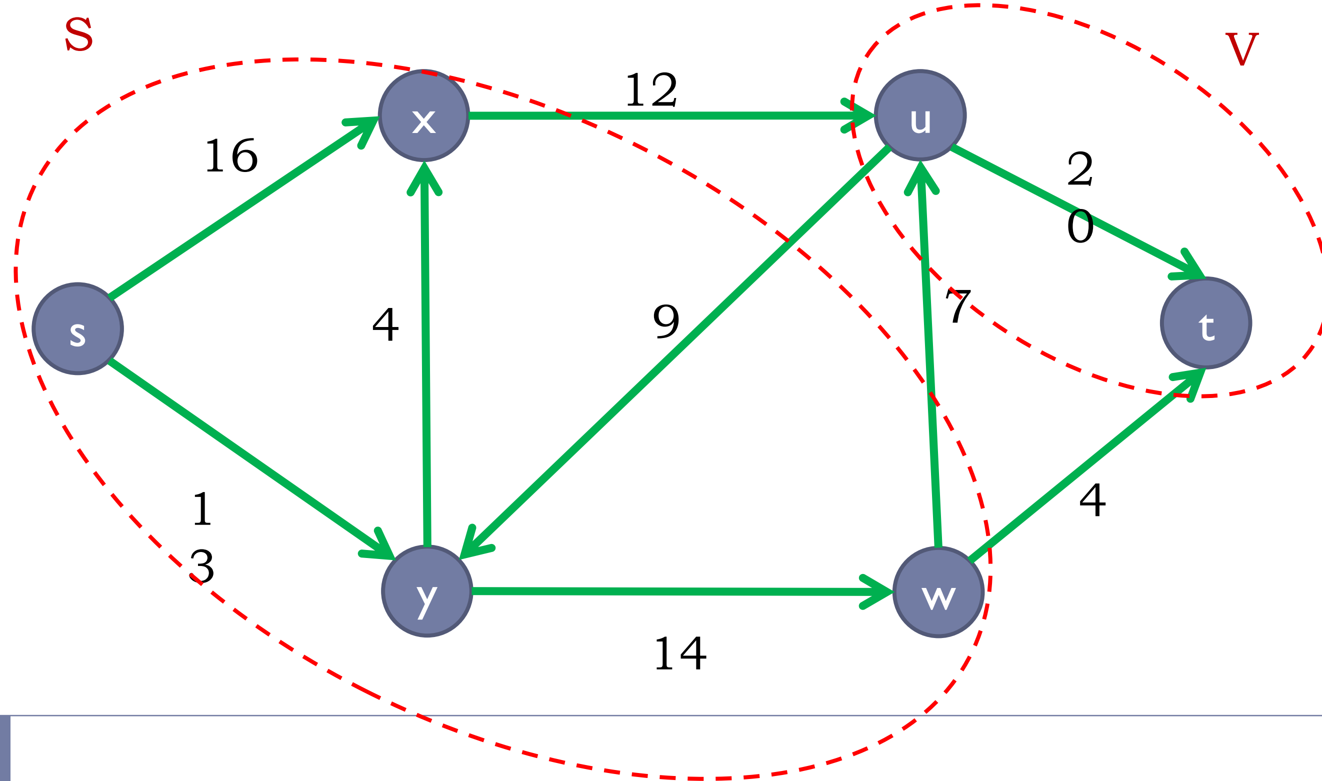


Przepływy w sieciach

dr Anna Beata Kwiatkowska, UMK Toruń

Sieć przepływowa

Przypomnienie definicji sieci.

Definicja 6.3

W grafie G (V,E) (lub digrafie) definiujemy funkcję na jego krawędziach (łukach), określającą wagę każdej z nich:

$$w : E \longrightarrow R$$

Graf (digraf) G z tak określoną funkcją wag nazywamy grafem ważonym (siecią).

Definicja 9.1

Źródłem w sieci zorientowanej nazywamy wierzchołek do którego nie wchodzi żaden łuk. Ujściem nazywamy wierzchołek z którego nie wychodzi żaden łuk.

Definicja 9.2

Siecią przepływową G=(V, E, c) nazywamy sieć zorientowaną, gdzie c jest funkcją wag zwaną przepustowością taką, że dla każdego łuku $(u, v) \in E$, $c(u, v) \geq 0$, z wyróżnionymi dwoma wierzchołkami $s, t \in V$, gdzie s jest źródłem, t jest ujściem i s $\neq$t.

Zastosowania sieci przepływowych

Sieci przepływowe są stosowane do rozwiazywania problemów związanych z przesyłaniem różnego rodzaju towarów, materiałów, informacji, np.:

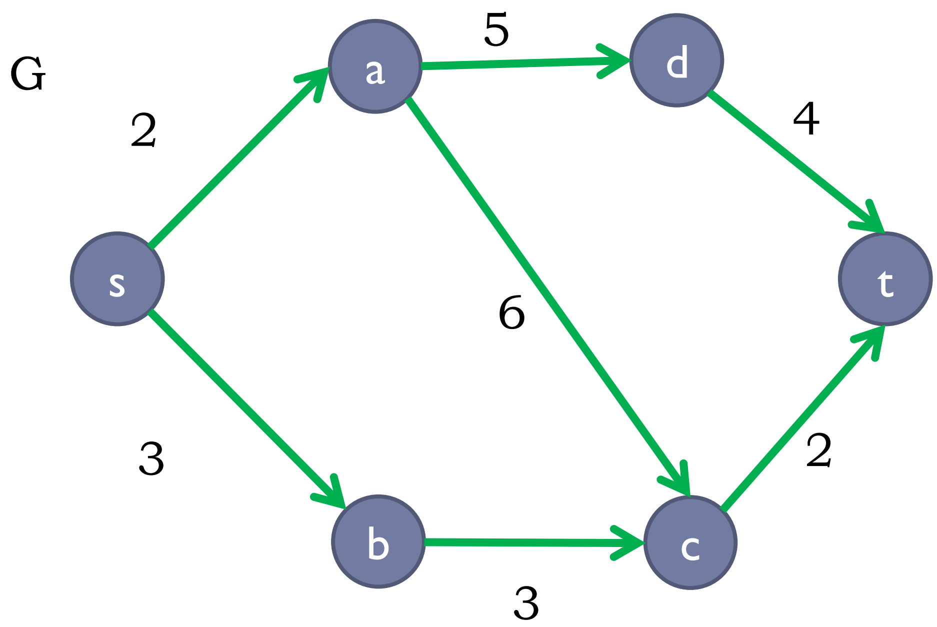
- przepływ wody, ropy czy gazu w sieci rurociągów,
- przepływ prądu elektrycznego w sieci elektrycznej,
- przesyłanie informacji kanałami informacyjnymi,
- przewożenie towarów od producentów do odbiorców,
- ruch przesyłek pocztowych z punktów nadania do adresatów,
- przemieszczanie się ludzi z miejsc zamieszkania do miejsc pracy.

Najczęściej napotykane problemy:

1. Problem maksymalizacji wielkości przepływu (poruszającego się w jednostce czasu) ze źródła do ujścia.
2. Problem wyznaczania w sieci najtańszego przepływu o określonej wielkości.

Przykładowa sieć przepływowa

Przykładowa sieć G=(V, E, c) z wyróżnionym źródłem s i ujściem t.



Przepływ w sieciach przepływowych

Definicja 9.2

Przepływem w sieci $G = (V, E, c)$ ze źródłem s i ujściem t nazywamy funkcję $f: E \rightarrow R$ taką, że:

1. $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ dla każdego $(u,v) \in E$,
2. $f(u,v) = -f(v,u)$ dla każdego $(u,v) \in E$,
3. $\sum_{z \in V} f(v,z) - \sum_{u \in V} f(u,v) = 0$ dla każdego $v \in V \backslash \{s,t\}$.

