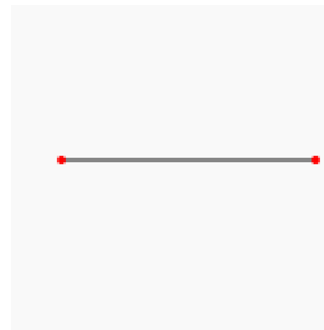
Przykłady grafów

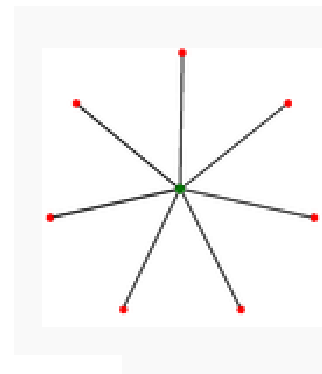
Drzewo to graf, który jest acykliczny i spójny.

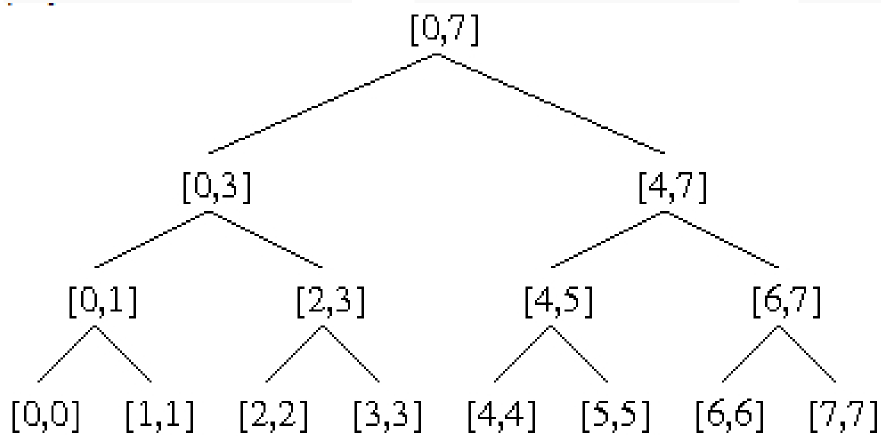
Graf acykliczny, który niekoniecznie jest spójny nazywamy lasem.