Warunek 1. oznacza, że w każdym łuku sieci przepływ nie może być większy niż przepustowość tego łuku.

Warunek 2. oznacza, że w każdym łuku sieci przepływ w odwrotnym kierunku jest ujemny,

Warunek 3. reprezentuje prawo zachowania przepływu w wierzchołkach sieci. Wynika z niego, że całkowity przepływ wypływający z wierzchołków, które nie są źródłem lub ujściem, jest równy sumie przepływów do nich dopływających.

Zagadnienie maksymalnego przepływu

Definicja 9.3

Wartością przepływu f w sieci $G = (V, E, c)$ ze źródłem s i ujściem t nazywamy wielkość

$$W(f) = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{u \in V} f(u,s)$$

Jest to łączny przepływ opuszczający źródło minus przepływ wchodzący do źródła.

Problem maksymalnego przepływu polega na szukaniu przepływu f w sieci $G = (V, E, c)$ między źródłem s a ujściem t, dla którego wartość W(f) jest największa.

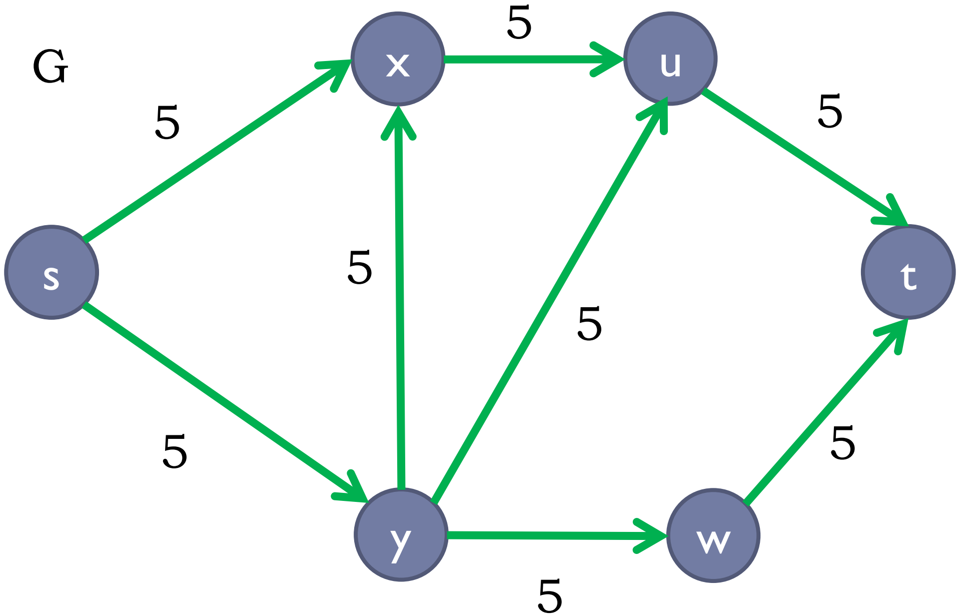
Zastosowania m.in.:

- Ile maksymalnie uda się przesłać przez sieć między daną parą wierzchołków?
- Gdzie jest tzw. „wąskie gardło" uniemożliwiające przesłanie większej ilości towaru?
- Które fragmentu sieci należy zmodernizować, bądź rozbudować, by uzyskać większą przepustowość?

Maksymalny przepływ

Przykład

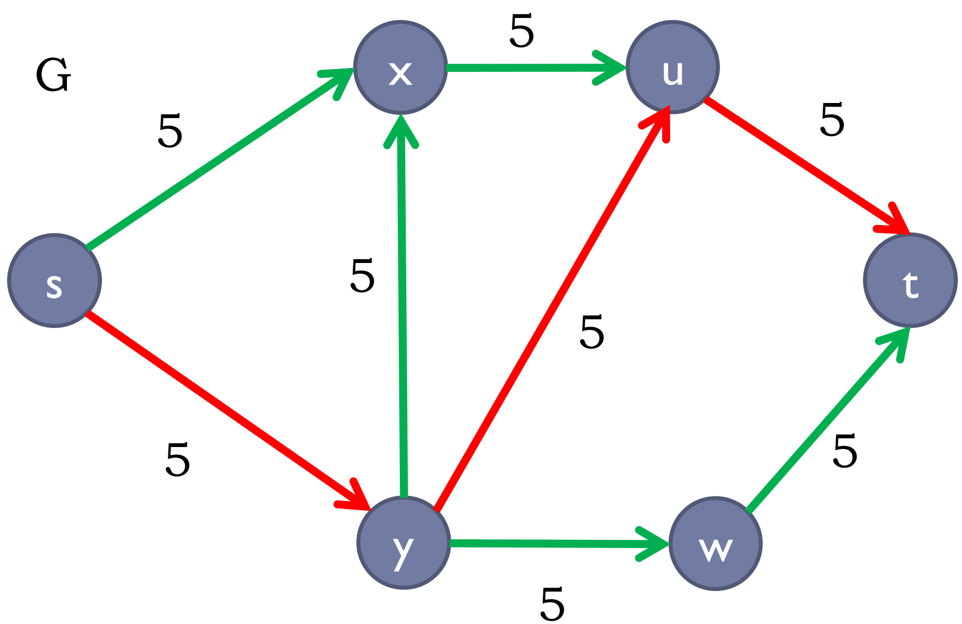
Przepustowość każdego łuku wynosi 5.



Maksymalny przepływ

Przykład

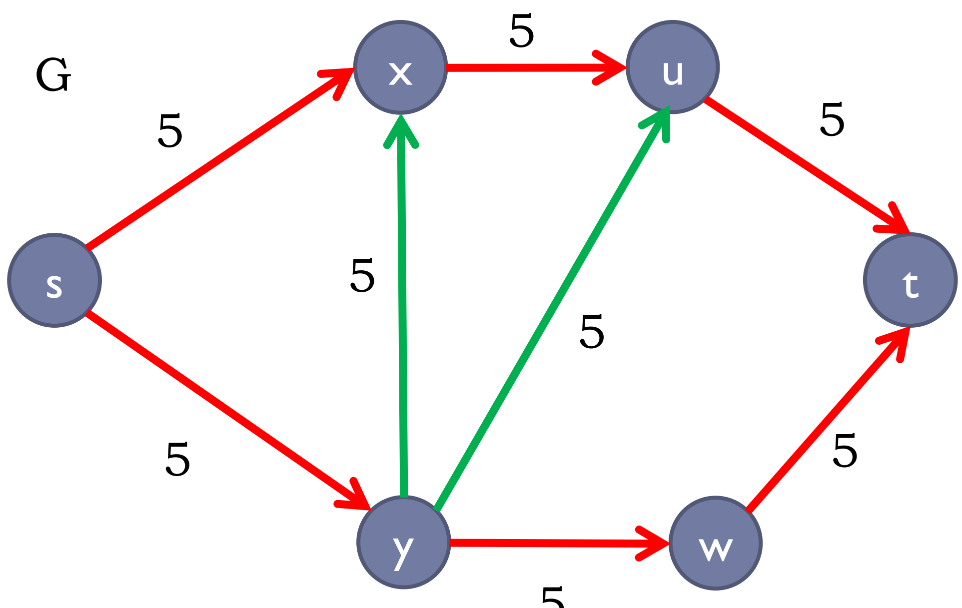
Przepustowość każdego łuku wynosi 5. Przypuśćmy, że przesłaliśmy 5 jednostek towaru z s do y, z y do u, z u do t. Wydaje się, że nie ma już drogi z s do t, po której można powiększyć ten przepływ (kolor czerwony).



Maksymalny przepływ

Przykład

Przepustowość każdego łuku wynosi 5. Przypuśćmy, że przesłaliśmy 5 jednostek towaru z s do y, z y do u, z u do t. Wydaje się, że nie ma już drogi z s do t, po której można powiększyć ten przepływ. Istnieje jednak w tej sieci przepływ z s do t o wartości sumarycznej 10.



Problem maksymalnego przepływu

Rozważamy sieć przepływową o n wierzchołkach i m łukach.

1. Problem maksymalnego przepływu po raz pierwszy został sformułowany i rozwiązany przez Forda i Fulkersona w roku 1956. Bazował na trzech pojęciach: sieci residualne, ścieżki powiększające i przekroje. Wykazano później, że ich algorytm w najgorszym przypadku może prowadzić do rozwiązania optymalnego dopiero po nieskończonej liczbie kroków.
2. Algorytm Edmondsa i Karpa w 1969 roku – poprawka algorytmu Forda-Fulkersona przez zastosowanie przeszukiwania wszerz daje złożoność $O(nm^2)$.
3. Algorytm Dinica w 1970 roku – inne podejście, zastosowano grafy warstwowe i otrzymano złożoność $O(n^2m)$
4. Algorytm Malhotry, Kumara i Maheshwariego w 1978 – bazuje na algorytmie Dinica i jest najprostszym i najbardziej efektywnym w sieciach gęstych.

Przepustowość, sieć residualna, ścieżka powiększająca

Definicja 9.3

Niech dana będzie sieć $G = (V, E, c)$ ze źródłem s i ujściem t oraz f będzie pewnym przepływem w G. Przepustowość residualną c_f obliczamy następująco:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), & \text{jeśli } (u,v) \in E \\ f(v,u), & \text{jeśli } (v,u) \in E \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Definicja 9.4

Siecią residualną sieci G z przepływem f nazywamy sieć G_f, w której dla każdego łuku przepustowość residualna jest dodatnia. Sieć residualna ma takie same własności jak sieć przepływowa.

Definicja 9.5.

Dla danej sieci przepływowej $G = (V, E, c)$ i przepływu f ścieżką powiększającą nazywamy ścieżkę ze źródła do ujścia w sieci residualnej G_f w sieci G.

Przekrój

Definicja 9.6

Przekrój (S,T) w sieci przepływowej $G = (V, E, c)$ to podział zbioru V na zbiory S i $T = V \backslash S$, takie że $s \in S$ i $t \in T$.

Przepustowością przekroju (S,T) jest $c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$

Przekrojem minimalnym w sieci przepływowej nazywamy przekrój, którego przepustowość jest najmniejsza.

Twierdzenie 9.1 (Forda i Fulkerosna)

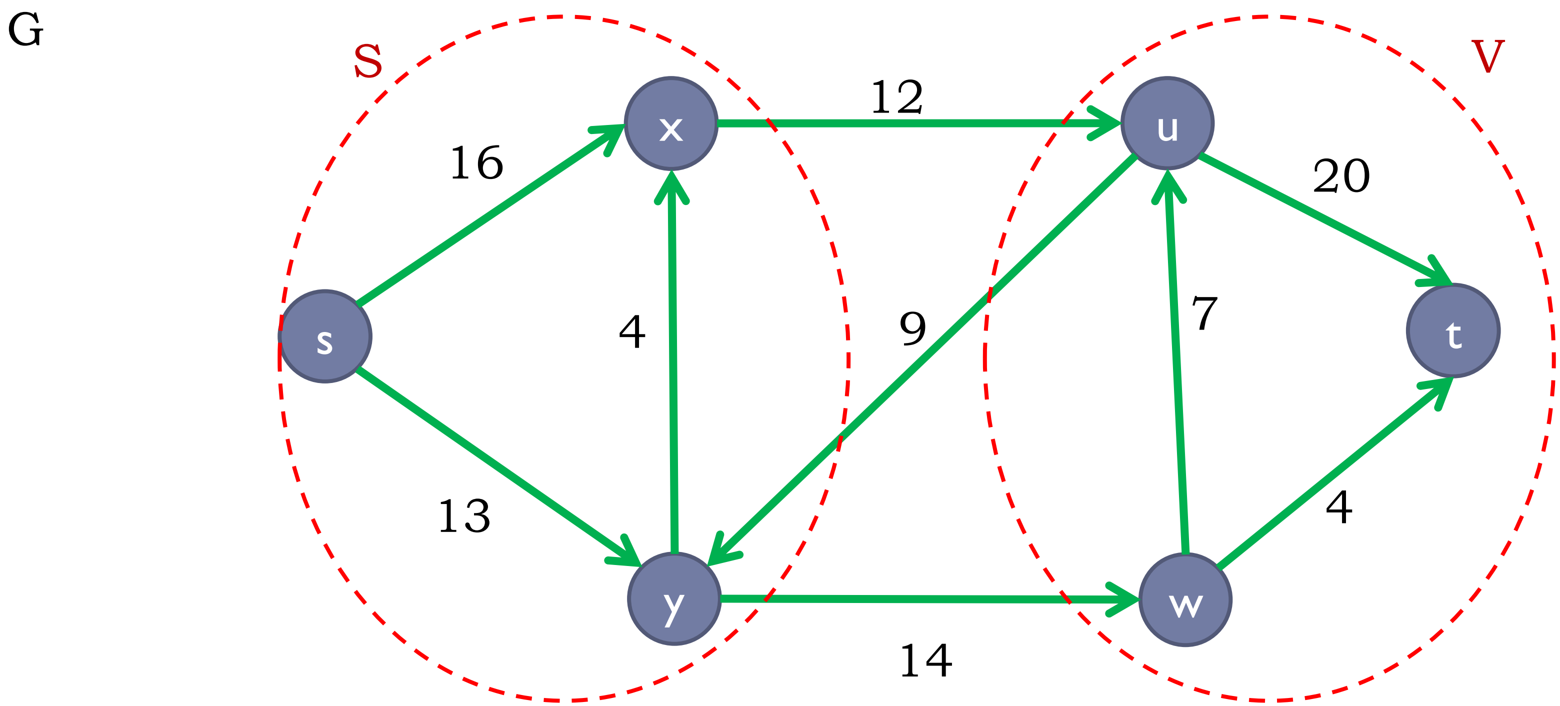
Wartość maksymalna przepływu w sieci $G = (V, E, c)$ jest równa przepustowości minimalnego przekroju pomiędzy źródłem s i ujściem t.

Dowód

Rozważmy dowolny przekrój (S,T). W podgrafie G\(S,T) nie ma drogi pomiędzy wierzchołkami s i t, tak więc każda droga w G pomiędzy s i t musi zawierać co najmniej jeden łuk z (S,T). Zatem każdy przepływ z s do t musi przejść przez jedną lub więcej krawędzi z przekroju (S,T). Wiec całkowita wartość przepływu między wierzchołkami s i t nie może przekroczyć przepustowości przekroju (S,T). Ponieważ zachodzi to dla wszystkich przekrojów dla s i t, wielkość przepływu nie może przekroczyć minimalnej z tych pojemności.