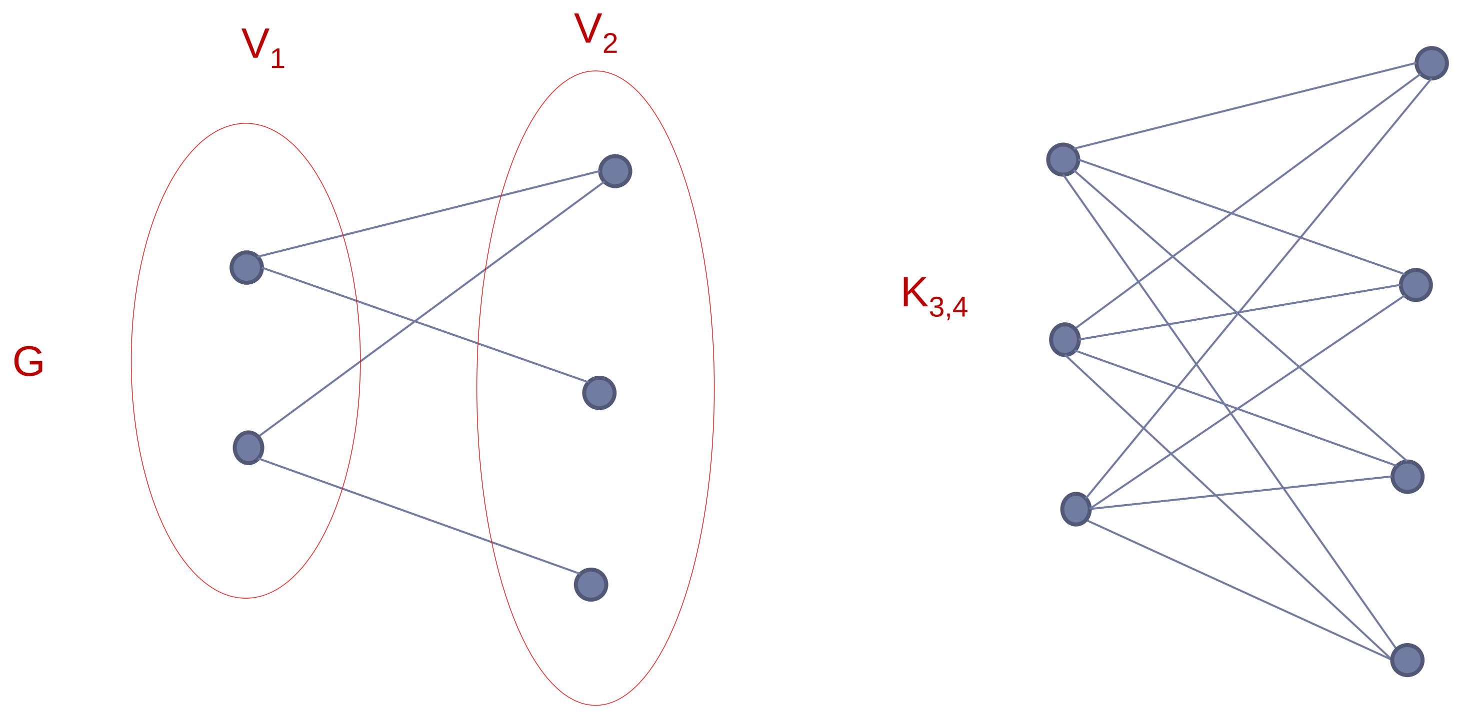






Graf dwudzielny

Graf G=(V, E) nazywamy grafem dwudzielnym jeśli zbiór V jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych V_1 i V_2 takich, że każda krawędź w grafie G łączy wierzchołek ze zbioru V_1 z wierzchołkiem ze zbioru V_2.

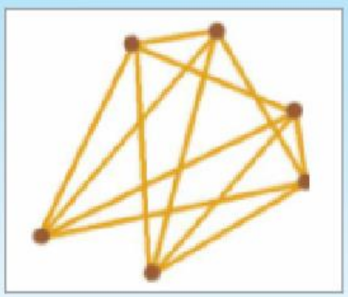


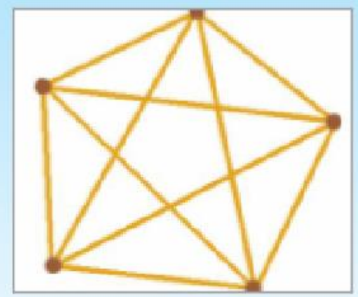
Przykłady rodzin grafów

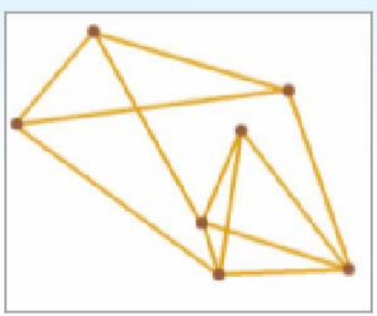
Graf planarny – graf, który można narysować na płaszczyźnie tak, aby jego krawędzie nie przecinały się ze sobą. Graf planarny umieszczony na płaszczyźnie nazywamy płaskim.

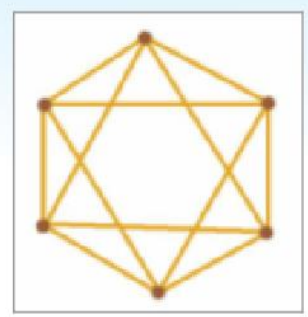
Pytanie:

Które powiązane w węzłach sznurki nie mogą być położone na stole w taki sposób, aby żaden sznurek nie leżał na innym sznurku?