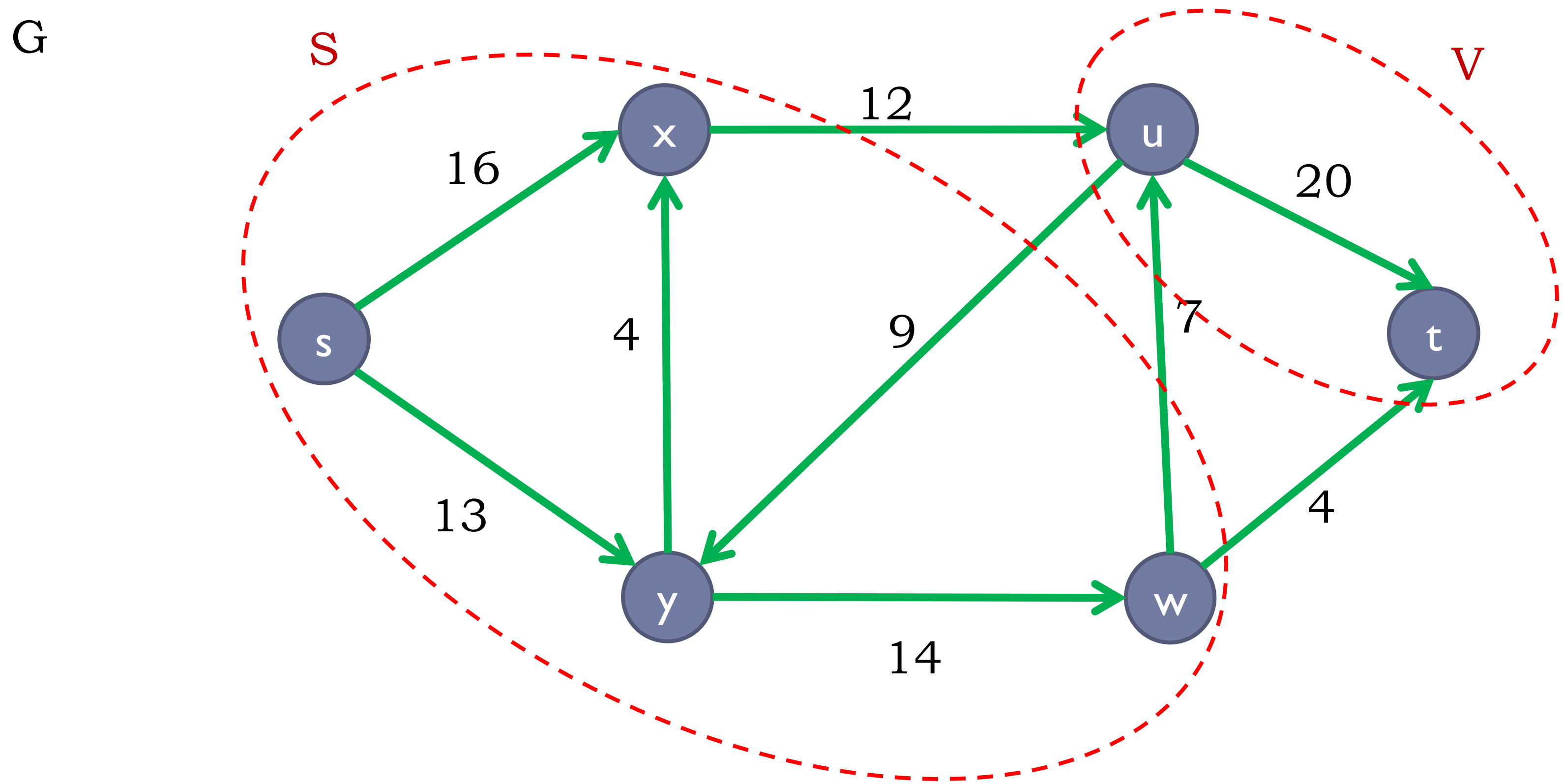
Dowolny przekrój

Przykładowa sieć z przekrojem (S,V), z przepustowością $c(S,T) = 26$. Nie jest to minimalny przekrój.



Minimalny przekrój

Ta sama sieć z przekrojem (S,V), z przepustowością $c(S,T) = 23$. Jest to minimalny przekrój.



Maksymalny przepływ - warunki równoważne

Twierdzenie 9.2

Niech dana będzie sieć $G = (V, E, c)$ ze źródłem s i ujściem t oraz f będzie przepływem w G. Następujące warunki są równoważne:

1. Przepływ f jest maksymalny w sieci G.
2. Sieć residualna G_f nie zawiera ścieżek powiększających.
3. Dla pewnego przekroju (S,T) w sieci G mamy $f = c(S,T)$.

Dowód:

Wynika z poprzednich rozwazań.

Metoda Forda_Fulkersona

Pseudokod algorytmu

Dana jest sieć przepływowa $G = (V, E, c)$ ze źródłem s i ujściem t oraz f oznacza przepływ w G. Początkowa wartość przepływu f jest równa 0.

FORD_FULKERSON (G, s ,t)

1. **for** każda krawędź $(u, v) \in E$ **do** $f(u, v) = 0$
2. **while** istnieje ścieżka powiększająca p z s do t w sieci residualnej G_f

   powiększ wartość przepływu f wzdłuż p o wartość

   $$c_f(p) = \min\{cf(u, v): (u, v)\ jest\ na\ p\}$$

   for każda krawędź (u, v) na p **do**

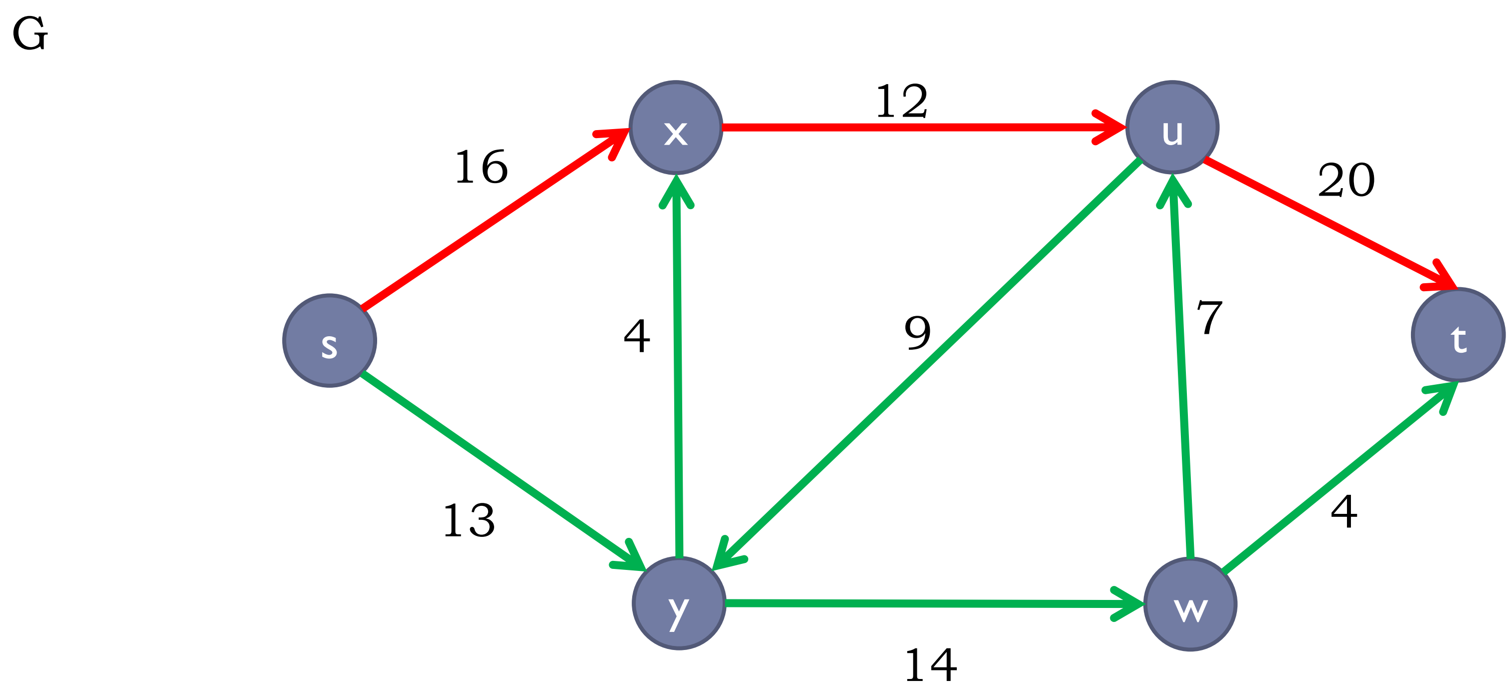
   if $(u, v) \in E$

   $$f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$$

   else $f(v, u) = f(v, u) - c_f(p)$
3. **return** wartość przepływu f

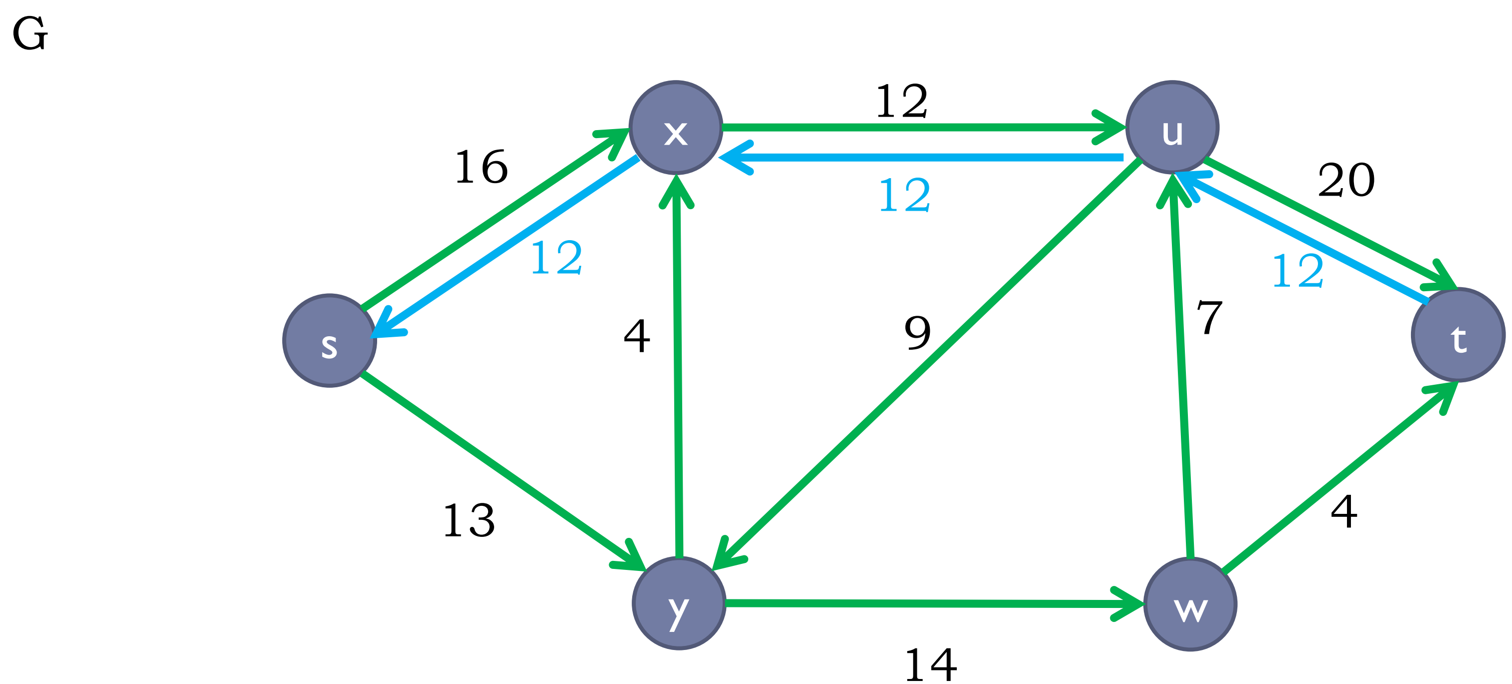
Demonstracja algorytmu Forda-Fulkersona

Znajdujemy dowolną ścieżkę powiększającą p z s do t. Ponieważ $c_f(p)=12$ wartość przepływu zwiększamy o 12, W(f)=12



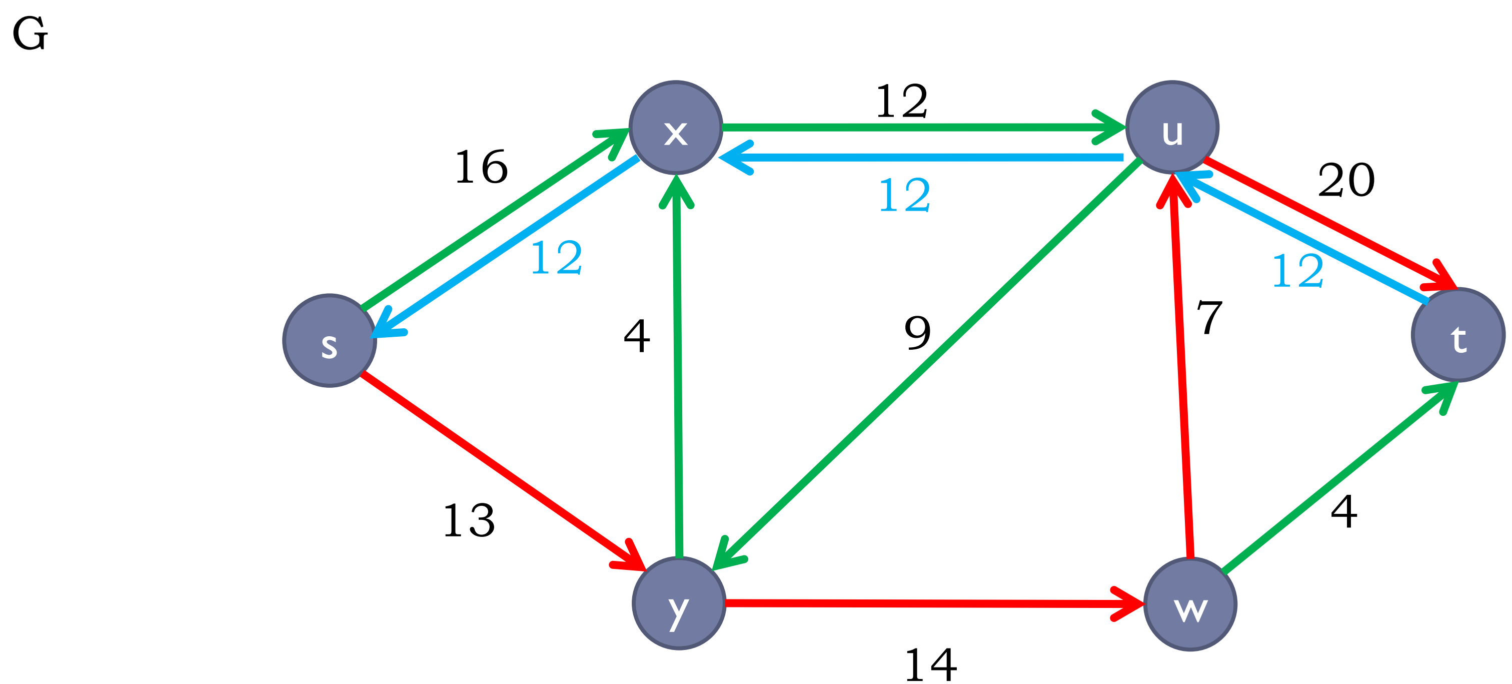
Demonstracja algorytmu Forda-Fulkersona

Tworzymy siec residualną. Wartości zapisane niebieskim kolorem są wykorzystanymi już przepływami na łukach.