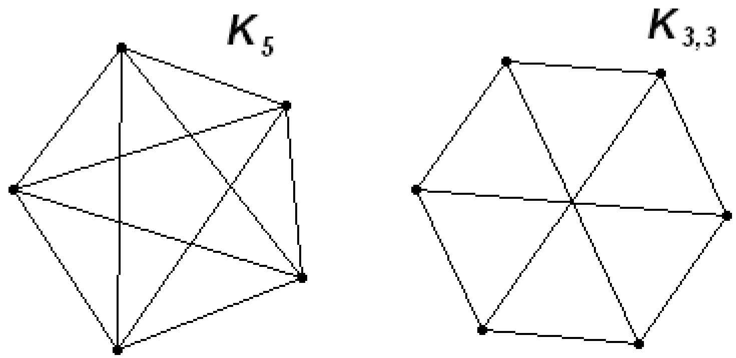








Rodzina grafów planarnych



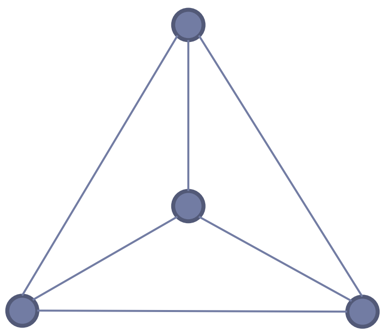
Dwa najmniejsze grafy, które nie są planarne - grafy Kuratowskiego.

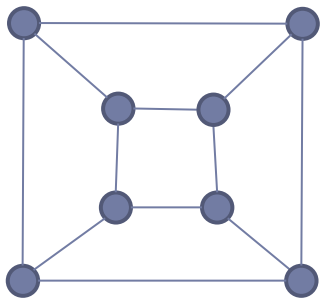
Twierdzenie Kuratowskiego (1930) mówi, że graf skończony jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z grafem K_5 ani z grafem $K_{3,3}$.

Graf homeomorficzny do grafu G otrzymuje się przez "rozerwanie" krawędzi i "wstawienie pomiędzy nie" nowego wierzchołka.

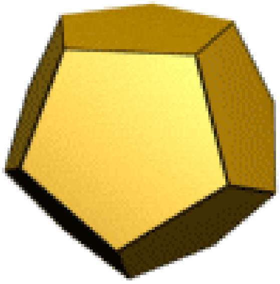
Przykłady grafów

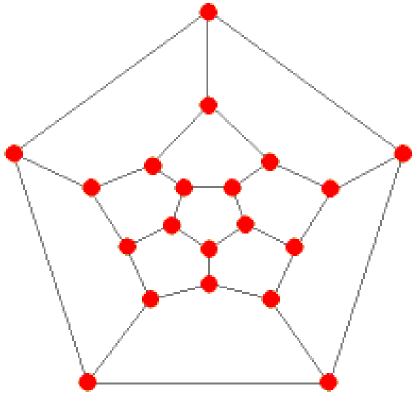
Graf regularny to graf, w którym każdy wierzchołek ma taki sam stopień.





Grafy platońskie to grafy utworzone przez wierzchołki i krawędzie pięciu wielościanów foremnych: czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu.





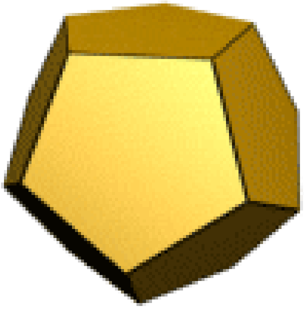
Łamigłówka Hamiltona

Sir Wiliam Rowan Hamilton (1805-1865) – irlandzki matematyk, astronom i fizyk (algebra, mechanika)

1859 rok – dwunastościan foremny (ma 12 ścian i ??? wierzchołków), w którym każdy z wierzchołków oznaczał jedno znane miasto, np. Londyn, NY, Paryż,…

Gra:

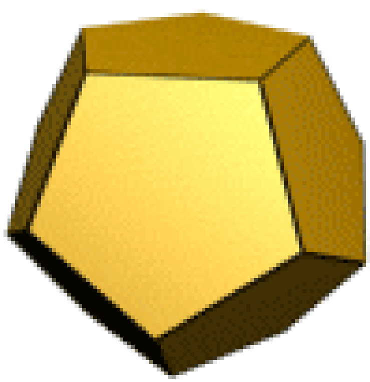
Jeden z graczy oznacza pięć kolejnych miast,
a drugi ma uzupełnić zawierającą je drogę tak,
aby przechodziła przez każde miasto dokładnie raz.