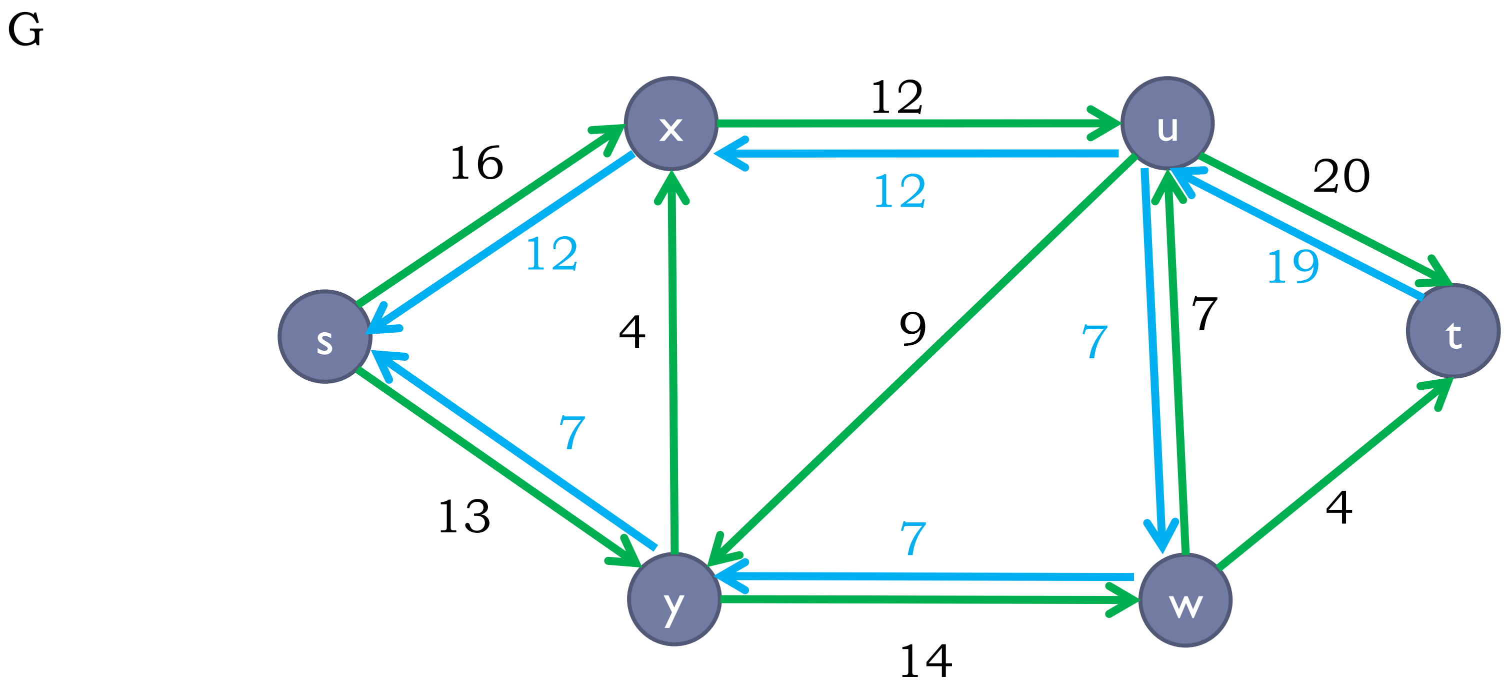
Demonstracja algorytmu Forda-Fulkersona

Szukamy następnej ścieżki powiększającej. Ponieważ $c_f(p)=7$ wartość przepływu zwiększamy o 7, W(f)=19



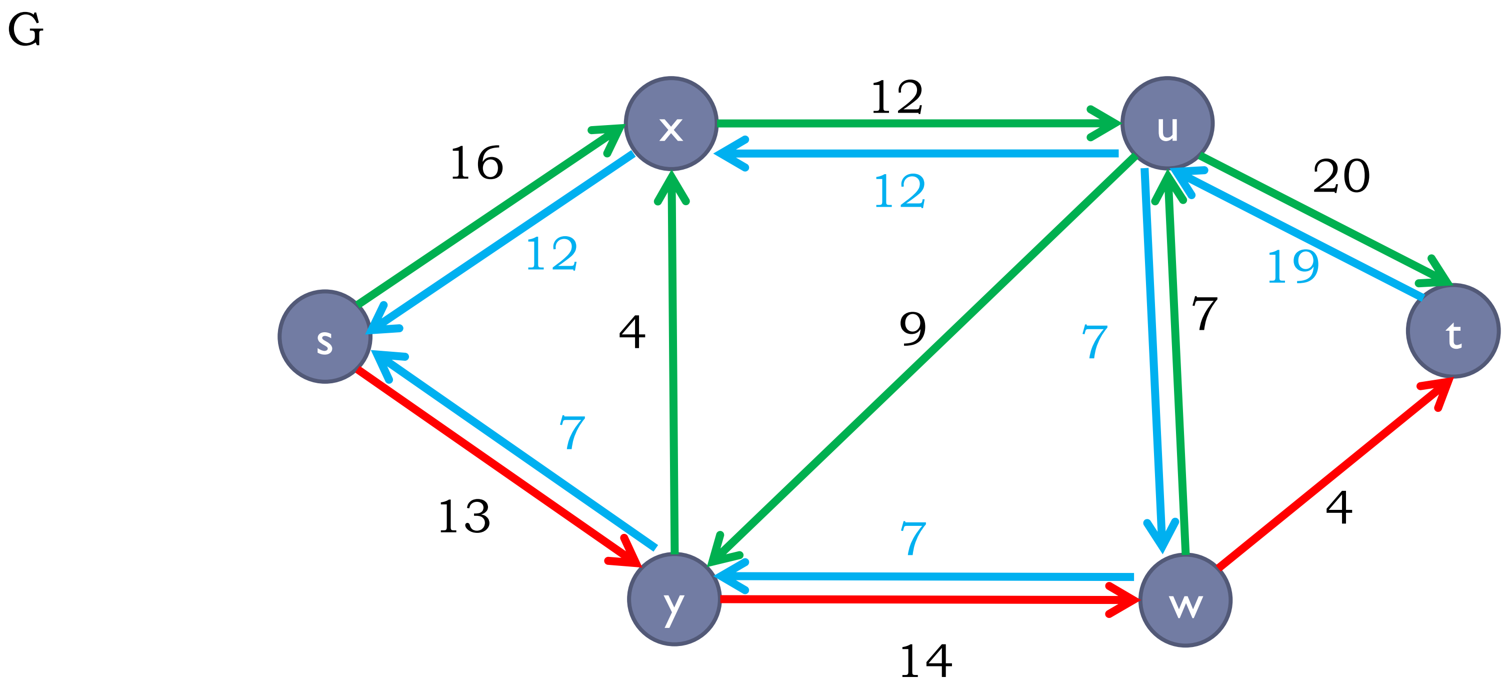
Demonstracja algorytmu Forda-Fulkersona

Aktualizujemy sieć residualną.