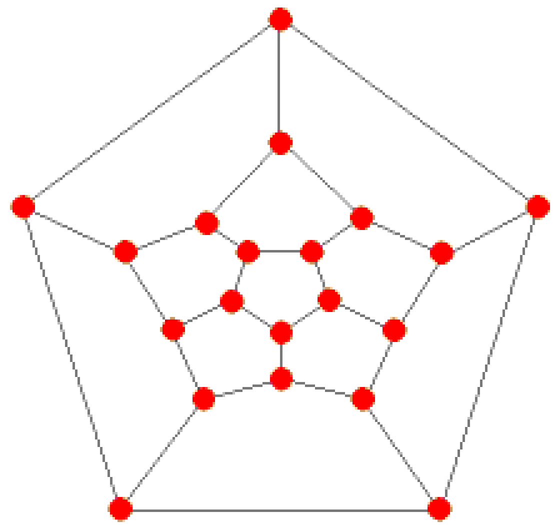
Zagadka Hamiltona w języku grafów

Cykl Hamiltona – cykl przechodzący przez każdy wierzchołek dokładnie raz.

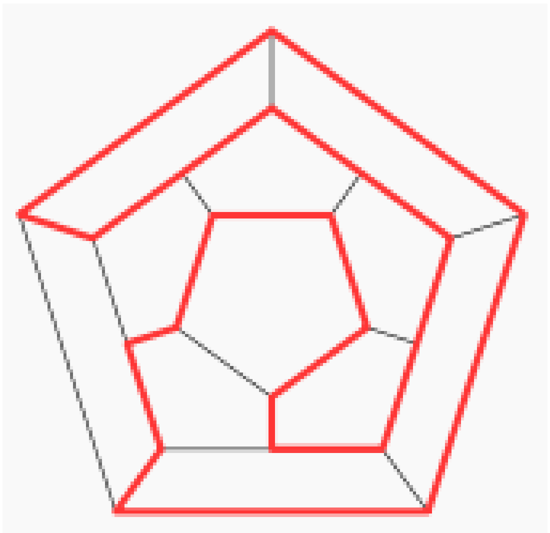
Problem: Znaleźć w grafie cykl Hamiltona. (Stwierdzić, czy graf jest Hamiltonowski)



Dwunastościan foremny



Graf dwunastościanu foremnego



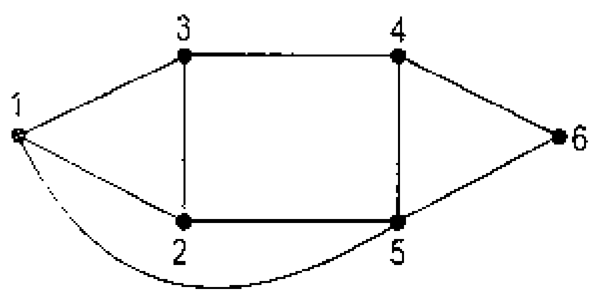
Przykładowy cykl Hamiltona

Macierz incydencji

Klasyczny sposób reprezentacji grafu - macierz **A** o **n** wierszach odpowiadających wierzchołkom i **m** kolumnach odpowiadających krawędziom.

W przypadku **grafu niezorientowanego**, w kolumnie odpowiadającej krawędzi {v, u} zawiera 1 w wierszach odpowiadających v i u oraz zera w pozostałych wierszach.

Przykład:



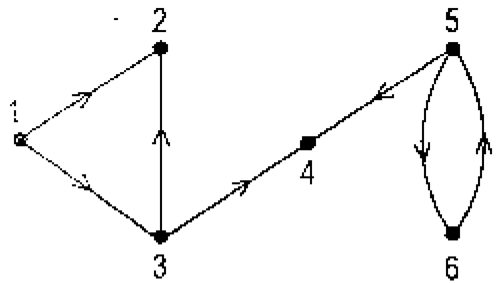
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccc} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,5\} & \{2,3\} & \{2,5\} & \{3,4\} & \{4,5\} & \{4,6\} & \{5,6\} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Macierz incydencji

Klasyczny sposób reprezentacji grafu - macierz **A** o **n** wierszach odpowiadających wierzchołkom i **m** kolumnach odpowiadających krawędziom.

Dla **grafu zorientowanego** kolumna odpowiadająca krawędzi (v, u) zawiera -1 w wierszu odpowiadającym wierzchołkowi v, 1 w wierszu odpowiadającym wierzchołkowi u, a zera w pozostałych wierszach.

Przykład:



$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
\langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \langle 3,2\rangle & \langle 3,4\rangle & \langle 5,4\rangle & \langle 5,6\rangle & \langle 6,5\rangle
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Macierz incydencji

Z algorytmicznego punktu widzenia macierz incydencji jest najgorszym sposobem reprezentacji grafu.

Reprezentacja ta wymaga **nm** miejsc pamięci, większość z tych miejsc jest wypełniona zerami.

Zadanie 1

Dana jest macierz incydencji grafu G o n wierzchołkach i m krawędziach. Ile kroków należy wykonać, aby odpowiedzieć na pytania:

1. Czy istnieje krawędź {v ,u}?
2. Do jakich wierzchołków prowadzą krawędzie z wierzchołka v?

Rozwiązanie:

W najgorszym przypadku należy przeszukać wszystkie kolumny macierzy, a więc potrzeba **m** kroków.

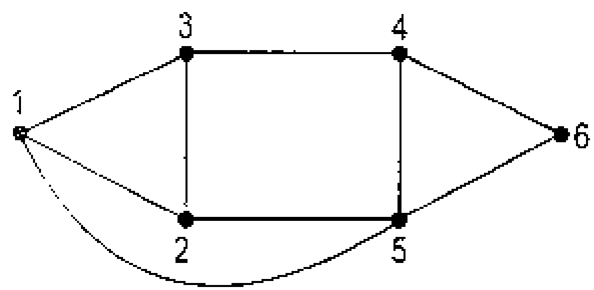
Macierz sąsiedztwa wierzchołków

Macierz **B=[$b_{i,j}$]** o n wierszach i n kolumnach taka, że:

> **$b_{i,j}$ = 1** jeśli istnieje krawędź od i-tego do j-tego wierzchołka
>
> **$b_{i,j}$ = 0** w przeciwnym wypadku

Rozumiemy tu, że krawędź {v, u} grafu niezorientowanego prowadzi zarówno od v do u, jak i od u do v.

Przykład:



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Macierz sąsiedztwa wierzchołków

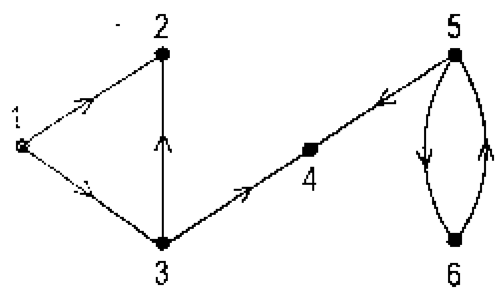
Macierz $\mathbf{B=[b_{i,j}]}$ o n wierszach i n kolumnach taka, że:

$\mathbf{b_{i,j} = 1}$ jeśli istnieje łuk od i-tego do j-tego wierzchołka

$\mathbf{b_{i,j} = 0}$ w przeciwnym wypadku

Rozumiemy tu, że łuk (v, u) grafu niezorientowanego prowadzi od v do u.

Przykład:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Macierz sąsiedztwa wierzchołków

Czy jest to lepszy sposób reprezentacji grafu, niż macierz incydencji?

Zadanie 2

Dana jest macierz sąsiedztwa grafu G o n wierzchołkach i m krawędziach. Ile kroków należy wykonać, aby odpowiedzieć na pytania:

1. Czy istnieje krawędź {v ,u}?
2. Do jakich wierzchołków prowadzą krawędzie z wierzchołka v?

Rozwiązanie:

1. O(1)
2. O(n)

Wadą macierzy sąsiedztwa jest to, że niezależnie od liczby krawędzi zajętość pamięci wynosi $\mathbf{n^2}$. Dla małych n można to zmniejszyć przez pamiętanie całego wiersza lub kolumny w jednym słowie maszynowym.