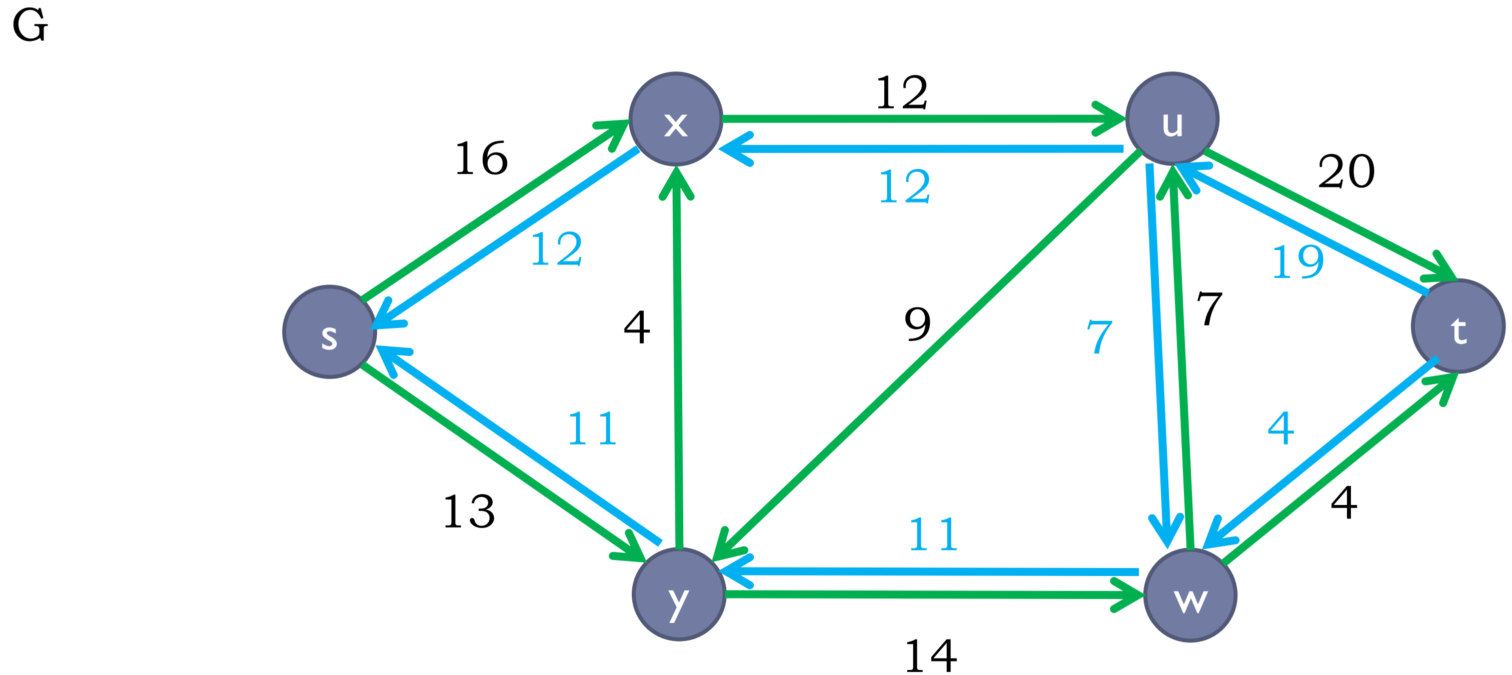
Demonstracja algorytmu Forda-Fulkersona

Szukamy następnej ścieżki powiększającej. Ponieważ $c_f(p)$=4 przepływ zwiększamy o 7, W(f)=23



Demonstracja algorytmu Forda-Fulkersona

Aktualizujemy sieć residualną. W otrzymanej sieci nie ma już ścieżek powiększających. Wartość maksymalnego przepływu W(f)=23.

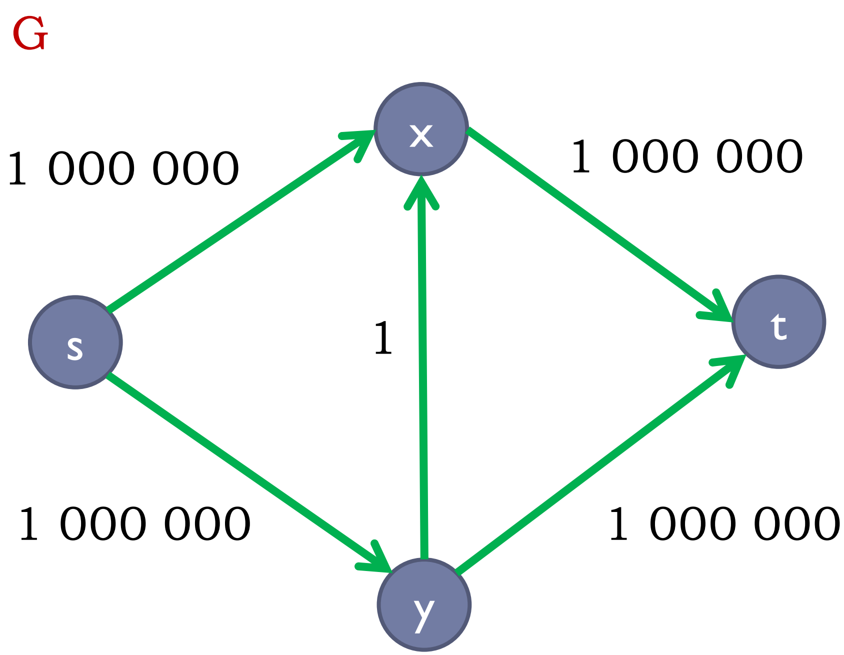


Efektywność algorytmu Forda-Fulkersona

- Jeśli będziemy wybierać ścieżkę powiększająca w dowolny sposób, algorytm Forda-Fulkersona może nawet działać w nieskończoność - wartość przepływu będzie wzrastała, ale nigdy nie osiągnie wartości przepływu maksymalnego. Taka sytuacja może mieć miejsce, wtedy i tylko wtedy gdy przepustowości krawędzi są liczbami niewymiernymi.
- W praktyce jednak problem maksymalnego przepływu jest najczęściej wykonywany dla liczb całkowitych.
- Jeśli f jest maksymalnym przepływem, to liczba iteracji wynosi co najwyżej W(f) (wartość f), ponieważ w każdej iteracji wartość przepływu wzrasta co najmniej o jedną jednostkę. Czas szukania ścieżki residualnej przeszukiwaniem wszerz lub w głąb wynosi O(n+m). Ponieważ łuków w sieci residualnej jest więcej niż wierzchołków, można przyjąć, że to czas O(m).
- Ostatecznie złożoność obliczeniowa algorytmu Forda-Fulkersona wynosi O(mW(f)).