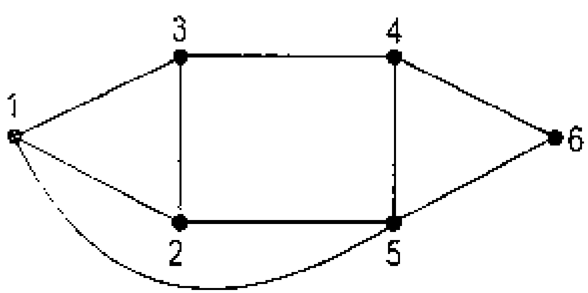
Tablica (lista) par wierzchołków

Graf o n wierzchołkach i m krawędziach jest reprezentowany przez tablicę T o m wierszach i dwóch kolumnach T[k,1] zawiera wierzchołek początkowy, a T[k,2] wierzchołek końcowy krawędzi k.

Pamiętamy, że krawędź {v, u} grafu niezorientowanego prowadzi zarówno od v do u, jak i od u do v.

Zamiast tablicy można rozważać analogicznie zdefiniowaną listę o elementach będących rekordami danych

Przykład:



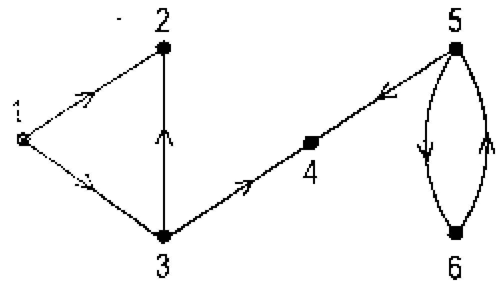
1	2
1	3
1	5
2	3
2	5
3	4
4	5
4	6
5	6

Tablica (lista) par wierzchołków

Graf o n wierzchołkach i m krawędziach jest reprezentowany przez tablicę T o m wierszach i dwóch kolumnach T[k,1] zawiera wierzchołek początkowy, a T[k,2] wierzchołek końcowy krawędzi k.

Zamiast tablicy można rozważać analogicznie zdefiniowaną listę o elementach będących rekordami danych

Przykład:



1	2
1	3
3	2
3	4
5	4
5	6
6	5

Tablica (lista) par wierzchołków

Przy tej reprezentacji zajętość pamięci wynosi **2m.**

Zadanie 3.

Dana jest tablica par wierzchołków grafu G o n wierzchołkach i m krawędziach. Ile kroków należy wykonać, aby odpowiedzieć na pytania:

1. Czy istnieje krawędź {v, u}?
2. Do jakich wierzchołków prowadzą krawędzie z wierzchołka v?

Rozwiązanie:

1. O(m)
2. O(m)

Pytanie: Jak zmniejszyć liczbę kroków w zadaniu 3.?

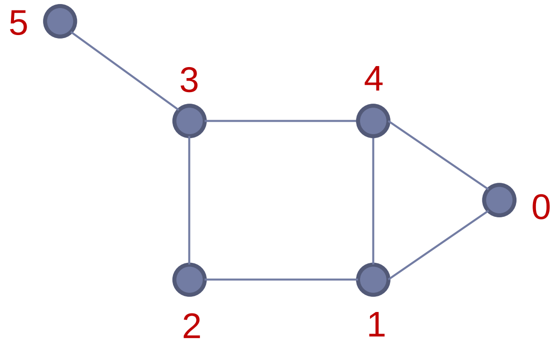
Liczbę kroków można znacznie poprawić przez uporządkowanie zbioru par leksykograficznie i stosowanie przeszukiwania binarnego.