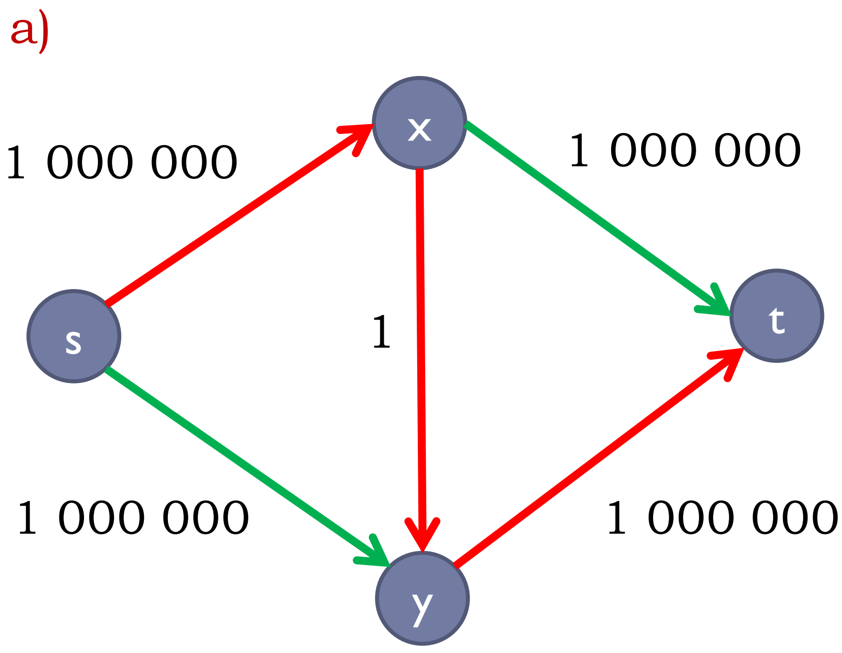
Efektywność algorytmu Forda-Fulkersona

Poniżej przykładowa sieć przepływowa, dla której algorytm jest również mało efektywny.



Efektywność algorytmu Forda-Fulkersona

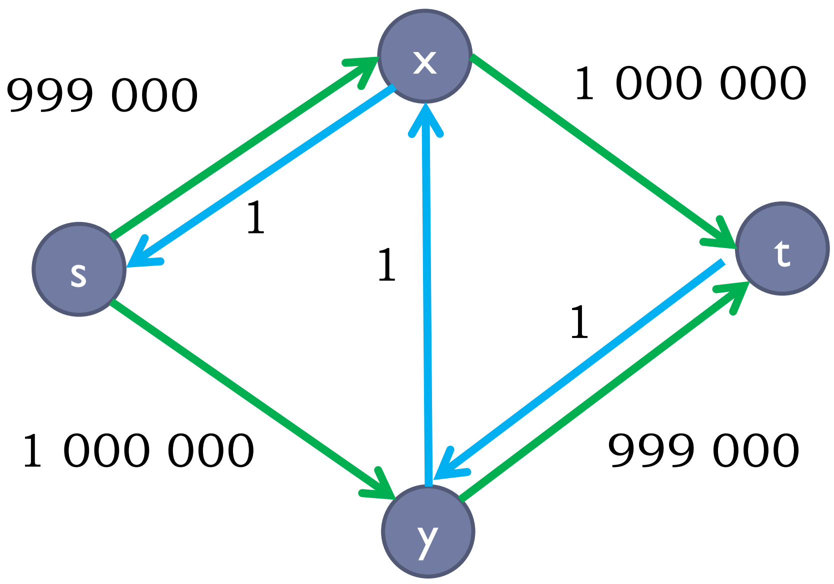
Wybieramy dowolną ścieżkę powiększającą (kolor czerwony), na razie przepływ f(G)=1.



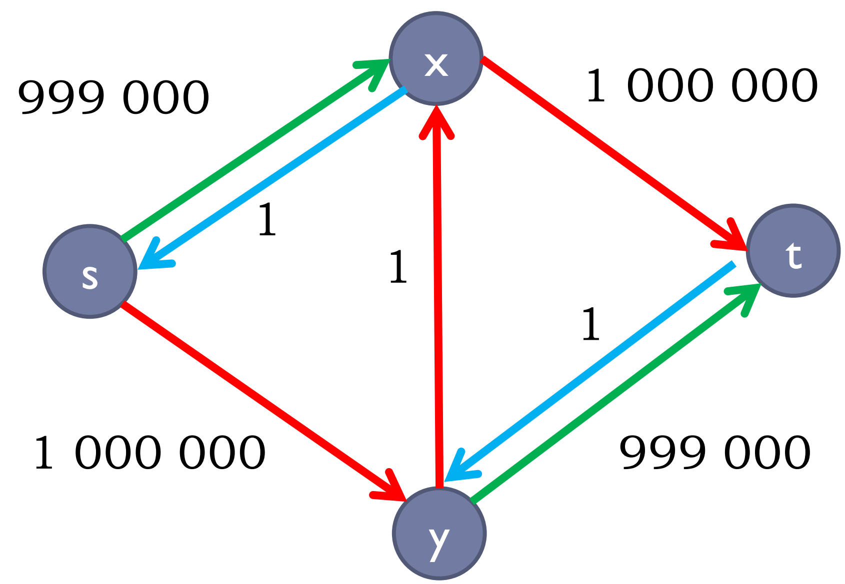
Efektywność algorytmu Forda-Fulkersona

Sieć residualna otrzymana w wyniku powiększenia przepływu (b). Oraz sieć z kolejną ścieżką powiększającą o przepustowości 1 (c). Działanie musimy wykonać 2 000 000 razy, by ostatecznie otrzymać przepływ f(g)=2 000 000.

b)

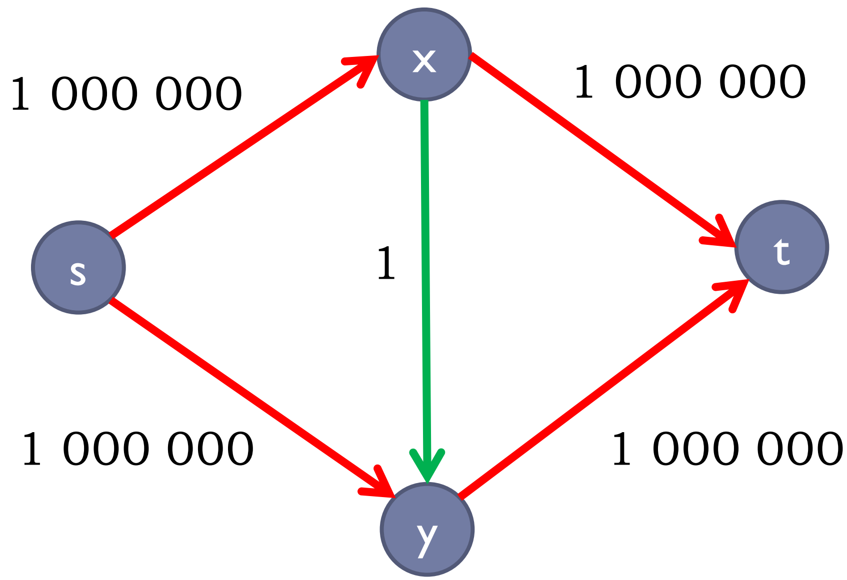


c)



Algorytm Edmondsa - Karpa

Algorytm Edmondsa-Karpa wprowadza poprawkę do algorytmu Forda-Fulkersona. Szukamy ścieżki powiększającej p z użyciem przeszukiwania wszerz. Ponieważ w przeszukiwaniu wszerz otrzymujemy drzewo najkrótszych dróg, zaczynamy od najkrótszych ścieżek. W poniższej sieci wystarczy znaleźć dwie ścieżki powiększające.



Złożoność algorytmu Edmondsa-Karpa

W sieci przepływowej o n wierzchołkach i m łukach każda iteracja algorytmu Forda Fulkersona może zostać zaimplementowana w czasie $O(m)$.

Kiedy ścieżka powiększająca znajdowana jest za pomocą przeszukiwania wszerz, łaczny czas wykonania algorytmu Edmondsa-Karpa wynosi $O(nm^2)$.

Dziękuję z uwagę

dr Anna Beata Kwiatkowska

aba@mat.umk.pl

tel. 602 184 813