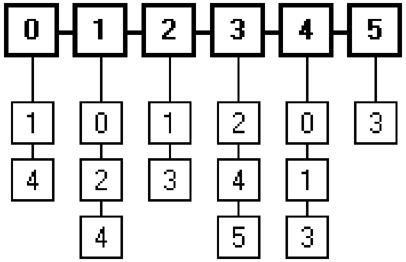
O(log m)

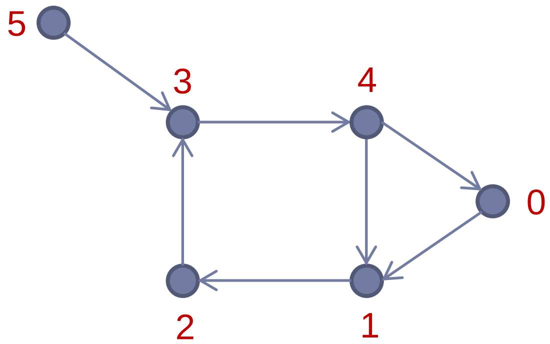
Listy incydencji (sąsiedztwa)

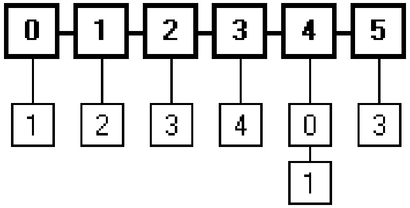
Struktura ta zawiera dla każdego wierzchołka $v \in V$ listę jego sąsiadów.

W praktyce, każdy element list sąsiadów jest rekordem zawierającym wierzchołek i wskaźnik do następnego rekordu na liście.









Listy incydencji (sąsiedztwa)

Liczba miejsc pamięci potrzebna do reprezentacji grafu przez listy incydencji jest równa **2m+n**.

Zadanie 4.

Dana jest lista incydencji grafu G o n wierzchołkach i m krawędziach. Ile kroków należy wykonać, aby:

1. Usunąć krawędź {v,u}?
2. Dołożyć krawędź {v,u}?

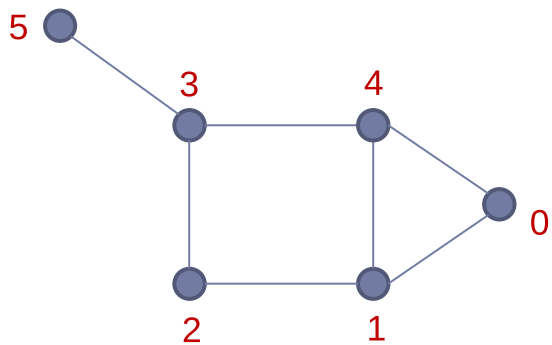
Rozwiązanie:

1. O(deg(v))
2. O(1)

Dla grafu niezorientowanego każda krawędź {v, u} jest reprezentowana dwukrotnie – w liście dowiązanej do wierzchołka v i w liście dowiązanej do wierzchołka u.

Zakładamy wtedy, że listy są dwukierunkowe, a element na liście sąsiadów wierzchołka v zawierający wierzchołek u wskazuje również na element v na liście sąsiadów wierzchołka u. Usuwając pewien element z listy, łatwo można usunąć drugie jego wystąpienie.

Dwie tablice (listy)



0	1	2	3	4	5	6
0	2	5	7	10	13	13

1	4	0	2	4	1	3	2	4	5	0	1	3	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Dwie tablice (listy)

Dwie tablice są pewną odmianą list sąsiadów. Jeśli przeglądanie grafu (digrafu) nie jest związane z dołączaniem i usuwaniem krawędzi (łuków), można pozbyć się wskaźników i pamiętać tylko kolejnych sąsiadów.

Dla grafu reprezentacja ta zajmuje **(n+1)+2m** miejsc w pamięci, dla digrafu **(n+1)+m** miejsc.

Zadanie 5.

Dane są dwie tablice grafu G o n wierzchołkach i m krawędziach. Ile kroków należy wykonać, aby:

1. Usunąć krawędź {v,u}?
2. Dołożyć krawędź {v,u}?
3. Przeglądnać wszystkich sąsiadów wierzchołka v?

Rozwiązanie:

1. O(m)
2. O(m)
3. O(deg(v))

Problemy występujące w algorytmach

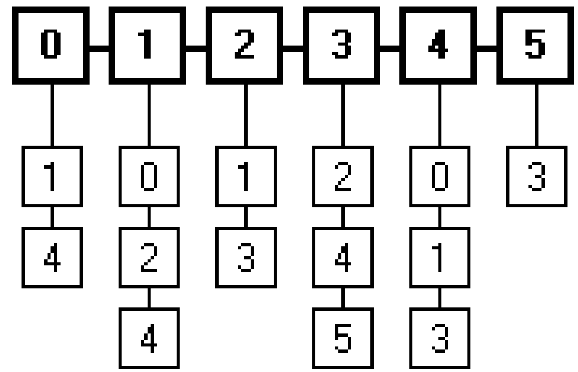
1. Przejrzyj wszystkie krawędzie grafu,
2. Sprawdź, czy krawędź {i, j} należy do grafu G,
3. Usuń z grafu G krawędź {i, j},
4. Wstaw do grafu G krawędź {i, j}.

Jaką reprezentację grafu wybrać?

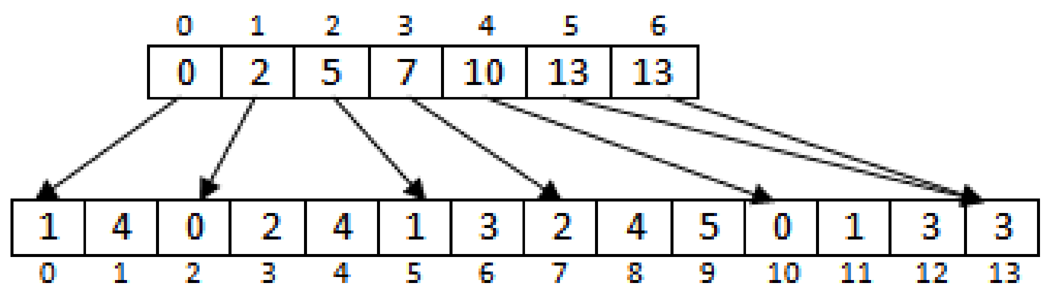
Nie ma jednaj, bezwzględnie najlepszej struktury reprezentującej graf (digraf) .

Wybór struktury w konkretnym przypadku zależy od:

- liczby wierzchołków,
- liczby krawędzi,
- stosowanych algorytmów,
- języka programowania.



$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Przykłady zastosowań grafów

- Instalowanie kamer o jak najmniejszym koszcie, oświetlających wybrany obszar – minimalnego pokrycie wierzchołkowe
- Budowa dróg między miastami o jak najmniejszym koszcie całkowitym inwestycji – minimalne drzewo rozpinające grafu
- Ustalanie kolejności czynności możliwych do wykonania, np. przy produkcji – sortowanie topologiczne
- Sortowanie elementów - sortowanie na drzewie
- Przepływnie pakietów informacji w sieci Internet - przepływy w sieciach
- Ważne osoby w grupie - centrum w grafie
- Rozmieszczenie instytucji w miastach – kolorowanie grafu
- Kojarzenie małżeństw – pełne skojarzenie grafu dwudzielnego
- Sieć radiowa – kolorowanie grafu
- Serwis gwarancyjny – kolorowanie krawędzi
- Obsada stanowisk – skojarzenia w grafie dwudzielnym
- Preferencje rynkowe konsumentów – turnieje, drzewa
- Zagadka o wilku, kozie i kapuście – najtańsza ścieżka

Istnienie grafu o zadanym ciągu wierzchołków

Twierdzenie 3.

Ciąg $s = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ liczb całkowitych takich, że $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0, n > 2, d_1 \geq 1$ jest graficzny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $s_1 = (d_2 - 1,\ d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_n)$ jest graficzny.

Przykład:

Rozważamy ciąg 5, 5, 5, 4, 4, 3. Ciąg ten spełnia warunki konieczne. Mamy d_1=5. Stosujemy wielokrotnie twierdzenie 3.

s_1: 4, 4, 3, 3, 2, d_1 = 4 , s_2: 3, 2, 2, 1, d_1 = 3, s_3: 1, 1, 0, d_1 = 1, s_4: 0, 0.

Otrzymujemy graf złożony z dwóch wierzchołków izolowanych. Konstruujemy kolejne grafy G_4, G_3, G_2, G_1 aż do grafu pierwotnego G: