

---

Mathematisches Seminar  
Klimawandel

---

Leitung: Andreas Müller

Matthias Baumann, Oliver Dias-Lalcaca, Matthias Dunkel  
Jonas Gründler, Sebastian Lenhard, Silvio Marti, Michael Müller  
Hansruedi Patzen, Melina Staub, Martin Stypinski, Nicolas Tobler  
Raphael Unterer

## Inhaltsverzeichnis

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>1 Wetter und Klima</b>	<b>5</b>
1.1 Klima . . . . .	5
1.2 Physikalische Eigenschaften des Klimasystems . . . . .	6
1.2.1 Wärme, Konvektion, Kondensation . . . . .	6
1.2.2 Strahlung . . . . .	9
1.2.3 Erdrotation und atmosphärische Zirkulation . . . . .	14
1.2.4 Periodische Einflüsse . . . . .	19
1.3 Anforderungen an Klima-Modelle . . . . .	21
1.3.1 Validierung von Klimamodellen . . . . .	22
1.3.2 Klimageschichte der Erde . . . . .	23
<b>2 Fluideodynamik</b>	<b>25</b>
2.1 Fluiddynamik . . . . .	25
2.1.1 Kontinuitätsgleichung . . . . .	25
2.1.2 Inkompressible Strömung . . . . .	27
2.1.3 Bewegungsgleichung . . . . .	27
2.1.4 Zustandsgleichungen . . . . .	32
2.1.5 Boussinesq-Approximation . . . . .	32
2.1.6 Inkompressible zweidimensionale Strömung . . . . .	32
2.2 Lorenz-Modell . . . . .	39
2.2.1 Modellbeschreibung . . . . .	39
2.2.2 Grundgleichungen . . . . .	42
2.2.3 Umwandlung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem . . . . .	43
2.2.4 Dimensionslose Schreibweise . . . . .	45
<b>3 Differentiagleichungen</b>	<b>53</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	53
3.1.1 Autonome Differentialgleichungen . . . . .	54
3.2 Gleichgewichtslösungen und kritische Punkte . . . . .	55
3.2.1 Stabilität . . . . .	55
3.2.2 Zeitumkehr . . . . .	56
3.3 Bifurkationen eindimensionaler Systeme . . . . .	56
3.3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation . . . . .	58
3.3.2 Heugabel-Bifurkation . . . . .	58
3.3.3 Transkritische Bifurkation . . . . .	59

3.3.4	Ein Beispiel zur globalen Mitteltemperatur . . . . .	59
3.4	Linearisierung und Stabilität . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Termohaline Zirkulation</b>	<b>63</b>
4.1	Salinität und Dichte . . . . .	63
4.2	Ein Modell für die thermohaline Zirkulation . . . . .	65
4.2.1	Ein einfaches Box-Modell . . . . .	65
4.2.2	Modell-Gleichungen . . . . .	66
4.2.3	Antrieb der Zirkulation . . . . .	66
4.2.4	Anomalie-Gleichungen . . . . .	67
4.2.5	Differenzgleichungen . . . . .	68
4.2.6	Zeitkonstanten . . . . .	68
4.3	Dynamik der thermohalinen Zirkulation . . . . .	69
4.3.1	Elimination von Prozessen mit kurzer Zeitkonstante . . . . .	69
4.3.2	Eine dimensionslose Beschreibung . . . . .	69
4.3.3	Gleichgewicht . . . . .	70
4.3.4	Bifurkation . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Zonenmodelle</b>	<b>75</b>
5.1	Strahlung . . . . .	75
5.1.1	Einstrahlung auf einer Halbkugel . . . . .	75
5.1.2	Einstrahlung auf einen Breitenkreis . . . . .	76
5.1.3	Einstrahlung über ein Jahr . . . . .	79
5.2	Model von Budyko . . . . .	80
5.3	Zonenmodelle . . . . .	80
5.4	Spektrale Methoden . . . . .	80
5.4.1	Kugelkoordinaten . . . . .	80
5.4.2	Kugelfunktionen . . . . .	82
5.4.3	Spektrale Gleichungen . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Fourier-Analysis</b>	<b>87</b>
6.1	Periodische Funktionen . . . . .	87
6.1.1	Fourierreihen . . . . .	87
6.1.2	Diskrete Fourierreihen: trigonometrische Polynome . . . . .	88
6.2	Fourier-Koeffizienten . . . . .	88
6.2.1	Least Squares . . . . .	89
6.2.2	Trigonometrische Summen . . . . .	90
6.2.3	Bestimmung von $a_0$ . . . . .	93
6.2.4	Bestimmung von $a_k, k > 0$ . . . . .	93
6.2.5	Bestimmung von $b_k$ . . . . .	94
6.2.6	Zusammenstellung der Resultate . . . . .	94
6.3	Vektorgeometrische Interpretation . . . . .	95
6.3.1	Vektoren . . . . .	95
6.3.2	Fourier-Transformation . . . . .	98

<b>7 El Niño Southern Oscillation</b>	<b>103</b>
7.1 El Niño . . . . .	103
7.2 Kelvin-Wellen . . . . .	103
7.2.1 Kelvin-Wellen . . . . .	103
7.2.2 Bewegungsgleichung für Kelvin-Wellen . . . . .	104
7.2.3 Wellengleichung . . . . .	104
7.2.4 Approximative Lösung der Wellengleichung . . . . .	104
7.3 Rossby-Wellen . . . . .	106
7.3.1 Zirkulation . . . . .	106
7.3.2 Bewegungsgleichung . . . . .	106
7.3.3 Wellenlösungen . . . . .	107
7.3.4 Gruppengeschwindigkeit . . . . .	108
7.3.5 Energietransport durch Rossby-Wellen . . . . .	110
7.4 Verzögertes Oszillator-Modell . . . . .	110
<b>8 Datenassimilation</b>	<b>113</b>
<b>II Anwendungen und Weiterführende Themen</b>	<b>115</b>
<b>9 Lorenz-Attraktor</b>	<b>119</b>
9.1 Einführung . . . . .	119
9.2 Hintergründe . . . . .	119
9.2.1 Dynamik . . . . .	119
9.2.2 Empfindlichkeit der Anfangsbedingungen . . . . .	120
9.2.3 Chaostheorie . . . . .	120
9.2.4 Attraktor . . . . .	120
9.2.5 Strange Attraktor . . . . .	120
9.3 Analyse der Gleichungen . . . . .	121
9.3.1 Implementation . . . . .	121
9.4 Lösungen . . . . .	123
9.5 Schlussfolgerung . . . . .	123
<b>10 Höherdimensionales Lorenzsystem</b>	<b>125</b>
10.1 Einstieg . . . . .	126
10.1.1 Notation . . . . .	126
10.1.2 Formelzusammenstellung . . . . .	126
10.2 Erweiterung der Basisfunktionen . . . . .	127
10.3 Höherdimensionales Lorenzsystem . . . . .	128
10.4 Lorenzsystem vierten Grades . . . . .	134
10.5 Numerische Lösung . . . . .	138
10.6 Schlussfolgerungen . . . . .	139
<b>11 Machine Learning und Klimamodelle</b>	<b>147</b>
11.1 Abschnitt . . . . .	147
11.2 Schlussfolgerung . . . . .	147

<b>12 3-Box-Modell der Thermohalinen Zirkulation</b>	<b>149</b>
12.1 Einleitung . . . . .	149
12.2 Thermohaline Zirkulation, was ist das? . . . . .	149
12.2.1 Einflussfaktoren . . . . .	149
12.2.2 Dichte . . . . .	150
12.3 Golfstrom . . . . .	151
12.3.1 Funktionsweise . . . . .	151
12.3.2 Einfluss des Klimawandels . . . . .	152
12.3.3 Folgen . . . . .	153
12.4 Simulation . . . . .	153
12.4.1 Zwei-Fluss Modell( 1. Ansatz) . . . . .	153
12.4.2 Ein-Fluss Modell (2. Ansatz) . . . . .	157
12.5 Schlussfolgerung/Fazit . . . . .	160
<b>13 Eis</b>	<b>163</b>
13.1 Einleitung . . . . .	163
13.1.1 Eisschmelze am Nordpol . . . . .	163
13.1.2 Problem an der Eisschmelze . . . . .	163
13.2 Ziel . . . . .	165
13.3 Von Budyko zur zonalen Energiebilanz . . . . .	165
13.3.1 Einstrahlung abhängig vom Breitengrad . . . . .	166
13.3.2 Einstrahlung in Abhängigkeit vom Neigungswinkel . . . . .	166
13.3.3 Normalisierungsbedingung . . . . .	167
13.3.4 Approximation der Energieverteilung . . . . .	167
13.3.5 Absorptionsverteilung . . . . .	168
13.4 Energiegleichung . . . . .	168
13.5 Resultate . . . . .	169
13.5.1 Albedo abhängig von der Eislinie . . . . .	169
13.5.2 Eislinie abhängig von der Temperatur . . . . .	170
13.5.3 Eisfläche abhängig von der Temperatur . . . . .	170
13.5.4 Vergleich mit der Realität . . . . .	171
13.6 Modellfehler . . . . .	171
13.7 Schlussfolgerung . . . . .	172
<b>14 Numerische Lösung einer verzögerten Differentialgleichung</b>	<b>175</b>
14.1 Einleitung . . . . .	175
14.2 Grundlagen verzögerte Differentialgleichungen . . . . .	175
14.2.1 Definitionen . . . . .	175
14.2.2 Analytische Lösungsverfahren an einem Beispiel . . . . .	176
14.3 El Niño DDE . . . . .	178
14.3.1 Gleichung . . . . .	178
14.3.2 Charakteristische Gleichung . . . . .	179
14.3.3 Berechnen der Konstanten . . . . .	179
14.3.4 Chaotisches Verhalten . . . . .	180
14.4 Numerische Lösung . . . . .	181
14.4.1 Analyse der Funktion dde23 . . . . .	182
14.4.2 Berechnung mit kurzen Zeitschritten . . . . .	183

14.4.3 Instabilität bei wenigen Datenpunkten . . . . .	183
14.5 Auswertung . . . . .	186
14.5.1 Simulation El-Niño mit realen Werten . . . . .	186
14.5.2 Fazit . . . . .	189
<b>15 Klima auf anderen Planeten</b>	<b>191</b>
15.1 Einleitung . . . . .	191
15.1.1 Temperatur . . . . .	192
15.1.2 Albedo . . . . .	192
15.1.3 Atmosphärische Eigenschaften . . . . .	192
15.1.4 Treibhausgase . . . . .	192
15.2 Modell . . . . .	192
15.2.1 Strahlungsbilanz . . . . .	193
15.2.2 Albedo . . . . .	194
15.2.3 Treibhauseffekt . . . . .	194
15.2.4 Wasserkreislauf . . . . .	194
15.2.5 Zusammengefasst . . . . .	195
15.2.6 Differentialgleichung . . . . .	195
15.3 Simulation . . . . .	195
15.3.1 Ergebnisse . . . . .	195
15.4 Schlussfolgerung . . . . .	195
15.4.1 Verbesserungsmöglichkeiten . . . . .	198
<b>16 Achsneigung und Eiszeiten</b>	<b>199</b>
16.1 Abschnitt . . . . .	199
16.2 Schlussfolgerung . . . . .	199
<b>17 Vegetation</b>	<b>201</b>
17.1 Abschnitt . . . . .	201
17.2 Schlussfolgerung . . . . .	201
<b>18 Datenassimilation für das Lorenz-System</b>	<b>203</b>
18.1 Datenassimilation . . . . .	203
18.2 Kalmanfilter . . . . .	203
18.2.1 Allgemeine Funktionsweise . . . . .	204
18.2.2 Anwendung auf das Lorenz-System . . . . .	205
18.2.3 Parameter und Initialisierung . . . . .	206
18.2.4 Anmerkungen zur Kovarianzmatrix und dem Kalmanfaktor . . . . .	207
18.3 Beobachtungen und Erkenntnisse . . . . .	207
18.3.1 Vollständig erfassbares System . . . . .	209
18.3.2 Unvollständig erfassbares System . . . . .	213
18.4 Schlussfolgerung . . . . .	214
<b>19 Extreme Ereignisse</b>	<b>217</b>
19.1 Einleitung . . . . .	217
19.2 Was sind extreme Ereignisse? . . . . .	218
19.2.1 Aufzeichnungen in der Schweiz . . . . .	218
19.2.2 Homogene Messreihen . . . . .	218

19.3 Unwetterlotto . . . . .	219
19.3.1 Lottoproblem . . . . .	221
19.3.2 Unwetter-Verteilung . . . . .	221
19.4 Die hypergeometrische Verteilung . . . . .	222
19.4.1 Herleitung . . . . .	222
19.4.2 Dichte der hypergeometrischen Verteilung . . . . .	223
19.4.3 Sind viele extreme Ereignisse wahrscheinlich? . . . . .	225
19.5 Hypothesentest . . . . .	225
19.5.1 Nullhypothese . . . . .	226
19.5.2 Signifikanzniveau . . . . .	227
19.6 Messpunkte Schweiz . . . . .	227
19.6.1 Prüfung Messreihe . . . . .	228
19.7 Temperatur . . . . .	228
19.7.1 Jahres Mitteltemperatur . . . . .	228
19.7.2 Sommertage . . . . .	229
19.7.3 Tropennächte . . . . .	229
19.7.4 Hitzetage . . . . .	231
19.7.5 Frosttage . . . . .	231
19.7.6 Eistage . . . . .	231
19.8 Niederschlag . . . . .	232
19.8.1 Jahresniederschlag . . . . .	232
19.8.2 Neuschnee . . . . .	232
19.9 Gletscher . . . . .	233
19.9.1 Grosser Aletschgletscher . . . . .	233
19.10Gletscher . . . . .	233
19.10.1 Grosser Aletschgletscher . . . . .	233
19.10.2 Vadret da Morteratsch . . . . .	233
19.11Ist die Klimaerwärmung in der Schweiz real? . . . . .	233

# Vorwort

Dieses Buch entstand im Rahmen des Mathematischen Seminars im Frühjahrssemester 2018 an der Hochschule für Technik Rapperswil. Die Teilnehmer, Studierende der Abteilungen für Elektrotechnik, Informatik und Bauingenieurwesen der HSR, erarbeiteten nach einer Einführung in das Themengebiet jeweils einzelne Aspekte des Gebietes in Form einer Seminararbeit, über deren Resultate sie auch in einem Vortrag informierten.

Im Frühjahr 2018 war das Thema des Seminars der Klimawandel.

Im zweiten Teil dieses Skripts kommen dann die Teilnehmer selbst zu Wort. Ihre Arbeiten wurden jeweils als einzelne Kapitel mit meist nur typographischen Änderungen übernommen. Diese weiterführenden Kapitel sind sehr verschiedenartig. Eine Übersicht und Einführung findet sich in der Einleitung zum zweiten Teil auf Seite 117.

In einigen Arbeiten wurde auch Code zur Demonstration der besprochenen Methoden und Resultate geschrieben, soweit möglich und sinnvoll wurde dieser Code im Github-Repository dieses Kurses<sup>1</sup> abgelegt.

Im genannten Repository findet sich auch der Source-Code dieses Skriptes, es wird hier unter einer Creative Commons Lizenz zur Verfügung gestellt. Auf der beiliegenden DVD befinden sich die Testdaten und Programme zu zwei der simulationsintensiveren Artikel im zweiten Teil.

---

<sup>1</sup><https://github.com/AndreasFMueller/SeminarKlima.git>



# **Teil I**

# **Grundlagen**



# Kapitel 1

## Wetter und Klima

US Präsident Donald Trump war schon immer ein Klimaverweigerer, wie Tweets aus der Zeit lange bevor er Präsident wurde:



**Donald J. Trump**   
@realDonaldTrump

Folgen



It's freezing in New York—where the hell is global warming?

Original (Englisch) übersetzen

12:37 - 23. Apr. 2013

478 Retweets 300 „Gefällt mir“-Angaben



390

478

300



Ganz offensichtlich versteht Trump den Unterschied zwischen Wetter und Klima nicht. Ziel dieses Kapitels ist, den Unterschied zwischen Wetter und Klima zu klären. Es ist allgemein bekannt, dass auch die besten Wetterprognosen im günstigsten Fall für einige Tage zutreffen. Daher soll in diesem Kapitel auch gezeigt werden, war trotz dieser Schwierigkeit das Klima sehr wohl langfristig modelliert und prognostiziert werden kann. Aus diesen Überlegungen wird auch klar, auf welche Aspekte des Klimasystems sich ein Klima-Modell fokussieren muss, wenn eine langfristige Prognose ermöglicht werden soll.

### 1.1 Klima

In der Wikipedia kann man die folgenden Definitionen für die Begriffe Wetter und Klima finden:

**Definition 1.1.** Als Wetter bezeichnet man den spürbaren, kurzfristigen Zustand der Atmosphäre (auch: messbarer Zustand der Troposphäre) an einem bestimmten Ort der Erdoberfläche, der unter anderem als Sonnenschein, Bewölkung, Regen, Wind, Hitze oder Kälte in Erscheinung tritt [skript:wetter].

**Definition 1.2.** Das Klima steht als Begriff für die Gesamtheit aller meteorologischen Vorgänge, die für die über Zeiträume von mindestens 30 Jahren regelmässig wiederkehrenden durchschnittlichen Zustände der Erdatmosphäre an einem Ort verantwortlich sind [skript:klima].

Was also Donald Trump in seinem Tweet beschrieben hat ist das Wetter. Selbst wenn die Temperatur in New York unter den Gefrierpunkt fällt, heisst das nicht, dass die mittlere Temperatur in New York über mehrere Jahre nicht doch ansteigen kann. Tatsächlich bedeutet “globale Erwärmung” nicht, dass die mittlere Temperatur an jedem Punkt der Erde zunehmen wird. Im Gegenteil ist es durchaus möglich, dass zwar die mittlere Temperatur der Erde ständig zunimmt, wie wir in den letzten Jahren auch messtechnisch nachweisen konnten, dass aber auch die Temperaturunterschiede stark zunehmen, so dass es am Ende an einzelnen Stellen der Erdoberfläche zu einer Abkühlung kommen kann. Um dieser Komplexität Rechnung zu tragen, spricht man nicht mehr von der “globalen Erwärmung”, sondern vom Klimawandel.

Auch wenn sich das Wetter nur sehr eingeschränkt vorhersagen lässt, bedeutet das noch lange nicht, dass das Klima nicht doch sehr genau vorhergesagt werden kann. Eine Analogie kann den Unterschied zwischen der Vorhersagbarkeit von Wetter und Klima verdeutlichen. Wenn man in einem Kochtopf Wasser zum Kochen bringt, stellt sich eine unvorhersagbare chaotische Bewegung kleiner und grosser Gasblasen ein. Es ist unmöglich vorherzusagen, wann und wo sich die nächste Blase bilden wird und welchen Weg sie an die Oberfläche des Wassers nehmen wird. Wenn wir aber nur die mittlere Temperatur betrachten, können wir aus der Heizleistung der Kochplatte, der Masse und der spezifischen Wärmekapazität des Wassers genau berechnen, welche Temperatur zu welcher Zeit im Wasser herschen wird und wir können den Zeitpunkt exakt vorhersagen, wann das Wasser zu sieden beginnt. Die mittlere Temperatur des Wassers beschreibt das “Klima” in der Pfanne, die kleinräumigen und kurzfristigen Blasen und anderen Turbulenzen beschreiben das “Wetter”.

## 1.2 Physikalische Eigenschaften des Klimasystems

In diesem Abschnitt stellen wir die physikalischen Eigenschaften aller wesentlicher Komponenten des Klimasystems zusammen. Dabei geht es zunächst nur darum, die grundlegende Physik in Erinnerung zu rufen und die Naturgesetze, die die Wechselwirkungen zwischen den Komponenten beschreiben. Auf die Details der mathematischen Modellierung der zukünftigen Veränderung dieser Grössen werden wir erst später eingehen.

### 1.2.1 Wärme, Konvektion, Kondensation

Die wohl wichtigste Klima-Grösse ist die Temperatur. Sie drückt aus, wieviel Energie in Form von Wärme ein Körper enthält.

#### Wärmekapazität

Die spezifische Wärme  $C$  gibt an, wie die innere Energie sich bei einer Temperaturänderung  $\Delta T$  verändert:

$$\Delta E = C \cdot \Delta T.$$

Der Körper speichert Energie in Form der thermischen Bewegung der einzelnen Atome. Schwerere Atome können bei gleicher Bewegungsgeschwindigkeit mehr Energie speichern. Stoffe mit grösserer Dichte können mehr Atome und damit auch mehr Wärmeenergie in einem kleineren Volumen unterbringen. Die spezifische Wärmekapazität  $c$  gibt an, welche Wärmekapazität ein Kilogramm eines Stoffes hat. Ein Körper der Masse  $m$  hat also die Wärmekapazität  $C = cm$ .

## Wärmeleitung

Herrschen in einem Körper Temperaturunterschiede, ist  $T$  nicht mehr nur eine konstante, sondern eine Funktion der Koordinaten und auch der Zeit. Temperaturunterschiede werden sich ausgleichen, indem Energie von wärmeren zu kälteren Teilen des Körpers fliegt. Dies geschieht umso schneller, je grösser die Unterschiede sind. Die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \quad (1.1)$$

beschreibt die Entwicklung der Funktion  $T(x, y, z, t)$  an jedem Ort des Raumes [skript:waermeleitung]. Der Koeffizient  $\kappa$  ist eine Materialkonstante, die beschreibt, wie schnell sich die Temperaturunterschiede ausgleichen können. Ist  $\kappa = 0$ , folgt  $\partial T / \partial t = 0$ , die Temperatur ändert sich nicht, es findet keine Wärmeleitung statt.

Die rechte Seite von (1.1) kann mit dem sogenannten Laplace-Operator gemäss der folgenden Definition geschrieben werden.

**Definition 1.3.** *Der Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heisst der Laplace-Operator.

Die Wärmeleitungsgleichung erhält damit die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T. \quad (1.2)$$

## Konvektion

Wärmeleitung kann Wärmeenergie nur vergleichsweise langsam transportieren. Das einleitende Beispiel des Kochtopfs zeigt auch, wie ein effizienterer Energietransport funktionieren kann. In der Atmosphäre dehnt sich warme Luft aus. Dank der geringeren Dichte können warme Luftblasen aufsteigen und damit Wärme viel effizienter in die obere Atmosphäre transportieren als dies mit Wärmeleitung möglich wäre. Dieser Prozess heisst *Konvektion* [skript:konvektion].

Wir wollen den Fall eines strömenden Mediums mathematisch etwas genauer ausarbeiten. Bewegt sich das Medium mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , dann ändert sich die Temperatur des Mediums, welches sich über dem Punkt  $P = (x, y, z)$  befindet. Nach der Zeit  $\Delta t$  befindet sich derjenige Teil des Mediums über dem Punkt  $P$ , der sich vorher über dem Punkt  $P - \vec{v}\Delta t$  befand. Die Temperatur zur Zeit  $t + \Delta t$  ist daher  $T(P, t + \Delta t) = T(P - \vec{v}\Delta t, t)$ . Die Temperaturänderung

$$T(P, t + \Delta t) = T(P, t) + (T(P, t + \Delta t) - T(P, t)) = T(P, t) + T(P - \vec{v}\Delta t, t) - T(P, t)$$

$$\frac{T(P, t + \Delta t) - T(P, t)}{\Delta t} = \frac{T(P - \vec{v}\Delta t, t) - T(P, t)}{\Delta t}.$$

Beim Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  wird aus der linken Seite die partielle Ableitung nach  $t$ . Die rechte Seite kann mit Hilfe der Kettenregel berechnet werden. Es wird

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial T}{\partial x} v_x - \frac{\partial T}{\partial y} v_y - \frac{\partial T}{\partial z} v_z. \quad (1.3)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kann vektoriell mit der folgenden Definition etwas eleganter geschrieben werden.

#### **Definition 1.4.** Der vektorielle Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heisst der Nabla-Operator. Der Vektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } f$$

heisst der Gradient von  $f$ .

Die Temperaturänderung in Folge der Strömung (1.3) wird

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla T. \quad (1.4)$$

Man nennt diese Temperaturänderung durch die Strömung auch *Advektion*. Die Wärmeleitungsgleichung kann damit zu einem umfassenderen Modell

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla T + \kappa \Delta T \quad (1.5)$$

zusammengefasst werden. Es ist geeignet für die Beschreibung sowohl der Atmosphäre wie auch des Wärmeaustausches in den Ozeanen.

### Phasenübergänge

Um ein Kilogramm Wasser bei 20°C zu verdunsten, ist eine latente Wärme von 2480 kJ nötig. Um ein Kilogramm Luft um ein Grad zu erwärmen, sind dagegen nur 1.005 kJ notwendig. Anders herum bedeutet dies, dass eine mit Wasserdampf angereicherte Atmosphäre sehr viel mehr Energie in Form von latenter Wärme speichern kann, als allein durch die Wärmekapazität trockener Luft möglich wäre.

Wir haben damit zwei Mechanismen identifiziert, wie eingestrahlte und in der Erdkruste als Wärme gespeicherte Energie in die Atmosphäre transportiert werden kann. Einerseits kann Luft über aufgewärmten Landmassen oder dem Meer erwärmt werden und als Konvektionsströmung aufsteigen. Andererseits kann Wasser an der Oberfläche verdampft werden damit die latente Wärme in die Atmosphäre übergehen. Man nennt diese Mechanismen auch turbulenten Flüsse [**skript:wiefunktioniertdas**].

Der Wassergehalt der Luft kann höchstens einige wenige Prozente betragen. Zwar ist die Wärmespeicherung durch Verdunstung über 2000 mal effizienter, aber weil nur wenig Wasser dafür zur Verfügung steht, übernimmt die Verdunstung doch nicht einen derart grossen Teil des Energietransports von der Oberfläche in die Atmosphäre. In der Tat finden etwa 30% des Energietransports von der Erdkruste in die Atmosphäre durch turbulente Flüsse statt, davon etwa 7% durch Konvektion und 23% durch latente Wärme [skript:wiefunktioniertdas]. Höhere Temperaturen begünstigen die Verdunstung und verschieben diesen Anteil zugunsten der latenten Wärme. Man darf also davon ausgehen, dass höhere Oberflächentemperaturen zu einem überproportional höheren Energietransport in die Atmosphäre führen.

In der Atmosphäre kann die Energie über grosse Distanzen transportiert und später wieder freigesetzt werden, wie Hurricanes und Tornadoes eindrücklich demonstrieren können. Damit ein Klimamodell Aussagen machen kann über das Auftreten von extremen Wetterphänomenen muss es also den Wassergehalt der Atmosphäre modellieren.

## 1.2.2 Strahlung

Der bedeutendste Energietransportmechanismus in der Atmosphäre ist die Strahlung. In diesem Abschnitt stellen wir die Strahlungsgesetze zusammen und studieren die Strahlungsbilanz der Atmosphären.

### Schwarzkörperstrahlung

Die Strahlung der Sonne wie auch der Erde kann als Strahlung eines schwarzen Körpers modelliert werden. Ein schwarzer Körper ist ein idealisierter Körper, der alle auftretende Strahlung absorbieren kann. Er befindet sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld, seine Strahlung hängt daher nur von der Temperatur ab.

### Stefan-Boltzmann-Gesetz

Das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* gibt Auskunft darüber, wieviel Energie insgesamt von einem schwarzen Körper abgestrahlt wird. Die gesamte Strahlung hängt natürlich von der Oberfläche  $A$  des Strahlers ab, aber die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit hängt nur noch von der Temperatur ab. Die gesamte Strahlungsleistung ist

$$P = \sigma AT^4 \quad \text{mit} \quad \sigma = 5.670367 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \quad (1.6)$$

Die Strahlung der Sonne nimmt dem Quadrat der Entfernung ab. Von der Strahlungsleistung  $\sigma T^4$  pro Flächeneinheit der Sonnenoberfläche bleibt in der Entfernung der Erde die Leistung

$$P_{\oplus} = \sigma T^4 \cdot \left( \frac{R_{\odot}}{a_{\oplus}} \right)^2 \quad (1.7)$$

übrig, wobei  $R_{\odot} = 6.957 \cdot 10^8 \text{ m}$  der Radius der Sonne ist und  $a_{\oplus} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$  die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne. Setzt man diese Werte und die Temperatur  $T = 5778 \text{ K}$  in die Gleichung (1.7) ein, erhält man

$$P_{\oplus} = 1366.8 \text{ W/m}^2,$$

auch bekannt als die *Solarkonstante*.

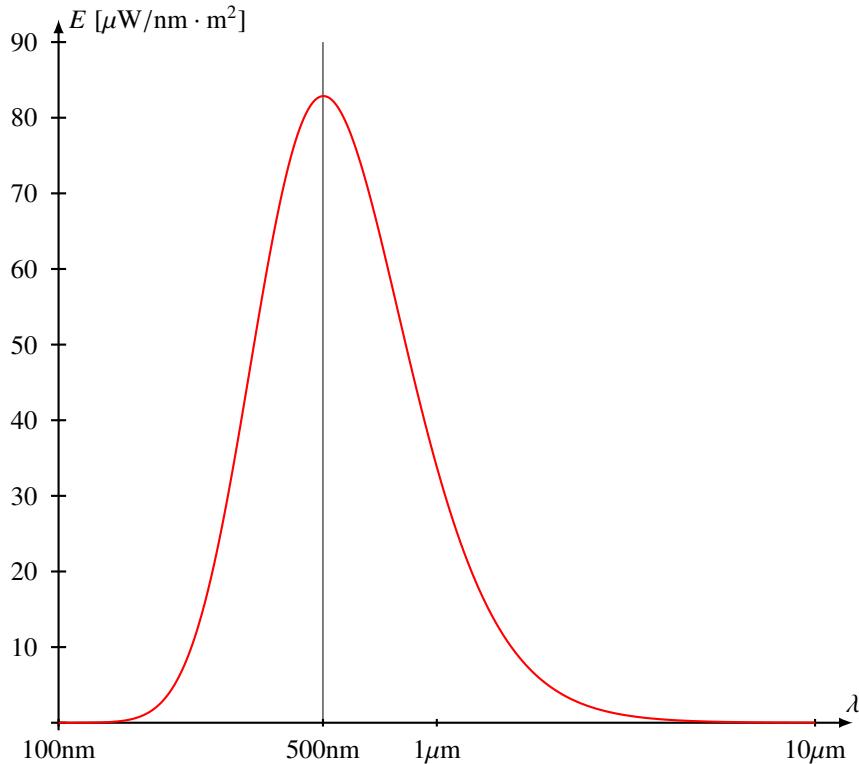


Abbildung 1.1: Plancksches Strahlungsgesetz für die Sonne

### Wiensches Verschiebungsgesetz

Die Strahlungsleistung ist nicht über alle Wellenlängen gleichmäßig verteilt. Das *Wiensche Verschiebungsgesetz* besagt, dass die maximale Strahlungsleistung bei einer Wellenlänge abgestrahlt wird, die umgekehrt proportional zur Temperatur ist:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad \text{mit} \quad b = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (1.8)$$

Für die Oberfläche der Sonne mit  $T = 5778\text{K}$  findet man die Wellenlänge  $\lambda_{\max} = 5 \cdot 10^{-7}\text{m} = 500\text{nm}$ , dies entspricht grünem Licht. Die Strahlung der Erde mit ihrer mittleren Temperatur von  $287\text{ K}$  hat dagegen ihr Maximum bei  $\lambda_{\max} = 10\text{ }\mu\text{m}$ , also im Infrarotbereich.

### Strahlung und Reflektion in der Atmosphäre

Die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.9)$$

pro Flächeneinheit des Strahlers und pro Wellenlängeneinheit. Die Strahlungsdichte in Abhängig-

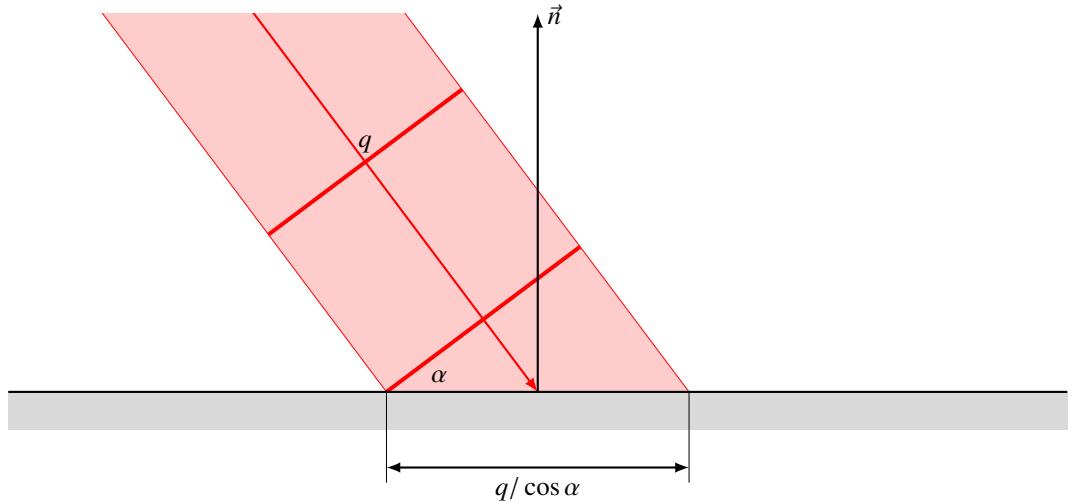


Abbildung 1.2: Einfluss des Einstrahlungswinkels auf die pro Flächeneinheit der Erdoberfläche einfallende Strahlungsleistung. Ein Strahlenbündel mit Querschnitt  $q$ , welches im Winkel  $\alpha$  zur Vertikalen einfällt, bedeckt die Fläche  $q/\cos \alpha$  auf der Erdoberfläche.

keit von der Wellenlänge ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die gesamte Strahlungsleistung ist das Integral

$$P = \int_0^{\infty} E(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

Man beachte aber, dass in den graphischen Darstellungen des Strahlungsspektrums eine logarithmische  $\lambda$ -Skala verwendet wird. Bei grossen Wellenlängen (“rechts”) wird die Kurve also in Wahrheit viel stärker ausgedehnt. Will man die Flächeninhalte unter den Kurven vergleichen, muss man die vertikale Achse mit dem Faktor  $\lambda$  skalieren.

### Einstrahlungswinkel

Warum ist es in den Tropen wärmer als in gemässigten Breiten oder an den Polen? Die Sonne strahlt doch überall mit der gleichen Intensität.

Der Unterschied stammt natürlich vom Einstrahlungswinkel. Der Ausdruck (1.7) für  $P_{\odot}$  beschreibt die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit, doch diese Flächeneinheit wird senkrecht auf die Ausbreitungsrichtung der Strahlung gemessen. In gemässigten Breiten und an den Polen fällt die Strahlung in viel kleinerem Winkel auf die Erdoberfläche. Die einfallende Energie verteilt sich daher auf eine grössere Fläche. Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen der Vertikalen und der Strahlungsrichtung, dann ist die auf einer Erdoberfläche einfallende Strahlungsdichte nur noch  $P_{\odot} \cdot \cos \alpha$ .

### Albedo

Die Strahlung der Erde ist nicht allein die Schwarzkörperstrahlung der Erde. Sie ist überlagert von der Strahlung, die vom Erdboden oder von Wolken reflektiert wird. Die *Albedo* ist der Anteil der reflektierten Strahlung, also ein Wert zwischen 0 und 1. Tabelle 1.1 stellt einige interessante Albedo-Werte von verschiedenen Oberflächen zusammen.

Material	Albedo
Frischer Schnee	0.8 – 0.9
Wolken	0.6 – 0.9
Wüste	0.3
Rasen	0.18–0.23
Wald	0.05–0.18
Wasserfläche	0.05–0.22 (winkelabhängig)
Erde	0.306
Mond	0.11

Tabelle 1.1: Albedo verschiedener Oberflächen und Himmelskörper (aus [skript:albedo])

Die Albedo hat eine direkte Auswirkung auf das Klima, umgekehrt hängt die Albedo aber auch vom Klima ab. Nimmt die Bewölkung zu, steigt die Albedo, es erreicht weniger Strahlung die Erdoberfläche. Schneefall erhöht ebenfalls die Albedo. Umgekehrt reduziert das Abschmelzen der Polkappen oder der Schneedecke in Permafrostgebieten die Albedo, so dass mehr Strahlung von der Erdoberfläche absorbiert wird.

## Strahlungsbilanz

In Abbildung 1.3 sind die Planckschen Strahlungskurve für die Sonne und Erde dargestellt. Die rote Kurve zeigt die spektrale Strahlungsleistung, die von der Sonne auf den Querschnitt  $\pi R_{\odot}^2$  der Erde eingestrahlt wird, also

$$E(\lambda, T_{\odot}) \cdot 2\pi R_{\odot}^2 \cdot \left( \frac{R_{\odot}}{a_{\odot}} \right)^2$$

mit  $T_{\odot} = 5778\text{K}$ . Die dunkelblaue Kurve zeigt das Ausstrahlungsspektrum der ganzen Erde mit einer Temperatur von  $T = 279\text{K}$ , also

$$E(\lambda, T_{\oplus}) \cdot 4\pi R_{\oplus}^2.$$

Die Fläche unter der Kurve ist ein Mass für die gesamte Energie. Offenbar halten sich Einstrahlung und Ausstrahlung die Waage.

Die Einstrahlung kann sich zum Beispiel dann verändern, wenn mehr Strahlung reflektiert wird. Die Ausstrahlung verändert sich, wenn die Atmosphäre für infrarote Strahlung grösser wird. Wir die Atmosphäre durch erhöhte CO<sub>2</sub>-Konzentration für infrarote Strahlung undurchsichtiger, dann sinkt die Ausstrahlung der Erde. Damit wieder ein Gleichgewicht entsteht, muss die Temperatur der Erde sich erhöhen, damit die Ausstrahlung ebenfalls höher wird (obere hellblaue Kurve). Sinkt der Gehalt an Treibhausgasen, wird die Atmosphäre transparenter für Wärmestrahlung. Ein Gleichgewicht ist möglich bei tieferer Temperatur (untere hellblaue Kurve). Diese Abhängigkeit der Temperatur von der Transparenz der Atmosphäre für Wärmestrahlung ist bekannt als der *Treibhauseffekt*.

## Tatsächliches Strahlungsspektrum

In Abbildung 1.4 ist das tatsächlich gemessene Strahlungsspektrum der Sonne dargestellt. Es fällt auf, dass Wasserdampf und CO<sub>2</sub> für bedeutende Absorptionsbänder verantwortlich ist, während im sichtbaren Bereich die Absorption sehr gleichmässig ist.

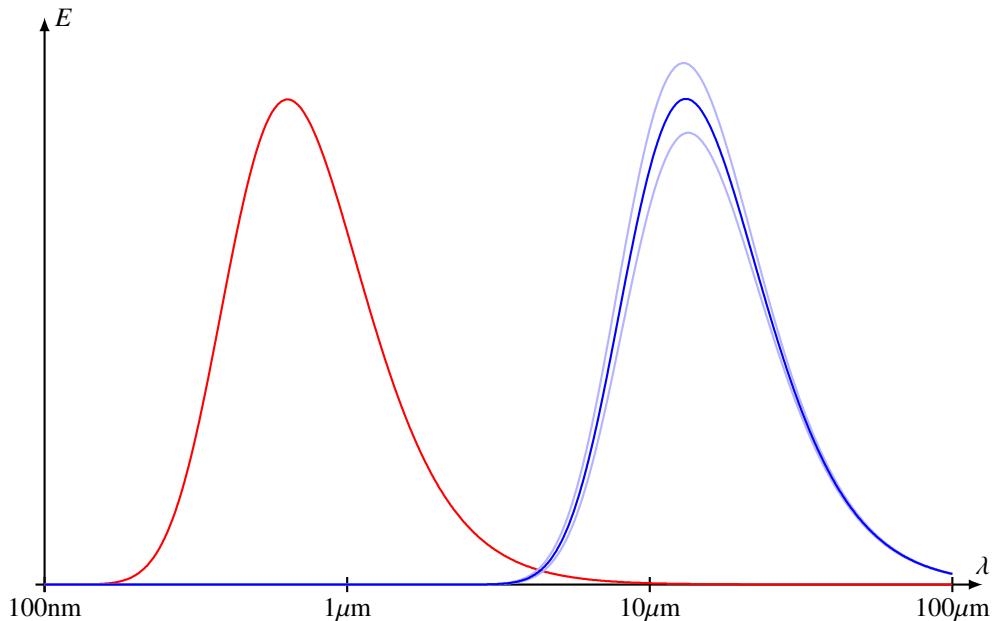


Abbildung 1.3: Strahlung der Sonne (rot) und der Erde (blau). Das Maximum der Strahlung der Sonne ist im sichtbaren Bereich, das Maximum der Wärmestrahlung der Erde im Infraroten.

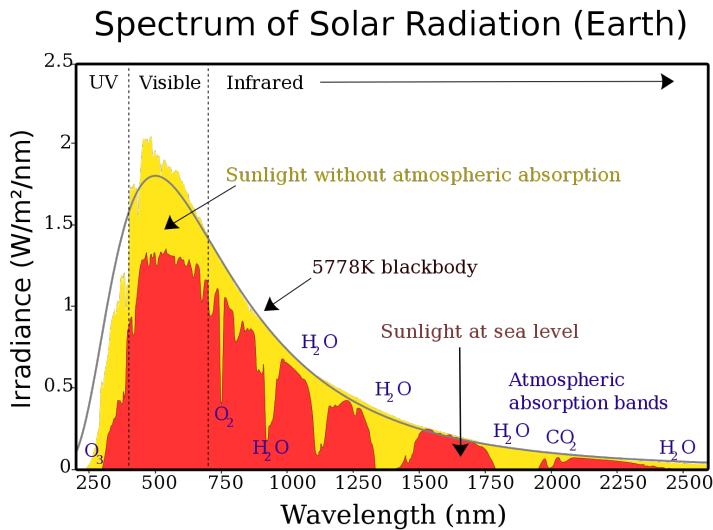


Abbildung 1.4: Tatsächliches Spektrum der Sonnenstrahlung mit (rot) und ohne (gelb) atmosphärische Absorption im Vergleich mit dem Spektrum der Schwarzkörperstrahlung [skript:sunlight].

### 1.2.3 Erdrotation und atmosphärische Zirkulation

Die Einstrahlung ist naturgemäß am grössten am Äquator, während an den Polen die Ausstrahlung überwiegt. Dies führt dazu, dass die Temperatur an den Polen tiefer ist. Der Temperaturunterschied bedeutet aber auch, dass Prozesse in der Atmosphäre Energie aus niedrigen Breiten zu den Polen transportieren. Die Temperaturunterschiede sind jedoch zu klein dafür, dass Wärmeleitung den Transport bewerkstelligen könnte. Die Energie muss daher durch Advektion (S. ??) unterstützt von latenter Wärme transportiert werden. Um den Energiehaushalt des globalen Klimasystems zu verstehen, muss man daher die globalen Strömungen in der Atmosphäre aber auch in den Ozeanen verstehen.

In Kapitel 2 werden die Grundgleichungen der Fluidodynamik besprochen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf eine qualitative Diskussion der globalen Zirkulation. Die globale Zirkulation unterscheidet sich von Strömungen, die in technischen Anwendungen üblicherweise studiert werden dadurch, dass sie zwar im allgemeinen langsamer ist, dafür aber ein viel grösseres Volumen und grössere Distanzen umfasst. Die Windsysteme, die für die Wetterphänomene verantwortlich sind, haben typische Abmessungen von hunderten oder sogar tausenden von Kilometern.

#### Druckunterschiede und Euler-Wind

Windströmungen in der Atmosphäre werden von Druckunterschieden hervorgerufen. Die Sonnenstrahlung erwärmt die Erdoberfläche und mittelbar die Atmosphäre. Die warme Luft hat geringere Dichte und steigt daher auf. Damit nimmt die Kraft ab, die die Luft auf darunterliegenden Schichten ausüben kann, es entsteht ein Unterdruck. Man nennt eine Luftströmung, die nur durch Druckunterschiede unter Vernachlässigung von Corioliskraft, Zentrifugalkraft und Reibung entsteht den *Euler-Wind*. Lokale Wind-Systeme wie Land-See-Wind oder Berg-Tal-Wind sind von dieser Art.

#### Coriolis-Effekt

Die Erde dreht sich in 23 Stunden 56 Minuten und 4.091 Sekunden einmal um sich selber. Die Drehung kann mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\vec{\Omega}$  beschrieben werden, der die Richtung der Erdachse vom Süd- zum Nordpol hat und als Länge die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = |\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{86164.091 \text{ s}}.$$

Ein Körper, der sich relativ zu einem mit der Erde verbundenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, erlebt eine durch die Drehung verursachte Beschleunigung

$$\vec{a} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Ein Flugzeug, welches mit 880 km/h über den Nordpol fliegt, erfährt dort die Beschleunigung

$$|\vec{a}| = \left| -2 \cdot \frac{2\pi}{86164.091 \text{ s}} \cdot 244.44 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| = 0.01782 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Diese Beschleunigung ist viel zu klein, dass sie einen wesentlichen Einfluss auf die Bahn eines Flugzeugs haben könnte. Der Luftwiderstand und die von den Steuerflächen des Flugzeugs erzeugten Kräfte und die daraus resultierenden Beschleunigungen sind um Größenordnungen grösser. In der freien Atmosphäre wirkt auf die Luft jedoch nur die Druckkraft, so dass die Coriolis-Beschleunigung einen dominanten Einfluss bekommt.

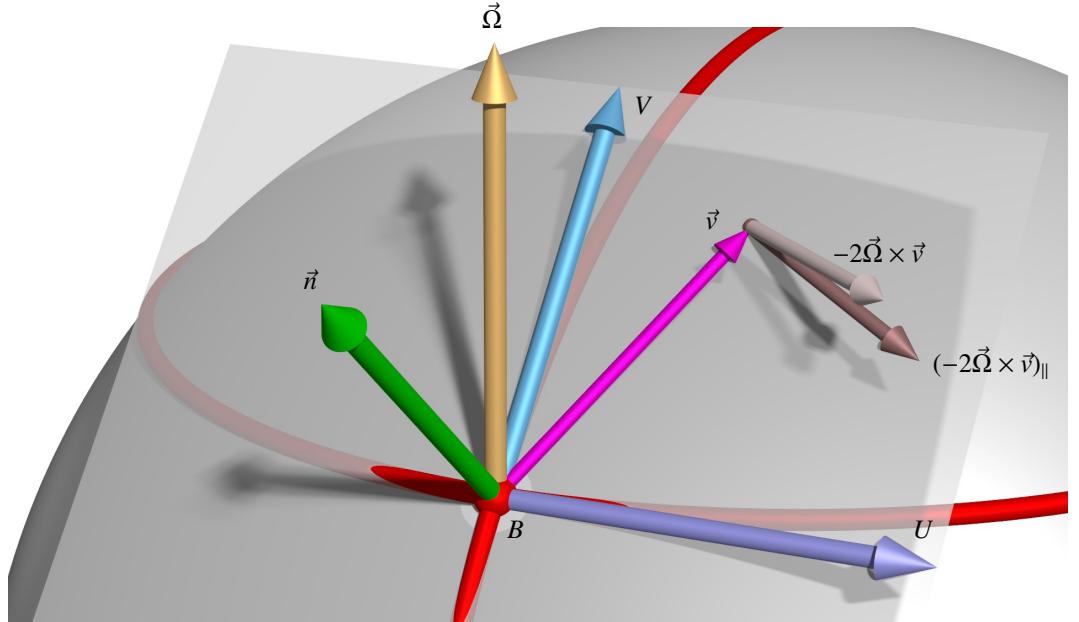


Abbildung 1.5:  $\beta$ -Ebene: Koordinatensystem in der Tangentialebene an die Kugel im Punkt  $B$  mit Achsen  $U$  parallel zu Breitenkreisen und  $V$  parallel zu Längenkreisen. Die Normale der Tangentialebene ist  $\vec{n}$ . Ebenfalls eingezeichnet die Coriolis-Beschleunigung  $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$  zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und die Komponente  $(-2\vec{\Omega} \times \vec{v})_{||}$  parallel zur Tangentialebene.

Die grossräumige Strömung in der Erdoberfläche ist im Wesentlichen parallel zur Erdoberfläche. Daher interessiert für die Beschreibung der Wirkung des Coriolis-Effekts vor allem die Komponente der Beschleunigung parallel zur Erdoberfläche interessant. In einem Punkt  $B$  der Erdoberfläche verwenden wir daher ein Koordinatensystem in der Tangentialebene so, dass die  $x$ -Achse tangential zum Breitenkreis in  $B$  ist und die  $y$ -Achse tangential zum Längenkreis (Abbildung 1.5). Die tangentiale Geschwindigkeit wird in diesem Koordinatensystem durch die Komponenten  $u$  in  $U$ -Richtung und  $v$  in  $V$ -Richtung beschrieben.

Wir berechnen die Coriolis-Beschleunigung in diesem Koordinatensystem. Für einen Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  parallel zu  $V$  hat das Vektorprodukt  $\vec{\Omega} \times \vec{v}$  bereits die Richtung  $U$ , er muss also nicht mehr in die Tangentialebene projiziert werden. Der Winkel zwischen  $\vec{\Omega}$  und  $V$  ist die geographischen Breite  $\alpha$ . Die Coriolis-Beschleunigung ist daher  $2\omega \sin(\alpha)u \cdot V$ .

Für einen Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  parallel zu  $U$  steht das Vektorprodukt  $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$  senkrecht auf der Erdachse. Da  $U$  und  $\vec{\Omega}$  senkrecht stehen ist der Betrag der Coriolis-Beschleunigung

$$|-2\vec{\Omega} \times \vec{v}| = 2\omega u.$$

Aus Abbildung 1.6 kann man ablesen, dass die Komponente der Coriolis-Beschleunigung parallel zur Tangentialebene  $2\omega u \sin(\alpha)$  ist.

Setzen wir die beiden Resultate zusammen finden wir, dass die Coriolis-Beschleunigung im  $U$ -

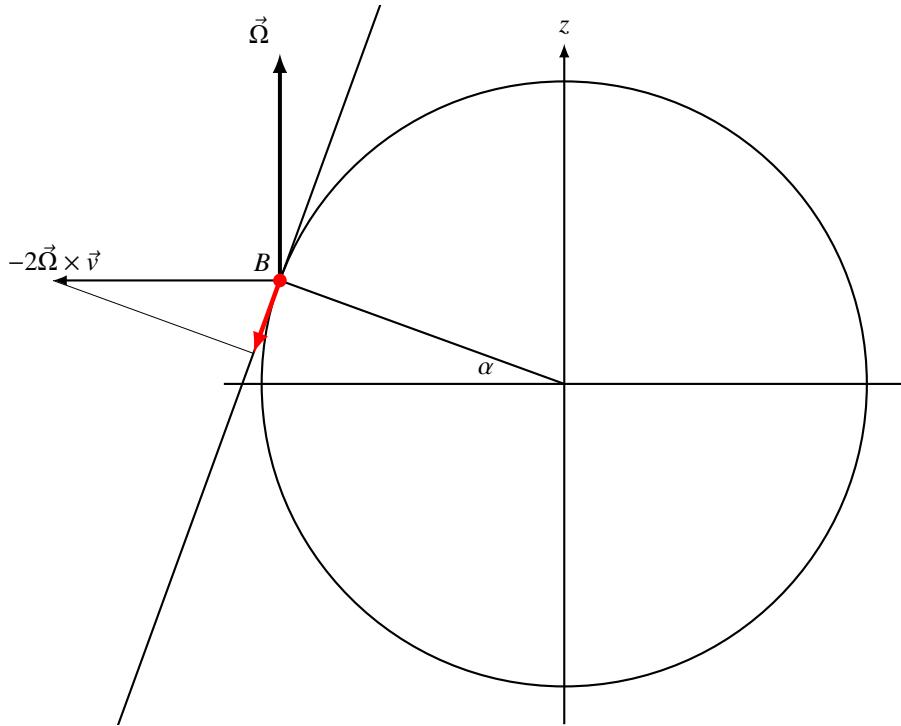


Abbildung 1.6: Berechnung der Coriolis-Beschleunigung für einen Geschwindigkeitsvektor in  $U$ -Richtung.

$V$ -Koordinatensystem

$$\underbrace{2\omega \sin \alpha}_{= f} \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ist. Die Coriolis-Beschleunigung ist proportional zu  $f = 2\omega \sin \alpha$ , auch bekannt als der *Coriolis-Parameter*. Das Koordinatensystem in der Tangentialebene im Punkt  $B$  heisst auch die  $\beta$ -Ebene.

### Globale Zirkulation

Die bisher besprochenen Prinzipien sollten uns ermöglichen, die global Zirkulation qualitativ zu beschreiben. Veränderungen der globalen Zirkulation erfolgen erst über mehrere Tage. Es ist daher gerechtfertigt, die täglichen Schwankungen der Einstrahlung infolge der Erdrotation durch eine mittlere Einstrahlung zu ersetzen. Die Bedingungen für die globale Zirkulation sind daher rotations-symmetrisch um die Erdachse. Wir suchen daher nach einem globalen Strömungsmuster, welches ebenfalls rotationssymmetrisch ist.

Die grösste Einstrahlung erfolgt am Äquator, erwärmt die Luft und lässt sie aufsteigen. Der entstehenden Unterdruck in Äquatornähe erzeugt eine Ausgleichsströmung in Bodennähe. Die aufsteigende Luft kann nicht beliebig hoch aufsteigen und weicht daher in grosser Höhe in Richtung der Pole aus. Die Höhenströmung nach Norden wird von der Coriolis-Beschleunigung nach rechts

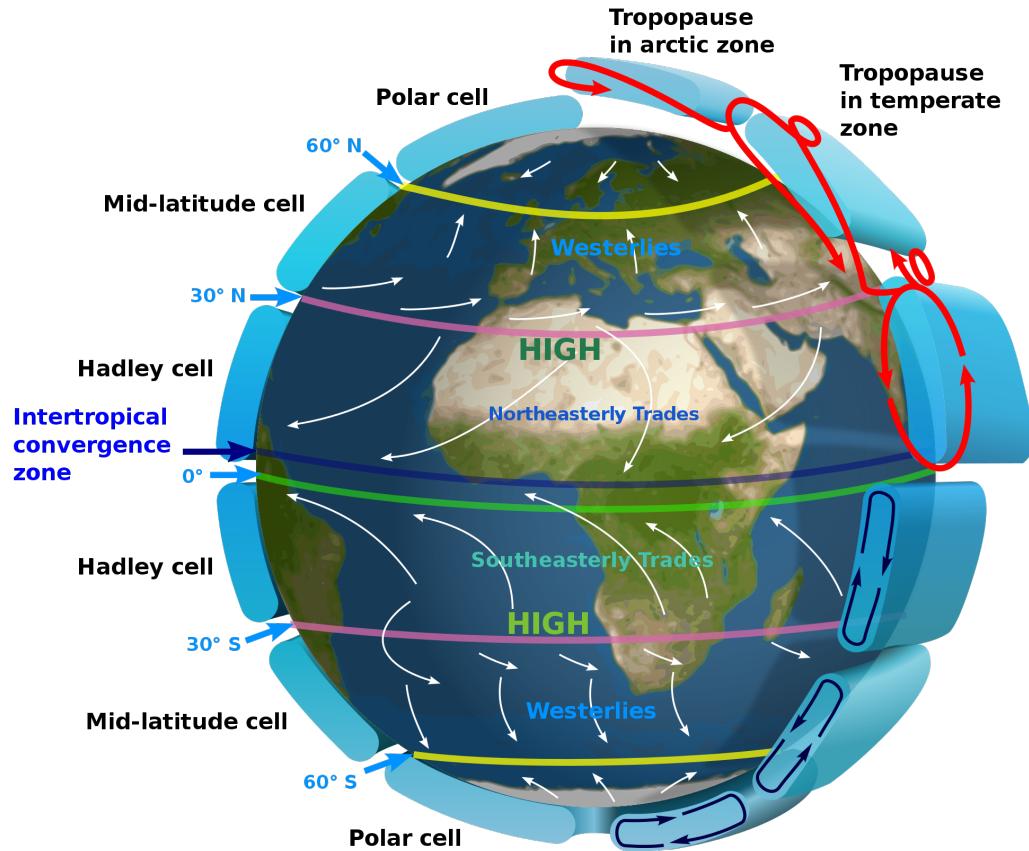


Abbildung 1.7: Globale Zirkulation der Erde

abgelenkt, sie kann also nicht beliebig weit nach Norden strömen, bevor sie wieder absinkt. Es entsteht je eine geschlossene Konvektionszelle wie in Abbildung 1.7, die sogenannte Hadley-Zelle [skript:hadley].

Im Anschluss an die Hadley-Zellen entstehen auf Grund des gleichen Mechanismus weitere Zellen. Die Breite der Zellen hängt offenbar von der Stärke des Coriolis-Effektes ab. Auf einem Planeten mit grösserer Rotationsgeschwindigkeit erwartet man vergleichsweise schmalere Zellen. Dies ist genau was man am Beispiel der globalen Strömung auf dem Jupiter in Abbildung 1.8 beobachten kann.

## Äquatorialzone

Nahe am Äquator ist die geographische Breite  $\alpha$  klein und damit auch der Coriolis-Parameter  $f$ . Die Strömung in Äquatornähe ist daher praktisch unbeeinflusst vom Coriolis-Effekt. Entlang des Äquators kann die Luft oder das Meer also unbeeinflusst durch die Coriolis-Beschleunigung strömen.

Mit Hilfe der  $\beta$ -Ebene können wir jetzt aber auch modellhaft die Bewegung eines Massepunktes

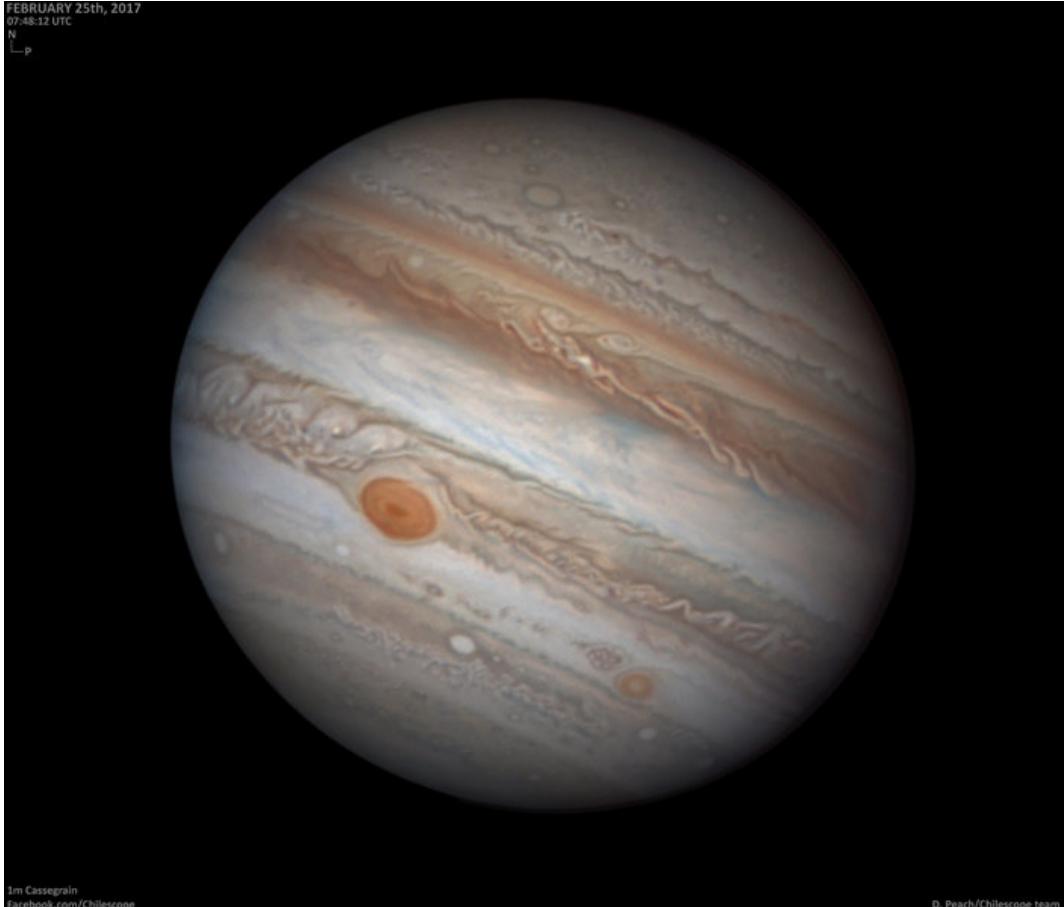


Abbildung 1.8: Jupiter mit Wolkenbändern, Aufnahme von Damian Peach [**skript:jupiter**]

in Äquatornähe berechnen. Wenn die Coriolis-Beschleunigung der einzige Einfluss ist, dann

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Der Coriolis-Parameter  $f = 2\omega \sin \alpha$  ist proportional zur geographischen Breite. Für nicht zu grosse geographische Breiten können wir  $\sin \alpha$  durch die  $y$ -Koordinate ersetzen. Wir müssen also die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ fyv \\ -fuy \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

lösen. Die Gestalt der Lösungskurven hängt von der Anfangsgeschwindigkeit und vom Parameter  $f$  ab. Für  $f = 0$  fällt die Coriolis-Beschleunigung ganz weg, in diesem Fall sind die Lösungskurven Geraden.

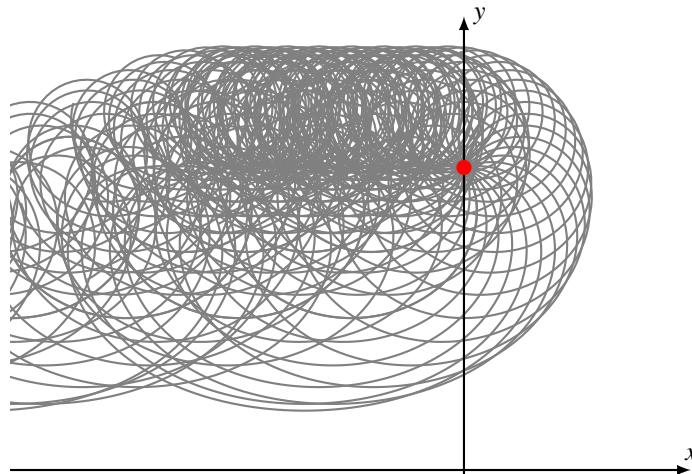


Abbildung 1.9: Lösungen der Differentialgleichung ausgehend vom Punkt  $(0, 4)$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $|\vec{v}| = 1$  und  $f = 0.26$ . Die Bahnkurven sind immer nach rechts gekrümmmt und bleiben in der oberen Halbebene.

Um einen Überblick über die möglichen Lösungskurven zu erhalten, berechnen wir numerisch die vom Punkt  $(0, 4)$  ausgehenden Lösungskurven der Differentialgleichung 1.12. Je grösser  $f$  ist, desto stärker gekrümmmt sind die Lösungskurven. Solange die Kurven in der oberen Halbebene  $y > 0$  liegen sind die Kurven nach rechts gekrümmmt. Für genügend grosses  $f$  bleiben alle Kurven in der oberen Halbebene wie in Abbildung 1.9, unabhängig von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit. Für kleinere Werte von  $f$  wie in Abbildung 1.10 gelangen einzelne Bahnkurven in die untere Halbebene wo die Krümmung der Kurve von rechts auf links kehrt.

Man beachte, dass diese Bahnkurven nicht Stromlinien einer Strömung sind, da sich diese nicht kreuzen können. Dieses einfache Modell ist also nicht geeignet, die tatsächliche Bewegung der Luftmassen darzustellen, dazu müssen wir die Gleichungen der Fluidodynamik in Kapitel 2.

## Meeresströmungen

Meeresströmungen leisten einen bedeutenden Beitrag zum Klima, weil sie dank der hohen Wärmekapazität von Wasser auch bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit und sehr viel kleinerem bewegtem Volumen als bei den atmosphärischen Strömungen eine grosse Energiemenge transportieren können.

### 1.2.4 Periodische Einflüsse

Das Klimasystem ist einer Reihe von sich periodisch verändernden Einflüssen ausgesetzt. Viele dieser Einflüsse erscheinen auf den ersten Blick geringfügig und damit vernachlässigbar. Doch wenn ein solcher periodischer Einfluss mit einer Frequenz auftritt, der einer Eigenfrequenz des Klimasystems entspricht, dann kann sich in Folge eines Resonanzeffektes über längere Zeit ein bedeutender Einfluss auf das Klima manifestieren. Es ist daher wichtig, auch kleine Einflüsse zu kennen und insbesondere alle Aspekte des Klimasystems zu modellieren, die eine Eigenfrequenz in der Nähe ihrer Anregungsfrequenzen haben.

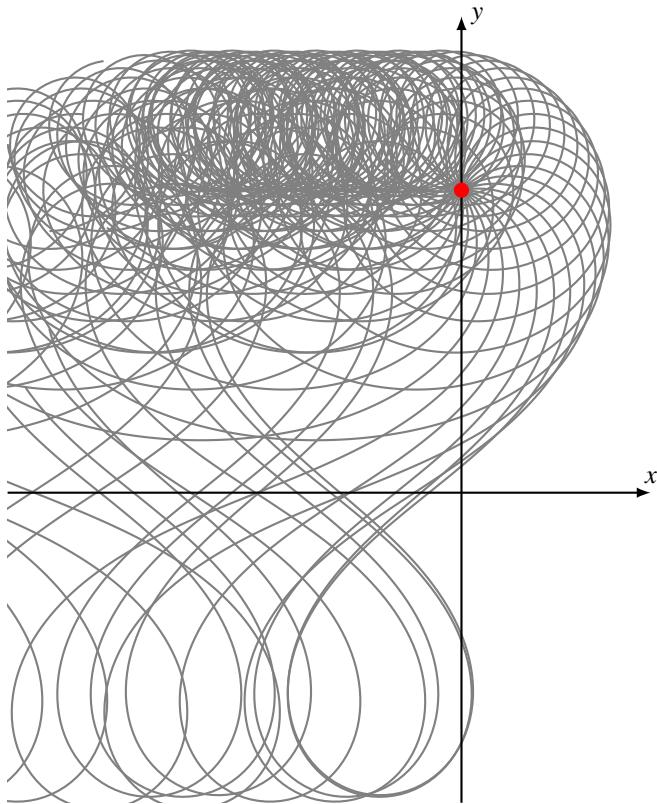


Abbildung 1.10: Lösungen der Differentialgleichung ausgehend vom Punkt  $(0, 4)$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $|\vec{v}| = 1$  und  $f = 0.22$ . Einzelne Bahnkurven kreuzen die  $x$ -Achse und krümmen sich in der unteren Halbebene dann links.

### Sonnenfleckencyklus

Die Strahlung der Sonne ist nicht konstant. Wie bei jedem Stern dieser Klasse nehmen Durchmesser und Temperatur der Sonne über die Jahrtausende in dem Mass zu, dass neben der Fusion von Wasserstoff zu Helium auch noch Fusionsprozesse schwerer Elemente eine Rolle zu spielen beginnen. Dieser sehr langfristige Einfluss ist jedoch nur wesentlich für den Vergleich von Klimamodellen mit Daten über das Klima auf der sehr jungen Erde.

Für kurzfristige Prognosen von Bedeutung sind dagegen die Schwankungen der Sonnenaktivität. Die Zahl der Sonnenflecken ist ein leicht zu messender Indikator dafür, für den Aufzeichnung seit dem 17. Jahrhundert existieren. Die Sonnenfleckenzahl schwankt mit einer Periode von etwa elf Jahren. Die daraus resultierende Änderung der Einstrahlung ist jedoch nur 0.07%, so dass die Sonnenaktivität nicht für den Klimawandel verantwortlich gemacht werden kann. Die schwankende Sonnenaktivität muss jedoch bei der Validierung von Klimamodellen berücksichtigt werden.

## Bahnänderungen der Erde

Nach Kepler bewegen sich die Planeten auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Die keplerschen Gesetze der Planetenbahnen können aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz hergeleitet werden [skript:joos]. Die Bahnelemente beschreiben die Ebene, in der sich der Planet bewegt, die Richtung und der Zeitpunkt der grössten Annäherung an die Sonne und die Exzentrizität der Ellipse.

Es trifft exakt jedoch nur dann zu, wenn keine anderen Kräfte auf den Planeten wirken als die Anziehungskraft der Sonne. Newtons Gravitationsgesetz besagt jedoch, dass auch alle anderen Planeten durch ihre Schwerkraft auf die Erde einwirken. Dies äussert sich darin, dass die Bahnelemente, sich mit der Zeit ändern. Diese langsame Veränderung der Bahnelemente war schon Newton bekannt, er hat daraus geschlossen, dass das Sonnensystem mit der Zeit völlig zerfallen würde. Genauere Untersuchungen und numerische Rechnungen zeigen jedoch, dass unser Sonnensystem über lange Zeit stabil ist. Die Exzentrizität zum Beispiel der Erdbahn kann sich tatsächlich verändern, aber über längere Zeit wird die Veränderung auch wieder rückgängig gemacht.

Veränderungen der Erdbahn, insbesondere der Exzentrizität, oder der Neigung der Erdachse zur Bahn äussern sich darin, dass die Einstrahlung über das Jahr stärker oder weniger stark schwankt oder auch im Mittel grösser oder kleiner wird. Dadurch können sich die Temperaturunterschiede zwischen den Polgebieten und äquatorialen Breiten verändern und damit die Intensität des Wettergeschehens beeinflusst werden. Ein langfristiges Klimamodell muss also auch diese Änderungen modellieren.

Es stellt sich allerdings heraus, dass diese Veränderungen sehr viel langfristiger sind als der die meisten Klimapolitiker interessierenden Zeitraum von wenigen Jahrhunderten. Die Berücksichtigung dieser Effekte dient daher vor allem dazu die Klima-Modelle mit der Klimgeschichte der Erde zu vergleichen und damit zu validieren. In Kapitel 6 wird gezeigt, wie periodische Einflüsse modelliert und mit Hilfe der Fourier-Theorie analysiert werden können.

## 1.3 Anforderungen an Klima-Modelle

Aus der vorangegangenen Diskussion können wir einige Anforderungen ableiten, was Klimamodelle können müssen, was sie berücksichtigen müssen und welche Aspekte sie vernachlässigen können.

Das Ziel ist die Modellierung der Klima-Entwicklung über wenige hundert Jahre. Es ist jedoch nicht erforderlich, den vollständigen Zustand der Atmosphäre von Tag zu Tag zu modellieren. Es genügt diejenigen Eigenschaften zu modellieren, die für den Energiehaushalt der Erde wesentlich sind. Dazu gehören die folgenden Eigenschaften.

1. Der Strahlungshaushalt der Erde muss korrekt modelliert werden, da dies die global Mitteltemperatur bestimmt. Dies bedeutet insbesondere auch, dass die Albedo sowie der Gehalt an Treibhausgasen korrekt wiedergeben werden.
2. Die Albedo der Erde muss modelliert sein. D. h. der durchschnittliche Vereisungsgrad und die Häufigkeit und Dichte von Bewölkung muss korrekt wiedergeben sein.
3. Strahlungs- und Wasserhaushalt der Atmosphäre unterscheiden sich über Kontinenten und über den Ozeanen. Das Modell muss daher räumlich genügend aufgelöst sein, dass die für den Energiehaushalt wesentlichen Unterschiede abgebildet werden können.

4. Die Energietransportmechanismen müssen für Zeitskalen in der Größenordnung von Jahren und Jahrzehnten korrekt modelliert sein, weil dies die Verteilung der Energie über die Erdoberfläche festlegt.
5. Wasser in der Atmosphäre hat einerseits einen grossen Einfluss auf den Treibhauseffekt, übernimmt aber auch für einen wesentlichen Teil des Energietransports in der Atmosphäre. Daher muss der Wassergehalt durch die Modelle mindestens in seiner Wirkung auf den Energietransport und den Treibhauseffekt ziemlich genau wiedergegeben werden.
6. Der Salzgehalt der Meere treibt die thermohaline Zirkulation an, welche auf einer Zeitskala von Jahrzehnten einen wesentlichen Beitrag zum Energietransport in den Ozeanen leistet. Salzgehalt und Verdunstung an der Meeresoberfläche müssen so genau modelliert sein, dass diese Energieströme korrekt modelliert werden.

Um die Auswirkungen des Klimawandels zu verstehen muss man vorhersagen, wie sich kurzfristige Wetterphänomene verändern. Dazu kann man gewöhnliche Wettermodelle verwenden, die sowohl zeitlich wie auch räumlich eine bessere Auflösung haben. Man kann aber gewisse qualitative Aussagen auch ohne solche detaillierten Modelle machen. Ein höherer Wassergehalt der Atmosphäre wird zum Beispiel zunächst zu stärkeren Niederschlägen führen. Da aber auch mehr Energie in Form von latenter Wärme zur Verfügung steht, muss man auch mit stärkeren Winden rechnen. Zum Beispiel muss man also damit rechnen, dass Hurrikane intensiver werden.

### 1.3.1 Validierung von Klimamodellen

Wie können wir überprüfen, ob wir die wesentlichen Einflussfaktoren auf das Klimasystem und ihre Auswirkungen verstanden haben? Warum sollen wir den Prognosen der Klimamodelle überhaupt glauben? Wir können ja nicht wie bei einem Laborexperiment ein paar Parameter verändern, nachmessen, wie das System sich verändert, und überprüfen, ob die Änderungen mit den Vorhersagen des Modells übereinstimmen.

#### Vergleich mit anderen Planeten

Im Sonnensystem stehen uns die sechs Planeten Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun mit einer Atmosphäre und der Saturnmond zur Verfügung, um Klimamodelle damit zu überprüfen. Die Verhältnisse auf diesen Planeten sind zwar zum Teil extrem verschieden von der Situation auf der Erde. Die grundlegenden physikalischen Prozesse sind jedoch die selben. Die Modelle, die wir für die Erde entwickeln, sollten daher auch die Situation auf diesen Planeten wiedergeben können. Tun sie dies nicht, ist dies in Indiz dafür, dass uns ein wesentlicher Klimafaktor entgangen ist, der zum Beispiel in der zukünftigen Klimaentwicklung eine Rolle spielen könnte.

Als Beispiel betrachten wir den Planeten Venus. Die Venus ist etwa gleich gross wie die Sonne, ist aber von Wolken bedeckt und hat daher eine wesentlich höhere Albedo. Die mittleren Entfernung von Venus und Erde zur Sonne verhalten sich wie

$$a_{\varphi} : a_{\odot} = 0.72,$$

die Solarkonstante für die Venus ist also 1.92 mal grösser. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz müsste die Venus im Vergleich zur Erde nur etwa 17% wärmer sein, um die im visuellen Bereich absorbiert Energie im infraroten wieder abzustrahlen. Wir würden also eine Temperatur von  $1.17 \cdot 287\text{K} = 336\text{K}$  erwarten. Die tatsächlich Oberflächentemperatur ist mit 737 K jedoch viel höher.

Daran kann man bereits erkennen, dass die Venus einen wesentlich stärkeren Treibhauseffekt haben muss, der nach einer Erklärung verlangt.

Andererseits hat der Planet Mars eine 1.52mal grössere mittlere Entfernung und damit ist die Einstrahlung dort nur 43% von der Einstrahlung auf der Erde. Wieder nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz würde dies verlangen, dass die Temperatur etwa 80% der Temperatur der Erde betragen müsste, also etwa  $0.8 \cdot 287\text{K} = 224.9\text{K}$ , was recht genau der beobachteten Temperatur von 218K entspricht. Der Treibhauseffekt ist auf dem Mars also wesentlich geringer, was vor allem auf die sehr viel dünnere Atmosphäre zurückzuführen ist.

Tatsächlich besteht die Venusatmosphäre zu 96% aus Kohlendioxid und hat eine sehr viel höhere Dichte, was den intensiveren Treibhauseffekt erklären kann.

### Vergleich mit der Vergangenheit

Die Erdatmosphäre hat sich im Laufe der Erdgeschichte stark verändert. Die jüngere Geschichte kann zum Beispiel aus Bohrkernen aus antarktischem Eis rekonstruiert werden. Für die Frühgeschichte der Erdatmosphäre gibt es keine solchen direkten Messungen.

Die chemischen Verwitterungsprozesse hängen jedoch von der chemischen Zusammensetzung und Temperatur der Atmosphäre ab. Aus der beobachteten Zusammensetzung von Verwitterungsprodukten und Sedimenten kann man also Rückschlüsse darauf ziehen, was für Verhältnis im Zeitpunkt der Entstehung dieser Sedimente vorgeherrscht haben müssen.

## 1.3.2 Klimageschichte der Erde



# Kapitel 2

## Fluidodynamik

Die Atmosphäre und die Ozeane unterschieden sich in ihren für das Studium von Wetter und Klima wesentlichen Eigenschaften ganz beträchtlich. Das Wasser der Ozeane ist fast inkompressibel, seine Dichte hängt aber von der Temperatur und dem Salzgehalt ab. Wasser hat eine sehr grosse Wärmekapazität, außerdem kann Wärme durch Verdunstung aus den Ozeanen in die Atmosphäre übergehen, wobei gleichzeitig die Salzkonzentration steigt.

Die Atmosphäre auf der anderen Seite hat eine wesentlich geringere Dichte und Wärmekapazität, ihre Temperatur kann sich daher sehr viel schneller ändern. Sie ist stark kompressibel. Wegen der geringeren Dichte kann die Atmosphäre sehr viel höhere Strömungsgeschwindigkeiten erreichen.

Trotz dieser grossen Unterschiede lassen sich Atmosphäre und Ozeane beide als Fluide mit den gleichen partiellen Differentialgleichungen beschreiben, die im folgenden hergeleitet werden sollen. Die Unterschiede äussern sich vor allem in den Zustandsgleichungen, die die Zustandsgrössen Druck, Temperatur, Dichte und Saltzgehalt miteinander in Beziehung setzen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels sollen die Grundgleichungen der Fluidodynamik zusammengestellt werden. Im zweiten Teil wird am Beispiel des Lorenz-Systems gezeigt, dass die Gleichungen der Fluidodynamik trotzdem nur beschränkt eine exakte Prognose des Wetters gestatten können.

### 2.1 Fluidodynamik

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass das Fluid beschrieben wird durch Funktionen der Raumkoordinaten ( $x, y, z$ ) und der Zeit  $t$ , wobei wir meistens darauf verzichten, die unabhängigen Variablen auszuschreiben. Die Temperatur  $T$  ist also zu lesen als die Funktion  $T(x, y, z, t)$ . Die Newtonschen Bewegungsgleichungen stellen eine Verbindung zwischen Masse, Beschleunigung und Kraft her, wir können daher davon ausgehen, dass die Bewegungsgleichungen eines Fluides nur die Dichte  $\varrho$  und den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  involvieren. Den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur, Dichte und möglicherweise weiteren Eigenschaften wird durch Zustandsgleichungen vermittelt.

#### 2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung drückt aus, dass Materie nicht einfach neu entstehen oder verschwinden kann. Um sie herzuleiten, betrachten wir ein Volumen  $V$  des Fluids. Die Masse im Inneren des

Volumens wird bestimmt durch das Volumenintegral

$$m = \iiint_V \varrho \, dx \, dy \, dz.$$

Ein kleiner Quader mit den Abmessungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  enthält die Masse

$$m = \varrho \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Wenn sich die Masse in dem Quader ändert, dann muss Materie durch die Wände zu- oder abfließen. Wir berechnen daher für jede Wand des Quaders, wie gross der Massefluss durch die Wand in einer Zeiteinheit  $\Delta t$  ist.

Durch ein Rechteck mit Abmessungen  $\Delta y \times \Delta z$  senkrecht zur  $x$ -Achse fliesst in der Zeit  $\Delta t$  das Volumen  $v_x \Delta x \Delta y \Delta z$  und damit die Masse

$$\varrho v_x \Delta y \Delta z. \quad (2.1)$$

Die Dichte  $\varrho$  und die Geschwindigkeit  $v_x$  sind dabei an der Koordinate  $x$  zu nehmen. Durch die Wand des Quaders bei  $x + \Delta x$  fliesst eine Masse, die ebenfalls durch den Ausdruck (2.1) beschrieben werden kann, jedoch für die  $x$ -Koordinaten  $x + \Delta x$ . Um die Massenänderung im Quader zu bestimmen, sind diese beiden Ausdrücke als mit entgegengesetzten Vorzeichen zu berücksichtigen.

Die Massenänderung ist daher

$$\begin{aligned} \Delta m &= \varrho(x, y, z, t)v_x(x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t - \varrho(x + \Delta x, y, z, t)v_x(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y \Delta z \Delta t \\ &\quad + \varrho(x, y, z, t)v_y(x, y, z, t)\Delta x \Delta z \Delta t - \varrho(x, y + \Delta y, z, t)v_y(x, y + \Delta y, z, t)\Delta x \Delta z \Delta t \\ &\quad + \varrho(x, y, z, t)v_z(x, y, z, t)\Delta x \Delta y \Delta t - \varrho(x, y, z + \Delta z, t)v_z(x, y, z + \Delta z, t)\Delta x \Delta y \Delta t. \end{aligned}$$

Wir fassen die Terme zu gegenüberliegenden Wänden zusammen wobei wir das Produkt  $\Delta x \Delta y \Delta z$  ausklammern können. Wir teilen ausserdem durch  $\Delta t$ , um die zeitliche Massenänderungsrate zu erhalten.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m}{\Delta t} &= - \left( \frac{\varrho(x + \Delta x, y, z, t)v_x(x + \Delta x, y, z, t) - \varrho(x, y, z, t)v_x(x, y, z, t)}{\Delta x} \right. \\ &\quad + \frac{\varrho(x, y + \Delta y, z, t)v_y(x, y + \Delta y, z, t) - \varrho(x, y, z, t)v_y(x, y, z, t)}{\Delta y} \\ &\quad \left. + \frac{\varrho(x, y, z + \Delta z, t)v_z(x, y, z + \Delta z, t) - \varrho(x, y, z, t)v_z(x, y, z, t)}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

Da  $\Delta m = \varrho \Delta x \Delta y \Delta z$  können wir auf beiden Seiten durch  $\Delta x \Delta y \Delta z$  dividieren. Um die zeitliche Änderung zu bestimmen, müssen wir ausserdem durch  $\Delta t$  dividieren. Lassen wir die Inkremente  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  und  $\Delta t$  gegen 0 gehen, werden aus den Differenzenquotienten Ableitungen. Wir erhalten daher die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \varrho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho v_z}{\partial z} \right). \quad (2.2)$$

Die rechte Seite kann mit Hilfe des *Nabla-Operators*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

kürzer geschrieben werden. Der Nabla-Operator wird wie ein Vektor behandelt. Für eine (skalare) Funktion  $f$  ist  $\nabla f$  ein Vektor, der *Gradient* der Funktion  $f$ . Das Skalarprodukt  $\nabla \cdot \vec{v}$  ist ein Skalar, die *Divergenz* eines Vektorfeldes  $\vec{v}$ , sie wird manchmal auch  $\operatorname{div} \vec{v}$  geschrieben. Aus (2.2) wird dann

$$\frac{\partial \underline{\varrho}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\underline{\varrho} \vec{v})$$

geschrieben werden.

## 2.1.2 Inkompressible Strömung

Bei einem inkompressiblen Fluid ist die Dichte eine Konstante, alle Ableitungen von  $\varrho$  verschwinden. Die Kontinuitätsgleichung wird damit zu

$$\frac{\partial \underline{\varrho}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\underline{\varrho} \vec{v}) = -\nabla \varrho \cdot \vec{v} - \varrho \nabla \cdot \vec{v} = -\varrho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

In einer inkompressiblen Strömung verschwindet daher die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes.

### Verallgemeinerung

Die Herleitung der Kontinuitätsgleichung für die Massedichte funktioniert auch für jede andere Erhaltungsgröße, die im Fluid mit einer Dichte  $a(x, y, z, t)$  vorhanden ist und mit der Strömung mittransportiert wird. Die *verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung* für die Erhaltungsgröße  $a$  ist daher

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\nabla \cdot (a \vec{v}). \quad (2.3)$$

## 2.1.3 Bewegungsgleichung

Das zweite Newtonsche Gesetz  $F = ma$  besagt, dass Kraft und Beschleunigung proportional sind. Dies gilt jedoch nur, wenn die Masse unveränderlich ist. Genauer besagt Newtons zweites Gesetz, dass die Kraft die zeitliche Änderung des Impulses ist, also

$$F = \frac{d}{dt}(m \vec{v}).$$

Ein Volumen des Fluides kann wegen veränderlicher Dichte seine Masse verändern. Kräfte auf das Fluid ändern daher die Impulsdichte des Fluids.

### Impulsdichte

Die Impulsdichte des Fluids wird an jeder Stelle durch die Größe  $\vec{p} = \varrho \vec{v}$  gegeben. Das zweite Newtonsche Gesetz besagt dann, dass die Änderung von  $\vec{p}$  durch die äusseren Kräfte  $\vec{b}$  bestimmt wird, die auf das Fluid wirkt. Der Impuls in einem Volumen kann aber auch ändern, dass das Fluid Impuls in das Volumen hinein- oder aus dem Volumen heraustransportiert. Jede Komponente des Impulses ist eine Erhaltungsgröße, für die ohne Wirkung äusserer Kräfte die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung (2.3) gilt. Für die  $x$ -Komponente des Impulses gilt daher die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) + \varrho b_x,$$

und analog für die anderen Komponenten  $\varrho v_y$  und  $\varrho v_z$  der Impulsdichte.

## Innere Kräfte

Damit sind aber innere Kräfte im Fluid noch nicht berücksichtigt. Das Fluid widerersetzt sich zum Beispiel der Kompression, dies äussert sich im Druck, der jeweils senkrecht auf den Wänden des Volumens wirkt. In einem zähen Medium sind aber auch Kräfte parallel zu den Wänden möglich, sogenannte *Scherkräfte*. Im Allgemeinen wirkt auf ein  $\Delta y \times \Delta z$ -Rechteck senkrecht zur  $x$ -Achse die Kraft

$$\vec{\tau}_x \Delta y \Delta z = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \Delta y \Delta z$$

und analog für die Wände senkrecht auf der  $y$ - bzw.  $z$ -Achse. Die diagonalen Komponente  $\tau_{ii}$  beschreiben die Druckkraft auf die jeweilige Seitenfläche, während die ausserdiagonalen Elemente Scherkräfte beschreiben.

Die Matrix  $\tau$  mit Komponenten  $\tau_{ij}$  heisst auch der *Cauchy-Spannungstensor*. Wir werden weiter unten (Seite 29) zeigen, dass  $\tau_{ij}$  symmetrisch sein muss. Dass  $\tau_{ij}$  ein Tensor ist, ist für die weiteren Erörterungen nicht von Bedeutung, wir werden daher diesen Begriff verwenden, ohne ihn wirklich zu definieren.

Die resultierende Kraft  $\vec{F}$  auf einen Quader mit den Kantenlängen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  hat daher die  $i$ -Komponente

$$\begin{aligned} F_x &= (\tau_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) - \tau_{xx}(x, y, z, t))\Delta y \Delta z \\ &\quad + (\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t))\Delta x \Delta z \\ &\quad + (\tau_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) - \tau_{zx}(x, y, z, t))\Delta x \Delta z \\ &= \left( \frac{\tau_{xx}(x + \Delta x, y, z, t) - \tau_{xx}(x, y, z, t)}{\Delta x} + \frac{\tau_{yx}(x, y + \Delta y, z, t) - \tau_{yx}(x, y, z, t)}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_{zx}(x, y, z + \Delta z, t) - \tau_{zx}(x, y, z, t)}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Die Kraftdichte  $f_i$  erhalten wir nach Division durch  $\Delta x \Delta y \Delta z$  und Grenzübergang, sie ist

$$f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Wir können damit die vollständige Bewegungsgleichung für das Fluid hinschreiben, sie lautet

$$\frac{\partial \varrho v_x}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) + \varrho b_x + f_x. \quad (2.5)$$

## Vektorschreibweise

Die Schreibweise (2.5) für die Bewegungsgleichungen ist sehr schwerfällig und passt nicht zu der deutlich eleganteren vektoriellen Schreibweise zum Beispiel der Kontinuitätsgleichung. Die linke Seite von (2.5) und der mittlere Term auf der rechten Seite können natürlich sofort in eine vektorielle Schreibweise überführt werden, nicht jedoch die anderen zwei Terme.

Der Term  $\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v})$  ist ausgeschrieben

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho v_x v_z).$$

Dieser Ausdruck sieht ganz ähnlich aus wie der Ausdruck (2.4) für die  $x$ -Komponente der Kraftdichte der inneren Kräfte. Wir können die Ähnlichkeit formal noch etwas klarer machen. Schreiben wir  $A_{xy} = \varrho v_x v_y$ , dann ist

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_{xi}}{\partial i}.$$

Da es offenbar auf die Reihenfolge der Indizes von  $A$  nicht ankommt, ist dies auch das gleiche wie

$$\nabla \cdot (\varrho v_x \vec{v}) = \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_{ix}}{\partial i}.$$

Wir können daher die Wirkung des Nabla-Operators  $\nabla$  auf einer symmetrischen Matrix  $A$  wie folgt definieren:

**Definition 2.1.** Ist  $A_{ij}$  eine symmetrische Matrix, dann ist die Divergenz  $\nabla \cdot A$  von  $A$  der Vektor mit den Komponenten

$$(\nabla \cdot A)_x = \sum_i \frac{\partial A_{ix}}{\partial i}.$$

Falls die Matrix  $\tau_{ij}$  symmetrisch ist, kann diese Definition auch auf  $\tau$  angewendet werden. Die  $x$ -Komponente der Divergenz von  $\tau$  ist dann

$$(\nabla \cdot \tau)_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = f_x.$$

Dies ist genau der letzte Term in der Gleichung (2.5).

Wir brauchen jetzt nur noch eine kompaktere Notation für die Matrix  $\varrho v_x v_y$ .

**Definition 2.2.** Das Kronecker-Produkt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist die Matrix  $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^t$  mit den Komponenten

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i b_j = (\vec{a} \vec{b}^t)_{ij}$$

Abgekürzt erlauben wir die Schreibweise  $\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$ .

Mit diesen Notationen bekommen wir jetzt die Bewegungsgleichungen in Vektorform. Sie lauten

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v} \vec{v}) + \varrho \vec{b} + \nabla \cdot \tau. \quad (2.6)$$

Dies ist die *Navier-Stokes Gleichung*. Die drei Terme beschreiben die Impulsänderung durch den Zu- oder Abtransport von Impuls durch die Strömung, durch die äusseren Kräfte bzw. die inneren Spannungen.

### Symmetrie des Spannungstensors

In diesem Abschnitt wollen wir nachweisen, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Dazu betrachten wir das Drehmoment, welches die Scherkräfte auf einen kleinen Würfel mit Kantenlänge  $2l$  ausüben (Abbildung 2.1).

Der Würfel hat die Masse  $m = \varrho(2l)^3$ . Das Trägheitsmoment eines Würfels mit Masse  $m$  und Kantenlänge  $2l$  ist

$$I_z = \frac{1}{12}m((2l)^2 + (2l)^2) = \frac{1}{12}\varrho 8l^3 \cdot 8l^2 = \frac{16}{3}\varrho l^5.$$

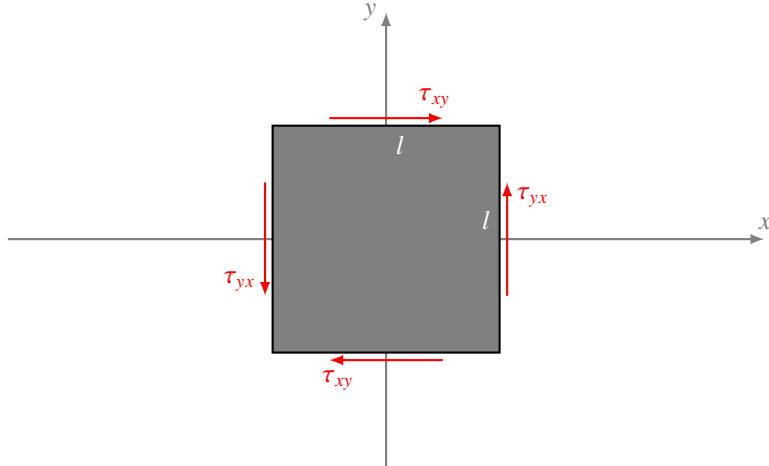


Abbildung 2.1: Drehmoment um die  $z$ -Achse der Schwerkräfte auf einen Würfel mit Kantenlänge  $2l$ . Gezeigt sind nur die Komponenten von  $\tau$ , die zu einem Drehmoment führen.

Der Drehimpuls um die  $z$ -Achse ist  $L_z = I_z \omega$ .

Aus Abbildung 2.1 kann man die Scherkräfte auf den Seitenflächen ablesen, sie sind  $\tau_{xy}4l^2$  bzw.  $\tau_{yx}4l^2$ , ihr Hebelarm ist  $l$ . Das resultierende Drehmoment um die  $z$ -Achse ist daher

$$M_z = 8l^3\tau_{xy} - 8l^3\tau_{yx}.$$

Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers besagen jetzt, dass für die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Würfels um die  $z$ -Achse die Gleichung

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad \Rightarrow \quad I_z \dot{\omega} = M_z \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{M_z}{I_z} = \frac{8l^3(\tau_{xy} - \tau_{yx})}{\frac{16}{3}l^5} = \frac{3}{2l^2}(\tau_{xy} - \tau_{yx}).$$

Wir nehmen an, es sei  $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$ . Lässt man  $l$  gegen 0 gehen, folgt die Aussage, dass die Winkelgeschwindigkeit eines sehr kleinen Würfels im Fluid sich mit beliebig schnell anwachsender Winkelgeschwindigkeit drehen müsste. Dieses unphysikalische Resultat erlaubt zu schliessen, dass  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sein muss und dass nur ein symmetrischer Spannungstensor ein physikalisches Fluid beschreibt.

## Druck und Spannungen

Die Diagonalelemente des Spannungstensors  $\tau$  beschreiben Normalkräfte auf ein Volumenelement des Fluids. Im Gleichgewicht sind sie alle gleich gross und stimmen mit dem negativen (*hydrostatischen*) Druck überein, wir setzen daher

$$p = -\frac{1}{3} \text{ Spur } \tau.$$

Wir können daher  $\tau$  zerlegen in eine Diagonalmatrix mit Elementen  $-p$  auf der Diagonalen und eine spurlose Matrix

$$\tau = -pE + \sigma,$$

$E$  ist die Einheitsmatrix. Die spurlose symmetrische Matrix  $\sigma$  heisst auch *Spannungsdeviator*.

Für die Bewegungsgleichung brauchen wir die Divergenz beider Terme. Die Druckterme sind alle gleich, nach Definition 2.1 ist

$$(\nabla \cdot (pE))_x = \sum_i \frac{\partial p \delta_{xi}}{\partial i} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (pE) = \nabla p.$$

Damit wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \varrho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\varrho \vec{v} \vec{v}) + \varrho \vec{b} - \nabla p + \nabla \cdot \sigma \quad (2.7)$$

Die Scherkräfte sind in einem newtonischen Fluid proportional zu den Schergeschwindigkeiten. Man kann zeigen (siehe [skript:kaperengler]), dass  $\sigma$  geschrieben werden kann als

$$\sigma = 2\nu \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})E \right) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})').$$

Die spezielle Form von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ist notwendig, damit die Matrix  $\boldsymbol{\varepsilon}$  symmetrisch wird. Der zweite Term im Ausdruck von  $\sigma$  ist nötig, damit die Spur

$$\text{Spur } \sigma = 2\nu(\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \cdot \vec{v}) = 2\nu \frac{1}{2} \left( \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} - \nabla \cdot \vec{v} \right) = 0$$

von  $\sigma$  verschwindet.

Die Divergenz  $\nabla \cdot \sigma$  von  $\sigma$  kann damit explizit durch die Geschwindigkeit ausgedrückt werden. Wir berechnen die Divergenz der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_x &= \sum_i \frac{\partial \varepsilon_{ix}}{\partial i} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial i} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 v_x}{\partial i^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta v_x \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} \\ (\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v})E)_x &= \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (\nabla \cdot \vec{v} E)_{xi} = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} (\nabla \cdot \vec{v} \delta_{xi}) = \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v})E &= \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

und erhalten so für die Divergenz von  $\sigma$ :

$$\nabla \cdot \sigma = 2\nu \left( \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \nabla \cdot ((\nabla \cdot \vec{v})E) \right) = 2\nu \left( \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} - \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \quad (2.8)$$

$$= \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (2.9)$$

## Inkompressible Strömung

In einem inkompressiblen Fluid ist  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , dann fällt der zweite Term in (2.9) weg. Die Strömungsgleichung eines inkompressiblen Fluids erhält damit die einfache Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) + \vec{b} - \frac{1}{\varrho}(\nabla p - \nu \Delta \vec{v}), \quad (2.10)$$

die klassische Navier-Stokes Gleichung.

## 2.1.4 Zustandsgleichungen

Die Dichte hängt vor allem auch von der Temperatur ab. In den Ozeanen ändert die Dichte des Wassers mit dem Salzgehalt. Eine vollständige Beschreibung der Strömung in Ozeanen oder der Atmosphäre muss daher auch noch weitere Variablen modellieren. In Kapitel 1 haben wir bereits auf die Wärmeleitungsgleichungen hingewiesen.

Die Felder  $T$ ,  $p$  und  $\varrho$  sind bei einem idealen Gas miteinander durch die Zustandsgleichung

$$p = \varrho T R_s$$

mit der spezifischen Gaskonstante  $R_s$  verbunden. Für den Zusammenhang von Dichte, Temperatur und Salzgehalt gibt es jedoch kein derart einfaches Modell. Eine weitere Kopplung zwischen der Temperatur und der Strömung entsteht durch die Viskosität  $\nu$ , die sehr stark von der Temperatur abhängt. Auch dafür gibt es keine einfachen Modelle.

In vielen Fällen schwanken die physikalischen Größen nur geringfügig um einen Mittelwert. Zum Beispiel hängt die Dichte  $\varrho$  von Meerwasser sowohl von der Temperatur  $T$  als auch vom Salzgehalt  $h$  ab, die Dichte ist also eine Funktion  $\varrho(T, h)$ . Wir können  $\varrho$  als Taylorreihe um die mittlere Temperatur  $T_0$  und den mittleren Salzgehalt  $h_0$  entwickeln:

$$\varrho(T, h) = \varrho_0 - \alpha(T - T_0) + \beta(h - h_0).$$

In Klimamodellen betrachten wir typischerweise nur kleine Abweichungen von Mittelwerten, so dass ein solches Modell sehr erfolgreich sein kann.

## 2.1.5 Boussinesq-Approximation

Die Strömung in der Erdatmosphäre kann offensichtlich nicht als inkompressibel betrachtet werden, die Dichte ist offenbar nicht konstant. Der Zustand der Atmosphäre weicht jedoch nur wenig einem mittleren Dichteprofil  $\varrho_0$  ab, welches im wesentlichen durch das Temperaturprofil festgelegt ist. Im Normalzustand nimmt die Temperatur der Atmosphäre ziemlich genau linear ab bis zur Höhe der Thermopause. Auf die horizontale Komponente der Strömung hat eine Abweichung des Temperaturprofils kaum einen Einfluss, denn andere Terme der Navier-Stokes-Gleichung (2.7) sind bedeutender. Für die vertikale Bewegung ist der Term der äusseren Kräfte, nämlich die Schwerkraft, dominant. Wir können dies berücksichtigen, indem wir die Erdbeschleunigung  $g$  durch

$$g \frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{2.11}$$

ersetzen. Diese Approximation ist bekannt als die Boussinesq-Approximation. Für unsere Zwecke hier brauchen wir nicht mehr als (2.11). Dies wird bei der Herleitung der Lorenz-Gleichung in Abschnitt 2.2 benötigt. Für die vollständigen Boussinesq-Gleichungen siehe [[skript:kaperengler](#)].

## 2.1.6 Inkompressible zweidimensionale Strömung

Die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichung gelten auch für eine zweidimensionale Strömung. Im Allgemeinen ist die Strömung nicht wesentlich leichter zu berechnen. Nur im Falle einer inkompressiblen Strömung oder der Boussinesq-Approximation spielt die Dichte in den Gleichungen keine Rolle, was erlaubt, sie weiter zu vereinfachen:

$$0 = -\nabla \cdot \vec{v} \tag{2.12}$$

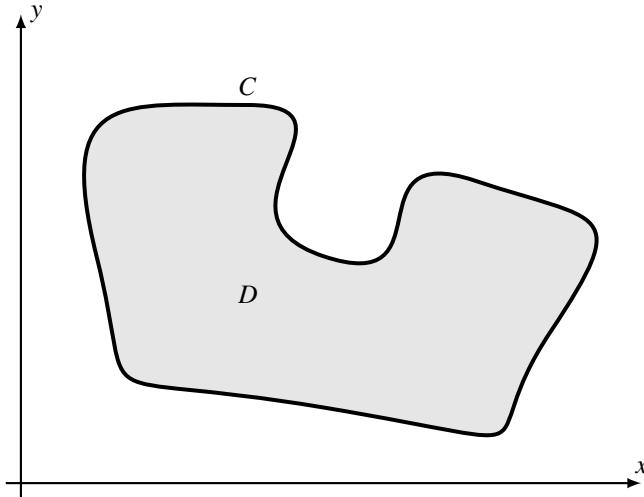


Abbildung 2.2: Satz von Green: Das Wegintegral entlang der Randkurve \$C\$ stimmt mit dem zweifachen Integral über \$D\$ überein.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) + \vec{b} + \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \tau. \quad (2.13)$$

Im Falle der Boussinesq-Approximation kommt auf der rechten Seite noch ein Term für die Auftriebskraft hinzu.

Die Gleichungen (2.12) und (2.13) bilden ein System von partiellen Differentialgleichungen für die zwei unbekannten Funktionen \$v\_x\$ und \$v\_y\$, die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die (2.12) ermöglicht, das System auf eine einzelne partielle Differentialgleichung für nur eine einzige Funktion zu reduzieren.

### Satz von Green

Die Kontinuitätsgleichung (2.12) ist ausgeschrieben

$$0 = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Die Divergenz auf der rechten Seite kommt auch im Satz von Green vor:

**Satz 2.3 (Green).** Sei \$D\$ in kompaktes Gebiet in der \$x\$-\$y\$-Ebene mit Rand \$\partial D = C\$. Weiter seien \$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}\$ stetige Funktionen, die in \$D\$ stetig differenzierbar sind. Dann gilt

$$\iint_D \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx dy = \oint_C (f(x, y) dx + g(x, y) dy) \quad (2.14)$$

(Abbildung 2.2).

Das Integral auf der rechten Seite wird mit Hilfe einer Parametrisierung \$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2\$ der Randkurve \$C\$ definiert.

$$\oint_C f(x, y) dx = \int_a^b f(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \dot{\gamma}_x(t) dt,$$

$$\oint_C g(x, y) dy = \int_a^b g(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \dot{\gamma}_y(t) dt.$$

Es kann auch vektoriell mit dem Skalarprodukt als

$$\oint_C \underbrace{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}}_{= \vec{w}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{pmatrix} dt = \oint_C \vec{w} \cdot \dot{\gamma}(t) dt =: \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{s}$$

geschrieben werden kann.

### Stromfunktion

Wir wenden den Satz 2.3 von Green auf die Funktionen  $f(x, y) = -v_y(x, y)$  und  $g(x, y) = v_x(x, y)$  an. Die Formel (2.14) ergibt

$$\oint_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \iint_D \underbrace{\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y}}_{= 0} dx dy = 0. \quad (2.15)$$

Man kann dieses Resultat auch wie folgt interpretieren. Wenn  $C_1$  und  $C_2$  zwei Kurven sind, die den Punkt  $A$  mit dem Punkt  $B$  verbinden, dann lässt sich eine geschlossene Kurve  $C$  konstruieren, indem zuerst die Kurve  $C_1$  von  $A$  nach  $B$  durchlaufen wird und dann die Kurve  $C_2$  in umgekehrter Richtung von  $B$  nach  $A$ . Die Formel (2.15) besagt dann, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) \\ &= \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) - \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) \end{aligned}$$

oder

$$\Rightarrow \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy).$$

Das Wegintegral hängt also nicht von der Wahl des Weges ab, jeder Weg von  $A$  nach  $B$  führt auf den gleichen Wert des Integrals.

Wir halten den Punkt  $A$  fest und definieren die Funktion

$$\psi(B) = \int_C (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy)$$

für einen beliebigen Weg von  $A$  nach  $B$ . Zum Beispiel können für die Berechnung die Kurven  $C_1$  oder  $C_2$  in Abbildung 2.3 verwendet werden. Damit lassen sich die Integrale ausschreiben:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \int_{C_1} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = - \int_{x_0}^x v_y(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y v_x(x, \eta) d\eta \\ &= \int_{C_2} (-v_y(x, y) dx + v_x(x, y) dy) = \int_{y_0}^y v_x(x_0, \eta) d\eta - \int_{x_0}^x v_y(\xi, y) d\xi. \end{aligned}$$

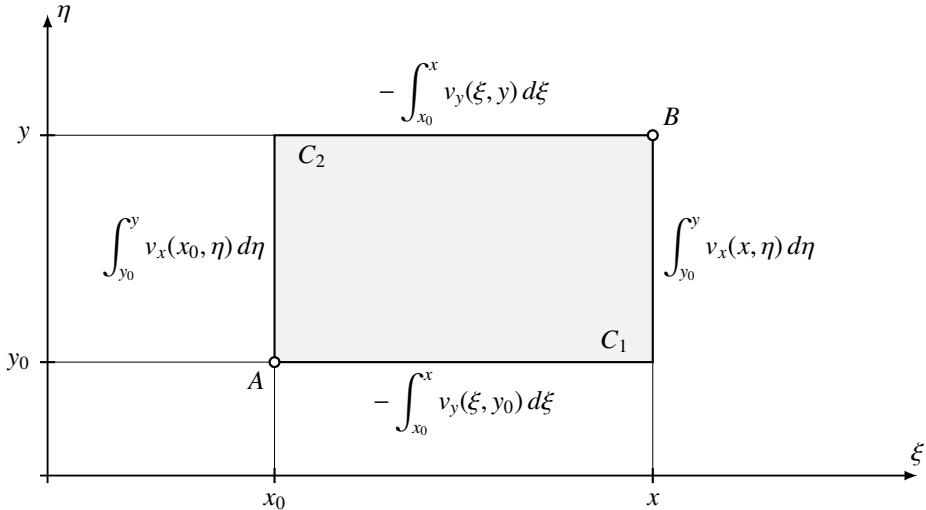


Abbildung 2.3: Verschiedene Pfade zur Berechnung der Funktion  $\psi(B)$  führen auf den gleichen Wert von  $\psi(B)$  und ermöglichen, die partiellen Ableitungen zu berechnen.

Diese Ausdrücke erlauben uns, die partiellen Ableitungen von  $\psi(x, y)$  zu berechnen. Für die Ableitung nach  $x$  verwenden wir den zweiten Ausdruck, für die Ableitung nach  $y$  den ersten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x v_y(\xi, y) d\xi = -v_y(x, y), \\ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y v_x(x, \eta) d\eta = v_x(x, y).\end{aligned}$$

In vektorieller Form kann man dies auch als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix} = J \nabla \psi \quad (2.16)$$

schreiben. Aus der Funktion  $\psi$  lässt sich das Vektorfeld  $\vec{v}$  also wieder rekonstruieren. Sie heisst die *Stromfunktion* des Vektorfeldes  $\vec{v}$ . Natürlich ist  $\psi(x, y)$  nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Umgekehrt ist für jede beliebige Funktion  $\varphi(x, y)$  das Vektorfeld  $\vec{u} = J \nabla \varphi$  divergenzfrei:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Die Darstellung (2.16) des Geschwindigkeitsfeldes erlaubt eine geometrische Interpretation. Der Gradient  $\nabla \psi$  ist ein Vektorfeld, welches auf den Niveaulinien der Funktion  $\psi$  senkrecht steht. Je schneller die Zunahme von  $\psi$ , desto grösser ist der Vektor  $\nabla \psi$ .

Die Matrix  $J$  ist eine Drehmatrix, sie dreht Vektoren um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn. Die Vektoren  $J \nabla \psi$  sind also tangential an die Niveaulinien, die Niveaulinien sind also gleichzeitig die Stromlinien der Strömung. Ist die Strömung auf ein kompaktes Gebiet beschränkt, dann ist der Rand des Gebietes eine Stromlinie, also eine Niveaulinie von  $\psi$ . Da  $\psi$  nur bis auf eine Konstante festgelegt

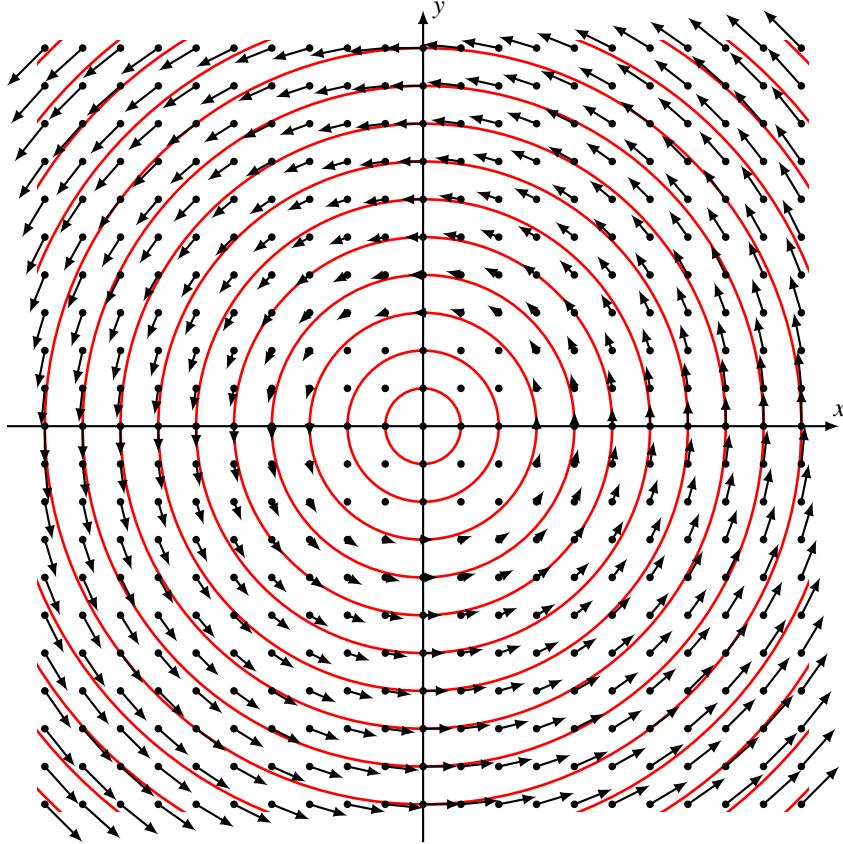


Abbildung 2.4: Strömungsfunktion  $\psi(x, y) = a(x^2 + y^2)$  und das zugehörige Vektorfeld. Die Strömungsgeschwindigkeit ist proportional zum Radius, es handelt sich also um eine starre Drehung um den Nullpunkt.

ist, kann man  $\psi$  so wählen, dass der Rand des Gebietes durch die Gleichung  $\psi(x, y) = 0$  beschrieben wird.

Die Funktion  $\psi(x, y) = a(x^2 + y^2)$  führt auf das Vektorfeld

$$\vec{v} = J\nabla\psi = 2a \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

(Abbildung 2.4). Die Strömungsgeschwindigkeit ist  $2a \sqrt{x^2 + y^2} = 2ar$ , es handelt sich also um eine starre Drehung um den Nullpunkt des Koordinatensystems mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2a$ .

## Vorticity

Wir suchen eine Grösse, mit der wir das Ausmass messen können, wie schnell sich das Fluid dreht. Die Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um den Punkt  $(x, y)$  können wir durch Vergleich der

Geschwindigkeit an den Punkten  $(x \pm h, y)$  und  $(x, y \pm h)$  finden. Es ist

$$\omega = \frac{v_y(x+h, y) - v_y(x-h, y)}{2h} = \frac{-v_x(x, y+h) + v_x(x, y-h)}{2h}.$$

Beim Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\omega = \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad 2\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Damit haben wir eine Grösse gefunden, die als Mass für die Drehgeschwindigkeit dienen kann.

**Definition 2.4.** Ist  $\vec{v}$  das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, dann schreiben wir

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \zeta.$$

Die Funktion  $\zeta$  heisst die Vorticity des Strömungsfeldes.

Beschreibt man die Strömung mit Hilfe der Strömungsfunktion, dann gilt für die Vorticity

$$\zeta = \nabla \times \vec{v} = \nabla \times J\nabla\psi = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta\psi. \quad (2.17)$$

Der Laplace-Operator verbindet also die Strömungsfunktion direkt mit der Vorticity. Für die Strömung in einem kompakten Gebiet  $\Omega$  ist der Rand eine Niveaulinie von  $\psi$ . Wie früher dargelegt können wir  $\psi$  so wählen, dass  $\psi = 0$  gilt auf dem Rand. Bei gegebener Vorticity  $\zeta$  ist daher  $\psi$  die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\psi = -\zeta \quad \text{in } \Omega \quad \psi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.18)$$

Die Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen sagt, dass  $\psi$  eindeutig bestimmt ist. Statt die Strömungsgleichungen für  $\psi$  zu lösen, können wir also auch versuchen, eine Gleichung für die Vorticity  $\zeta$  aufzustellen und dann mit Hilfe des elliptischen partiellen Randwertproblems (2.18) die Strömungsfunktion und schliesslich  $\vec{v}$  bestimmen.

Um die Differentialgleichung für  $\zeta$  zu finden, wenden wir den Operator  $\nabla \times$  auf die Bewegungsgleichung (2.13) an:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v})) + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\right).$$

Die linke Seite ist die Zeitableitung der Vorticity. Die Divergenz von  $\vec{v}\vec{v}$  ist

$$(\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}))_j = \sum_i \frac{\partial}{\partial i} v_i v_j = \left( \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial i} \right) v_j + \sum_i v_i \frac{\partial v_j}{\partial i} = (\underbrace{\nabla \cdot \vec{v}}_{=0}) v_j + \vec{v} \cdot \nabla v_j.$$

Es folgt

$$\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}.$$

Daraus kann man jetzt auch die Vorticity berechnen:

$$\nabla \times (\nabla \cdot (\vec{v}\vec{v})) = \nabla \times (\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \nabla v_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{v} \cdot \nabla v_x)$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{v} \cdot \nabla \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \nabla v_y - \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \nabla v_x \\
&= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} \\
&= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + \frac{\partial v_x}{\partial x} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial y} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
&= \vec{v} \cdot \nabla \zeta + (\nabla \cdot \vec{v}) \zeta = \vec{v} \cdot \nabla \zeta.
\end{aligned}$$

Wir waren also nicht ganz erfolgreich, die Geschwindigkeit aus der Bewegungsgleichung zu eliminieren. Wir haben nur die Form

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \zeta + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left( \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \tau \right)$$

erreicht. Ausserdem ist es möglich, dass die Spannungen  $\tau$  ebenfalls von den Geschwindigkeiten abhängig sind.

Wir können aber die Vorticity auch noch durch die Strömungsfunktion ausdrücken. Ersetzen wir  $\zeta = -\Delta \psi$  in der Bewegungsgleichung, erhalten wir

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = -J \nabla \psi \cdot \nabla \Delta \psi + \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left( \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \tau \right). \quad (2.19)$$

Jetzt ist die Strömung vollständig durch die einzige unbekannte Funktion  $\psi$ .

Der erste Term auf der rechten Seite von (2.19) kann noch etwas kompakter geschrieben werden. Es ist

$$(J \nabla f) \cdot (\nabla g) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite kommt auch in anderem Zusammenhang vor.

**Definition 2.5.** Seien  $f$  und  $g$  Funktionen der Variablen  $x$  und  $y$ . Dann heisst

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

die Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante von  $f$  und  $g$ .

Mit dieser Definition wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nabla \times \vec{b} + \nabla \times \left( \frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \tau \right) - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.20)$$

Im Falle der Boussinesq-Näherung kommt noch ein Term für den Auftrieb hinzu.

## Spannungen und Stromfunktion

Für eine newtonscche Flüssigkeit haben wir in (2.10) bereits den Spannungstensor durch den Druck und die Spannungen ausgedrückt. Aus der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit haben wir

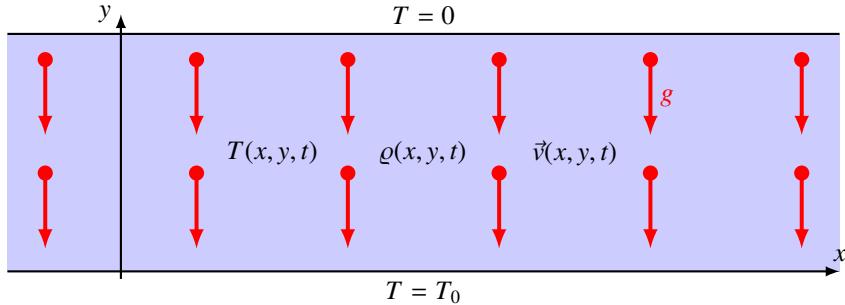


Abbildung 2.5: Definitionsgebiet für das Lorenz-Modell der Atmosphäre. Gesucht sind Temperatur  $T(x, y, t)$ , Dichte  $\varrho(x, y, t)$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}(x, y, t)$  in einem Rechteckgebiet  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ . Die Temperatur ist an den Rändern vorgegeben, es gilt  $T(x, 0, t) = T_0$  und  $T(x, \pi, t) = 0$ . Im Inneren Gebiet wird die Schwerkraft  $g$  auf die Luft.

die Differentialgleichung (2.20) erhalten, indem wir den Operator  $\nabla \times$  angewendet haben. Wir müssen jetzt also

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\varrho} (\nabla p - \nu \Delta \vec{v}) \right) = \frac{1}{\varrho} (\nabla \times \nabla p - \nu \nabla \times \Delta \vec{v}) = \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta \nabla \times \vec{v} \right)$$

berechnen. Der erste Term fällt weg, weil es auf die Reihenfolge der zweiten Ableitungen nicht ankommt. Im zweiten Term haben wir angenommen, dass  $\nu$  nicht vom Ort abhängig. Dies ist genau genommen nicht richtig, da  $\nu$  zum Beispiel stark von der Temperatur abhängt, die ebenfalls nicht konstant sein muss. Der zweite Term in der Klammer ist natürlich einfach  $\nu \Delta \zeta = -\nu \Delta^2 \psi$ . Damit bekommen wir die Bewegungsgleichung für  $\psi$  in der Form

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nabla \times \vec{b} + \frac{\nu}{\varrho} \Delta^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.21)$$

## 2.2 Lorenz-Modell

Sowohl die Atmosphäre als auch die Ozeane werden durch die hydrodynamischen Gleichungen beschrieben. Es stellt sich damit die Frage, in welchem Masse sich daraus eine praktikable Vorhersage sowohl von Wetter also auch des Klimas ableiten lässt. In den Sechzigerjahren hat Edward Lorenz versucht, diese Frage mit einem vereinfachten Modell zu beantworten. Ziel dieses Abschnittes ist, das Lorenz-Modell aus den Gleichungen der Fluidodynamik herzuleiten.

### 2.2.1 Modellbeschreibung

Es soll ein dünner Schnitt durch die Atmosphäre modelliert werden. Da die Atmosphäre im Vergleich zur Krümmung der Erdoberfläche sehr dünn ist, können wir sie als eben annehmen. Wir verwenden die Koordinate  $x$  parallel zur Erdoberfläche und  $y$  als Höhe (Abbildung 2.5). Gesucht ist also die Temperatur  $T(x, y, t)$  und die Dichte  $\varrho(x, y, t)$  in Abhängigkeit von Position und Zeit sowie der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

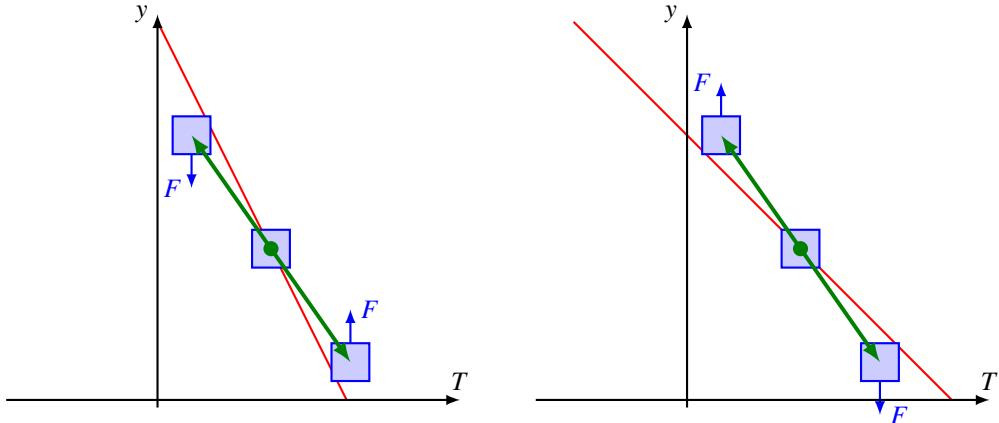


Abbildung 2.6: Stabilität der Atmosphäre: bewegt sich ein Luftpaket in der Atmosphäre nach oben oder unten, expandiert oder kontrahiert es und verändert seine Temperatur adiabatisch (grün). Ist diese Temperaturänderung grösser als der aktuelle Temperaturgradient (links), ändert sich die Dichte der Luft weniger stark als die der Umgebungsluft, die Bewegung wird gestoppt, die Atmosphäre ist im Gleichgewicht. Andernfalls wird die Bewegung beschleunigt, die Atmosphäre ist instabil (rechts).

Die Funktionen  $T$ ,  $\varrho$ ,  $v_x$  und  $v_y$  sind definiert in einem Streifen. Der Einfachheit halber wählen wir die Höhe des Streifens als  $\pi$ . Wir können dies erreichen, indem wir die Längeneinheit geeignet wählen: ist  $h$  die ‘Dicke’ der Atmosphäre<sup>1</sup>, wählen wir  $h/\pi$  als Längeneinheit. Das Definitionsbereich für die Funktionen ist daher  $R = \mathbb{R} \times [0, \pi]$ .

Die Temperatur der Atmosphäre an der Erdoberfläche wird im wesentlichen von der Temperatur des Bodens bestimmt, der von der einfallenden Strahlung erwärmt wird, es soll also  $T(x, 0, t) = T_0$  gelten. Am oberen Rand des Schnittes schliesst die sehr dünne Hochatmosphäre an, die im Wesentlichen in einem Strahlungsgleichgewicht mit der Umgebung steht. Da wir die Dichte im wesentlichen als konstant ansehen wollen und damit den Einfluss der Temperatur auf die Dichte nicht exakt modellieren wollen, sind wir nicht gezwungen, eine bestimmte Temperaturskala zu verwenden. Wir können daher willkürlich die Temperatur am oberen Rand als  $T(x, \pi, t) = 0$  festlegen.

Auf das Medium im Streifen wirkt natürlich die Erdbeschleunigung, die wir ebenfalls als konstant annehmen dürfen, da die Dicke der Atmosphäre im Vergleich zum Erdradius sehr klein ist.

### Stabile Atmosphäre

Die Temperatur muss im Gebiet von unten nach oben abnehmen. Aber auch der Druck muss mit zunehmender Höhe abnehmen. Wenn ein Luftpaket aufsteigt, wird es wegen des geringer werdenden Druckes expandieren und damit adiabatisch abkühlen. Wenn die Temperatur der umgebenden Luft schneller abnimmt als die adiabatische Abkühlung, dann ist das Luftpaket in seiner neuen Höhe wärmer und damit leichter als die Umgebung, es wird weiter ansteigen (Abbildung 2.6). Wenn die

<sup>1</sup>Die Konvektion in der Atmosphäre, welche vom Lorenz-Modell vor allem beschrieben wird, findet im Wesentlichen nur im untersten Teil der Atmosphäre, der sogenannten Troposphäre statt. Die Troposphäre zeichnet sich aus durch mehr oder weniger lineare Temperaturabnahme bis zur Höhe der sogenannten Tropopause in etwa 10km Höhe. Wir können also die Höhe der Tropopause als  $h$  verwenden.

Temperatur der umgebenden Luft langsamer abnimmt als die adiabatische Abkühlung, dann ist das Luftpaket in der neuen Höhe kälter und damit Dichter als die Umgebung, es wird wieder absinken. Solange der Temperaturunterschied nicht zu gross ist, wird sich also ein Zustand einstellen, in dem die Luft in Ruhe bleibt, der Wärmetransport erfolgt ausschliesslich durch Wärmeleitung.

## Instabilität

Bei genügend grosser Temperaturdifferenz wird die Atmosphäre jedoch instabil, der Wärmetransport wird zusätzlich von Konvektion übernommen. Die entstehenden Konvektionszellen können wegen der Translationssymmetrie entlang der  $x$ -Achse an einer beliebigen Stelle entstehen, es gibt also unendlich viele Lösungen, von denen eine gewählt werden muss. In der Realität würden kleine Temperaturfluktuationen dies unterstützen, kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen führen also zu völlig verschiedenen Strömungen. Diese sensitive Abhängigkeit der Lösung von Anfangsbedingungen wird oft als ein Kennzeichen von Chaos angesehen.

Im folgenden sollen zunächst die Gleichungen der Fluiddynamik auf die vorliegende Situation spezialisiert werden. Mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes soll dann die partielle Differentialgleichung weiter auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert werden. In numerischen Simulationen soll schliesslich gezeigt werden, dass die Lorenz-Gleichungen tatsächlich chaotische Lösungen haben.

## Temperaturgleichung

Wir haben in (1.5) bereits eine Gleichung gefunden, welche den Wärmetransport in einem Fluid beschreibt. Wir können daraus aber noch eine etwas einfacher zu handhabende Form gewinnen, indem wir nur die Anomalie der Temperatur betrachten, also die Abweichung vom Temperaturprofil, welches sich bei einem ruhenden Fluid einstellt. Aufgrund der gewählten Geometrie ist

$$T_0(x, y, t) = T_0\left(1 - \frac{y}{\pi}\right)$$

in einem ruhenden Fluid, wir setzen daher

$$\vartheta(x, y, t) = T(x, y, t) - T_0\left(1 - \frac{y}{\pi}\right) \quad \text{oder} \quad T(x, y, t) = T_0\left(1 - \frac{y}{\pi}\right) + \vartheta(x, y, t)$$

und setzen dies in die Gleichung (1.5) ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} & \Delta T &= \Delta \vartheta \\ -\vec{v} \cdot \nabla T &= -\vec{v} \cdot \nabla \vartheta + v_y \frac{T_0}{\pi}. & & \\ \Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= -\vec{v} \cdot \nabla \vartheta + v_y \frac{T_0}{\pi} + \kappa \Delta \vartheta. & & \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit kann mit Hilfe von  $\vec{v} = -\nabla \psi$  wieder durch die Stromfunktion ausgedrückt werden.

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -J \nabla \psi \cdot \nabla \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \Delta \vartheta = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}. \quad (2.22)$$

Man beachte, dass die Gleichung bis auf den letzten Term linear in  $\psi$  und  $\vartheta$  ist.

## Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung haben wir in (2.21) bereits in die für ein zweidimensionales inkompressibles Fluid geignete Form gebracht. Da die Schwerkraft konstant ist, fällt der Term  $\nabla \times \vec{b}$  weg.

Aus der Boussinesq-Näherung (2.11) erhalten wir noch einen Term, der den Auftrieb beschreibt. Auftrieb entsteht offenbar genau dann, wenn die Temperatur vom linearen Temperaturprofil abweicht. Wir nehmen an, dass die Dichteabweichung proportional zur Temperaturabweichung ist, also

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(1 - c\vartheta) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{b} = c \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)}. \quad (2.23)$$

Man beachte, dass die Gleichung bis auf den letzten Term linear in  $\psi$  und  $\vartheta$  ist.

## 2.2.2 Grundgleichungen

In den Gleichungen (2.22) und (2.23) haben wir ein partielles Differentialgleichungssystem für die beiden unbekannten Funktionen  $\psi$  und  $\vartheta$  gefunden, die wir der besseren Übersicht halber nochmals als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

hinschreiben. Allerdings ist das System von dritter Ordnung, da erste Ableitungen von  $\psi$  und  $\Delta\psi$  vorkommen. Man sieht aber auch, dass keine anderen Ableitungen vorkommen als erste Ableitungen von  $\psi$  oder  $\Delta\psi$ . Dies ist geeignet, die Diskussion zu vereinfachen, weshalb wird darauf achten, diese Struktur nicht zu zerstören. Wir können die linke Seite der Gleichungen zum Beispiel vektoriell schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta\psi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix}}_u = \frac{\partial}{\partial t} Du$$

Entsprechend lassen sich die ersten zwei Terme auf der rechten Seite schreiben als

$$\begin{pmatrix} \nu \Delta^2 & c \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} & \kappa \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \vartheta \end{pmatrix} = Au.$$

Die Operatoren  $D$  und  $A$  sind beide linear.

Für die Diskussion der Zeitentwicklung der Lösungen ist es nützlich, die linearen Terme von den nichtlinearen zu trennen. Wie bereits bemerkt treten Nichtlinearitäten nur in den Funktionaldeterminanten auf. Wir schreiben

$$Nu = \begin{pmatrix} -\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} \\ -\frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} Du = Au + Nu \quad (2.25)$$

mit den linearen Operatoren  $D$  und  $A$  und dem nichtlinearen Operator  $N$  schreiben.

Die allgemeine Form (2.25) eines Klimamodells ermöglicht uns, das Klimavorhersageproblem in dem etwas allgemeineren Rahmen der Vorhersage für ein beliebiges nichtlineares dynamisches System zu studieren. Zwar ist (2.25) immer noch ein partielles Differentialgleichungssystem und die Operatororen  $D$ ,  $A$  und  $N$  sind partielle Differentialoperatoren. Wenn es aber gelingt, die Funktionen zu diskretisieren und durch Vektoren in einem endlichdimensionalen Vektorraum zu ersetzen, dann werden  $D$  und  $A$  zu linearen Abbildungen, die durch Matrizen beschrieben werden können, und  $N$  wird zu einer nichtlinearen Funktion auf einem endlichdimensionalen Vektorraum. Das Klimamodell wird also zu einer nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung in einem endlichdimensionalen Raum. Solche Differentialgleichungen sind im Detail studiert worden und ihre Eigenschaften sind sehr gut verstanden. In Kapitel 3 werden wir einen Teil der gut ausgebauten Theorie zusammenfassen. Den Weg von (2.25) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung in nur drei Dimensionen soll im folgenden Abschnitt 2.2.3 vorgeführt werden.

### 2.2.3 Umwandlung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem

Ausgehend von (2.24) versuchen wir nun, eine gewöhnliche Differentialgleichung zu gewinnen, welche näherungsweise wiedergibt, was passiert, wenn im betrachteten System Konvektion einsetzt. Eine einzelne Konvektionszelle hat Stromlinien, wie sie in Abbildung 2.7 dargestellt sind. Vernachlässigt man in der ersten der Differentialgleichungen (2.24)  $\vartheta$  und den nichtlinearen Term, bleibt eine Wärmeleitungsgleichung für  $\Delta\psi$ . Die Wärmeleitungsgleichung auf einem Rechteckgebiet einer solchen Zelle könnte man mit einem Separationsansatz zu lösen versuchen, dies würde auf Lösungen der Form  $\sin(ax)\sin(y)$  führen. Wir versuchen daher eine Lösung für  $\psi(x, y, t)$  in der etwas allgemeineren Form

$$\psi(x, y, t) = X(t) \sin(ax) \sin(y) \quad (2.26)$$

zu finden. Die Konvektion sorgt dafür, dass im Bereich grosser Strömungsgeschwindigkeit der Temperaturgradient stark vom linearen Verlauf abweicht. Die vertikale Strömungsgeschwindigkeit ist bei 0 und  $\pi$  hoch, also dort wo  $\cos(ax)$  gross ist. Wir setzen daher die Lösung für die Temperatur  $\vartheta(x, y, t)$  an in der Form

$$\vartheta(x, y, t) = Y(t) \cos(ax) \sin(y) - Z(t) \sin(2y). \quad (2.27)$$

Das Ziel ist, für die drei Funktionen  $X(t)$ ,  $Y(t)$  und  $Z(t)$  gewöhnliche Differentialgleichungen aufzustellen, also die Ortsabhängigkeit der Lösungsfunktionen vollständig zu eliminieren. Diese Technik heisst in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch die Transformationsmethode.

Wir können allerdings nicht erwarten, dass dies exakte Lösungen sind. Beim Einsetzen in die Differentialgleichungen werden auch noch andere Terme entstehen. Unter der Annahme, dass die genannten Terme die Gestalt der Stromlinien genau genug wiederzugeben in der Lage sind, vernachlässigen wir alle Terme, die sich nicht als Vielfache der Funktionen

$$\sin(ax) \sin(y), \quad \cos(ax) \sin(y) \quad \text{und} \quad \sin(2y) \quad (2.28)$$

schreiben lassen.

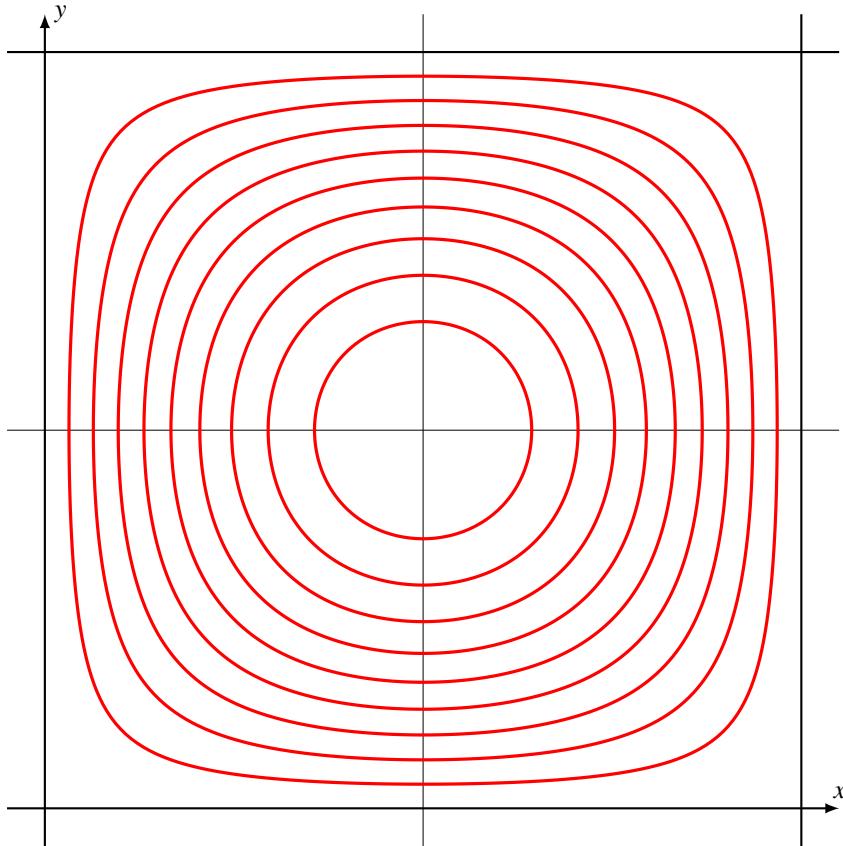


Abbildung 2.7: Stromlinien in einer einzelnen Konvektionszelle

Wir müssen jetzt also die Lösungsansätze (2.26) und (2.27) in die Differentialgleichungen (??) einsetzen. Die linke Seite ist jeweils einfach, da die Zeitabhängigkeit nur noch in den Funktionen  $X(t)$ ,  $Y(t)$  und  $Z(t)$  steckt. Auf der linken Seite können wir daher einfach  $X(t)$  durch  $\dot{X}(t)$  ersetzen und analog für die anderen beiden Koeffizientenfunktionen.

Die Ortsableitungen geben etwas mehr zu tun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\psi &= X(t)a \cos(ax) \sin(y) & \frac{\partial}{\partial y}\psi &= X(t) \sin(ax) \cos(y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi &= -X(t)a^2 \sin(ax) \sin(y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi &= -X(t) \sin(ax) \sin(y) \\ \Delta\psi &= -(a^2 + 1)\psi & \Delta^2\psi &= (a^2 + 1)^2\psi. \end{aligned}$$

für  $\psi$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\vartheta &= -aY(t) \sin(ax) \sin(y) & \frac{\partial}{\partial y}\vartheta &= Y(t) \cos(ax) \cos(y) - 2Z(t) \cos(2y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta &= -a^2 Y(t) \cos(ax) \sin(y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vartheta &= -Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4Z(t) \sin(2y) \end{aligned}$$

$$\Delta\vartheta = -(a^2 + 1)Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4Z(t) \sin(2y)$$

für  $\vartheta$ . In den Differentialgleichungen brauchen wir aber noch die Funktionaldeterminanten für die nichtlinearen Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = -(a^2 + 1) \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \\ &= X(t) \left( a \cos(ax) \sin(y) (Y(t) \cos(ax) \cos(y) - 2Z(t) \cos(2y)) \right. \\ &\quad \left. - \sin(ax) \cos(y) (-aY(t) \sin(ax) \sin(y)) \right) \\ &= X(t) \underbrace{(a(\cos^2(ax) + \sin^2(ax)) Y(t) \sin(y) \cos(y) - 2a \cos(ax) \sin(y) Z(t) \cos(2y))}_{= 1} \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{2} \sin(2y)}_{=} \\ &= \frac{1}{2} aX(t)Y(t) \sin(2y) - 2aX(t)Z(t) \cos(ax) \sin(y) \cos(2y) \\ &= \frac{1}{2} aX(t)Y(t) \sin(2y) - 2aX(t)Z(t) \cos(ax) \frac{1}{2} (\sin(-y) + \sin(3y)) \\ &= \frac{1}{2} aX(t)Y(t) \sin(2y) + 2aX(t)Z(t) \cos(ax) \sin(y) - 2aX(t)Z(t) \cos(ax) \sin(3y). \end{aligned}$$

Der letzte Term kann nicht durch Funktionen aus der Liste (2.28) ausgedrückt werden, und muss daher vernachlässigt werden. Setzen wir jetzt diese Ableitungen in die Differentialgleichungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} -(a^2 + 1)\dot{X}(t) \sin(ax) \sin(y) &= \nu(a^2 + 1)^2 X(t) \sin(ax) \sin(y) - acY(t) \sin(ax) \sin(y) \\ \dot{Y}(t) \cos(ax) \sin(y) - \dot{Z}(t) \sin(2y) &= -\kappa(a^2 + 1)Y(t) \cos(ax) \sin(y) + 4\kappa Z(t) \sin(2y) \\ &\quad + \frac{T_0}{\pi} X(t) a \cos(ax) \sin(y) \\ &\quad - \frac{a}{2} X(t) Y(t) \sin(2y) - 2aX(t)Z(t) \cos(ax) \sin(y). \end{aligned}$$

Wir vergleichen die Koeffizienten der Funktionen aus der Liste (2.28) dann erhalten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= -\nu(a^2 + 1)X(t) + \frac{ac}{a^2 + 1} Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= \frac{aT_0}{\pi} X(t) - (a^2 + 1)\kappa Y(t) - aX(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -4\kappa Z(t) + \frac{a}{2} X(t)Y(t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

für die Koeffizientenfunktionen  $X(t)$ ,  $Y(t)$  und  $Z(t)$ .

## 2.2.4 Dimensionslose Schreibweise

Die Form (2.29) der Lorenz-Gleichungen ist für eine Diskussion der Lösungen nicht besonders gut geeignet. Die komplizierte Form der Koeffizienten erschwert den Überblick. Ein übersichtlicheres

System erhält man, wenn man die folgenden Ersetzungen vornimmt:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{\kappa(a^2 + 1)\sqrt{2}} X, \\y &= \frac{a^2 c}{\kappa v(a^2 + 1)\sqrt{2}} Y, \\z &= \frac{a^2 c}{\kappa v(a^2 + 1)^3} Z, \quad \text{und} \\t' &= \kappa(a^2 + 1) t.\end{aligned}$$

Damit werden die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= \varrho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \varrho = \frac{a^2 c T_0}{\kappa v \pi (a^2 + 1)^3}, \quad \text{und} \quad \beta = \frac{4}{a^2 + 1}.$$

Es stellt sich heraus, dass gewisse Lösungen dieser Differentialgleichung chaotisches Verhalten zeigen. Damit sind der Verhersagbarkeit von Wetterphänomenen bereits prinzipielle Grenzen gesetzt. Dies besagt aber nicht, dass sich das Klima nicht vorhersagen lässt, sondern nur, dass das Lorenzmodell nicht dazu geeignet ist, den Wärmetransport durch Konvektion in der Atmosphäre über längere Zeit zu modellieren. Die in Kapitel 5 dargestellten Modelle sind dazu durchaus in der Lage.

## Übungen

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' = y \quad \text{mit Anfangsbedingungen } y(0) = A, \quad y'(0) = B$$

mit Hilfe einer Potenzreihe.

*Lösung.* Wir setzen den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \\y''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass

$$\begin{aligned}a_0 &= 2 \cdot 1 a_2 \\a_1 &= 3 \cdot 2 a_3\end{aligned}$$

$$a_2 = 4 \cdot 3 a_4$$

$$a_3 = 5 \cdot 4 a_5$$

$$a_4 = 6 \cdot 5 a_6$$

$$a_5 = 7 \cdot 6 a_7$$

$$\vdots$$

Daraus liest man ab:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2 \cdot 1} = \frac{a_0}{2!} \\ a_3 &= \frac{a_1}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{3!} \\ a_4 &= \frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{a_0}{4!} \\ a_5 &= \frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{a_1}{5!} \\ a_6 &= \frac{a_4}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{a_0}{6!} \\ a_7 &= \frac{a_5}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{a_1}{7!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Lösungsfunktion ist daher

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2!} x^2 + \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \frac{a_0}{6!} x^6 + \frac{a_1}{7!} x^7 + \dots \\ &= a_0 \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}_{= \cosh x} + a_1 \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{= \sinh x} \end{aligned}$$

Jetzt muss noch der Zusammenhang mit der Anfangsbedingung hergestellt werden. Es gilt

$$y(0) = a_0 = A$$

$$y'(0) = a_1 = B,$$

somit ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = A \cosh x + B \sinh x.$$

○

2. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'' - xy = 0.$$

Finden Sie eine Lösung mit Anfangswerten  $y(x) = 1$  und  $y'(x) = 0$ .

*Lösung.* Wir setzen den Potenzreihenansatz

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

in die Differentialgleichung ein, und erhalten

$$\begin{aligned} y''(x) &= 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + 5 \cdot 4 a_5 x^3 + \dots \\ xy(x) &= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 a_2 &= 0 & a_2 &= 0 \\ 3 \cdot 2 a_3 &= a_0 & a_3 &= \frac{a_0}{3 \cdot 2} \\ 4 \cdot 3 a_4 &= a_1 & a_4 &= \frac{a_1}{4 \cdot 3} \\ 5 \cdot 4 a_5 &= a_2 & a_5 &= 0 \\ 6 \cdot 5 a_6 &= a_3 & a_6 &= \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} \\ 7 \cdot 6 a_7 &= a_4 & a_7 &= \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} \\ 8 \cdot 7 a_8 &= a_5 & a_8 &= 0 \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen ergeben  $y(0) = a_0 = 1$  und  $y'(0) = a_1 = 0$ . Damit ist die Lösung

$$y(x) = 1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Die Nenner sehen aus wie Fakultäten, nur dass jeder dritte Faktor fehlt. Erweitert man die Brüche so, dass im Nenner eine Fakultät steht, bekommt  $y(x)$  die Form

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} x^9 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{12!} x^{12} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}. \end{aligned} \quad \circlearrowright$$

### 3. Finden Sie eine gerade Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) \cdot \cos x = y(x) \quad (2.30)$$

in Form einer Reihe

$$y(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \quad (2.31)$$

von Kosinus-Funktionen. Berechnen Sie die Koeffizienten bis  $a_5$ .

*Hinweis.* Die Lösung ist proportional zu  $a_0$ , Sie dürfen daher annehmen, dass  $a_0 = 1$ . Verwenden Sie ausserdem die Formeln

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

und Koeffizientenvergleich.

*Lösung.* Wir berechnen die zweite Ableitung des Ansatzes

$$y''(x) = -a_1 \cos x - 2^2 a_2 \cos 2x - 3^2 a_3 \cos 3x - 4^2 a_4 \cos 4x - \dots$$

$$y''(x) \cdot \cos x = -a_1 \cos x \cdot \cos x - 2^2 a_2 \cos 2x \cdot \cos x - 3^2 a_3 \cos 3x \cdot \cos x - 4^2 a_4 \cos 4x \cdot \cos x - \dots$$

Die Produkte von Kosinus-Funktionen können mit der Formel

$$\cos x \cdot \cos kx = \frac{1}{2}(\cos(k-1)x + \cos(k+1)x)$$

vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} y''(x) \cdot \cos x &= -a_1 \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - 2^2 a_2 \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) - 3^2 a_3 \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) \\ &\quad - 4^2 a_4 \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 5x) - \dots \\ &= -\frac{a_1}{2} - 2^2 a_2 \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2}(a_1 + 3^2 a_3) \cos 2x - \frac{1}{2}(2^2 a_2 + 4^2 a_4) \cos 3x \\ &\quad - \frac{1}{2}(a_4 + 5^2 a_5) \cos 4x + \dots \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} a_0 = -\frac{1}{2}a_1 &\Rightarrow a_1 = -2a_0 \\ a_1 = -2^2 \frac{1}{2}a_2 &\Rightarrow a_2 = -\frac{2}{2^2}a_1 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + 3^2 a_3) &\Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3^2}(2a_2 + a_1) \\ a_3 = -\frac{1}{2}(2^2 a_2 + 4^2 a_4) &\Rightarrow a_4 = -\frac{1}{4^2}(2a_3 + 2^2 a_2) \\ a_4 = -\frac{1}{2}(3^2 a_3 + 5^2 a_5) &\Rightarrow a_5 = -\frac{1}{5^2}(2a_4 + 3^2 a_3) \end{aligned}$$

oder allgemein

$$a_k = -\frac{1}{2}((k-1)^2 a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1}) \Rightarrow a_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)^2}(2a_k + (k-1)^2 a_{k-1}).$$

Offenbar sind die Koeffizienten  $a_k$  mit  $k > 0$  proportional zu  $a_0$ , die Lösungsfunktion ist daher ein Vielfaches der Funktion, welche man erhält, wenn man  $a_0 = 1$  setzt.

Etwas formaler können wir diese Rekursionsformel auch aus der Summendarstellung des Ansatzes herleiten:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos jx \\ y''(x) \cdot \cos x &= -\sum_{k=0}^{\infty} a_k k^2 \cos kx \cos x \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k k^2 (\cos(k+1)x + \cos(k-1)x) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)^2 a_{j-1} \cos jx - \frac{1}{2} \sum_{j=-1}^{\infty} (j+1)^2 a_{j+1} \cos jx$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir

$$\begin{aligned} j = 0 : \quad a_0 &= -\frac{1}{2} a_1 & a_1 &= -2a_0 = -2 \\ j = 1 : \quad a_1 &= -\frac{1}{2} 2^2 a_2 & a_2 &= -\frac{1}{2} a_1 = 1 \\ j > 1 : \quad a_j &= -\frac{1}{2} ((j+1)^2 a_{j+1} + (j-1)^2 a_{j-1}). \end{aligned}$$

Für  $j > 1$  lesen wir ab

$$a_{j+1} = -\frac{1}{(j+1)^2} (2a_j + (j-1)^2 a_{j-1}).$$

Damit ist der Koeffizient  $a_3$  zum Beispiel:

$$a_3 = -\frac{1}{3^2} (2a_2 + 2^2 a_1) = -\frac{1}{9} (2 \cdot (2 \cdot 1 - 1^2 \cdot 2)) = 0.$$

Für die Koeffizienten  $a_k$  mit grösseren  $k$  verwenden wir die Rekursionsformel

$$a_k = -\frac{1}{k^2} (2a_{k-1} + (k-2)^2 a_{k-2})$$

und erhalten die Koeffizienten in Tabelle 2.1. Im Speziellen ist

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{1}{16} (2 \cdot a_3 + 2^2 a_2) = -\frac{1}{4} \\ a_5 &= -\frac{1}{25} (2 \cdot a_4 + 3^2 a_3) = \frac{1}{25} \left( -2 \cdot \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{50} \end{aligned}$$

In Tabelle 2.1 kann man erkennen, dass die Koeffizienten nur sehr langsam abnehmen. Da die Lösungsfunktion an den Stellen  $(2k+1)\pi/2$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  nicht differenzierbar ist, ist dieses Verhalten sogar zu erwarten. Genauer, man erwartet, dass die Koeffizienten  $a_k$  wie  $1/k$  abnehmen. Und wie kann man sich überhaupt versichern, dass die Fourierreihe an anderen Stellen konvergiert?

Man kann aber auch ablesen, dass die Elemente  $a_{k+1}$  und  $a_{k-1}$  entgegengesetztes Vorzeichen haben und betragsmässig sehr nahe beeinander sind. Um das besser zu verstehen berechnen wir die Summe  $a_{k+1} - a_{k-1}$  und erhalten

$$\begin{aligned} a_{k+1} + a_{k-1} &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + (k-1)^2 a_{k-1}) + a_{k-1} \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + (k-1)^2 a_{k-1}) - (k+1)^2 a_{k-1} \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + ((k-1)^2 - (k+1)^2) a_{k-1}) \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} (2a_k + 4ka_{k-1}). \end{aligned}$$

$k$	$a_k$
0	1
1	-2
2	1
3	0
4	-0.25
5	0.02
6	0.11
7	-0.014693877551020
8	-0.061415816326531
9	0.010405328798186
10	0.039098015873016
11	-0.007611798879331
12	-0.027045680482937
13	0.005769935061331
14	0.019811418976634
15	-0.004509963836970
16	-0.015132883561509
17	0.003615943357928
18	0.011934525632810
19	-0.002960877234645

Tabelle 2.1: Tabelle der Koeffizienten für die Lösungsfunktion (2.31) der Differentialgleichung (2.30).

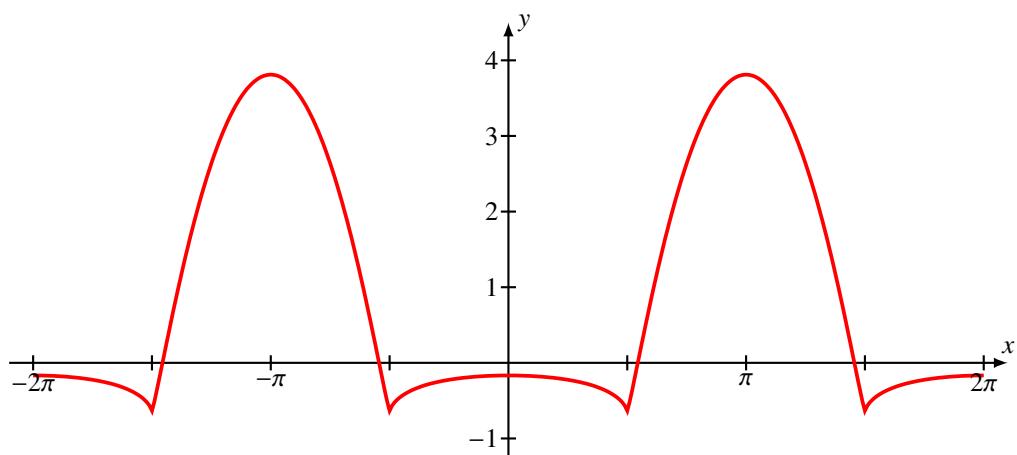


Abbildung 2.8: Graphische Darstellung der Lösungsfunktion der Differentialgleichung (2.30).

Daraus liest man ab, dass tatsächlich die Summe  $a_{k+1} + a_{k-1}$  wie  $1/k^2$  abnimmt. Man kann daraus auch eine Abschätzung für  $y(0)$  bekommen, nämlich

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_k \\ &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots \\ &= a_0 + a_1 + (a_2 + a_4) + (a_3 + a_5) + (a_6 + a_8) + (a_7 + a_9) + \dots \\ |y(0)| &= \left| a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} + a_{2k+2}) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+1} + a_{2k+3}) \right| \\ &\leq |a_0| + |a_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k} + a_{2k+2}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k+1} + a_{2k+3}| \end{aligned}$$

Da in beiden Reihen die Terme wie  $1/k^2$  gegen 0 gehen, konvergieren sie.

○

# Kapitel 3

## Differentiagleichungen

Modelle für das Klima oder für einzelne Teilespekte des Klimas werden häufig in der Form einer Differentialgleichung formuliert. Die kurzfristigen Schwankungen einer Lösung entsprechen eher den Wettererscheinungen, die für unsere Betrachtungen nicht interessant sind. Für Klima-Betrachtungen suchen wir Lösungen der Differentialgleichungen, die über lange Zeit konstant sind, sogenannte Gleichgewichtslösungen. Diese werden natürlich von Parametern wie der CO<sub>2</sub>-Konzentration oder dem Salzgehalt der Meere abhängig sein. Die interessante Frage wird daher sein, wie sich die Gleichgewichtslösungen verändern, wenn die Parameter sich ändern.

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten Eigenschaften von Vektor-Differentialgleichungen und der einfachsten Bifurkationen zusammengestellt werden. Das Thema Differentialgleichungen wurde 2016 im Mathematischen Seminar behandelt. Das Seminar-Buch [**skript:mathsem-dgl**] enthält eine vertiefte Diskussion der Theorie.

### 3.1 Grundlagen

Eine Differentialgleichung ist eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen. Wir betrachten Funktionen der Zeit  $t$  mit Werten in  $\mathbb{R}^n$  und schreiben sie  $x(t)$ . Sei  $f$  eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, t) \mapsto f(x, t).$$

**Definition 3.1.** Eine Funktion  $x(t)$  heisst *Lösung der Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{3.1}$$

zur Anfangsbedingung  $x_0$ , wenn gilt  $x(0) = x_0$  und

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t)$$

für alle  $t > 0$ .

Unter einigermassen milden Bedingungen an die Funktion  $f(x, t)$  ist sichergestellt, dass eine Differentialgleichung immer eine Lösung hat.

### 3.1.1 Autonome Differentialgleichungen

Wenn die Funktion  $f$  von der Zeit abhängt, wird es im allgemeinen keine konstanten Lösungen geben. Für die Klimadiskussion sind wir allerdings daran interessiert, ob ein Modell Lösungen hat, die sich mit der Zeit nicht ändern. Solche Lösungen zeigen uns, dass wir alle kurzfristigen Schwankungen, die wir dem Wetter zuordnen würden, ausgemittelt haben.

**Definition 3.2.** Eine Differentialgleichung der Form (3.1) heisst autonom, wenn die Funktion  $f$  nicht von der Zeit abhängt. Eine autonome Differentialgleichung kann als

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

geschrieben werden.

Die Forderung, dass die Differentialgleichung autonom sein soll, ist allerdings auf triviale Art zu erfüllen, indem man zu einer neuen unabhängigen Variablen übergeht und die bisherige Zeitvariable als letzte Komponente der Funktion  $x(t)$  hinzufügt. Wir schreiben die Lösungsfunktionen als

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und erweitern dies zu} \quad \bar{x}(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung, also die Funktion  $f(x, t)$  schreiben wir

$$f(x, t) = f(x_1, \dots, x_n, t) \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

und erweitern dies nun zu einer Funktion  $\bar{f}$  für eine autonome Differentialgleichung für  $\bar{x}$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Differentialgleichung für  $\bar{x}$  ist

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{f}(\bar{x}), \quad (3.2)$$

dies ist offensichtlich eine autonome Differentialgleichung. Die letzten Komponenten von (3.2) ist die Differentialgleichung für  $\bar{x}_{n+1}$

$$\frac{d\bar{x}_{n+1}}{ds} = 1$$

mit der Anfangsbedingung  $x_{n+1}(0) = 0$ , sie hat die Lösung  $\bar{x}_{n+1}(s) = s$ . Die Koordinate  $\bar{x}_{n+1}$  ist also nichts anderes als die ursprüngliche Zeitkoordinate. Aus der Lösung  $\bar{x}(s)$  der autonomen Differentialgleichung kann die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gewonnen werden, indem man einfach die letzte Koordinate weglässt:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

Der Übergang zur autonomen Differentialgleichung erhöht die Dimension des Vektors. Dadurch wird die Diskussion kritischer Punkte und Gleichgewichtslösungen leider nicht vereinfacht. Statt eine Differentialgleichung nachträglich autonom zu machen ist daher im allgemeinen anzustreben, dass sie von vornherein autonom ist. In den nachfolgenden Beispielen gehen wir daher immer von autonomen Differentialgleichungssystemen aus.

## 3.2 Gleichgewichtslösungen und kritische Punkte

Wir gehen in diesem Abschnitt von einer autonomen Differentialgleichung der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3.3)$$

aus mit einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $f$  wird im Allgemeinen von weiteren Parametern abhängen wie zum Beispiel dem CO<sub>2</sub>-Gehalt der Atmosphäre oder der Salinität der Meere. Sofern nötig machen wir diese mit der Schreibweise  $f(x, p)$  mit  $p \in \mathbb{R}^m$  explizit sichtbar.

**Definition 3.3.** Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heisst Gleichgewichtslösung wenn die konstante Funktion  $x(t) = x_0$  eine Lösung der Differentialgleichung 3.3 ist.

Eine Gleichgewichtslösung ist daher eine Nullstelle der Funktion  $f$ ,  $f(x_0) = 0$ .

**Definition 3.4.** Eine Nullstelle von  $f$  heisst kritischer Punkt der Differentialgleichung 3.3.

Da  $f$  ausserdem von den Parametern  $p \in \mathbb{R}^m$  abhängt, wird die Menge der Nullstellen von  $f$  von  $p$  abhängen. Wir schreiben

$$N(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x, p)\}$$

für die Menge der Nullstellen. Im Allgemeinen werden sich die Mengen  $N(p)$  für verschiedene  $p$  unterscheiden.

Sei also  $p_0 \in \mathbb{R}^m$  ein Parametervektor und  $x_0$  eine Gleichgewichtslösung von  $f$ , also  $f(x_0, p_0) = 0$ . Unter zusätzlichen Annahmen über die Funktion  $f$  kann man zeigen, dass  $x_0$  in einer Umgebung von  $p_0$  zu einer Funktion  $x_0(p)$  erweitert werden kann, derart dass  $x_0(p)$  jeweils ein kritischer Punkt von  $f$  ist für die Parameterwerte  $p$ , also  $f(x_0(p), p) = 0$ . Diese Theorie ist für allerdings nicht besonders nützlich, denn sie sagt uns nur, dass sich kritische stetig in Abhängigkeit vom Parametervektor bewegen. Besonders interessant für die Diskussion des Klimawandels sind Fälle, wo Gleichgewichtslösungen sich sprunghaft ändern.

### 3.2.1 Stabilität

Wir betrachten eine Gleichgewichtslösung  $x(t) = x_0$  der Differentialgleichung (3.3).

**Definition 3.5.** Die Gleichgewichtslösung  $x(t) = x_0$  heisst stabil, wenn eine Lösung zu einer Anfangsbedingung  $\bar{x}_0$ , die  $|x_0 - \bar{x}_0| < \varepsilon$  erfüllt, für alle Zeiten nahe bei  $x_0$  bleibt, also  $|\bar{x}(t) - x_0| < \varepsilon$ .

*Beispiel.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Sie hat die Gleichgewichtslösung  $x(t) = 0$ . Eine Lösung, die die Anfangsbedingung  $x(0) = \varepsilon$  erfüllt, ist  $x(t) = \varepsilon e^{at}$ , denn

$$\frac{d}{dt} \varepsilon e^{at} = a \varepsilon e^{at}.$$

Wenn  $a > 0$ , dann wächst die Lösung exponentiell an, die Gleichgewichtslösung ist als nicht stabil. Für  $a < 0$  dagegen nimmt  $x(t) = \varepsilon e^{at}$  exponentiell schnell ab, die Gleichgewichtslösung ist stabil.  $\circlearrowright$

Für eindimensionale Systeme ist Stabilität besonders einfach zu diskutieren, wir tun dies im Rahmen der Diskussion der wichtigsten Bifurkationstypen in Abschnitt 3.3.

### 3.2.2 Zeitumkehr

Wir gehen wieder von der autonomen Differentialgleichung (3.3) mit der Lösung  $x(t)$  mit Anfangsbedingung  $x_0$  aus. Ersetzen wir  $t$  durch  $-s$ , erhalten wir die autonome Differentialgleichung

$$-\frac{dx}{ds} = f(x), \quad (3.4)$$

mit der gleichen Anfangsbedingung. Die Funktion  $s \mapsto x(-s)$  ist eine Lösung.

Die Zeitumkehr verändert den Stabilitätscharakter einer Gleichgewichtslösung. Ist  $x_0$  eine stabile Gleichgewichtslösung, dann nehmen Lösungen mit Anfangsbedingungen in der Nähe von  $x_0$  nicht weiter zu, sondern höchstens ab. Es ist also möglich, dass die Lösung nach Zeitumkehr instabil wird.

Bei zweidimensionalen Systemen ist es aber durchaus möglich, eine Gleichgewichtslösung in beiden Zeitrichtungen instabil sind. Als Beispiel betrachten wir das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$x_1(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(t) = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Die Lösung  $x_1(t)$  wächst für  $t > 0$  exponentiell an, die Gleichgewichtslösung  $x(t) = 0$  kann also für  $t > 0$  nicht stabil sein. Für  $t \rightarrow -\infty$  nimmt  $x_1(t)$  exponentiell ab, aber trotzdem ist die Nulllösung nicht stabil, dann die Lösung  $x_2(t)$  nimmt für  $t \rightarrow -\infty$  exponentiell zu.

## 3.3 Bifurkationen eindimensionaler Systeme

In diesem Abschnitt betrachten wir eindimensionale Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda), \quad (3.6)$$

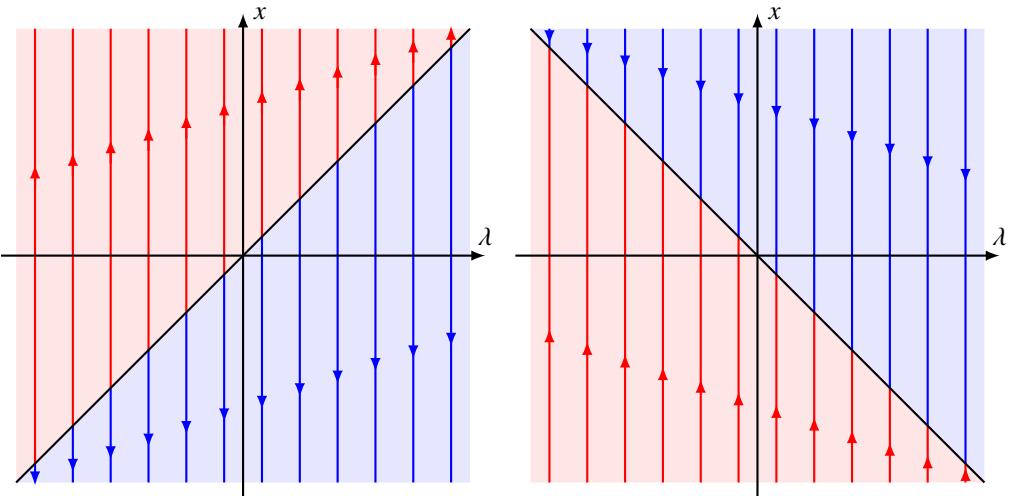


Abbildung 3.1: Phasendiagramm der Differentialgleichung  $\dot{x} = x - \lambda$  links und  $\dot{x} = -x - \lambda$  rechts. Die Gleichgewichtslösung  $x = \lambda$  ist im linken Fall instabil, während  $x = -\lambda$  im rechten Fall eine stabile Gleichgewichtslösung ist.

die ausserdem von einem Parameter  $\lambda$  abhängt. Wir fragen nach den Gleichgewichtslösungen in Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda$ .

Die nachfolgenden prototypischen Bifurkationen können in vielen weiteren Differentialgleichungen beobachtet werden. Für alle Werte des Parameters ist 0 ein kritischer Wert, es gilt also  $f(0, \lambda) = 0$ . Wir können die  $f$  in eine Taylor-Reihe

$$f(x, \lambda) = \sum_{k,l} \frac{1}{(k+l)!} \frac{\partial^{k+l} f(0,0)}{\partial t^k \partial \lambda^l} x^k \lambda^l = a_{10}x + a_{01}\lambda + a_{20}x^2 + a_{11}x\lambda + a_{02}\lambda^2 + \dots \quad (3.7)$$

entwickeln. Die verschiedenen Bifurkationen lassen sich charakterisieren durch die führenden Terme in dieser Entwicklung. Insbesondere können wir verlangen, dass der führende Term für  $\lambda$  immer linear in  $\lambda$  sein soll. Ist dies nämlich nicht der Fall, ist also der führende Term in  $\lambda$  von der Form  $\lambda^\alpha$ , ersetzen wir den Parameter einfach durch  $\tau = \lambda^\alpha$ .

*Beispiel.* Der einfachste Fall ist bis auf eine Skalierung

$$f(x, \lambda) = x - \lambda. \quad (3.8)$$

$f$  hat nur einen einzigen kritischen Punkt, nämlich  $x_0 = -\lambda$ . Das Phasendiagramm dafür ist in Abbildung 3.1 Man erkennt, dass Lösungen, die bei  $x$ -Werten  $x > \lambda$  beginnen, anwachsen und sich von der Gleichgewichtslösung entfernen. Umgekehrt nehmen Lösungen ab, die bei  $x$ -Werten  $x < \lambda$  beginnen, und entfernen sich damit ebenfalls von der Gleichgewichtslösung. Die Differentialgleichung mit rechter Seite 3.8 hat kein stabile Lösungen.

Die analoge Analyse für die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x - \lambda$$

ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Gleichgewichtslösung  $x_0 = -\lambda$  ist stabil. ○

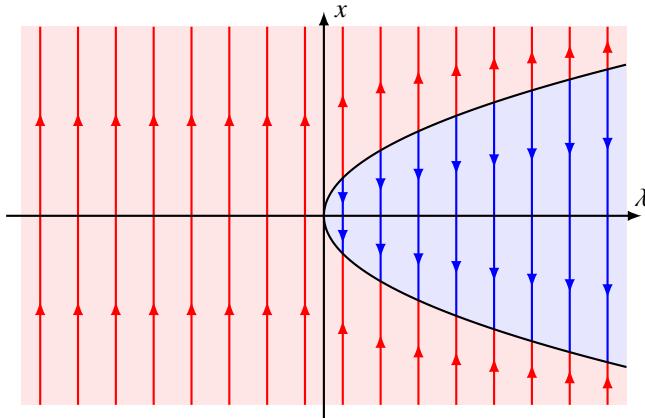


Abbildung 3.2: Phasendiagramm der Sattel-Knoten-Bifurkation zur Differentialgleichung 3.9. Für  $\lambda > 0$  gibt es zwei Gleichgewichtslösungen  $\pm \sqrt{\lambda}$ , eine ist stabil, die andere instabil.

Dieses Beispiel zeigt, dass interessante Bifurkationsereignisse erst dann auftreten, wenn der führende Term in  $x$  der Taylor-Entwicklung von  $f$  von höherer als linearer Ordnung ist.

### 3.3.1 Sattel-Knoten-Bifurkation

Die *Sattel-Knoten-Bifurkation* tritt auf in der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \lambda. \quad (3.9)$$

Für  $\lambda > 0$  hat die Gleichung 3.9 zwei Gleichgewichtslösungen  $\pm \sqrt{\lambda}$ . In Abbildung 3.2 ist das Phasendiagramm dargestellt. Daraus geht hervor, dass die Gleichgewichtslösung  $q\sqrt{\lambda}$  instabil ist, während  $-q\sqrt{\lambda}$  stabil ist.

### 3.3.2 Heugabel-Bifurkation

Die *Heugabel-Bifurkation* tritt bei der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - \lambda x \quad (3.10)$$

auf, bei der der führende Term dritter Ordnung in  $x$  ist. Die Differentialgleichung kann auch in der Form

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - \lambda)$$

geschrieben werden. Sie hat 0 als Gleichgewichtslösung für alle  $\lambda$ . Für  $\lambda > 0$  hat sie zusätzlich die Gleichgewichtslösungen  $\pm \sqrt{\lambda}$ .

Das Phasendiagramm 3.10 zeigt, dass die einzige Gleichgewichtslösung bei  $x_0 = 0$  instabil ist. Beim Übergang zu  $\lambda > 0$  wird die Gleichgewichtslösung  $x_0 = 0$  stabil. Die beiden neuen Gleichgewichtslösungen  $\pm \sqrt{\lambda}$  sind beide instabil.

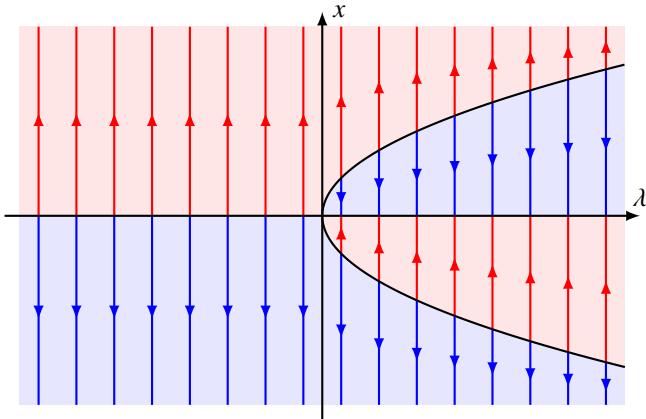


Abbildung 3.3: Phasendiagramm der Heugabel-Bifurkation.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x$$

hat die gleichen Gleichgewichtslösungen, jedoch ist 0 für  $\lambda < 0$  eine stabile Lösung, die beim Übergang zu  $\lambda > 0$  instabil wird. Die Gleichgewichtslösungen  $\pm \sqrt{\lambda}$  für  $\lambda > 0$  sind stabil.

### 3.3.3 Transkritische Bifurkation

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \lambda x = x(x + \lambda) \quad (3.11)$$

hat Gleichgewichtslösung 0 und  $-\lambda$ . Das Phasendiagramm in Abbildung 3.4 zeigt, dass für  $\lambda < 0$  die Gleichgewichtslösung 0 stabil ist, die Gleichgewichtslösung  $-\lambda$  hingegen instabil. Beim Übergang zu  $\lambda > 0$  wird die Gleichgewichtslösung 0 instabil und die Gleichgewichtslösung  $-\lambda$  wird instabil.

### 3.3.4 Ein Beispiel zur globalen Mitteltemperatur

Das Budyko-Modell versucht, die globale Mittelemperatur in Abhängigkeit von der Einstrahlung und der Albedo zu modellieren. Mehr zu diesen Ansätzen wird in Kapitel 5 dargestellt.

Als Beispiel für die Diskussion eines solchen Modells betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(x^3 - 9x) - \lambda. \quad (3.12)$$

Die Gleichgewichtslösungen sind die Nullstellen der kubischen Gleichung

$$f(x, \lambda) = x^3 - 9x - 3\lambda = 0.$$

Diese sind für beliebiges  $\lambda$  nicht so leicht zu finden. Für  $\lambda = 0$  sind die kritischen Punkte 0 und  $\pm 3$ . Die Funktion  $f(x)$  hat lokale Minima bei den  $\pm \sqrt{3}$  mit Funktionswerten  $\pm 2\sqrt{3}$ . Daher gibt es im Intervall  $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$  drei Gleichgewichtslösungen, außerhalb jedoch jeweils nur eine.

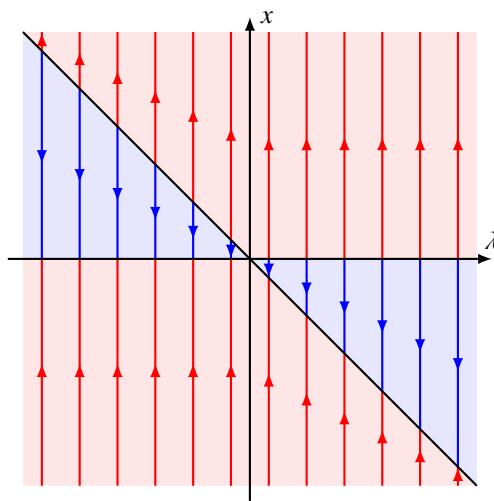


Abbildung 3.4: Phasendiagramm der transkritischen Bifurkation in der Differentialgleichung (3.11).

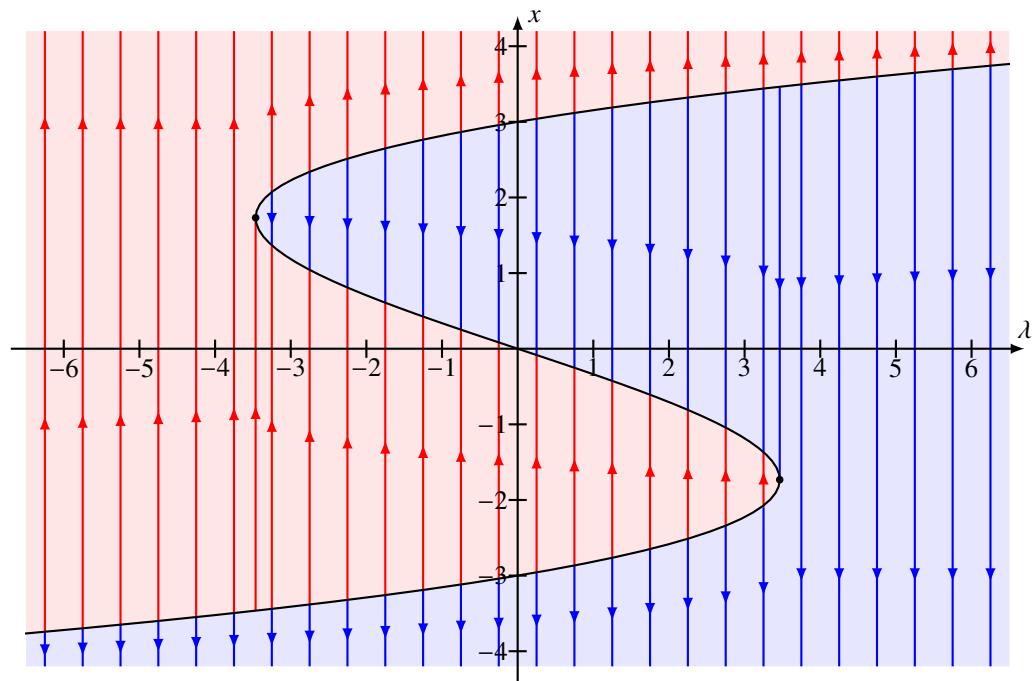


Abbildung 3.5: Phasendiagramm der Differentialgleichung (3.12).

Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Gleichgewichtslösungen oben und unten auf der S-Kurve sind instabil, nur der Ast zwischen den beiden lokalen Extrema von  $f(x)$  besteht aus stabilen Gleichgewichtslösungen.

Wächst der Parameter  $\lambda$  über den kritischen Wert  $2\sqrt{3}$  hinaus, gibt es keinen stabilen Gleichgewichtszustand mehr, das System divergiert nach  $-\infty$ . Analog strebt das System gegen  $+\infty$  wenn der Parameter den Werte  $-2\sqrt{3}$  unterschreitet.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -f(x, \lambda) \quad (3.13)$$

hat die gleichen Gleichgewichtslösungen wie (3.12), jedoch sind die stabilen Gleichgewichtslösungen von (3.12) instabile Gleichgewichtslösungen von (3.13). Beim Anstieg des Parameters  $\lambda$  über den Wert  $2\sqrt{3}$  springt das System, falls es sich im unteren Gleichgewichtszustand befand, in den oberen. Sinkt der Wert von  $\lambda$  wieder unter  $2\sqrt{3}$  wird, bleibt es jedoch auf dem oberen Gleichgewichtspunkt.

## 3.4 Linearisierung und Stabilität

### Übungen

1. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^4 - 4x^2 - \lambda \quad (3.14)$$

- a) Finden Sie die Gleichgewichtslösungen und untersuchen Sie die Bifurkationen, die bei Veränderungen des Parameters  $\lambda$  auftreten können.
- b) Welche Gleichgewichtslösung wird das System einnehmen, wenn der Parameter  $\lambda$  erst von  $-1$  auf  $1$  anwächst und dann wieder auf  $-1$  absinkt.

*Lösung.* a) Die kritischen Punkte der Differentialgleichung (3.14) sind Nullstellen der Gleichung

$$x^4 - 4x^2 - \lambda = 0 \quad (3.15)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in  $x^2$ , die mit der Lösungsformel für die quadratische Gleichung gelöst werden kann:

$$x^2 = 2 \pm \sqrt{4 + \lambda}.$$

Diese Gleichung hat reelle Lösungen für  $\lambda \geq -4$ . Für  $\lambda \leq 0$  ist die Quadratwurzel nicht grösser als 2, so dass die beiden Nullstellen positiv sind, es also vier verschiedene Lösungen

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{4 + \lambda}} \quad (3.16)$$

hat. Für  $\lambda > 0$  hat die quadratische Gleichung eine negative Lösung für  $x^2$ , die also nicht zu einer reellen Lösung der Gleichung (3.15) führen kann. Nur aus der positive Lösung  $2 + \sqrt{4 + \lambda}$  kann man eine Gleichgewichtslösung, nämlich

$$x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}}$$

ableiten. Für  $\lambda < -4$  gibt es gar keine Gleichgewichtslösung.

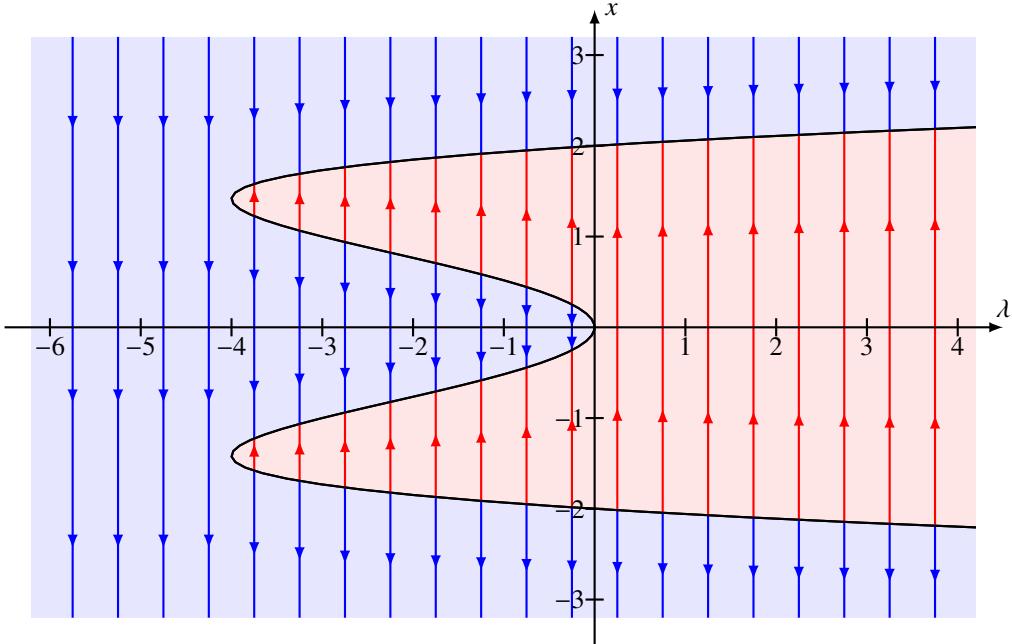


Abbildung 3.6: Phasendiagramm der Differentialgleichung (3.14).

Das Phasendiagramm in Abbildung 3.6 zeigt, dass für  $\lambda > 0$  die obere Gleichgewichtslösung stabil ist, untere dagegen instabil. Für  $-4 \leq \lambda \leq 0$  sind die Gleichgewichtslösungen

$$\sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}} \quad \text{und} \quad -\sqrt{2 - \sqrt{4 + \lambda}}$$

stabil und die Gleichgewichtslösungen

$$-\sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}} \quad \text{und} \quad \sqrt{2 - \sqrt{4 + \lambda}}$$

instabil.

Bei  $\lambda = -4$  finden gleichzeitig zwei Sattel-Knoten-Bifurkationen statt, bei  $\lambda = 0$  findet eine einfache Sattel-Knoten-Bifurkation statt, jedoch in umgekehrter Richtung wie im Beispiel im Text.

- b) Beim Anwachsen des Parameters über den Punkt  $\lambda = 0$  springt die Gleichgewichtslösung auf die stabile Lösung

$$x(\lambda) = \sqrt{2 + \sqrt{4 + \lambda}}$$

Bei der anschliessenden Verringerung von  $\lambda$  bleibt die Gleichgewichtslösung auf dem Ast  $x(\lambda)$  der Kurve, da diese alle stabil sind. Unabhängig vom Ausgangszustand befindet sich das System am Ende des beschriebenen Szenarios also immer in der Nähe der Gleichgewichtslösung

$$x(-1) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

○

# Kapitel 4

## Termohaline Zirkulation

Der Salzgehalt des Meerwassers ist nicht konstant, beeinflusst aber wie die Temperatur die Dichte. Dies führt zu einer grossräumigen Zirkulationsströmung in den Weltmeeren, genannt die thermohaline Zirkulation, und damit zu einem weiteren bedeutenden Energietransportmechanismus. Abbildung 4.1 zeigt den Umfang der Zirkulation. Auf einer Zeitskala von Jahrzehnten bis Jahrhunderten wird Meerwasser und damit auch Wärmeenergie über Distanzen umgewälzt, welche mehrfach die Erde umspannen. Die Organismen, die in den oberen Wasserschichten absterben, sinken langsam auf den Meeresgrund. Ohne eine umfassende Umwälzung der Weltmeere würden die oberen Wasserschichten mit der Zeit an Nährstoffen verarmen. Die thermohaline Zirkulation stellt also auch die Versorgung der Weltmeere mit Nährstoffen sicher.

Der Golfstrom ist ein kleiner Ausschnitt des globalen Förderbandes. Die gut bekannte Bedeutung des Golfstroms für das europäische Klima deutet an, wie wichtig die thermohaline Zirkulation für das globale Klima ist. Es ist daher unerlässlich zu verstehen, was die Zirkulation antreibt und wie sich der Klimawandel darauf auswirken könnte.

In diesem Kapitel soll die thermohaline Zirkulation modelliert werden. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Tatsache, dass dieses System kippen kann. Bei einer genügend grossen Änderung der Klimaparameter kann die Zirkulation sich auf irreversible Art ändern. Ein solches Ereignis hätte katastrophale Auswirkungen für das Klima.

### 4.1 Salinität und Dichte

Der Salzgehalt des Meerwassers ist nicht konstant. Er steigt an, wenn Wasser verdampft oder sich Eis bildet. Er sinkt, wenn das Salz durch Niederschläge verdünnt wird. Mit der Veränderung des Salzgehaltes geht auch eine Änderung der Dichte einher.

Den genauen Zusammenhang zwischen Salinität, Temperatur und Dichte kann nicht aus Naturgesetzen abgeleitet werden. Verschiedene Untersuchungen haben empirische Formeln für die Dichte in Abhängigkeit von Temperatur und Salinität zu Tage gefördert. Zum Beispiel in der Form

$$\varrho = \varrho_0(T) + A(T) \cdot S + B(T) \cdot S^{\frac{3}{2}} + C \cdot S^2,$$

wobei die Koeffizienten  $A(T)$  und  $B(T)$  Polynome der Temperatur  $T$  in  $^{\circ}\text{C}$  sind:

$$A(T) = 0.824493 - 0.0040899 T + 0.000076438 T^2 - 0.00000082467 T^3 + 0.0000000053875 T^4$$

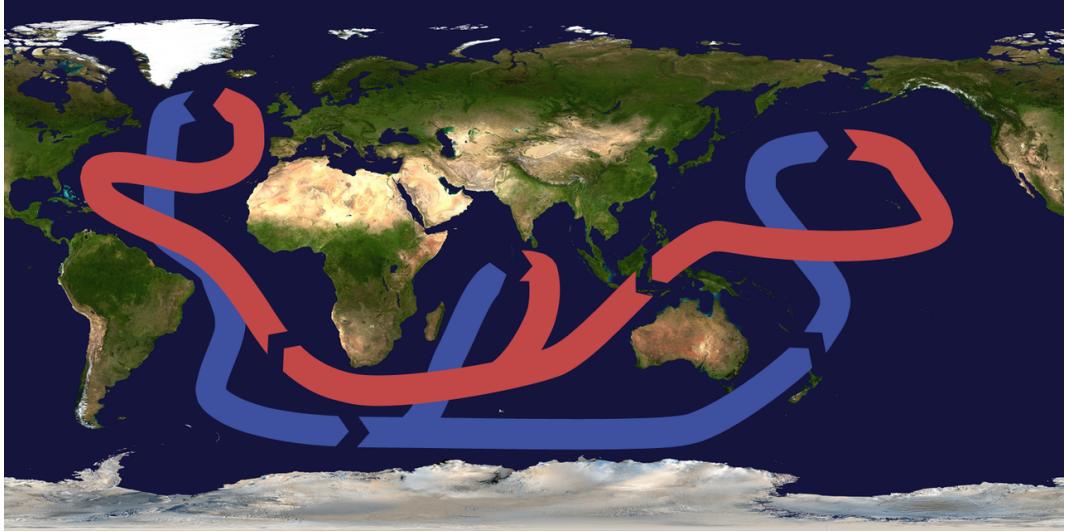


Abbildung 4.1: Das globale Förderband der thermohalinen Zirkulation.

$$B(T) = -0.00572466 + 0.00010227 T - 0.0000016546 T^2$$

$$C = 0.00048314$$

$$\varrho_0(T) = 0.824493 - 0.0040899 T + 0.000076438 T^2 - 0.00000082467 T^3 + 0.0000000053875 T^4,$$

die man etwa in [skript:millero] findet. Diese Formeln geben die Dichte über einen weiten Parameterbereich mit einem relativen Fehler < 0.001 wieder. Für unsere qualitativen Überlegungen ist diese Genauigkeit nicht nötig.

Im Folgenden betrachten wir die Dichte-Anomalie  $\varrho - \varrho_0$  in Abhängigkeit von der Temperatur-Anomalie  $T - T_0$  und der Salinitäts-Anomalie  $S - S_0$ . Man kann die Dichte-Anomalie immer als Taylor-Reihe

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\partial \varrho}{\partial T}(T - T_0) + \frac{\partial \varrho}{\partial S}(S - S_0) + \text{Terme höherer Ordnung}.$$

Solange  $T - T_0$  und  $S - S_0$  nicht allzu gross sind, kann man sich auf die linearen Terme beschränken und

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (4.1)$$

schreiben. Darin sind  $\alpha$  und  $\beta$  positive Zahlen, die Vorzeichen in (12.1) sind so gewählt, dass die Dichte mit höherer Temperatur abnimmt und mit höherer Salinität zunimmt. Typische Werte sind

$$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{K} \quad \text{und} \quad \beta = 8 \cdot 10^{-4} \frac{1}{psu}.$$

Mit diesem Modell für die Dichte könnten wir jetzt versuchen, die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeitsdynamik und die Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Wegen der komplizierten Form der Weltmeere ist das eine Aufgabe, die ausschliesslich numerisch gelöst werden kann. Außerdem benötigen wir detaillierte Informationen über den Wärmeaustausch mit der Atmosphäre oder dem Meeresboden. Eine derart detaillierte Modellierung scheint daher aussichtslos. Für eine qualitative Aussage über die Zirkulation benötigen wir daher ein dramatisch vereinfachtes Modell.

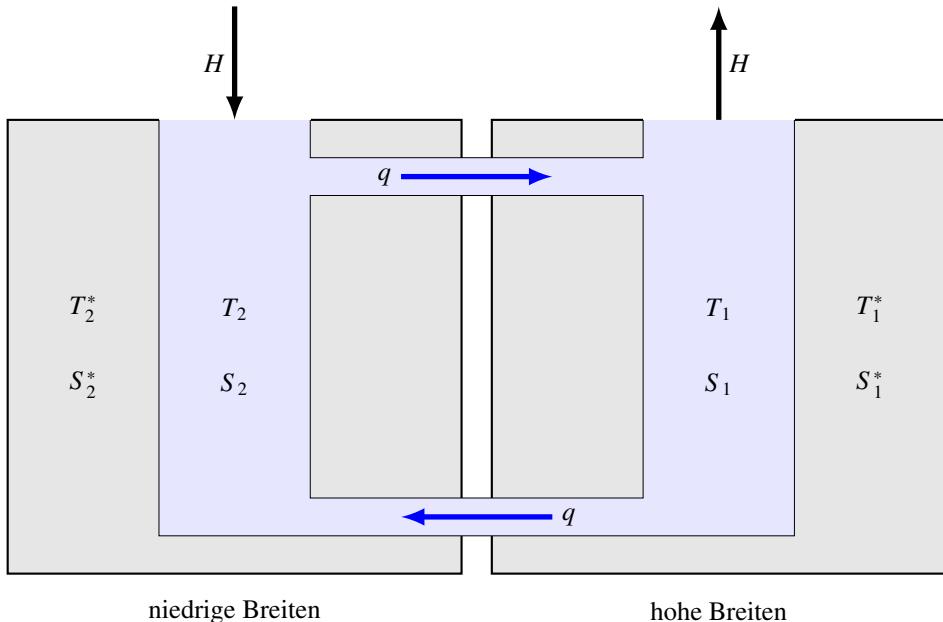


Abbildung 4.2: Einfaches Modell der thermohalinen Zirkulation

## 4.2 Ein Modell für die thermohaline Zirkulation

Jedes numerische Modelle der Zirkulation basiert auf einer Diskretisation des Gebietes. Der Ozean wird also in kleine Teilgebiete aufgeteilt. Gesucht sind Temperatur und Salinität in jedem Teilgebiet. Dann werden Gleichungen aufgestellt, die den Austausch von Salz und Wärme zwischen den Teilgebieten beschreiben. Die Lösung dieser Gleichungen wird uns das Ausmass der Zirkulation zeigen und erlauben abzuschätzen, wie sich die Zirkulation ändert, wenn sich die äusseren Bedingungen verschieben.

### 4.2.1 Ein einfaches Box-Modell

Um einen ersten Eindruck von der Dynamik der thermohalinen Zirkulation zu erhalten, verwenden wir ein Modell mit genau zwei Teilgebieten. Wir modellieren den Atlantik nördlich des Äquators als zwei Gebiete. Gebiet 1 ist das Polargebiet mit typischerweise tieferen Temperaturen, Gebiet 2 ist das Gebiet in der Nähe des Äquators. In jedem dieser Gebiet modellieren wir nur das Wasser, welches tatsächlich von der Zirkulation umgewälzt wird. Wir nehmen an, dass es sich durch die zwei Parameter Temperatur und Salinität beschreiben lässt. Wir nennen die Variablen im Gebiet  $i$   $T_i$  und  $S_i$ .

Das Wasser welches an der Zirkulation teilnimmt ist umgeben von einem viel grösseren Wasserreservoir, welches mit dem strömenden Wasser im Wärme- und Salzaustausch steht. Wir bezeichnen die konstanten Parameter dieses Reservoirs mit  $T_i^*$  und  $S_i^*$ . In Abbildung ?? sind die beiden Gebiete grau dargestellt, das in Zirkulation befindliche Wasser hellblau.

Die Zirkulation ist charakterisiert durch den Massefluss  $q$  der Tiefenströmung. Da kein Wasser verloren gehen kann, muss in Oberflächennähe der gleiche Fluss herrschen. Da auch kein Salz

verloren gehen kann, müssen sich auch die Salzflüsse zwischen den beiden Gebieten ausgleichen. Die Salinität wird zum Beispiel durch die Verdunstung erhöht, während Niederschlag sie erniedrigt. Süßwasserflüsse von Kontinenten reduzieren ebenfalls die Salinität. Dies bedeutet, dass zusätzlich zum Massestrom  $q$  ein virtueller Salzstrom zwischen den beiden Gebieten herrscht, den wir mit  $H$  bezeichnen.

### 4.2.2 Modell-Gleichungen

Wir müssen jetzt Differentialgleichungen aufstellen, welche die zeitliche Entwicklung von Temperatur  $T_i(t)$  und Salinität  $S_i(t)$  beschreiben kann. Die Temperaturentwicklung wird bestimmt einerseits durch den Energietransport durch den Fluss  $q$  und andererseits durch den Wärmeaustausch mit dem umgebenden Wasser. Der Fluss  $q$  hat zur Folge, dass sich die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  angleichen. Die beiden Flüsse oben und unten in Abbildung 4.2 transportieren die gleiche Menge Wasser pro Zeiteinheit. Es wird also gleichviel Wasser mit Temperatur  $T_1$  ins Gebiet 2 transportiert wie Wasser mit Temperatur  $T_2$  ins Gebiet 1. Das Vorzeichen von  $q$  spielt dabei keine Rolle, denn ändert das Vorzeichen von  $q$ , fliesst das Wasser mit Temperatur  $T_1$  einfach durch den anderen Kanal. Die Temperaturänderung von  $T_1$  ist also proportional zu  $|q|(T_2 - T_1)$ .

Der Wärmeaustausch mit dem umgebenden Wasser ist proportional zur Temperaturdifferenz, wir bezeichnen den Proportionalitätsfaktor mit  $c$ .

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q|(T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q|(T_1 - T_2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Analoge Überlegungen müssen wir jetzt auch noch für die Salinität anstellen. Der Ausgleich der Salinität  $S_i$  mit der Salinität  $S_i^*$  des umgebenden Meersbeckens ist proportional zur Differenz, der Proportionalitätsfaktor, den wir mit  $d$  bezeichnen, ist bestimmt durch die Diffusionsgeschwindigkeit und die turbulente Durchmischung des zirkulierenden Wassers mit der Umgebung. Dazu kommt noch der virtuelle Salzfluss  $H$ :

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= H + d(S_1^* - S_1) + |q|(S_2 - S_1) \\ \frac{dS_2}{dt} &= -H + d(S_2^* - S_2) + |q|(S_1 - S_2).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Man beachte, dass die Temperaturgleichungen 4.2 und die Salinitätsgleichungen 4.3 gekoppelt sind, da der Fluss  $q$  angetrieben wird vom Dichteunterschied, der wiederum von Temperatur und Salinität abhängt.

### 4.2.3 Antrieb der Zirkulation

Die Zirkulation wird wie gesagt vom Dichteunterschied angetrieben. Es gibt also einen Proportionalitätsfaktor  $k$  derart, dass

$$q = k \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_0}.$$

Setzt man die Formel 12.1 ein, findet man

$$q = k(-\alpha(T_1 - T_2) + \beta(S_1 - S_2)) = k(\alpha(T_2 - T_1) + \beta(S_1 - S_2)) = k(\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)).$$

Schreiben wir  $\Delta T = T_2 - T_1$  und  $\Delta S = S_2 - S_1$ , dann ist der Fluss nur von den Differenzen abhängig

$$q = k(\alpha \Delta T - \beta \Delta S). \quad (4.4)$$

#### 4.2.4 Anomalie-Gleichungen

Die absoluten Werte von  $T_i$  und  $S_i$  sind nicht wirklich wichtig, viel wichtiger sind die Unterschiede  $\Delta T_i$  und  $\Delta S_i$ . Verschwinden die Differenzen, kommt die Zirkulation zum erliegen, und dies sind die Phänomene, die wir mit den Gleichungen prognostizieren können möchten. Wir streben daher an, die Gleichungen (4.2) und (4.3) in eine Form zu bringen, die nur von Differenzen und Anomalien abhängt.

Wir schreiben

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad \text{und} \quad S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

für die Mittelwerte von Temperatur und Salinität. Indem wir den Mittelwert der Temperaturgleichungen (4.2) bzw. der Salinitätsgleichung (4.3) bilden, bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dT_0}{dt} &= c(T_0^* - T_0) \\ \frac{dS_0}{dt} &= d(S_0^* - S_0), \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei  $T_0^* = \frac{1}{2}(T_1^* + T_2^*)$  und  $S_0^* = \frac{1}{2}(S_1^* + S_2^*)$ . Die Differentialgleichungen ?? besagen, dass die mittlere Temperatur des zirkulierenden Wassers gegen die mittlere Temperatur des umliegenden Meeresbeckens strebt.

Da die Mitteltemperatur langfristig gegen die Mitteltemperatur der umliegenden Meeresbecken strebt liegt es nahe, Temperatur und Salinität auf diese Mitteltemperatur zu beziehen. Wir ersetzen also

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= T_1 - T_0^*, & \bar{T}_2 &= T_2 - T_0^* \quad \Rightarrow \quad \bar{T}_0 = T_0 - T_0^* \\ \bar{S}_1 &= S_1 - S_0^*, & \bar{S}_2 &= S_2 - S_0^* \quad \Rightarrow \quad \bar{S}_0 = S_0 - S_0^* \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Differentialgleichungen (4.5) für die Mittelwerte wird damit zu

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= -c\bar{T}_0 \\ \frac{d\bar{S}_0}{dt} &= -d\bar{S}_0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für  $T_i = \bar{T}_i + T_0^*$  und  $S_i = \bar{S}_i + S_0^*$  sind

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} &= \frac{d\bar{T}_i}{dt} = c(T_i^* - T_i) + |q|\Delta\bar{T} = c(T_i^* - \bar{T}_i - T_0^*) + |q|\Delta\bar{T} \\ \frac{dS_i}{dt} &= \frac{d\bar{S}_i}{dt} = \pm H + d(S_i^* - S_i) + |q|\Delta\bar{S} = \pm H + d(S_i^* - \bar{S}_i - S_0^*) + |q|\Delta\bar{S} \end{aligned}$$

Die Differenzen  $T_i^* - T_0^*$  und  $S_i^* - S_0^*$  können wir vereinfacht als

$$\begin{aligned} T_1^* - T_0^* &= T_1^* - \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = -\frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = -T^* \\ T_2^* - T_0^* &= T_2^* - \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) = T^* \end{aligned}$$

schreiben und analog für  $S^* = \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*)$ . Damit werden die Differentialgleichungen zu

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{T}_1}{dt} &= c(-T^* - \bar{T}_1) + |q|(\bar{T}_2 - \bar{T}_1) \\ \frac{d\bar{T}_2}{dt} &= c(T^* - \bar{T}_2) + |q|(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \\ \frac{d\bar{S}_1}{dt} &= -H + d(-S^* - \bar{S}_1) + |q|(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) \\ \frac{d\bar{S}_2}{dt} &= H + d(S^* - \bar{S}_2) + |q|(\bar{S}_1 - \bar{S}_2)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Man beachte, dass die  $T^*$  und  $S^*$  konstant sind.

In den Gleichungen (4.7) hängt  $q$  von den Temperatur- und Salinitätsdifferenzen ab. Wegen  $\Delta\bar{T} = \Delta T$  und  $\Delta\bar{S}$  ist nach (4.4)

$$q = k(\alpha\Delta\bar{T} - \beta\Delta\bar{S}).\tag{4.8}$$

#### 4.2.5 Differenzgleichungen

Wir können die Anomaliegleichungen (4.7) noch etwas weiter umformen und die einzelnen Anomalien vollständig durch die Differenzen ersetzen. Die Differenzen und Summen der Gleichungen sind

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\bar{T}}{dt} &= c(2T^* - \Delta\bar{T}) - 2|q|\Delta\bar{T} & \frac{d\bar{T}_0}{dt} &= -c\bar{T}_0 \\ \frac{d\Delta\bar{S}}{dt} &= 2H + d(2S^* - \Delta\bar{S}) - 2|q|\Delta\bar{S} & \frac{d\bar{S}_0}{dt} &= -d\bar{S}_0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Die Gleichungen rechts drücken aus, dass die mittleren Anomalien exponentiell gegen 0 gehen. Die linken Gleichungen beschreiben die Zeitentwicklung der Differenz der Anomalien. Man beachte, dass  $q$  ebenfalls von den Anomalie-Differenzen abhängt.

#### 4.2.6 Zeitkonstanten

Der Koeffizienten  $c$  beschreibt, wie schnell der Temperaturausgleich durch Wärmeleitung oder turbulente Durchmischung erfolgt. Der Koeffizient  $d$  beschreibt, wie schnell der Salinitätsausgleich durch Durchmischung und Diffusion stattfinden kann. Je grösser diese Koeffizienten, desto schneller erfolgt der Prozess. In den rechten Gleichungen von (4.9) ist dies ganz offensichtlich. Vernachlässigen wir für den Moment den Einfluss der Zirkulation, was wir durch  $k = 0$  im Ausdruck für  $q$  beschreiben können, dann sehen wir, dass die Differenzgleichungen beide von der Form einer linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{d\Delta X}{dt} = X^* - cX$$

sind, wobei  $X^*$  eine Konstante ist. Die Lösung der Gleichung ist

$$X(t) = \frac{X^*}{c} + C_0 e^{-ct}$$

mit einer Konstanten  $C_0$ , die aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen ist. Die Terme  $T^*$ ,  $S^*$  und  $H$  verschieben also nur die Lösung, die Differenzen  $\Delta\bar{T}$  und  $\Delta\bar{S}$  streben exponentiell wie  $e^{-ct}$  bzw.  $e^{-dt}$  gegen diese Gleichgewichtswerte.

Die Größen  $1/c$  und  $1/d$  haben die Dimension einer Zeit, wir nennen sie die *Zeitkonstanten* des Prozesses, den  $c$  bzw.  $d$  beschreiben. Ist zum Beispiel die Zeitkonstante  $1/c$  der Temperatur sehr viel kleiner als die Zeitkonstanten  $1/d$  der Salinität, dann bedeutet dies, dass sich die Temperaturdifferenzen sehr viel schneller ausgleichen als die Salinitätsdifferenzen. Für die langfristige Entwicklung der Zirkulation ist in diesem Fall die Salinitätsentwicklung ausschlaggebend, die Temperaturfunktionen können durch konstante ersetzt werden.

## 4.3 Dynamik der thermohalinen Zirkulation

In diesem Abschnitt wollen wir die Bewegungsgleichung 4.9 etwas vereinfachen mit dem Ziel, einzelne Szenarien durchspielen zu können. Eine vertiefte Diskussion solcher Modelle ist in Kapitel 12 zu finden.

### 4.3.1 Elimination von Prozessen mit kurzer Zeitkonstante

Die Diskussion in Abschnitt 4.2.6 ist es zulässig, Variablen mit sehr kleiner Zeitkonstanten durch Konstanten zu ersetzen. Tatsächlich erfolgt der Temperaturausgleich im Wasser sehr viel schneller als der Salinitätsausgleich. Wir können daher davon ausgehen, dass die Temperaturlgleichungen die Temperaturanomalien sehr schnell gegen eine Gleichgewichtstemperatur streben lassen und dass wir für die Lösung der Salinitätsgleichungen mit dieser konstanten Temperatur arbeiten können.

Wir gehen also davon aus, dass  $\Delta\bar{T} = 2T^*$  konstant ist und reduzieren damit das Gleichungssystem (4.9) auf die eine Gleichung

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H + d(2S^* - \Delta\bar{S}) - 2|q|\Delta\bar{S} \quad \text{mit} \quad q = k(2\alpha T^* - \beta\Delta\bar{S}). \quad (4.10)$$

Diese Gleichungen beschreiben also die Salinitätsentwicklung unter der Annahme, dass der Temperaturausgleich sehr schnell erfolgt. Dieser Ausgleich kann nicht primär durch Durchmischung erfolgen, denn dieser Mechanismus würde auch die Salinität mit gleicher vergleichbarer Geschwindigkeit ausgleichen. Dies bedeutet, dass der dominante Term in der Temperaturlgleichung der Term mit  $c$  ist, nicht der Term mit  $q$ .

Die Gleichung (4.10) kann noch nicht auf einfache Weise gelöst werden. Wir vereinfachen wir sie daher weiter indem wir ausnutzen, dass der Salinitätsausgleich so viel langsamer ist als der Temperaturausgleich, dass der Term mit  $d$  im Vergleich zum Term mit  $q$  vernachlässigbar ist. Wir setzen also  $d = 0$  und erhalten damit

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H - 2|q|\Delta\bar{S} \quad \text{mit} \quad q = k(2\alpha T^* - \beta\Delta\bar{S}) \quad (4.11)$$

als vereinfachte Differentialgleichung zur Modellierung der thermohalinen Zirkulation. Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, die nicht in geschlossener Form gelöst werden kann.

### 4.3.2 Eine dimensionslose Beschreibung

Die Gleichung (4.11) ist wegen der vielen Konstanten unübersichtlich. Ausgeschrieben lautet sie

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{S} = 2H - 2k|\alpha\Delta\bar{T} - \beta\Delta\bar{S}|\Delta\bar{S} \quad (4.12)$$

Die meisten der Konstanten können wir aber los werden, indem wir die unabhängigen Variablen und die Zeit neu skalieren. Dies ist gleichbedeutend mit einem Wechsel der Masseinheiten. Wir verwenden:

$$x = \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}}, \quad \tau = 2\alpha k |\Delta \bar{T}| t \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|}. \quad (4.13)$$

Die Ableitung nach  $t$  kann durch die Ableitung nach  $\tau$  ausgedrückt werden vermöge der Ersetzung

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{2\alpha k |\Delta \bar{T}|} \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = 2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (4.13) ein, erhalten wir

$$2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} \Delta \bar{S} = 2H - 2k|\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| \Delta \bar{S}. \quad (4.14)$$

Wir erweitern mit  $\beta/\alpha \Delta \bar{T}$ , damit wird die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} 2\alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} &= \frac{2\beta H}{\alpha \Delta \bar{T}} - 2k|\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \\ \alpha k |\Delta \bar{T}| \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{\alpha \Delta \bar{T}} - k|\alpha \Delta \bar{T} - \beta \Delta \bar{S}| x \\ k \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{\alpha^2 \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|} - k \left| 1 - \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \right| x \\ \frac{d}{d\tau} x &= \frac{\beta H}{k \alpha^2 \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|} - \left| 1 - \frac{\beta \Delta \bar{S}}{\alpha \Delta \bar{T}} \right| x \\ \frac{dx}{d\tau} &= \lambda - |1 - x|x. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Damit haben wir die ursprüngliche Gleichung (4.12) in eine dimensionslose Gleichung mit dem einen Parameter  $\lambda$  umgewandelt. Das Verhalten der Lösung hängt vom Parameter  $\lambda$  ab.

### 4.3.3 Gleichgewicht

Um das Verhalten der Lösungen von (4.15) besser zu verstehen, suchen wir zunächst nach Gleichgewichtslösungen. Diese hängen nicht von der Zeit ab, es gilt also

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - |1 - x|x = 0 \quad \Rightarrow \quad |1 - x|x = \lambda. \quad (4.16)$$

In Abbildung 4.3 ist der Graph der Funktion  $|1 - x|x$  dargestellt. Je nach dem Wert von  $\lambda$  hat die dimensionslose Differentialgleichung (4.15) bis zu drei Gleichgewichtslösungen.

Für Werte von  $\lambda$  zwischen 0 und 0.25 gibt es drei verschiedene Werte  $x$ , die die Gleichung (4.16) erfüllen (Abbildung 4.5). Für  $x \leq 1$  ist  $1 - x \geq 0$  und damit muss  $x$  die Gleichung  $(1 - x)x = \lambda$  erfüllen, für  $x \geq 1$  ist es die Gleichung  $(x - 1)x = \lambda$ . Diese beiden Gleichungen haben die folgenden Lösungen

$$\begin{aligned} \text{Fall } x \leq 1: \quad (1 - x)x &= \lambda \\ x^2 - x + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall } x \geq 1: \quad (x - 1)x &= \lambda \\ x^2 - x - \lambda &= 0 \end{aligned}$$

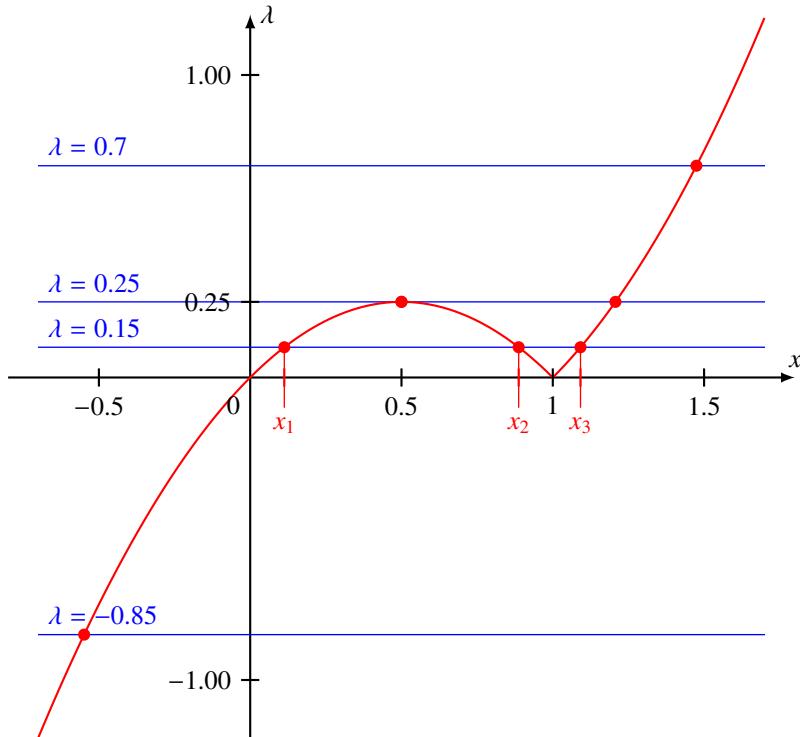


Abbildung 4.3: Graph der Funktion  $|1 - x| x$  und Gleichgewichtslösungen der dimensionslosen Differentialgleichung (4.15)

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} \quad x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}$$

Die rechte Gleichung hat für alle Werte  $\lambda > 0$  zwar auch noch eine Lösung  $< 1$ , diese ist aber ausgeschlossen, daher nur das positive Zeichen vor der Wurzel in diesem Fall. Für  $\lambda > 0.25$  hat die linke Gleichung keine Lösung. Für  $\lambda < 0$  ist die Lösung mit dem positiven Zeichen der linken Gleichung ausgeschlossen.

Wir berechnen die Lösung der Differentialgleichung für einen gegebenen Wert von  $\lambda$  (Abbildung 4.4). Für  $\lambda > \frac{1}{4}$  gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt, wir nennen ihn  $x_3$ . Falls  $x(\tau) < x_3$ , dann ist

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x > 0,$$

die Lösung  $x(\tau)$  ist also monoton wachsend. Für  $x(\tau) > x_3$  ist hingegen

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda - |1 - x|x < 0,$$

die Lösung ist also monoton wachsend. Lösungskurven, die bei  $x$ -Werten  $> x_3$  beginnen nehmen monoton ab und konvergieren gegen  $x_3$ , solche, die bei  $x$ -Werten  $< x_3$  beginnen, nehmen monoton zu und konvergieren von unten gegen  $x_3$ . Die Gleichgewichtslösung  $x(\tau) = x_3$  ist also eine stabile Lösung, alle anderen Lösungen konvergieren gegen diese Lösung.

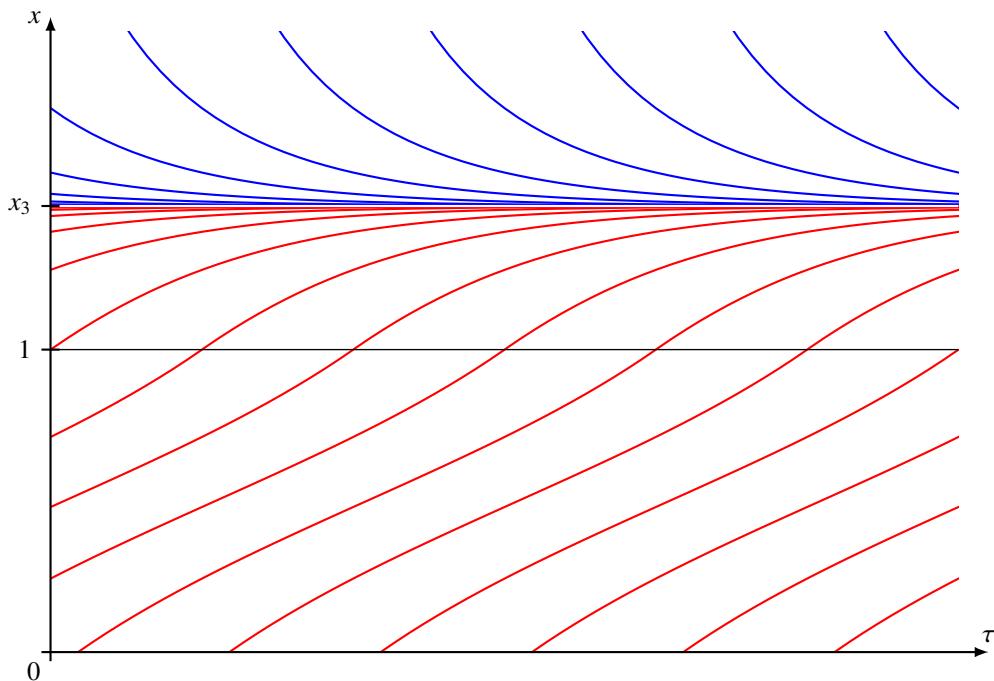


Abbildung 4.4: Lösungen im Fall  $\lambda > \frac{1}{4}$ : der einzige Gleichgewichtspunkt  $x_3$  ist stabil.

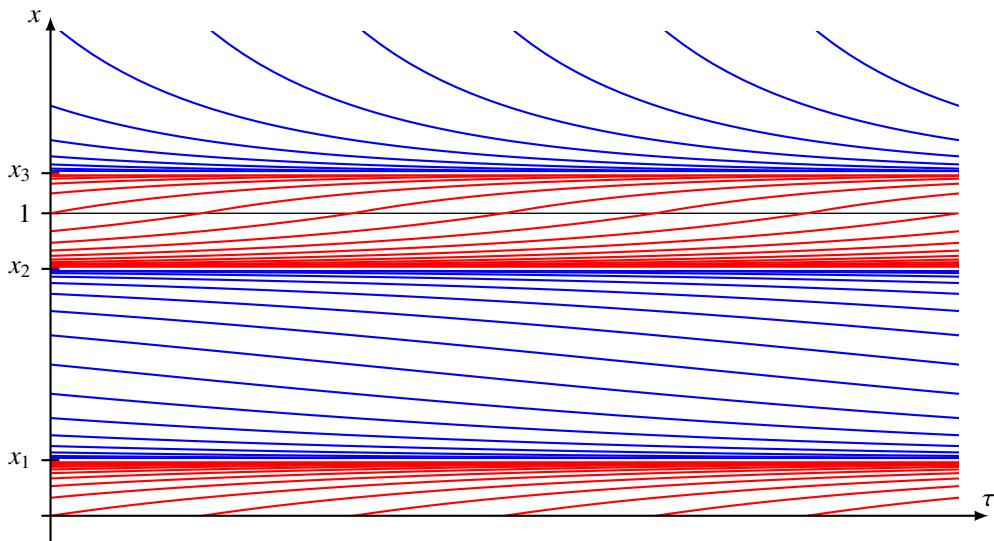


Abbildung 4.5: Lösungen im Fall  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$ : die beiden Gleichgewichtspunkte  $x_1$  und  $x_3$  sind stabil,  $x_2$  ist instabil.

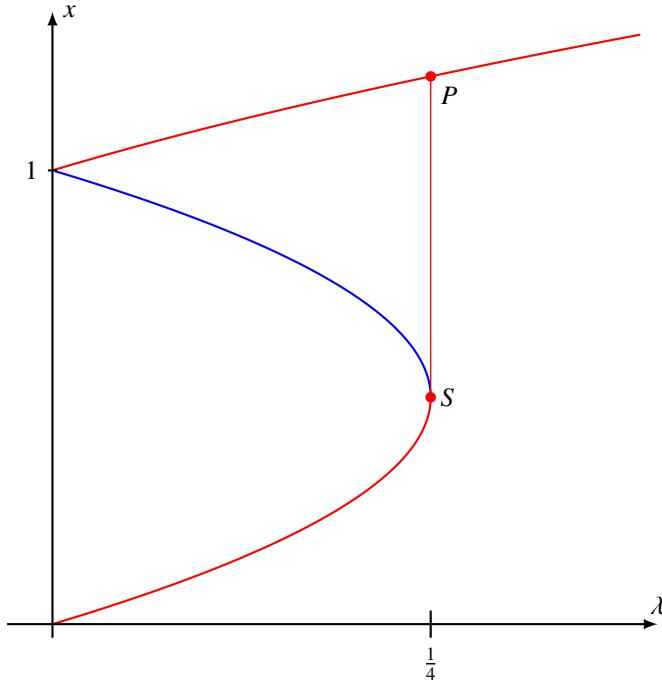


Abbildung 4.6: Bifurkationsdiagramm für die Differentialgleichung (4.16)

Für  $0 < \lambda < \frac{1}{4}$  seien  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die drei Gleichgewichtspunkte (Abbildung /refskript:thc:drei). Wir untersuchen wieder die Vorzeichen von  $dx/d\tau$ . Für  $x$ -Werten zwischen  $x_1$  und  $x_2$  und für  $x$ -Werte grösser als  $x_3$  ist die Ableitung positiv, die Lösungen konvergieren monoton wachsend gegen die Gleichgewichtslösungen  $x_1$  bzw.  $x_3$ . Lösungen, die bei  $x < x_1$  oder  $x_2 < x < x_3$  beginnen, konvergieren dagegen monoton wachsend gegen  $x_1$  bzw.  $x_3$ . Die Gleichgewichtslösung  $x_2$  ist daher nicht stabil, die Gleichgewichtslösungen  $x_1$  und  $x_3$  sind dagegen stabil.

#### 4.3.4 Bifurkation

Für Parameterwerte  $\lambda < \frac{1}{4}$  gibt es drei mögliche Gleichgewichtspunkte, für  $\lambda > \frac{1}{4}$  jedoch nur noch einen. Wir möchten untersuchen, wie sich die Lösung verhält, wenn der Parameter langsam verändert wird. Dies ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

Sei jetzt also zunächst  $\lambda < \frac{1}{4}$ . Wir betrachten also eine Lösung, die in Nähe von

$$x_1(\lambda) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

beginnt. Vergrössern wir  $\lambda$ , verschiebt sich der Gleichgewichtspunkt  $x_1(\lambda)$  ebenfalls nach oben. Da  $x_1(\lambda)$  aber ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, wird die Lösung gegen den neuen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Das gleiche passiert auch, wenn die Lösung in der Nähe von

$$x_3(\lambda) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}$$

beginnt. Bei einer Vergrösserung folgt das System den roten Kurven in Abbildung 4.6.

Wenn jetzt aber der Parameter  $\lambda$  die Schwelle  $\frac{1}{4}$  überschreitet, dann wird die Lösung zum einzigen verbleibenden stabilen Gleichgewichtspunkt  $x_3(\lambda)$  konvergieren. Die Lösung springt also vom Punkt  $S$  zum Punkt  $P$  auf dem oberen roten Ast in Abbildung 4.6.

Wenn man den Parameter  $\lambda$  wieder verkleinert, dann wird eine Lösung in der Nähe von  $x_3(\lambda)$  wieder gegen  $x_3(\lambda)$  konvergieren. Es ist aber nicht mehr möglich, dass die Lösung gegen  $x_1(\lambda)$  konvergiert, da nach Abbildung 4.5 nur Lösungen, die bei  $x$ -Werten  $< x_2$  beginnen, gegen  $x_1(\lambda)$  konvergieren können.

Dieses einfache Modell der thermohalinen Zirkulation hat also die überraschende Eigenschaft, dass das System beim Überschreiten des kritischen Wertes  $\lambda = \frac{1}{4}$  in einen Zustand kippt, aus dem es nicht mehr zurück kommen kann. Wegen

$$\lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta \bar{T} |\Delta \bar{T}|}$$

kann dies passieren wenn entweder der Betrag des virtuellen Salzflusses  $H$  ansteigt oder die Temperaturanomaliedifferenz  $\Delta \bar{T}$  klein wird. Eine Klimaerwärmung könnte zum Beispiel die Verdunstung im Gebiet 2 erhöhen, den virtuellen Salzfluss erhöhen und damit das System in den Zustand mit einer wesentlich grösseren Anomaliedifferenz  $\Delta \bar{S}$  kippen lassen.

# Kapitel 5

## Zonenmodelle

Die Erdrotation ist schnell im Vergleich zu den für typische Klimamodelle wesentlichen Zeitspannen. Wesentliche Aspekte der Klimaentwicklung sollten sich daher immer noch modellieren lassen, wenn man den Zustand des Klimasystems über die Erdrotation mittelt. In diesem Kapitel werden daher vereinfachte Modelle diskutiert, die nur die geographischen Länge als geometrischen Parameter haben.

### 5.1 Strahlung

Die von der Erde empfange Strahlung sowie die Albedo wurden bereits in Abschnitt 1.2.2 untersucht. Für die später in diesem Kapitel zu untersuchenden Modelle ist aber erforderlich, die örtliche Verteilung der Strahlung auf der Erdoberfläche genauer zu verstehen. In diesem Abschnitt wird daher zuerst die Strahlungsleistung auf einer Halbkugel und später auf einer Zone um einen Breitenkreis berechnet.

#### 5.1.1 Einstrahlung auf einer Halbkugel

Die einfachste Erweiterung des Modells von Budyko teilt die Erde in zwei Halbkugeln auf, die Energie nur langsam austauschen können. Für die Energiebilanz brauchen wir daher die Strahlungsleistung auf einer Halbkugel in Abhängigkeit von der Neigung  $\gamma$  der Erdachse.

Die gesamte auf die Erde eingestrahlte Leistung ist  $\pi R^2 S_0$ . Diese Leistung muss nun in Abhängigkeit von der Neigung  $\gamma$  auf die beiden Halbkugeln verteilt werden. Von der Erde aus gesehen teilt der Äquator die bestrahlte Erde wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Halbkugeln ist der Flächeninhalt der Ellipse, also

$$F = \pi R^2 \sin \gamma.$$

Die Strahlungsleistung auf den beiden Halbkugeln in Abbildung (5.1) ist daher

$$E_N = \frac{1}{2}(\pi R^2 S_0 + \pi R^2 S_0 \sin \gamma) = \pi R^2 S_0 \frac{1 + \sin \gamma}{2} = Q \frac{1 + \sin \gamma}{2} \quad \text{Nordhalbkugel}, \quad (5.1)$$

$$E_S = \frac{1}{2}(\pi R^2 S_0 - \pi R^2 \sin \gamma) = \pi R^2 S_0 \frac{1 - \sin \gamma}{2} = Q \frac{1 - \sin \gamma}{2} \quad \text{Südhalbkugel}. \quad (5.2)$$

In Kapitel 16 wird diese Lösung verwendet, um zu modellieren, wie die Veränderung der Neigung der Erdachse zu Eiszeiten führen kann.

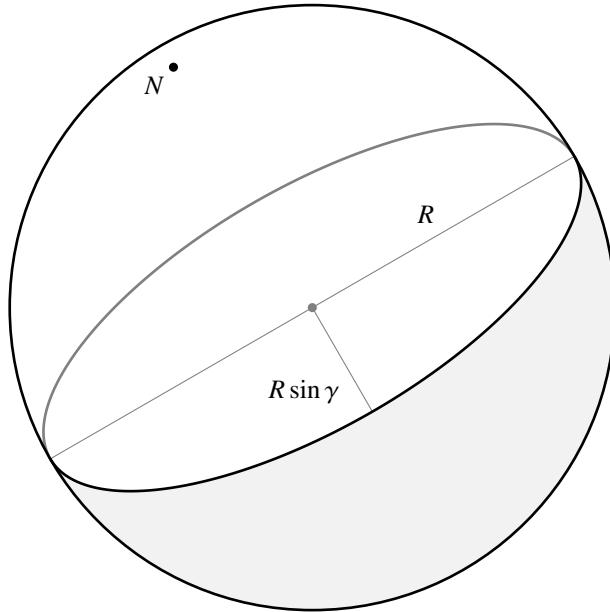


Abbildung 5.1: Aufteilung der sonnenbeschienenen Seite der Erde durch den Äquator.

### 5.1.2 Einstrahlung auf einen Breitenkreis

Wir berechnen die Einstrahlung auf einem gegebenen Breitengrad  $\vartheta$  in Abhängigkeit von der Neigung  $\gamma$  der Erdachse. Die einfallende Strahlungsleistung ist proportional zum Skalarprodukt der Richtung der Einstrahlung mit der Normalen in einem Punkte auf dem Breitenkreis zur Breite  $\vartheta$ . Die Normale ist

$$\vec{n}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Richtung der Einstrahlungsrichtung ist

$$\vec{e}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ 0 \\ \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt ist

$$\vec{n}(\vartheta, \varphi) \cdot \vec{e}(\gamma) = \sin \vartheta \cos \varphi \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma. \quad (5.3)$$

Für die folgende Diskussion nehmen wir an, dass  $\gamma \geq 0$ , dass also der Nordpol permanent bestrahlt ist und der Südpol keine Strahlung erhält.

Im Folgenden wollen wir die Energie berechnen, die in eine Zone eingestrahlt wird.

#### Sonnenauf- und -untergang

Die Einstrahlung erfolgt natürlich nur zwischen Sonnenauf- und -untergang. Wir bezeichnen die geographische Länge, bei der der Sonnenauf- oder -untergang erfolgt, mit  $\pm\varphi_0$ . Diese sind gekennzeichnet

net dadurch, dass  $\vec{n}(\vartheta, \varphi_0)$  und  $\vec{e}(\gamma)$  senkrecht aufeinander stehen oder

$$\begin{aligned}\vec{n}(\vartheta, \varphi_0) &\perp \vec{e}(\gamma) \\ \Rightarrow \quad \vec{n}(\vartheta, \varphi_0) \cdot \vec{e}(\gamma) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \sin \vartheta \cos \varphi_0 \cos \gamma &= -\cos \vartheta \sin \gamma \\ \Rightarrow \quad \cos \varphi_0 &= -\frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}.\end{aligned}$$

Wenn  $\vartheta < \gamma$  (Punkt in der Nähe des Nordpols) oder  $\vartheta > \pi - \gamma$  (Punkt in der Nähe des Südpols), dann hat die Gleichung keine Lösung, die Sonne geht nie auf (Polarnacht) oder unter (Polartag).

### Mittlere Strahlungsleistung auf Breite $\vartheta$

Um die Strahlungsleistung auf einer beliebigen geographischen Breite zu berechnen, gehen wir in zwei Schritten vor. Das Skalarprodukt (5.3) gibt die Strahlungsleistung  $\varepsilon(\vartheta, \varphi, \gamma)$  in einem Punkt auf der geographischen Breite  $\vartheta$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ . Im ersten Schritt mitteln wir dies über eine Umdrehung, dazu ist das Skalarprodukt (5.3) über eine Umdrehung zu mitteln. So erhalten wir die mittlere Strahlungsleistung  $\varepsilon(\vartheta, \gamma)$  in einem Punkte auf geographischer Breite  $\vartheta$ . Im zweiten Schritt müssen wir die die mittlere Strahlungsleistung mit der Länge des Breitenkreises multiplizieren, um die Strahlungsleistung auf dem Breitenkreis zur Breite  $\vartheta$  zu erhalten.

### Polnähe

In der Nähe des Südpols, also wenn  $\vartheta > \pi - \gamma$ , ist die Einstrahlung = 0. In der Nähe des Nordpols, also wenn  $\vartheta < \gamma$ , ist die Einstrahlungsdichte

$$\varepsilon_{\text{in}} = \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \varphi \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma d\varphi = 2\pi \cos \vartheta \sin \gamma.$$

Für den Spezialfall  $\vartheta = 0$  fällt der erste Term weg und es bleibt

$$\varepsilon_{\text{in}}(0, \gamma) = 2\pi \sin \gamma.$$

### Äquator

Am Äquator ist  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  und  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Man bekommt

$$\varepsilon_{\text{in}}\left(\frac{\pi}{2}, \gamma\right) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \cos \varphi \cos \gamma d\varphi = \cos \gamma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2 \cos \gamma$$

für die Einstrahlung am Äquator.

### Der allgemeine Fall mit Sonnenauf- und -untergang

Der allgemeine Fall mit Sonnenauf- und -untergang ist  $\gamma < \vartheta < \pi - \gamma$ . Für die Einstrahlung finden wir dann

$$\varepsilon_{\text{in}}(\vartheta, \gamma) = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sin \vartheta \cos \varphi \cos \gamma + \cos \vartheta \sin \gamma d\varphi$$

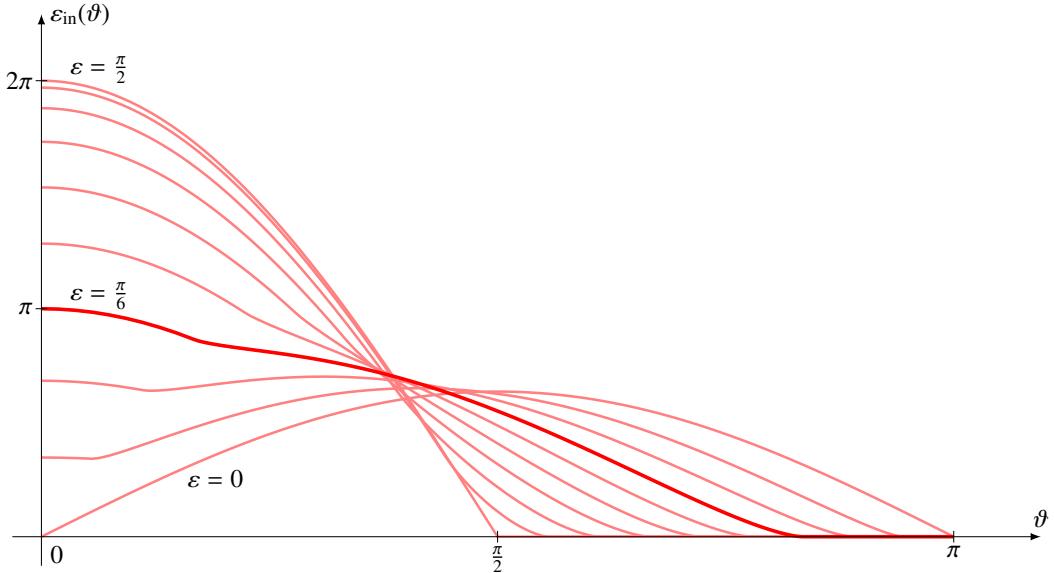


Abbildung 5.2: Über eine Rotation gemittelte Einstrahlungsdichte in Abhängigkeit von der geographischen Breite gemäss Formel (5.4) für verschiedene Neigungen  $\gamma$  der Achse. Dargestellt sind  $\gamma$ -Werte zwischen 0 und  $90^\circ$  in  $10^\circ$ -Schritten. Die Neigung  $\gamma = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$  ist hervorgehoben.

$$\begin{aligned}
&= \sin \vartheta \cos \gamma \left[ \sin \varphi \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} + 2\varphi_0 \cos \vartheta \sin \gamma \\
&= 2 \sin \vartheta \cos \gamma \sin \varphi_0 + 2\varphi_0 \cos \vartheta \sin \gamma \\
&= 2 \sin \vartheta \cos \gamma \sin \arccos\left(-\frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}\right) + 2 \cos \vartheta \sin \gamma \arccos\left(-\frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}\right).
\end{aligned}$$

Im ersten Term können wir  $\sin \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$  verwenden. Den zweiten Term könnten wir so stehen lassen, aber für die graphische Darstellung brauchen wir eine Darstellung des Arkuskosinus durch den Arkustangens, da TikZ nur den Arkustangens anbietet. Wir verwenden die Formel  $\arccos x = 2 \arctan \sqrt{(1-x)/(1+x)}$  und erhalten

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin \vartheta \cos \gamma \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \gamma}{\tan^2 \vartheta}} + 4 \cos \vartheta \sin \gamma \arctan \sqrt{\frac{1 + \frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}}{1 - \frac{\tan \gamma}{\tan \vartheta}}} \\
&= \pm 2 \cos \vartheta \cos \gamma \sqrt{\tan^2 \vartheta - \tan^2 \gamma} + 4 \cos \vartheta \sin \gamma \arctan \sqrt{\frac{\tan \vartheta + \tan \gamma}{\tan \vartheta - \tan \gamma}} \\
&= 2 \cos \vartheta \left( \cos \gamma \sqrt{\frac{\tan^2 \vartheta}{\tan^2 \gamma} - 1} + 2 \sin \gamma \arctan \sqrt{\frac{\tan \vartheta + \tan \gamma}{\tan \vartheta - \tan \gamma}} \right). \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Formel (5.4) ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

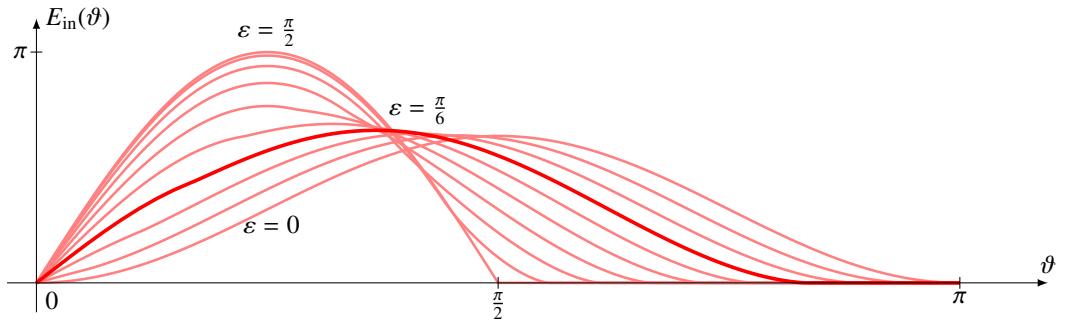


Abbildung 5.3: Strahlungsleistung auf geographischer Breite  $\vartheta$ , gegeben durch Formel (5.5).

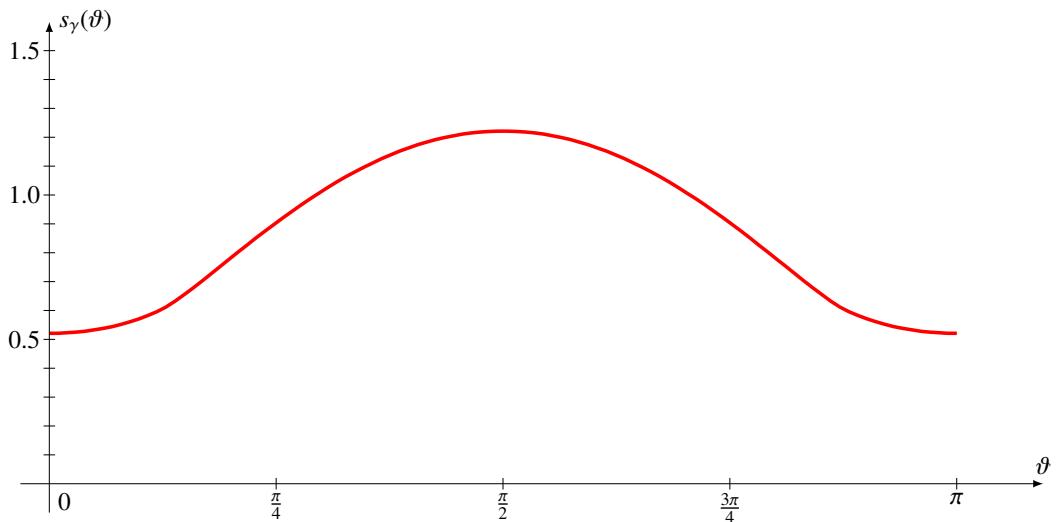


Abbildung 5.4: Einstrahlung über ein Jahr in Abhängigkeit von der geographischen Breite.

### Strahlungsleistung auf dem Breitenkreis $\vartheta$

Die gesamte Strahlungsleistung auf dem Breitenkreis  $\vartheta$  ist

$$E_{\text{in}}(\vartheta) = \varepsilon(\vartheta, \gamma) \cdot \sin \vartheta \quad (5.5)$$

Die resultierende Funktion ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

#### 5.1.3 Einstrahlung über ein Jahr

Die in (5.5) gefundene Einstrahlung auf einem Breitengrad  $\vartheta$  geht von einer konstanten Neigung der Erdachse aus. Die Bewegung der Erde um die Sonne bedeutet aber, dass die Neigung der Erdachse scheinbar variiert, es gilt nämlich

$$\tan \gamma(t) = \tan \gamma_{\max} \cdot \sin t.$$

Für ein Klimamodell wesentlich ist daher der Mittelwert

$$s_{\gamma_{\max}}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon(\vartheta, \gamma(t)) dt$$

von (5.5) über ein Jahr. Abbildung 5.4 zeigt das Resultat der numerischen Integration.

## 5.2 Model von Budyko

## 5.3 Zonenmodelle

## 5.4 Spektrale Methoden

In den Ausführungen zum Lorenzmodell in Abschnitt 2.2 haben wir gesehen, wie man mit Hilfe einer geeigneten Wahl von Basisfunktionen die komplexen fluidynamischen partiellen Differentialgleichungen zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen vereinfachen kann. Die Basis wurde so gewählt, dass einerseits möglichst viel geometrische Information, im speziellen Fall die rechteckige Form des Definitionsbereiches, bereits darin einfliessst. Andererseits sollen sich die wesentlichsten Eigenschaften der Lösung bereits aus wenigen Basisfunktionen rekonstruieren lassen. Wie Kapitel 10 zeigt, lässt sich die Idee von Abschnitt 2.2 sogar maschinell in eine immer genaueres Modell erweitern, wenn sich nur eine geeignete Menge von Basisfunktionen gefunden werden kann. Ziel dieser Abschnitte ist zu illustrieren, wie so eine Basis von Funktionen aussehen könnte, mit der man globale Modelle vereinfachen könnte.

### 5.4.1 Kugelkoordinaten

Spektrale Methoden verwenden auf entscheidende Art und Weise die Besonderheiten des natürlichen Koordinatensystems auf der Kugeloberfläche. In diesem Abschnitt sollen daher Kugelkoordinaten und die zugehörigen Differentialoperatoren genauer untersucht werden.

#### Koordinatenumrechnung

Wir verwenden in diesem Abschnitt Kugelkoordinaten mit der üblichen Konvention, dass die geographische Breite als Winkel  $\vartheta$  ausgehend vom Nordpol oder der  $z$ -Achse gemessen wird, dass also  $\vartheta \in [0, \pi]$ . Die geographische Breite wird ausgehen von der  $x$ -Achse als Winkel  $\varphi$  gemessen. Schliesslich bezeichnet  $r$  die Entfernung eines Punktes vom Nullpunkt.

Ein Breitenkreis zur geographischen Breite  $\vartheta$  hat Radius  $r \sin \vartheta$ . Damit ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

für die Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

## Differentialoperatoren

Das Ziel ist, den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auszudrücken. Zu diesem Zweck müssen die partiellen Ableitungsoperatoren nach den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  durch die Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ausgedrückt werden.

Für die Ableitungsoperatoren gilt die Kettenregel in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Die gesuchte Darstellung der Ableitungsoperatoren läuft also darauf hinaus, die Ableitungen von Kugelkoordinaten nach nach kartesischen Koordinaten zu bestimmen.

Die Ableitungen von  $r$  werden einfacher zur berechnen durch die Beziehung

$$\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2r \frac{\partial r}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r} \frac{\partial r^2}{\partial x}.$$

Da  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r} = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2r} 2y = \frac{y}{r} = \sin \vartheta \sin \varphi \\ \text{und} \quad \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2r} 2z = \frac{z}{r} = \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Ableitungen von  $\vartheta$  bestimmen. Dazu geht man aus von der Identität  $z = r \cos \vartheta$  und leitet sie nach den kartesischen Koordinaten ab:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial y}, \\ 1 &= \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left(1 - \cos \vartheta \frac{\partial r}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $r$  wurden in (5.7) bereits berechnet, so dass wir nach den Ableitungen von  $\vartheta$  auflösen können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \varphi = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \underbrace{(1 - \cos^2 \vartheta)}_{\sin^2 \vartheta} = -\frac{\sin \vartheta}{r}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Diese Umformungen waren möglich, weil  $z$  nur von  $r$  und  $\vartheta$  abhing. Die Kettenregel hat dann eine Beziehung zwischen den beiden Ableitungen dieser Variablen geliefert.

Die verbleibenden Anleitungen können auf ähnliche Weise aus dem Ausdruck  $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$  oder  $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$  gewonnen werden. Wenn ihn partiell nach kartesischen Koordinaten ableitet, steht auf der linken Seite eine 1 oder 0, auf der rechten Seite ein Ausdruck mit allen drei Ableitungen von Kugelkoordinaten nach  $x$ , wovon die Ableitungen von  $r$  und  $\vartheta$  nach den kartesischen Koordinaten bereits bekannt sind. Man kann also nach den Ableitungen von  $\varphi$  auflösen. Die etwas mühsame Berechnung liefert

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{5.9}$$

In den Gleichungen (5.7), (5.8) und (5.9) haben wir alle Koeffizienten für die Kettenregel (5.6) gefunden. Zusammen erlauben sie, Ableitungen nach kartesischen Koordinaten durch Ableitungen nach Kugelkoordinaten auszudrücken.

## Laplace-Operator

In kartesischen Koordinaten ist der Laplace-Operator gegeben durch die Definition

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Durch Einsetzen der Ableitungsoperatoren nach (5.6) unter Verwendung der Gleichungen (5.7), (5.8) und (5.9) kann man nach ziemlich langwieriger Rechnung [**skript:mathsem-qm**] den Ausdruck

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.\tag{5.10}$$

für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten finden.

### 5.4.2 Kugelfunktionen

Die Basisfunktionen im Lorenzmodell waren aus zwei Gründen besonders erfolgreich.

1. Die Basisfunktionen waren Produkte von Funktionen, die jeweils nur von einer Koordinate abhängen. In einem Produkt  $f(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  sind die Ableitungen nach den Koordinaten besonders einfach auszurechnen, da gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = X'(x) \cdot Y(y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = X(x) \cdot Y'(y).$$

2. Die Basisfunktionen waren Eigenfunktionen des Laplace-Operators, also

$$\Delta f = \lambda f.$$

Da in den Gleichungen der Strömungsdynamik der Laplace-Operator prominent vorkommt, bedeutet diese Eigenschaft, dass die Wirkung des Laplace-Operators auf die Basisfunktionen durch Multiplikation mit dem Eigenwert ersetzt werden kann. Dadurch werden die Gleichungen sehr vereinfacht und die Ordnung der Differentialgleichung reduziert sich.

Wenn der Erfolg der speziellen Basiswahl im Lorenz-System für ein Wetter- oder Klimamodell auf der Kugeloberfläche repliziert werden soll, dann ist naheliegend, dass dazu Funktionen mit den gleichen Eigenschaften in Kugelkoordinaten gefunden werden müssen.

### Separationsansatz

Die Produkteigenschaft bedeutet, dass die Basisfunktionen in der Form

$$f(r, \varphi, \vartheta) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\vartheta)$$

gefunden werden müssen. Das Separationsverfahren für partielle Differentialgleichungen [skript:pde] basiert genau auf dieser Art von Ansatz für die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, man nennt ihn daher auch einen *Separationsansatz*.

### Eigenwertgleichung

Die Eigenwerteigenschaft bedeutet, dass die Funktionen Eigenfunktionen des Laplace-Operators sein müssen, also Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta f = \lambda f.$$

Wenden wir den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten auf  $f$  an, finden wir

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\vartheta) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R'(r)) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Phi''(\varphi) \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \\ &= \frac{1}{r^2} (2rR'(r) + r^2 R''(r)) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))' \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \Phi''(\varphi) \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \\ &= \lambda R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi). \end{aligned}$$

### Separation von $r$

Um die einzelnen Funktionen zu isolieren, teilen wir durch  $f$ . Zwar kann  $f$  Nullstellen haben, aber für die meisten Werte der Koordinaten ist  $f$  von Null verschieden, für diese Punkte ist die Division unproblematisch und ausreichend, um die Faktoren zu bestimmen. Wir erhalten

$$\frac{2rR'(r) + r^2 R''(r)}{r^2 R(r)} + \frac{(\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))'}{r^2 \sin \vartheta \Theta(\vartheta)} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda$$

Um die Variable  $r$  allein auf die linke Seite zu bringen, multiplizieren wir mit  $r^2$ , subtrahieren  $\lambda r^2$  und bringen den zweiten und dritten Term auf der linken Seite auf die rechte Seite. So erhalten wir

$$\frac{r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = -\frac{(\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))'}{\sin \vartheta \Theta(\vartheta)} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Die linke Seite hängt nur von  $r$  ab, die rechte Seite nur von  $\vartheta$  und  $\varphi$ . Dies ist nur möglich, wenn beide Seiten konstant sind. Es gibt also eine Zahl  $\mu$  derart, dass

$$\frac{r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda r^2 R(r)}{R(r)} = \mu \quad (5.11)$$

$$\frac{(\sin \vartheta \Theta'(\vartheta))'}{\sin \vartheta \Theta(\vartheta)} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\mu \quad (5.12)$$

Die erste Gleichung kann man vereinfachen zu

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - (\lambda r^2 - \mu)R(r) = 0, \quad (5.13)$$

eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.  $\mu$  kann nicht beliebig gewählt werden, der Wert muss so sein, dass (5.12) gelöst werden kann.

Doch auch  $\lambda$  ist nicht beliebig, sein Wert muss so gewählt werden, dass eventuelle Randbedingungen für die zugehörigen Funktion  $R(r)$  erfüllt sind. Da die  $r$ -Abhängigkeit für die folgende Diskussion nicht wichtig ist, verfolgen wir diese Frage hier nicht weiter.

### Separation von $\vartheta$ und $\varphi$

Die Gleichung (5.12) enthält nur noch die Variablen  $\vartheta$  und  $\varphi$ . Wir versuchen den gleichen Trick erneut: indem wir mit  $\sin^2 \vartheta$  multiplizieren, den Term mit  $\mu$  auf die linke Seite bringen und den zweiten Term auf die rechte Seite bringen, erhalten wir

$$\sin \vartheta \frac{1}{\Theta(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \Theta'(\vartheta)) + \mu \sin^2 \vartheta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Erneut haben wir eine Gleichung, deren linke Seite nur von  $\vartheta$  und deren rechte Seite nur von  $\varphi$  abhängt. Also sind wieder beide Seiten konstant, es gibt also eine Konstante  $\nu$  derart, dass  $\Theta(\vartheta)$  und  $\Phi(\varphi)$  die Gleichungen

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) \right) = (-\mu \sin^2 \vartheta + \nu) \Theta(\vartheta) \quad (5.14)$$

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu \quad (5.15)$$

erfüllen.

### Lösungsfunktionen $\Phi(\varphi)$

Die zweite Gleichung (5.15) ist gleichbedeutend mit

$$\Phi''(\varphi) = -\nu \Phi(\varphi), \quad (5.16)$$

wobei  $\Phi(\varphi)$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion ist. Die Lösungen der Gleichung (5.16) sind  $\cos \sqrt{\nu} \varphi$  und  $\sin \sqrt{\nu} \varphi$ , aber die Periodizität verlangt, dass  $\sqrt{\nu}$  eine ganze Zahl ist. Es muss also gelten  $\nu = m^2$  mit  $m \in \mathbb{N}$ .

### Lösungsfunktionen $\Theta(\vartheta)$

Im vorangegangen Absatz wurde gezeigt, dass  $v = k^2$  ist, was die Gleichung (5.14) zu

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) = \left( \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \right)^2 \Theta(\vartheta) = (-\mu \sin^2 \vartheta + k^2) \Theta(\vartheta) \quad (5.17)$$

In dieser Form ist die Differentialgleichung nicht so leicht zu erkennen. Schreibt man aber  $z = \sin \vartheta$ , dann wird die Ableitung einer Funktion  $P(z) = \Theta(\vartheta)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} \Theta(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta} P(\cos \vartheta) = -P'(\cos \vartheta) \sin \vartheta = -\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} P'(\cos \vartheta) \\ &= -\sqrt{1 - z^2} P'(z) = -\sqrt{1 - z^2} \frac{d}{dz} P(z). \end{aligned}$$

Ableitungen nach  $\vartheta$  sind also zu ersetzen durch Ableitungen nach  $z$  gefolgt von Multiplikation mit  $-\sqrt{1 - z^2}$ . In der Differentialgleichung (5.17) wird die Ableitung nach  $\vartheta$  jeweils auch noch mit  $\sin \vartheta = \sqrt{1 - z^2}$  multipliziert. Der Operator

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \quad \text{bekommt daher die Form} \quad -(1 - z^2) \frac{d}{dz}. \quad (5.18)$$

Das Vorzeichen ist nicht wichtig, da der Operator in der Differentialgleichung (5.17) nur im Quadrat vorkommt.

Wir setzen jetzt die Form (5.18) des Differentialoperators in die Differentialgleichung (5.17) ein und erhalten

$$\begin{aligned} (1 - z^2) \frac{d}{dz} ((1 - z^2) P'(z)) &= (-\mu(1 - z^2) + m^2) P(z) \\ \Rightarrow (1 - z^2) P''(z) - 2z P'(z) + \mu P(z) - \frac{m^2}{1 - z^2} P(z) &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Für  $m = 0$  ist (5.19) die sogenannte Legendresche Differentialgleichung. Sie hat Lösungen für  $\mu = l(l+1)$  mit  $l \in \mathbb{N}$ . Für  $m > 0$  ist (5.19) die assozierte Legendre-Differentialgleichung. Für beide Gleichung lassen sich Lösungen angeben, es sind die sogenannten Legendre-Polynome  $P_l(z)$  im Fall  $m = 0$  und die zugeordneten Legendre-Polynome  $P_l^m(z)$  für beliebiges  $m$ .

### Kugelflächenfunktionen

Mit den gefundenen Lösungen für  $\Phi(\varphi)$  und  $\Theta(\vartheta)$  finden wir jetzt die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung (5.12). Es sind die Funktionen

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

mit einem geeigneten Normierungsfaktor  $N_{lm}$ . Diese Funktionen haben genau die Eigenschaften, die wir in der Einleitung dieses Abschnitts als Voraussetzungen für eine geeignete Basis gefordert haben.

### 5.4.3 Spektrale Gleichungen



# Kapitel 6

## Fourier-Analysis

Im Kapitel 1 wurde gezeigt, dass einige der Einflüsse auf das Klimasystem periodisch sind mit einer Periode, die vergleichbar oder grösser ist als die bei der Definition des Begriffes Klima üblicherweise verwendeten Mittelungszeitspanne. Diese Anregungen führen daher zu periodischen Klimaschwankungen. Die Fourier-Analysis ermöglicht, solche periodischen Einflüsse in einem Signal zu erkennen und sie von anderen Phänomenen zu trennen.

### 6.1 Periodische Funktionen

Das ursprüngliche Budyko-Modell modelliert die Jahresmittel-Temperatur, ignoriert also die Temperatur-Entwicklung der Temperatur im Laufe des Jahres. Damit ist es aber zum Beispiel nicht möglich, das Einsetzen von Eiszeiten zu modellieren. Wie in Kapitel 16 gezeigt wird, ist die jährlich auf die Erde eingetrahlte Leistung unabhängig von der Neigung der Erdachse. Ein Modell, welches den Zusammenhang zwischen Eiszeiten und der Achsneigung modellieren soll muss also die periodischen Schwankungen der Einstrahlung der Sonne auf jede Erd-Halbkugel berücksichtigen.

Ein geeignetes Modell wird also nicht mehr autonom sein, sondern auf der rechten Seite der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

muss man berücksichtigen, dass  $f(x, t)$  nun auch von der Zeit  $t$  abhängt und periodisch in  $t$  mit Periode  $T$  ist. Dies bedeutet  $f(x, t + T) = f(x, t)$  für beliebige Vektoren  $x$  und Zeiten  $t$ .

Man kann natürlich nicht mehr erwarten, dass es eine zeitunabhängige Gleichgewichtslösung gibt. Vielmehr erwarten wir statt konstanter Gleichgewichtslösungen periodische Lösungen mit der gleichen Periode  $T$ , dass also  $x(t + T) = x(t)$ .

#### 6.1.1 Fourierreihen

Die Funktionen

$$1, \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sin \frac{2\pi kt}{T}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.1)$$

sind alle periodisch mit Periode  $T$ , aber auch eine beliebige Linearkombination

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad (6.2)$$

hat diese Eigenschaft.

Es war eine bedeutende Erkenntnis von Joseph Fourier, dass bis auf ein paar technische Bedingungen, welche die Konvergenz der Funktionenreihe sicherstellen sollen, jede periodische Funktion  $f(t)$  als Reihe von Vielfachen der Funktionen (6.1) in der Form (6.2) dargestellt werden kann. Die Berechnung der Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots$  erfolgt mit Hilfe von Fourier-Integralen, deren Theorie wir hier weiter nicht entwickeln wollen.

Für unsere Zwecke ist die vollständige Theorie der Fourier-Reihen nicht notwendig, denn die Daten, an die wir unsere Klimamodelle anpassen müssen, stellen bestenfalls diskrete Approximationen von stetigen Funktionen dar. Wir müssen die allgemeine Fourier-Theorie daher spezialisieren auf diese diskrete Situation.

### 6.1.2 Diskrete Fourierreihen: trigonometrische Polynome

Wir wollen im Folgenden periodische diskrete Funktionen möglichst gut approximieren. Da für diskrete Funktionen die Skala des Argumentes nicht so wichtig ist, verwenden wir als Basis die Funktionen

$$1, \cos kt \quad \text{und} \quad \sin kt, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Die Funktion  $f(t)$  soll also geschrieben werden als sogenanntes trigonometrisches Polynom

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (6.4)$$

Die Funktion soll die Werte  $y_j$  in den äquidistanten  $t$ -Werten  $t_j = 2\pi j/N$  mit  $0 \leq j < N$  möglichst gut wiedergeben.

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_0, a_k$  und  $b_k$  stehen also nur die  $N$  Bedingungen

$$f(t_j) = y_j \quad (6.5)$$

zur Verfügung. Die Gleichungen (6.5) sind lineare Gleichungen für die Unbekannten  $a_k$  und  $b_k$  mit  $\cos kt_j$  und  $\sin kt_j$  als Koeffizienten. Sie können daher höchstens endlich viele Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  bestimmen. Dieses Problem wird im nächsten Abschnitt gelöst.

## 6.2 Fourier-Koeffizienten

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Fourierkoeffizienten für ein trigonometrisches Polynom der Form

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt + a_n \cos nt, \quad (6.6)$$

so dass die Werte

$$y_j \quad \text{zu den Zeitpunkten} \quad t_j = 2\pi \frac{j}{N}, \quad 1 \leq j < N \quad (6.7)$$

möglichst genau die Funktionswerte  $f(t_j)$  reproduzieren. Im Ansatz (6.6) finden wir  $2n$  zu bestimmende Koeffizienten, in (6.7) finden wir dagegen genau  $N$  Gleichungen, mit denen wir die Koeffizienten bestimmen könnten. Für  $N > 2n$  haben wir also zu viele Daten, für  $N < 2n$  reichen die Datenpunkte nicht, die Koeffizienten zu bestimmen. Im optimalen Fall, für  $N = 2n$  sollte es möglich sein, die Koeffizienten so zu bestimmen, dass die Funktionswerte  $y_j$  exakt reproduziert werden.

### 6.2.1 Least Squares

Für  $N > 2n$  können wir nicht erwarten, dass der Ansatz die Daten exakt reproduzieren kann, wir müssen uns also mit einer Näherungslösung begnügen. Wir verlangen stattdessen, dass der Fehler der Lösung möglichst gering wird, dass also

$$L = L(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}) = \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j))^2$$

möglichst klein wird.

Die Grösse  $L$  wird minimal, wenn alle Ableitungen nach den Koeffizienten verschwinden:

$$\frac{\partial L}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial a_l} = 0, \quad 1 \leq l \leq n \quad \frac{\partial L}{\partial b_l} = 0, \quad 1 \leq l \leq n-1$$

Wir berechnen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_0} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j)) \cdot \frac{\partial f}{\partial a_0}(t_j) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial a_l} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j)) \cdot \frac{\partial f}{\partial a_l}(t_j) = 0 \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial b_l} &= -2 \sum_{j=1}^N (y_j - f(t_j)) \cdot \frac{\partial f}{\partial b_l}(t_j) = 0 \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Man beachte, dass der erste Klammerausdruck in der Summe die Koeffizienten  $a_0, a_k$  und  $b_k$  nur linear enthält. Die Funktion  $f$  enthält die Koeffizienten ebenfalls nur linear, so dass die Ableitungsterme die Koeffizienten nicht mehr enthalten werden. Tatsächlich ergibt die Berechnung der Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_0}(t_j) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial a_l}(t_j) &= \cos lt_j \quad l = 1, \dots, n \\ \frac{\partial f}{\partial b_l}(t_j) &= \sin lt_j \quad l = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Die Gleichungen, die wir lösen müssen, sind also

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{j=1}^N \left( y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_j \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N y_j - Na_0 - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j, \\
 0 &= \sum_{j=1}^N \left( y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_j \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt_j \right) \cos lt_j \\
 &= \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - a_0 \sum_{j=1}^N \cos lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j, \\
 0 &= \sum_{j=1}^N \left( y_j - a_0 - \sum_{k=1}^n a_k \cos kt_j \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt_j \right) \sin lt_j \\
 &= \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j - a_0 \sum_{j=1}^N \sin lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \sin lt_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Hier haben wir die Faktoren  $-2$  ebenfalls weggelassen.

## 6.2.2 Trigonometrische Summen

In den Gleichungen (6.8) treten trigonometrische Summen der Form

$$\sum_{j=1}^N \cos kt_j \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^N \sin kt_j, \tag{6.9}$$

der Summen von Produkten wie

$$\sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j, \quad \sum_{j=1}^N \cos kt_j \sin lt_j \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j \tag{6.10}$$

auf. In diesem Abschnitt sollen diese Summen mit Hilfe einer geometrischen Überlegung berechnet werden.

Wir befassen uns zunächst mit Summen der Form und beweisen den folgenden Satz.

**Satz 6.1.** *Für beliebige ganze Zahlen  $l$ ,  $0 \leq l \leq n$ , gilt*

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^N \cos lt_j &= \begin{cases} N & l = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 \sum_{j=1}^N \sin lt_j &= 0
 \end{aligned}$$

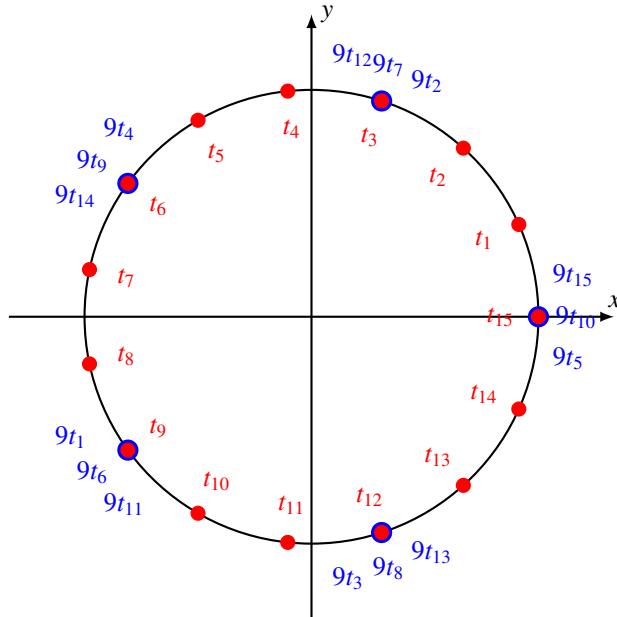


Abbildung 6.1: Verteilung der Punkte  $(\cos t_j, \sin t_j)$  auf dem Einheitskreis in rot. Die Punkte  $(\cos kt_j, \sin kt_j)$  für  $k = 9$  bilden eine Teilmenge, die blau dargestellt ist. Jeder blaue Punkt wird genau dreimal besucht, sie bilden ein gleichseitiges Fünfeck mit den Punkten  $(\cos 3t_j, \sin 3t_j)$  als Ecken. Deren Schwerpunkt ist wieder der Nullpunkt.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall  $l = 0$ . In diesem Fall ist  $\sin lt_j = 0$  und  $\cos lt_j = 1$  und damit

$$\sum_{j=1}^N \cos lt_j = N \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \sin lt_j = 0.$$

Im Folgenden können wir daher annehmen, dass  $l \neq 0$ .

In Abbildung (6.1) kann man sehen, dass die Punkte  $(\cos t_j, \sin t_j)$  auf dem Einheitskreis ein regelmässiges Polygon bilden. Der Schwerpunkt des Polygons ist ganz offensichtlich der Mittelpunkt. Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^N \cos t_j = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^N \sin t_j = 0.$$

Damit ist der Satz für den Fall  $l = 1$  bewiesen.

Für beliebiges  $l \neq 0$  beobachten wir, dass die Punkte  $(\cos lt_j, \sin lt_j)$  eine Teilmenge der Punkte  $(\cos t_j, \sin t_j)$  sind. Wenn  $l$  und  $N$  teilerfremd sind, sind die Mengen gleich. Wenn  $l$  und  $N$  dagegen den grössten gemeinsamen Teiler  $r$  haben, dann ist die Menge der Punkte  $(\cos rt_j, \sin rt_j)$ , ein regelmässiges Polygon mit  $2\pi/rt_1$  Ecken. Diese Situation ist in Abbildung 6.1 mit den blauen Punkten für den Fall  $r = 3 = \text{ggT}(9, 15)$  illustriert. Wie im Falle von  $l = 1$  folgt, dass der Schwerpunkt des Polygons der Nullpunkt ist, und damit, dass

$$\sum_{j=1}^N \cos lt_j = \sum_{j=1}^N \cos rt_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N \sin lt_j = \sum_{j=1}^N \sin rt_j = 0.$$

Damit ist alles gezeigt.  $\square$

In (6.10) werden die Summen von Produkten benötigt. Mit üblichen trigonometrischen Umformungen kann man diese in Summen von einfachen trigonometrischen Funktionen umwandeln. Wir verwenden dazu die Formeln

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \quad (6.11)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)), \quad (6.12)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)). \quad (6.13)$$

Damit können wir die Summen in (6.10) umwandeln:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\cos(k-l)t_j + \cos(k+l)t_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k-l)t_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k+l)t_j}_{=0} \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\cos(k-l)t_j + \cos(k+l)t_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k-l)t_j + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \cos(k+l)t_j}_{=0} \\ &= \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(\sin(k-l)t_j + \sin(k+l)t_j) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sin(k-l)t_j}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sin(k+l)t_j}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 6.2.** Für beliebige  $k, l \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j = \begin{cases} N & k = l = 0 \\ \frac{N}{2} & k = l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j = \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j = 0$$

In den folgenden Abschnitten verwenden wir diese Formeln, um die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  zu bestimmen. Der Koeffizient  $a_0$  muss wegen des ersten Falles im Satz gesondert behandelt werden.

### 6.2.3 Bestimmung von $a_0$

In der Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j - Na_0 - \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j}_{=0} - \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j}_{=0}$$

verschwinden die Summen über  $j$  und es bleibt die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N y_j - Na_0 \\ \Rightarrow a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j. \end{aligned}$$

### 6.2.4 Bestimmung von $a_k, k > 0$

Zur Bestimmung von  $a_k$  mit  $k > 0$  müssen wir die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - a_0 \underbrace{\sum_{j=1}^N \cos lt_j}_{=0} - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j - \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \cos lt_j}_{=0}$$

heranziehen. Die zweite und vierte Summe verschwindet, so dass wir die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j$$

erhalten. Die innere Summe über  $j$  verschwindet für alle Werte von  $k$  ausser für  $k = l$ , in diesem Fall ist sie  $N/2$ . Damit können wir nach  $a_k$  auflösen:

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j - a_l \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow a_l = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos lt_j.$$

### 6.2.5 Bestimmung von $b_k$

Zur Bestimmung von  $b_k$  müssen wir die Gleichung

$$0 = \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j - a_0 \sum_{j=1}^N \sin lt_j - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=1}^N \cos kt_j \sin lt_j - \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^N \sin kt_j \sin lt_j$$

heranziehen. Die zweite und die dritte Summe verschwindet und in der letzten Summe verschwinden alle Terme ausser der Term mit  $k = l$ , für den die innere Summe den Wert  $N/2$  hat. Damit wird die Gleichung vereinfacht zu

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j - b_l \frac{N}{2} \\ \Rightarrow b_l &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin lt_j. \end{aligned}$$

### 6.2.6 Zusammenstellung der Resultate

Sei  $N = 2n$  eine gerade natürliche Zahl. Eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(t)$  kann als trigonometrisches Polynom der Form

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + a_n \cos nt$$

derart approximiert werden, dass zu den Zeiten  $t_j = 2\pi j/N, j = 1, \dots, N$  die Funktion und das trigonometrische Polynom übereinstimmen:

$$p(t_j) = y_j = f(t_j).$$

Dazu müssen die Koefizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos t_j = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos \frac{2\pi j}{N} & k = 1, \dots, n \\ b_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin t_j = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin \frac{2\pi j}{N}, & k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

verwendet werden.

## 6.3 Vektorgeometrische Interpretation

Die bisherigen rein analytischen Betrachtungen verdecken den geometrischen Gehalt der bisher entwickelten Theorie. In diesem Abschnitt soll daher zunächst eine vektorielle Darstellung aufgebaut, die dann erlauben soll, einerseits die Formeln für die Fourierkoeffizienten geometrisch zu verstehen und andererseits auf komplexere Situationen zu verallgemeinern.

### 6.3.1 Vektoren

Die Operationen zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten können in vektorieller Schreibweise etwas übersichtlicher dargestellt werden. Zunächst fassen wir die Funktionswerte  $y_j$  in einem Vektor zusammen.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten brauchen wir auch noch die Werte der trigonometrischen Funktionen zu den Zeiten  $t_j$ , die wir ebenfalls als Vektoren

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_k = \begin{pmatrix} \cos kt_1 \\ \vdots \\ \cos kt_N \end{pmatrix}, \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{und} \quad s_k = \begin{pmatrix} \sin kt_1 \\ \vdots \\ \sin kt_N \end{pmatrix}, \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

schreiben. Die Fourier-Koeffizienten können jetzt als Skalarprodukte geschrieben werden:

$$a_0 = \frac{1}{N} c_0 \cdot \mathbf{y}, \quad a_k = \frac{2}{N} c_k \cdot \mathbf{y}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad b_k = \frac{2}{N} s_k \cdot \mathbf{y}, \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

### Rekonstruktion der Funktion

Auch die Darstellung der Funktion kann man wieder als Skalarprodukt schreiben. Dazu schreiben wir die Fourier-Koeffizienten und die Werte der trigonometrischen Funktionen also Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \sin t \\ \cos 2t \\ \sin 2t \\ \vdots \\ \sin(n-1)t \\ \cos nt \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$p(t) = a \cdot e(t)$$

### Orthogonalität

Die Aussagen von Satz 6.1 lassen sich jetzt in geometrische Form fassen.

**Satz 6.3.** Es gilt

$$c_k \cdot c_l = \begin{cases} N & k = l = 0 \\ \frac{N}{2} & k = l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_k \cdot s_l = \begin{cases} \frac{N}{2} & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_k \cdot s_l = 0$$

*Beweis.* Die genannten Skalarprodukte sind nichts anderes als die Summen in Satz 6.1:

$$c_k \cdot c_l = \sum_{j=1}^N \cos kt_j \cos lt_j = \begin{cases} N & k = l = 0 \\ \frac{N}{2} & k = l > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und analog für die anderen Skalarprodukte. Die Aussage des Satzes ist daher nichts anders als eine geometrische Umformulierung der Aussagen des Satzes 6.1.  $\square$

### Die Identität von Parseval

Die Relationen von Satz 6.1 besagen, dass die Vektoren  $c_k$  und  $s_k$  orthogonal sind. Wir wenden Sie auf das Skalarprodukt der Funktion  $f$  mit sich selbst an.

$$\begin{aligned} f \cdot f &= a_0^2 c_0 \cdot c_0 + \sum_{k=1}^n a_k^2 c_k \cdot c_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 s_k \cdot s_k \\ &= Na_0^2 + \frac{N}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{N}{2} \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 = \frac{N}{2} \left( 2a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 \right) \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 6.4** (Parseval).

$$\|f\|^2 = \sum_{j=1}^N y_j^2 = \frac{N}{2} \left( 2a_0^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 \right)$$

### $2\pi$ -Periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$

Die eben vektoriell dargestellte Analyse diskreter periodischer Funktionen kann verallgemeinert werden auf die Analyse von Funktionen auf anderen Definitionsbereichen. Benötigt wird eine Familie von Basisfunktionen und ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  derart, dass die Basisfunktionen  $g_i$  bezüglich dieses Skalarproduktes orthonormiert sind, dass also

$$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jede Linearkombination

$$f = \sum_i \alpha_i g_i$$

von Basisfunktionen kann ebenfalls mit dem Skalarprodukt rekonstruiert werden. Dazu berechnet man

$$\langle g_i, f \rangle = \left\langle g_i, \sum_j \alpha_j g_j \right\rangle = \sum_j \langle g_i, \alpha_j g_j \rangle = \sum_j \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i.$$

Das Skalarprodukt kann auch verwendet werden, um einen Abstand zwischen Vektoren als

$$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle$$

zu definieren.

Dieselbe Situation lässt sich auch für  $2\pi$ -periodische Funktionen auf  $\mathbb{R}$  herbeiführen. Als Basisfunktionen kann man die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx, \sin lx \quad k > 0 \tag{6.15}$$

verwenden. Das Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle$  muss linear in  $f$  und  $g$  sein. Eine naheliegende Wahl ist

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Wir überprüfen, ob die Funktionen orthogonal sind:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx = 1 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos kx dx = 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin lx \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin lx dx = 0 \\ \langle \cos kx, \cos lx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(k-l)x + \cos(k+l)x) dx = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \langle \sin kx, \sin lx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(k-l)x - \cos(k+l)x) dx = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \langle \sin kx, \cos lx \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(k-l)x + \sin(k+l)x) dx = 0 \end{aligned}$$

Zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f(x)$  kann man daher immer die Koeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{a}_0 &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx\end{aligned}\tag{6.16}$$

berechnen. Die Linearkombination

$$\tilde{f}(x) = \bar{a}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\tag{6.17}$$

ist natürlich wieder eine  $2\pi$ -periodische Funktion.

Ist  $f(x)$  eine Linearkombination von Funktionen (6.15), dann sind nur endlich viele der Koeffizienten  $\bar{a}_0$ ,  $a_k$  und  $b_k$  von 0 verschieden und es gilt  $f(x) = \tilde{f}(x)$ , die Summe (6.17) rekonstruiert die Funktion  $f(x)$  also exakt..

Für eine beliebige  $2\pi$ -periodische Funktion  $f(x)$  ist die Funktion  $\tilde{f}(x)$  nach (6.17) im Allgemeinen eine unendliche Reihe. Die Reihe (6.17) heisst die Fourier-Reihe der Funktion  $f(x)$ .

In der Literatur wird  $a_0$  meistens anders definiert, nämlich als

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sqrt{2}\bar{a}_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$$

Der erste Term der Reihe (6.15) wird dann

$$\bar{a}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{2}$$

und die Fourier-Reihe ist

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).\tag{6.18}$$

### 6.3.2 Fourier-Transformation

Die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  hängen linear von den Funktionswerten  $y_j$  ab. Der Vektor der Fourier-Koeffizienten muss daher der Bildvektor des Vektors  $\vec{y}$  der Funktionswerte unter einer linearen Transformation sein. In diesem Abschnitt soll zunächst diese diskrete Fourier-Transformation hergeleitet werden. Anschliessend soll gezeigt werden, wie sich diese Eigenschaft auf periodische Funktionen und auf beliebige Funktionen auf  $\mathbb{R}$  ausdehnen lässt.

## Diskrete Fourier-Transformation

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist eine lineare Operation mit der  $N \times N$ -Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} c_0^t \\ c_1^t \\ s_1^t \\ \vdots \\ c_{n-1}^t \\ s_{n-1}^t \\ c_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos t_1 & \cos t_2 & \dots & \cos t_N \\ \sin t_1 & \sin t_2 & \dots & \sin t_N \\ \cos 2t_1 & \cos 2t_2 & \dots & \cos 2t_N \\ \sin 2t_1 & \sin 2t_2 & \dots & \sin 2t_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n-1)t_1 & \sin(n-1)t_2 & \dots & \sin(n-1)t_N \\ \cos nt_1 & \cos nt_2 & \dots & \cos nt_N \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalitätsrelationen von Satz 6.3 können jetzt neu geschrieben werden:

$$\begin{aligned} AA^t &= \begin{pmatrix} c_0 \cdot c_0 & c_0 \cdot c_1 & c_0 \cdot s_1 & \dots & c_0 \cdot c_{n-1} & c_0 \cdot s_{n-1} & c_0 \cdot c_n \\ c_1 \cdot c_0 & c_1 \cdot c_1 & c_1 \cdot s_1 & \dots & c_1 \cdot c_{n-1} & c_1 \cdot s_{n-1} & c_1 \cdot c_n \\ s_1 \cdot c_0 & s_1 \cdot c_1 & s_1 \cdot s_1 & \dots & s_1 \cdot c_{n-1} & s_1 \cdot s_{n-1} & s_1 \cdot c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} \cdot c_0 & c_{n-1} \cdot c_1 & c_{n-1} \cdot s_1 & \dots & c_{n-1} \cdot c_{n-1} & c_{n-1} \cdot s_{n-1} & c_{n-1} \cdot c_n \\ s_{n-1} \cdot c_0 & s_{n-1} \cdot c_1 & s_{n-1} \cdot s_1 & \dots & s_{n-1} \cdot c_{n-1} & s_{n-1} \cdot s_{n-1} & s_{n-1} \cdot c_n \\ c_n \cdot c_0 & c_n \cdot c_1 & c_n \cdot s_1 & \dots & c_n \cdot c_{n-1} & c_n \cdot s_{n-1} & c_n \cdot c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{N}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bis auf die Faktoren  $N$  und  $\frac{N}{2}$  auf der Diagonalen ist  $\mathcal{F}\mathcal{F}^t$  eine Diagonalmatrix. Wir können die Matrix zu einer Einheitsmatrix machen, indem wir sie mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{N}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

multiplizieren. Wir schreiben

$$\mathcal{F} = DA$$

Wir nennen  $\mathcal{F}$  die *Fourier-Matrix*. Die Fourier-Matrix  $\mathcal{F}$  ist orthogonal, es gilt

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^t = DAA^tD^t = DD^tAA^t = E,$$

wobei wir im letzten Schritt  $D^t$  mit  $AA^t$  vertauschen durften, weil beide Diagonalmatrizen sind und damit vertauschen. Insbesondere erhält  $\mathcal{F}$  das Skalarprodukt, womit wir natürlich nur die Parseval-Identität anders formuliert haben.

## Fast Fourier Transform

### Fourier-Transformation von $2\pi$ -periodischen Funktionen

### Fourier-Transformation von Funktionen auf $\mathbb{R}$

## Übungen

1. Die Zeitgleichung ist die Zeit, um die eine Sonnenuhr gegenüber einer gleichmässig gehenden Uhr falsch geht. Sie röhrt daher, dass sich die Erde auf ihrer elliptischen Bahn um die Erde nicht immer gleich schnell bewegt und kann mit Hilfe der keplerschen Gesetze erklärt und berechnet werden.

Empirisch wurden für  $N = 12 = 2 \cdot 6$  über das Jahr gleichmässig verteilte Tage folgende Werte für die Zeitgleichung gefunden:

Datum	$\Delta t$ [min]	Datum	$\Delta t$ [min]
1. 1.	-3.2	4. 7.	-4.1
1. 2.	-13.6	3. 8.	-6.1
2. 3.	-12.3	3. 9.	0.5
2. 4.	-3.9	3. 10.	10.7
3. 5.	3.1	2. 11.	16.3
3. 6.	2.0	2. 12.	10.6

Es sind bereits die folgenden Fourier-Koeffizienten berechnet worden:

$k$	$\hat{a}_k$	$\hat{b}_k$
0	0.000	—
1	0.342	-7.528
2	-3.575	
3	0.083	-0.250
4	-0.125	-0.159
5	0.025	-0.022
6		—

- a) Berechnen Sie die fehlenden Koeffizienten  $\hat{a}_6$  und  $\hat{b}_2$ .
- b) Welche Frequenz (welches  $k$ ) ist dominant?
- c) Wie gross ist der Fehler, wenn man nur die Terme bis  $k = 2$  berücksichtigt?

*Lösung.* a) Es sind die Koeffizienten  $\hat{a}_6$  und  $\hat{b}_2$  zu berechnen. Wir stellen die nötigen Daten in der Tabelle 6.1 zusammen. Dabei ist zu beachten, dass für  $k = 2$  die Winkel  $t_j$  Vielfache von  $60^\circ$  sind, deren Sinuswerte immer  $\pm \sqrt{3}/2$  sind, man muss also nur die  $y_j$  mit  $j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$  mit den richtigen Vorzeichen addieren und mit  $\sqrt{3}/2$  multiplizieren. Die Werte für  $\hat{a}_6$  und  $\hat{b}_2$  bekommt man aus

$$\begin{aligned}\hat{a}_6 &= \frac{1}{12} \sum_{j=0}^{11} y_j (-1)^j = 0.05 \\ \hat{b}_2 &= \frac{2}{12} \sum_{j=0}^{11} y_j \sin 2 \frac{2\pi j}{12} = -9.125\end{aligned}$$

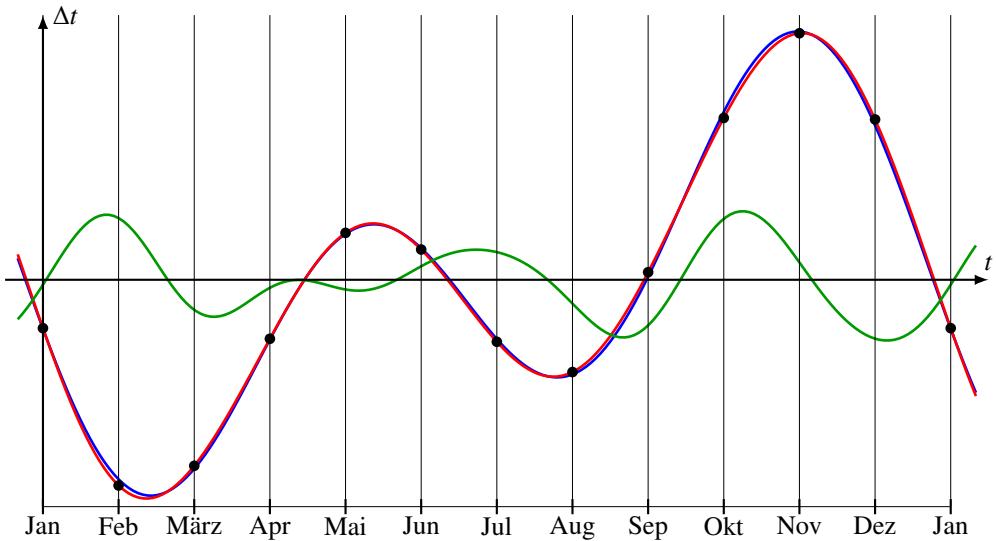


Abbildung 6.2: Zeitgleichung an über das Jahr gleichmässig verteilten Tagen (schwarze Punkte). Die rote Kurve zeigt eine Rekonstruktion mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation. Sie unterscheidet sich nur geringfügig von einem trigonometrischen Polynom, bei dem man nur die Terme bis  $k = 2$  berücksichtigt (blaue Kurve). Der durch diese Näherung verursachte Fehler ist zehnfach überhöht in der grünen Kurve dargestellt.

$j$	$y_j$	$\cos 6t_j$	$\sin 2t_j$
0	-3.2	-1	0.00000
1	-13.6	1	0.86603
2	-12.3	-1	0.86603
3	-3.9	1	0.00000
4	3.1	-1	-0.86603
5	2.0	1	-0.86603
6	-4.1	-1	0.00000
7	-6.1	1	0.86603
8	0.5	-1	0.86603
9	10.7	1	0.00000
10	16.3	-1	-0.86603
11	10.6	1	-0.86603
		$\hat{a}_6 = 0.05$	$\hat{b}_2 = -9.125$

Tabelle 6.1: Tabelle zur Berechnung der Koeffizienten  $\hat{a}_2$  und  $\hat{b}_6$ .

- b) Die dominanten Terme sind  $k = 1$  und  $k = 2$ . Dies kann man auch in der Abbildung 6.2 erkennen, wo ausser der Rekonstruktion mit allen Koeffizienten auch das trigonometrische Polynom gezeigt ist, bei dem die Terme mit  $k > 2$  weggelassen wurden. Die Übereinstimmung ist immer noch sehr gut.
- c) Der Approximationsfehler ist bestimmt durch die die Terme

$$\begin{aligned} |\vec{e}(t)|^2 &= \sum_{k=3}^6 \hat{a}_k^2 \vec{c}_k \cdot \vec{c}_k + \sum_{k=3}^5 \hat{b}_k^2 \vec{s}_k \cdot \vec{s}_k \\ &= 0.083^2 \cdot 6 + 0.125^2 \cdot 6 + 0.025^2 \cdot 6 + 0.05^2 \cdot 12 + 0.25^2 \cdot 6 + 0.159^2 \cdot 6 + 0.022^2 \cdot 6 \\ &= 6 \cdot 0.1164 = 0.6984 \\ |e(t)| &= 0.83570 \end{aligned}$$

Der mittlere Fehler der Approximation beträgt also weniger als eine Minute. ○

# Kapitel 7

## El Niño Southern Oscillation

Die Klimaentwicklung hängt wesentlich davon ab, wie Energie an der Erdoberfläche verteilt wird. Aus diesem Grund haben wir in Kapitel 2 die Strömungsdynamik als den wesentlichen Mechanismus des Energietransportes in der Atmosphäre studiert. Und in Kapitel 4 haben wir mit der Modellierung der thermohalinen Zirkulation eine alternative Möglichkeit kennengelernt, den Energie-Transport in den Weltmeeren zu beschreiben.

Das El Niño-Phänomen im Pazifik ist ein interessantes Teilsystem des Klimasystems, welches einigermassen gut als isoliertes Teilsystem behandelt werden kann. Die Modellierung, die wir in diesem Kapitel anstreben, braucht einerseits die Ideen der Fluidodynamik, um die Energietransportmechanismen zu beschreiben, und andererseits die Idee der Box-Modelle, um aus diesen Mechanismen eine einfache gewöhnliche Differentialequation abzuleiten, mit deren Hilfe die Dynamik des El Niño studiert werden kann.

### 7.1 El Niño

### 7.2 Kelvin-Wellen

In diesem Abschnitt soll die Ausbreitung von Anomalien in der Höhe der Meeresoberfläche in der Höhe des Äquators studiert werden.

#### 7.2.1 Kelvin-Wellen

Ein der einfachsten Form führt ein Tiefdruckgebiet über dem zentralen Pazifik dazu, dass die Meeresoberfläche über die Normalhöhe ansteigt. Wenn sich das Tiefdruckgebiet auffüllt und die Druckkraft zur Aufrechterhaltung dieser Anomalie wegfällt, wird dieser “Wasserberg” zerfallen. Mit Hilfe der Gleichungen der Strömungsdynamik sollte sich die Ausbreitung dieser Wellen beschreiben lassen.

Da die Anfangsbedingungen symmetrisch bezüglich einer Spiegelung an der Äquatorenlinie sind, dürfen wir annehmen, dass auch die resultierende Strömung diese Symmetrie hat. In unmittelbarer Nähe des Äquators brauchen wir die Krümmung der Erdoberfläche nicht zu berücksichtigen, und können daher mit einem  $x$ - $y$ -Koordinatensystem arbeiten, in dem  $x$  die Richtung entlang des Äquators und  $y$  die Richtung entlang der Längenkreise ist. Die Strömungsgeschwindigkeitskomponenten nennen wir  $u$  entlang des Äquators und  $v$  entlang der Längenkreise. Die Anomalie der Höhe der Meeresoberfläche bezeichnen wir mit  $h(x, y)$ .

## 7.2.2 Bewegungsgleichung für Kelvin-Wellen

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, ist nach dem zweiten Newtonschen Gesetz proportional zu den Kräften. Die Schwerkraft versucht, den Wasserberg abzubauen. Wasser wird in die Richtung beschleunigt, in die die Höhe  $h(x, y)$  abnimmt. Außerdem wirkt die Coriolis-Kraft, die die Strömung auf der Nordhalbkugel nach rechts ablenkt, und auf der Südhalbkugel nach links.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv - g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu - g \frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned}\quad (7.1)$$

Dies ist ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen für drei unbekannte Funktionen  $h$ ,  $u$  und  $v$ , es ist also mindestens noch eine weitere Gleichung nötig, damit das Problem überhaupt gelöst werden kann.

Abfließendes Wasser reduziert die Höhenanomalie. Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass die Abnahme der Höhenanomalie proportional ist zur Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes ist. Die fehlende Differentialgleichung ist daher

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7.2)$$

Gesucht ist jetzt also eine Lösung der Differentialgleichungen (7.1) und (7.2).

## 7.2.3 Wellengleichung

Wir interessieren uns nur für eine Lösung in unmittelbarer Nähe des Äquators und dürfen daher annehmen, dass sich das Wasser nicht entlang der Längenkreise bewegt, dass also  $v = 0$  gilt. Die Differentialgleichungen (7.1) und (7.2) vereinfachen sich damit zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7.3)$$

$$0 = -fu - g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.5)$$

Indem wir (7.3) nach  $x$  und (7.5) nach  $t$  ableiten, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= -g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= -H \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (7.6)$$

Dies ist eine Wellengleichung für eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \sqrt{gH}$ .

## 7.2.4 Approximative Lösung der Wellengleichung

Bis jetzt wurde die zweite Gleichung (7.4) nicht verwendet, es wurde eigentlich nur das Verhalten der Welle auf dem Äquator modelliert. Da wir jetzt aber wissen, dass mindestens entlang des Äquators die Lösung eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \sqrt{gH}$  ist, können wir versuchen, auch die  $y$ -Abhängigkeit zu modellieren.

## Dispersionsrelation

Eine in  $x$ -Richtung laufende Welle mit Wellenzahl  $k$  kann beschrieben werden als  $\sin(kx - \omega t)$ . Die Wellenzahl  $k$  ist positiv für eine nach Osten laufende Welle und negativ für eine nach Westen laufende Welle. Wir suchen also eine Lösung des Gleichungssystems (7.3)–(7.5) in der Form

$$h_k(t, x, y) = \gamma(y) \cdot \sin(kx - \omega t)$$

zu finden. Die Funktion  $\gamma(y)$  beschreibt das Profil des “Wasserberges” in der Nähe des Äquators, wir nehmen daher an, dass  $\gamma(y)$  für grosse Werte von  $y$  rasch abnimmt.

Einsetzen des Lösungsansatzes  $h_k(t, x, y)$  in die Gleichung (7.6) liefert

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2} &= -\omega^2 \gamma(y) \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 h_k(t, x, y) \\ \frac{\partial^2 h_k}{\partial x^2} &= -k^2 \gamma(y) \sin(kx - \omega t) = -k^2 h_k(t, x, y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega^2 = gHk^2 \quad \text{oder} \quad \left| \frac{\omega}{k} \right| = \sqrt{gH} = c \quad (7.7)$$

Aus dieser Dispersionsrelation liest man ab, dass die Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle unabhängig ist von der Frequenz.

## $y$ -Abhängigkeit

Bis jetzt haben wir die Gleichung (7.4) nicht verwendet. Sie erlaubt,  $u$  zu berechnen, es gilt

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{oder für } h_k \quad u_k = -\frac{g}{f} \gamma'(y) \sin(kx - \omega t).$$

Setzt man dies in (7.5) ein, erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h_k}{\partial t} &= -\omega \gamma(y) \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} &= k \frac{g}{f} \gamma'(y) \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\omega \gamma(y) \cos(kx - \omega t) = -Hk \frac{g}{f} \gamma'(y) \cos(kx - \omega t) \quad (7.8)$$

nach Kürzen gemeinsamer Faktoren und Umstellen folgt

$$\gamma'(y) = \gamma(y) \frac{f}{gH} \frac{\omega}{k} = \pm \frac{f}{c} \gamma(y). \quad (7.9)$$

Das Vorzeichen in (7.9) hängt vom Vorzeichen der Wellenzahl  $k$  ab, das obere Vorzeichen steht für eine nach Osten laufende Welle.

Die Coriolis-Kraft  $f$  verschwindet am Äquator, in erster Näherung ist sie proportional zur  $y$ , wir schreiben daher  $f = \beta y$ . Die Differentialgleichung (7.9) wird damit zu

$$\gamma'(y) = \pm \frac{\beta}{c} y \gamma(y). \quad (7.10)$$

Für zunehmende  $y$  muss  $\gamma$  abnehmen, es muss also  $\gamma'(y) < 0$  sein für genügend grosse  $y$ . Dies ist aber nur möglich für das negative Vorzeichen, und damit nur für eine nach Osten laufende Welle. Im folgenden konzentrieren wir uns daher auf das negative Zeichen in (7.10).

Um eine Lösung von (7.10) zu finden, teilen wir durch  $\gamma(y)$  und verwenden, dass  $\gamma'(y)/\gamma(y)$  die Ableitung des Logarithmus ist:

$$\frac{\gamma'(y)}{\gamma(y)} = \frac{d}{dy} \log \gamma(y) = -\frac{\beta}{c}y \quad \Rightarrow \quad \log \gamma(y) = -\frac{\beta}{2c}y^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma(y) = \exp\left(-\frac{\beta}{2c}y^2\right) \quad (7.11)$$

Das  $y$ -Profil der Welle ist also eine Gauss-Funktion. Die Zone, in der sich eine Kelvin-Welle ausbreiten kann, wird breiter, wenn  $\beta$  grösser wird, wenn also die Rotationsgeschwindigkeit des Planeten grösser wird. Sie wird kleiner, wenn  $c = \sqrt{gH}$  grösser wird, also bei grösserer Gravitation.

## 7.3 Rossby-Wellen

In der Untersuchung der Kelvin-Wellen haben wir angenommen, dass die Geschwindigkeit  $v$  entlang der Längenkreise verschwindet. Die Strömung wird im allgemeinen nicht parallel zum Äquator sein. Trotzdem beobachten wir zum Beispiel, dass die Westwindströmung zwischen verschiedenen geographischen Breiten mäandriert. Woher kommt diese Wellenbewegung?

### 7.3.1 Zirkulation

Aus der Diskussion der globalen Zirkulation wissen wir, dass die Strömung in Äquatornähe dominiert wird durch eine mittlere Strömung konstante Strömung mit Geschwindigkeit  $U$  in Ost-West-Richtung. Wir suchen daher eine Beschreibung der Abweichungen von dieser mittleren Strömung. Unter Verwendung der gleichen Notation wie im Abschnitt 7.2 schreiben wir daher

$$u = U + u', \quad v = U + v' \quad \text{mit } u, v \ll U.$$

Wir nehmen im folgenden wieder an, dass die Strömung quellenfrei ist. Dann lässt sich wie früher gezeigt, dass die Strömung mit einer Strömungsfunktion  $\psi$  als

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

beschrieben werden kann.

Die Drehimpulsdichte in der Strömung ist gegeben durch die Zirkulation

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta \psi.$$

Da der Drehimpuls erhalten ist, muss die Zirkulation in einem Luftpacket abnehmen, wenn es sich auf der Nordhalbkugel nach Norden bewegt. Die Quelle dieser Zirkulationsänderung ist die Erddrehung und damit die Corioliskraft  $f$  und der mathematische Ausdruck der Drehimpulserhaltung ist die Erhaltung der Grösse  $\zeta + f$ .

### 7.3.2 Bewegungsgleichung

Die Grösse  $\zeta + f$  ist erhalten, ihre zeitliche Ableitung

$$\frac{d(\zeta f)}{dt} = 0$$

verschwindet also.  $f$  hängt nur von  $y$  ab, aber die Funktion  $\zeta$  hängt von  $t$ ,  $x$  und  $y$  ab. Wir berechnen die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(\zeta + f)}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &\simeq \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Da  $u \ll U$  ist, können wir in erster Näherung  $u$  im zweiten Term vernachlässigen. Und da  $\partial \zeta / \partial y$  ebenfalls sehr klein ist, können wir dies im letzten Term im Vergleich zu  $\partial f / \partial y$  vernachlässigen. Schliesslich können wir wie in Abschnitt 7.2 die  $\beta$ -Ebenen-Approximation verwenden, und  $\partial f / \partial y$  durch  $\beta$  ersetzen. Schliesslich können wir wieder  $v = \partial \psi / \partial x$  ersetzen. Wir erhalten so

$$0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

als Bewegungsgleichung.

Indem wir  $\zeta = \Delta \psi$  schreiben, erhalten wir so die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (7.12)$$

### 7.3.3 Wellenlösungen

Gesucht sind Lösungen der Gleichung (7.12) in Form kleiner Abweichungen. Wir erwarten Wellenlösungen und schreiben sie daher in der Form

$$\psi_{kl}(t, x, y) = \sin(kx + ly - \omega t). \quad (7.13)$$

Die Ableitungen, die wir für die Bewegungsgleichung (7.12) benötigen, sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{kl}(t, x, y) &= -\omega \cos(kx + ly - \omega t) = -\omega \psi_{kl}(t, x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_{kl}(t, x, y) &= k \cos(kx + ly - \omega t) = k \psi_{kl}(t, x, y), \\ \Delta \psi_{kl} &= -(k^2 + l^2) \cos(kx + ly - \omega t) = -(k^2 + l^2) \psi_{kl}(t, x, y). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(k^2 + l^2) \psi_{kl}(t, x, y) - U k (k^2 + l^2) \psi_{kl}(t, x, y) + \beta k \psi_{kl}(t, x, y) \\ &= ((\omega - U k)(k^2 + l^2) + \beta k) \psi_{kl}(t, x, y) \end{aligned}$$

Für eine Lösung muss also die Dispersionsrelation

$$(\omega - U k)(k^2 + l^2) + \beta k = 0$$

gelten. Aufgelöst nach  $\omega$  ist dies

$$\begin{aligned} \omega(k^2 + l^2) &= U k (k^2 + l^2) - \beta k \\ \Rightarrow \quad \omega &= U k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

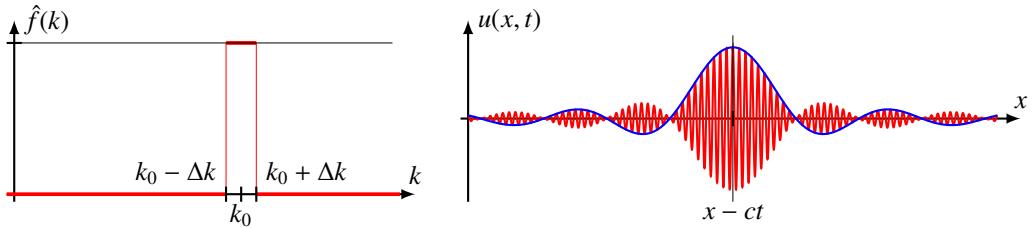


Abbildung 7.1: Berechnung eines Wellenpakete aus Wellen mit Wellenzahlen zwischen  $k_0 - \Delta k$  und  $k_0 + \Delta k$ .

Eine Wellenlösung mit Wellenzahlen  $k$  und  $l$  hat daher die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\omega}{k} = U - \beta \frac{1}{k^2 + l^2} \quad (7.15)$$

entlang der  $x$ -Koordinate. Da der Nenner immer positiv ist, ist  $c$  kleiner als  $U$ , solche Wellen können sich immer nur in West-Ost-Richtung ausbreiten.

### 7.3.4 Gruppengeschwindigkeit

Die Phasengeschwindigkeit (7.15) hilft uns nicht, die Dynamik des El Niño zu verstehen, da wir dazu den Transport von Energie verstehen müssen. Die ebenen Wellen der Form (7.13) beschreiben eine Welle die überall die gleiche Amplitude hat, es findet also eigentlich gar kein Energietransport statt. Im Beispiel des ‘‘Wasserberges’’ in der Untersuchung zu den Kelvin-Wellen wird potentielle Energie dadurch transportiert, dass das Wasser des Berges abfliesst. Wir müssen daher erst einen ‘‘Wasserberg’’ als Überlagerung von ebenen Wellen formulieren und dann die zeitliche Entwicklung dieser Überlagerung studieren.

### Überlagerungen

Wir gehen daher von einer eindimensionalen Situation aus und studieren eine Überlagerung  $u(x, t)$  von Wellen der Form  $\cos(kx - \omega(k)t)$  mit verschiedenen Wellenzahlen  $k$ . Mit der Wellenzahlabhängigen Amplitude  $\hat{f}(k)$  lässt sich die Überlagerung als

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cos(kx - \omega(k)t) dk \quad (7.16)$$

schreiben. Die Bewegung eines solchen Wellenpakete kann man zum Beispiel dadurch studieren, dass man die Bewegung des Maximums dieses Wellenpakete verfolgt.

Die Darstellung (7.16) ist für diese Untersuchung sehr unhandlich, die Rechnung sind sehr umständlich. Wir schreiben die Wellen daher als Realteil einer komplexen Welle  $e^{i(kx - \omega(k)t)}$ , also

$$u(x, t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (7.17)$$

## Wellenpakete

Wir betrachten ein Wellenpaket, welches als Überlagerung mit der Funktion

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 1 & |k - k_0| < \Delta k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Überlagerung  $u(x, t)$  gemäss (7.17) kann man jetzt vereinfachen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk,$$

allerdings muss dazu  $\omega(k)$  bekannt sein.

Falls  $\omega(k) = ck$  gilt, falls also jede elementare Welle die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  hat, können wir  $u(x, t)$  explizit ausrechnen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{ik(x-ct)} dk \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{ik(x-ct)}}{i(x-ct)} \right]_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i(k_0 + \Delta k)(x-ct)}}{i(x-ct)} - \frac{e^{i(k_0 - \Delta k)(x-ct)}}{i(x-ct)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \frac{2}{x-ct} e^{ik_0(x-ct)} \frac{e^{i\Delta k(x-ct)} - e^{-i\Delta k(x-ct)}}{2i} \\ &= \operatorname{Re} \frac{2}{x-ct} e^{ik_0(x-ct)} \sin(\Delta k(x-ct)) = 2 \cos k_0(x-ct) \frac{\sin \Delta k(x-ct)}{x-ct} \end{aligned}$$

Dies ist eine schnell schankende Funktion mit Wellenzahl  $k_0$ , rot dargestellt in Abbildung ?? rechts, moduliert mit der langsam schwankenden Funktion  $\sin \Delta k(x-ct)/(x-ct)$ , dargestellt in der selben Abbildung in blau. Der Schwerpunkt des Paketes befindet sich bei der  $x$ -Koordinaten  $x-ct$ , wandert also mit Geschwindigkeit  $c$  nach rechts.

## Gruppengeschwindigkeit

Bisher haben wir angenommen, dass die Frequenz und die Wellenzahl proportional sind, dass also  $\omega(k) = ck$ . Die Untersuchungen zu den Rossby-Wellen hat gezeigt, dass dies nicht zutreffen muss. Wir müssen die Rechnung also mit einem Modell wiederholen, wo die Frequenz  $\omega(k)$  nicht einfach nur proportional zu  $k$  ist. Für kleines  $\Delta k$  genügt eine lineare Approximation der Abhängigkeit von  $\omega(k)$  von  $k$ , wir setzen daher

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega_1 = \omega_0 + (k - k_0)\omega_1 \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{d}{dk}\omega(k_0) = \omega'(k_0). \quad (7.18)$$

Wir berechnen wieder  $u(x, t)$  wie folgt:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(kx - \omega_0 t - \omega_1(k - k_0)t)} dk \\ &= \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{i(k(x - \omega_1 t) - \omega_0 t + \omega_1 k_0 t)} dk = \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{ik(x - \omega_1 t)} e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} dk \\ &= \operatorname{Re} e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} \left[ \frac{e^{ik(x - \omega_1 t)}}{i(x - \omega_1 t)} \right]_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} = \operatorname{Re} 2e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} \frac{e^{i(k_0 + \Delta k)(x - \omega_1 t)} - e^{i(k_0 - \Delta k)(x - \omega_1 t)}}{2i(x - \omega_1 t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \frac{2e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0)t} e^{i(k_0(x - \omega_1 t))}}{x - \omega_1 t} \frac{e^{i\Delta k(x - \omega_1 t)} - e^{-i\Delta k(x - \omega_1 t)}}{2i} = \operatorname{Re} 2e^{i(\omega_1 k_0 - \omega_0 + k_0(x - \omega_1 t))} \frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t} \\
&= \operatorname{Re} 2e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t} = 2 \cos(k_0 x - \omega_0 t) \frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t}.
\end{aligned}$$

Wiederum finden wir erhalten wir eine kurze Welle mit Frequenz  $\omega_0$  und Wellenzahl  $k_0$ , die moduliert wird mit der langsam schwankenden Funktion

$$\frac{\sin \Delta k(x - \omega_1 t)}{x - \omega_1 t}. \quad (7.19)$$

Das Maximum der Funktion (7.19) wandert mit der Geschwindigkeit  $\omega_1$  nach rechts.

Die soeben durchgeführte Berechnung zeigt also, dass Wellenpakete mit der Geschwindigkeit

$$c_g = \frac{d\omega(k)}{dk},$$

der sogenannten Gruppengeschwindigkeit, wandern. Der Energietransport durch Wellenpakete erfolgt offenbar nicht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \omega/k$ , sondern mit der Gruppengeschwindigkeit.

### 7.3.5 Energietransport durch Rossby-Wellen

Aus der Dispersionsrelation (7.14) für die Rossby-Wellen können wir jetzt die Gruppengeschwindigkeit für parallel zum Äquator sich bewegenden Wellenpaketen durch Ableiten nach  $k$  bestimmen. Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$c_g = \frac{d}{dk} \omega(k) = U - \beta \frac{k^2 + l^2 - k \cdot 2k}{(k^2 + l^2)^2} = U - \beta \frac{l^2 - k^2}{(k^2 + l^2)^2} \quad (7.20)$$

Je nach der relativen Grösse von  $k$  und  $l$  kann die Gruppengeschwindigkeit sowohl grösser als auch kleiner sein als die mittlere Geschwindigkeit  $U$  in der Zone.

## 7.4 Verzögertes Oszillatormodell

In den Kelvin- und Rossby-Wellen haben wir Mechanismen kennengelernt, mit dem Energietransport entlang des Äquators innerhalb der vorherrschenden Strömung sowohl in östlicher wie auch in westlicher Richtung möglich ist. Entscheidend für die Dynamik dieses Energietransports ist die Zeit, die eine Welle benötigt, um den Pazifik zu durchqueren. Sei  $\tau_K$  die Zeit, die eine Kelvin-Welle braucht, um den Pazifik zu durchqueren, und  $\tau_R$  die entsprechende Zeit für eine Rossby-Welle.

Wir versuchen jetzt ein für die Temperaturanomalie  $T(t)$  im östlichen Pazifik aufzustellen, die diese Mechanismen berücksichtigt. Ohne einen Transportmechanismus würde die Temperaturanomalie einfach zerfallen, was beschrieben werden kann mit einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} T(t) = -cT(t),$$

mit einer Konstanten  $c$ .

Die Diskussionen über die dem El Niño-Phänomen zugrunde liegenden Mechanismen haben wir gesehen, dass die Thermoklinenanomalie im zentralen Pazifik eine Auswirkung auf Temperaturanomalie  $T(t)$  haben. Eine Thermoklinenanomalie  $h_0(t)$  auf dem Äquator wandert als Kelvin-Welle in

der Zeit  $\frac{1}{2}\tau_K$  in den Ostpazifik. Eine Thermoklinenanomalie  $h_1(t)$  nördlich oder südlich des Äquators kann als Rossby-Welle nach Westen wandern, am Westrand des Pazifik reflektiert werden und als Kelvin-Welle in den Ostpazifik zurückkehren. Dazu ist die Zeit  $\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K$  nötig. Dies lässt sich mit der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}T(t) = -cT(t) + a_0h_0(t - \frac{1}{2}\tau_K) + b_0h_1(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) \quad (7.21)$$

erreichen.

Nun scheint es aber auch einen Zusammenhang zwischen der Temperaturanomalie im Ostpazifik und den Thermoklinenanomalien im zentralen Pazifik zu geben. Im einfachsten Fall können wir diesen Zusammenhang linear modellieren, also

$$h_0(t - \frac{1}{2}\tau_K) \sim T(t - \frac{1}{2}\tau_K), \quad \text{und} \quad h_1(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) \sim T(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)).$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (7.21) wird dabei zu

$$\frac{d}{dt}T(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) + bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) \quad (7.22)$$

Die Ableitung  $\dot{T}(t)$  hängt also nicht nur von der Temperaturanomalie zur Zeit  $t$  ab, sondern auch von den Temperaturanomalien zu den früheren Zeitpunkten  $t - \frac{1}{2}\tau_K$  und  $t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)$ . Man nennt dies eine verzögerte Differentialgleichung.

Die Theorie der linearen, verzögerten Differentialgleichungen wie (7.22) zeigt, dass sie ähnlich wie gewöhnliche linear Differentialgleichungen erster Ordnung Lösungen haben, die exponentiell schnell zerfallen oder exponentiell anwachsen. Daher können wir nicht erwarten, dass (7.22) das El Niño-Phänomen adäquat beschreiben kann. Um das exponentielle Anwachsen zu verhindern, braucht es einen zusätzlichen Term, der dem Anwachsen von  $T(t)$  überproportional entgegenwirkt. Zum Beispiel könnte dies man mit einem Term der Form  $-\varepsilon T(t)^3$  erreichen. Die verzögerte Differentialgleichung ist dann

$$\frac{d}{dt}T(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) + bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) - \varepsilon T(t)^3. \quad (7.23)$$

Ein andere Möglichkeit, ein ähnliches Ziel zu erreichen, wird in Kapitel ?? dargestellt.

In Kapitel 14 wird das Verhalten der Lösungen solcher verzögter Differentialgleichungen etwas mehr im Detail diskutiert und es wird gezeigt, dass sie tatsächlich wesentliche Aspekte des El Niño-Phänomens adäquat wiedergeben können.



## **Kapitel 8**

# **Datenassimilation**



## **Teil II**

# **Anwendungen und Weiterführende Themen**



# Übersicht

Im zweiten Teil kommen die Teilnehmer des Seminars selbst zu Wort. Die im ersten Teil dargelegten mathematischen Methoden und grundlegenden Modelle werden dabei verfeinert, verallgemeinert und auch numerisch überprüft. Die Beispiele zeigen auch, dass umfassende Klimamodell erwartungsgemäss schnell sehr komplex werden können. Sie zeigen aber auch, dass es möglich ist, wesentliche Aspekte des Klimas aus einfachen Überlegungen und mit übersichtlichen mathematischen Modellen zu erfassen und zu verstehen.

*Matthias Baumann* und *Oli Dias* zeigen zusätzliche Informationen zum Lorenz-System, insbesondere zum Lorenz-Attraktor. *Hansruedi Patzen* verallgemeinert das Vorgehen, mit dem das Lorenz-System gewonnen wurde, im Sinne des Separationsverfahrens für partielle Differentialgleichungen weiter, und gewinnt eine Reihe von höherdimensionalen Lorenz-Systemen und untersucht weiter, ob das beim dreidimensionalen System gefundene chaotische Verhalten auch in den höherdimensionalen Versionen zu finden ist. Diese Untersuchungen zeigen, dass das Verhalten wahrscheinlich nicht nur ein Artefakt der Reduktion auf drei Dimensionen ist, sondern eine inhärente Eigenschaft des Lorenz-Systems.

Die exakte Lösung von Klimamodellen ist oft sehr schwierig, oft sind Parameter oder Abhängigkeiten nicht bekannt. Ein alternativer Ansatz ist daher, die zeitliche Entwicklung im Sinne von machine learning zu lernen. *Martin Stypinski* untersucht diesen Ansatz an zwei Beispielen, der Wärmeleitungsgleichung und der nichtlinearen Gleichung von Burgers. Die Beispiele zeigen vor allem auch, wie mathematisches Wissen über das Modell hilft, die neuronalen Netzwerke zweckmässig zu entwerfen.

Die im Text entwickelten Modelle sind meist noch rudimentär, eine reihe von Arbeiten haben sich daher mit Erweiterungen und Verfeinerungen befasst. *Jonas Gründler* hat das 2-Box Modell der thermohalinen Zirkulation auf 3 Boxen verallgemeinert. *Silvio Marti* studiert den Einfluss von Eis auf das Klima. Die verzögerte Differentialgleichung des El Niño-Systems kann numerische gelöst werden. *Raphael Unterer* zeigt, wie dies funktioniert und findet insbesondere auch eine Stabilitätsbedingung für sein Verfahren. *Nicolas Tobler* hat versucht, die Modelle auf verschiedene Planeten zu verallgemeinern und damit die Unterschiede der Atmosphären der Planeten Venus, Erde und Mars zu erklären. Die Einflüsse anderer Planeten zeigen sich zum Beispiel in der Neigung der Erdachse gegen die Erdbahnebene. Wie *Sebastian Lenhard* vorführt, können auch kleine Änderungen der Neigung das Klima dramatisch verändern. Schliesslich gibt es auch eine Kopplung zwischen Klima und Vegetation, die *Matthias Dunkel* modelliert hat.

Die letzten zwei Kapitel befassen sich mit der Aufarbeitung der Daten, aufgrund derer wir zum Schluss kommen, dass der Klimawandel real ist. Für Wetter- wie auch für Klimamodelle sind grosse Datenmengen von Wetter- und Klimamessstationen in die Rechnung zu integrieren. Der Kalman-Filter ist die Basis vieler moderner Lösungsansätze für dieses Problem. Am Beispiel des erweiterten Kalman-Filters für das Lorenz-System zeigt *Michael Müller*, wie es möglich ist, den Systemzustand

selbst eines chaotischen nichtlinearen Systems zu Extreme Ereignisse sind in den letzten Jahren häufiger geworden und werden oft als Indikatoren für die Klimaveränderung angeführt. Wie man mit statistischen Daten über solche Ereignisse beweisen kann, dass der Klimawandel tatsächlich stattfindet, zeigt *Melina Staub*.

# Kapitel 9

## Lorenz-Attraktor

Matthias Baumann und Oliver Dias

### 9.1 Einführung

Der amerikanische Mathematiker und Meteorologe Edward Lorenz brachte im Jahre 1972, 3 Jahre nachdem er sein berühmtes Paper zum Lorenz-Modell publizierte, ein weiteres Paper mit dem Titel: *"Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?"* heraus. Aussergewöhnlicherweise stoss dieses Paper auf reges Interesse in der Bevölkerung. Entgegen vielen anderen wissenschaftlichen Publikationen liess sich aus diesem eine scheinbar einfache Schlussfolgerung ziehen: kleine Ereignisse können grosse und weitverbreitete Konsequenzen haben. Dieser Effekt bekam den Namen "Butterfly Effect", und es wurden sogar Filme und Bücher mit dieser Schlussfolgerung als Inspiration geschrieben. Dass das Modell auch ästhetisch ansprechend ist und einer abstrakten Schmetterlingsform ähnelt, verhalf ebenso zur Berühmtheit dieses Modells.

Wie wir feststellen werden, ist diese Schlussfolgerung eine Fehlinterpretation und basiert auf einer falschen Verallgemeinerung. Um dies erklären zu können, müssen wir uns mit dem vorhergehenden Paper von Lorenz beschäftigen, mit welchem er die drei berühmten Gleichungen entdeckte und somit den Lorenz Attraktor.

### 9.2 Hintergründe

#### 9.2.1 Dynamik

Dynamik beschreibt Systeme deren Variablen sich über die Zeit verändern. Zu jedem Zeitpunkt besitzt ein dynamisches System einen Vektor der auf einen Punkt im Ergebnisraum zeigt. Dieser Vektor wird dann als Basis für die Berechnung des nächsten Punktes im Koordinatensystem verwendet.

Vielfach sind dynamische Systeme auch deterministisch [**lorenz:dynamicalsystems**]. Das bedeutet, dass aus dem jetzigen Ausgangspunkt den nächsten Punkt im System berechnet werden kann.

### 9.2.2 Empfindlichkeit der Anfangsbedingungen

Die Chaostheorie ist ein Teilbereich der oben erwähnten dynamischen Systeme. Im Folgenden werden Systeme und Modelle als Synonym betrachtet. Chaotische Systeme besitzen ganz wenige Eingangsparameter.

Die entscheidende Eigenschaft, nach welcher diese Systeme kategorisiert werden, ist ihre Empfindlichkeit auf die Eingangsparameter. Eine kleine Änderung in den Eingangsparamter kann eine grosse Änderung der Werte auslösen.

Es gibt aber auch andere äussere Einwirkungen, die eine Veränderung der Werte auslösen kann. Zum Beispiel kann der Rundungsfehler, welcher bei modernen CPU's nicht-vorhersagbar ist, die Ergebnisse stark verändern. Weil jeder Wert auf den vorherigen Werten aufbaut wird der Rundungsfehler die Werte immer stärker verfälschen.

### 9.2.3 Chaostheorie

Ein typisches Beispiel für ein chaotisches System ist das Wetter, wie Edward Lorenz herausgefunden hat.

Die Modelle von Lorenz werden chaotisch genannt, weil sie auf den ersten Blick keinen Gesetzmässigkeiten folgen. Dennoch haben diese Systeme bei genauer Untersuchung wiederkehrende Verhaltensweisen. Dies zeigt sich, indem sich wiederholende, zum Teil fraktale Muster und ähnliche Figuren zustande kommen. Als Beispiel sind bei der fraktalen Menge Mandelbrot die Muster sehr gut wiedererkennbar.

Im Generellen ist die Chaostheorie ein Bereich der Mathematik der sich mit nicht-linearen dynamischen Systemen auseinander setzt.

### 9.2.4 Attraktor

Vorweg ist wichtig zu sagen, dass es in dynamischen Systemen keine standartisierte Definition eines Attraktors gibt. Wir verwenden in diesem Kontext folgende Definition:

Ein Attraktor ist eine Menge an Werten, zu welchen sich ein System zu entwickeln tendiert.

Egal welche Startwerte man in einem Attraktor verwendet, das System entwickelt sich immer auf dieselbe Art und Weise. Im Bezug auf den Lorenz Attraktor ist dies die berühmte Form des Butterflies. Mathematisch formuliert ist ein Attraktor

$$\text{Attraktor} = \{x_a | \forall \varepsilon > 0 \forall T \exists t > T |x(t) - x_a| < \varepsilon\} \quad (9.1)$$

Für jeden Zeitpunkt  $T$  existiert ein späterer Zeitpunkt  $t$ , bei dem sich die Funktion  $x$  (Lorenz-Attraktor) so entwickelt, dass der Betrag der Differenz kleiner als die Toleranz  $\varepsilon$  wird.

### 9.2.5 Strange Attraktor

Beim Strange Attraktor wird ein normaler Attraktor um eine chaotische Komponenten erweitert. Das heisst, dass sich Werte innerhalb des Systems chaotisch verhalten. So könnten sich Lösungen in der Definition (9.1) innerhalb von  $\varepsilon$  beliebig bewegen. Kleinste Parameter- oder Startpunktänderungen führen zu scheinbar zusammenhangslose Resultate. Dieses Verhalten wird wie in den vorherigen Abschnitten beschrieben Chaos genannt.

## 9.3 Analyse der Gleichungen

Die Gleichungen, welche das Lorenz-Modell beschreiben, enthalten viele physikalische Eigenschaften wie die Dichte, Geschwindigkeit und Temperatur der Atmosphäre und stellen diese physikalischen Werte formalisiert dar. Lorenz wollte aus den bereits existierenden Gleichungen der Hydrodynamik ein Modell zur Wetterprognose erstellen. Basierend auf vorgehende Werke von Saltzman startete Lorenz mit den hydrodynamischen Gleichungen und verfolgte ein systematisches Näherungsverfahren, womit er auf die folgenden drei Gleichungen stoss:

$$\dot{x} = \sigma(x - y) \quad (9.2)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \quad (9.3)$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \quad (9.4)$$

Die X-Achse entspricht dabei der hydrodynamischen, räumlichen Durchschnittsgeschwindigkeit, also die durchschnittliche Windgeschwindigkeit. Die Y-Achse repräsentiert die Temperatur und die Z-Achse der Temperaturgradient. Also wie schnell sich die Temperatur verändert.

Wie aus den obigen Gleichungen ersichtlich ist, sind drei Parameter vorhanden. Alle sind immer positiv.

### 1. Parameter: $\sigma$

$\sigma$  entspricht der dimensionslosen Prandtl Nummer. Diese ist das Verhältnis von *Viskosität* und der *Temperaturleitfähigkeit*. Da beide Eigenschaften die Einheit  $\frac{m^2}{s}$  haben, resultiert daraus eine dimensionslose Zahl.

### 2. Parameter: $\rho$

Auch das  $\rho$  wurde nach einem Mathematiker benannt. Der Name für diesen Parameter ist Rayleigh Nummer. Es entspricht dem Verhältnis von *Wärmeausdehnung* und der *Viskosität*.

### 3. Parameter: $\beta$

Der dritte Parameter des Lorenz-Modells ist das  $\beta$ . Es entspricht der *Wärmeausdehnung*. Dabei handelt es sich um die Veränderung der geometrischen Größen eines Körpers, die sich mit erhöhter Temperatur vergrössern. Dehnt sich ein Körper aufgrund der Temperaturänderung aus, so verändert sich auch stets die Dichte. Bei fluiden Materialien hat dies Auswirkungen auf den Druck.

### 9.3.1 Implementation

Es gibt für das Lösen von Differentialgleichungen zwei Ansätze. Zum einen der analytische Ansatz, der eine allgemeingültige Lösung sucht. Es handelt sich bei den drei Lorenz-Gleichungen um nicht-lineare Differentialgleichungen, welche analytisch nicht lösbar sind. Aus diesem Grund fällt dieser Ansatz weg.

Der zweite Ansatz ist, eine Diskretisierung vorzunehmen und den Computer für jeden definierten Zeitpunkt die Resultate der Gleichungen ausrechnen zu lassen. Dies ist auch der in dieser Arbeit gewählte Ansatz, der im Folgenden bis zur tatsächlichen Visualisierung genauer beschrieben wird.

## Eulerisches Verfahren

Das Ziel vom eulerischen Näherungsverfahren ist es hier, die Differentialgleichungen approximativ zu lösen. Durch eine Diskretisierung der Werte können wir eine Form der Gleichungen bestimmen, die später visualisiert werden können. Um die Ableitung zu berücksichtigen, muss das Ergebnis einer Differentialgleichung zu einem diskreten Zeitpunkt für die Berechnung des nächsten Zeitpunktes addiert werden. So wird die Steigung an einem Punkt  $t$  berechnet. Diese Steigung können wir in eine lineare Gleichung einsetzen und daraus den absoluten Punkt berechnen.

Der *Y-Achsenabschnitt* wird mit dem Ergebnis der vorherigen Rechnungsschritt belegt, da der Differenzialterm den Abstand vom Wert vorher berechnet.

$$y(t+1) = \frac{dLG}{dt} \cdot \Delta t + y(t) \quad LG = \text{Lorenzgleichung} \quad (9.5)$$

Dieses Verfahren kann auf alle Koordinaten des Lorenz-Systems angewendet werden.

Eingefügt in die Gleichung (9.5) ergibt sich folgendes System:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t \quad (9.6)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t \quad (9.7)$$

$$z(t + \Delta t) = z(t) + \frac{dz}{dt} \cdot \Delta t \quad (9.8)$$

Das angewendete Verfahren nennt sich *Eulerisches- oder Einschritt-Verfahren*. Durch das, dass wir einen numerischen Ansatz mit dem Euler Verfahren gewählt haben, resultiert eine Annäherung des Lorenz-Attraktors. Da solche Abweichungen von der tatsächlichen Lösung existieren, ist zu erwarten, dass diese Abweichungen gross genug sind, um zum chaotischen Verhalten beizutragen. Es gäbe auch genauere Verfahren für das numerische Lösen der Gleichungen wie das *Quadratische Verfahren* oder das *Runge-Kutta Verfahren*. Da aber auch bei diesen Verfahren keine absolute Genauigkeit erreicht wird, blieben wir bei der Eulerischen Annäherung.

## Umsetzung im Code

Das oben erwähnte Gleichungssystem haben wir im Javascript-Code verwendet, um die Resultate des Lorenzsystems auszurechnen. In Javascript haben wir die Punkte in einem Array(Tuple3) gespeichert.

```
1 ||      x = arr[i].x + ((sigma * y) - (sigma * x)) * delta;
2 ||      y = arr[i].y + ((-x * z) + (rho * x) - y) * delta;
3 ||      z = arr[i].z + ((x * y) - (beta * z)) * delta;
```

Die  $x, y$  Variablen in der 1. Gleichung ist noch mit dem Wert des vorherigen Durchgangs besetzt und deshalb eine Annäherung um den echten Wert. Das gleiche gilt für alle Werte, die vor der Ausführung noch nicht gesetzt sind. Beim ersten Durchgang wird 0.1 als Startwert angenommen. Die folgenden Variablen wurden für den Code verwendet und definiert:

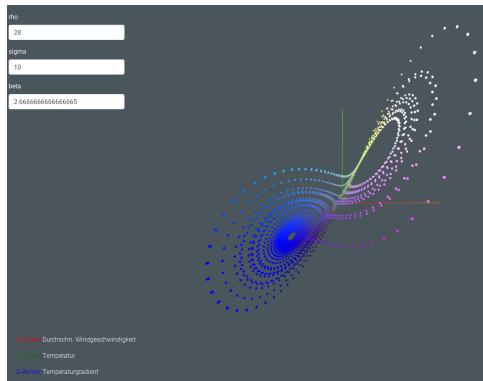


Abbildung 9.1: Visualisierung Lorenz-Attraktor

Mathematisches Symbol	Variable im Code	Bedeutung (Anfangswert)
$\Delta$	delta	Zeitschritt (0.1)
$\sigma$	sigma	Rayleigh Zahl (10)
$\varrho$	rho	Prandtl Zahl (28)
$\beta$	beta	Wärmeausdehnung ( $\frac{8}{3}$ )

(9.9)

## Visualisierung

Die Werte des Lorenz-Systems, welche der Algorithmus im letzten Paragraph berechnet hat, stellen Ortsvektoren in einem drei dimensionalen Raum dar. An jedem Punkt des Lorenz-Systems stellt der Visualisierungsalgorithmus eine *Sphere* dar. Es werden in unserer Darstellung 2500 Werte berechnet und angezeigt.

## 9.4 Lösungen

Im folgenden Abschnitt möchten wir auf Lösungen des Lorenz-Systems eingehen. Lösungen sind Parameter des Systems die das Lorenz-System dazu veranlassen bis in die unendliche Zukunft die gleichen Werte auszugeben.

Die offensichtlichste Lösung ist die Eingabeparameterkombination  $\sigma = 0, \rho = 0, \beta = 0$ . Diese Parameter ergeben den Punkt  $(0, 0, 0)$ .

## 9.5 Schlussfolgerung

Wie wir beschrieben haben, spielt das Chaos eine grosse Rolle in der Wetterprognose und ist der Grund, wieso keine langfristige, verlässliche Prognose gemacht werden kann. Denn selbst kleinste Verfälschungen der Messdaten führen nach einer gewissen Zeit zu einem komplett anderen Resultat. Es kann sein, dass mit einem minimal anderen Input die Resultatmenge gerade auf die andere Seite

des Butterflies ausschlagen könnte. Da wir nicht beliebig genau messen können, stellt uns das vor diese Einschränkung der zeitlich limitierten Prognose.

Um Rückschluss auf das Paper von Lorenz mit dem Flügelschlag des Schmetterlings zu nehmen, müssen wir uns überlegen, inwiefern ein Schmetterlingsschlag eine Auswirkung haben kann. Gemäß dem Lorenz-Modell wäre es möglich, dass ein solch kleines Event zu so grossen Auswirkungen wie ein Tornado führen kann, da es sich ja genau um eine winzige Parameteränderung handelt. Diese Gedankenanregung wurde auch nach der Publikation seiner Lorenz-Gleichungen veröffentlicht. Hingegen ein Rückschluss zu ziehen, was genau ein Tornado ausgelöst hat, ist praktisch unmöglich, selbst wenn alle benötigten Daten vorhanden wären. Genauso könnte ein Schmetterlingsschlag einen allfälligen Tornado verhindert haben.

Doch kann das Modell auch auf die Realität angewendet werden und stimmt nun diese Schlussfolgerung? Für das Berechnen des Lorenz-Attraktors wurden viele Vereinfachungen gemacht. So werden viele relevante Eigenschaften zum Wetter wie zum Beispiel die Luftfeuchtigkeit, die Einflüsse der Wolken oder auch die Albedo nicht miteinbezogen.

Es ist also nicht ein realistisches Modell. Wir kommen zum Schluss, dass das Wetter zwar ein chaotisches Modell ist, aber durch das, dass es ein solch grosses und komplexes System ist, ein Schmetterlingsschlag schlichtweg zu irrelevant ist, um ein Tornado auszulösen.

# Kapitel 10

## Höherdimensionales Lorenzsystem

Hansruedi Patzen

Auf das dreidimensionale Lorenzsystem wurde bereits in Abschnitt 2.2 sowie in Kapitel 9 detailliert eingegangen. Trotzdem werden folgend nochmals die für das Lorenz-Modell relevanten Grundgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}\end{aligned}\tag{10.1}$$

genauer analysiert. Dank einer geschickten Wahl von Basisfunktionen

$$\sin(ax) \sin(y), \quad \cos(ax) \sin(y) \quad \text{und} \quad \sin(2y)$$

und einigen Vereinfachungen, hatten wir es geschafft, das System auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= -\nu(a^2 + 1)X(t) + \frac{ac}{a^2 + 1}Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= \frac{aT_0}{\pi}X(t) - (a^2 + 1)\kappa Y(t) - aX(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= -4\kappa Z(t) + \frac{a}{2}X(t)Y(t)\end{aligned}$$

zu reduzieren, welche unser dreidimensionale Lorenzsystem beschreiben.

In diesem Kapitel wollen wir nun diese mittels Separationsverfahren gefunden Lösungen, welche unsere Basisfunktionen bilden, erweitern. Diese neuen Basisfunktionen sollen es uns ermöglichen auch Terme, die wir bisher bei unserer Lösung vernachlässigt haben, miteinzubeziehen. Dies führt uns dann schlussendlich zu einem neuen Lorenzsystem, welches nicht mehr dreidimensional sondern höherdimensional ist. Bis wir die daraus entstehenden Resultate in Abschnitt 10.5 begutachten können, müssen wir erst ein paar Dinge zur Notation und allgemeinen Formeln in Abschnitt 10.1 klären. Danach machen wir uns auf die Suche neuer Basisfunktionen in Abschnitt 10.2 und generieren nach Einsetzen und Vereinfachen in Abschnitt 10.3 die zum Lösen unserer neuen höherdimensionalen Lorenzsystems benötigten gewöhnlichen Differentialgleichungen. Abschnitt 10.4 zeigt uns zudem an einem konkreten Beispiel eines Lorenzsystem vierten Grades, welche Informationen verloren gehen, wenn Terme vernachlässigt werden.

## 10.1 Einstieg

Bevor wir uns auf die Suche nach Basisfunktionen machen, folgen hier ein paar Angaben zu der in diesem Kapitel verwendeten Notation und einigen grundlegenden Funktionen und Identitäten, welche später verwendet werden. Eine kleine Vorschau zu dem was uns noch erwartet sozusagen.

### 10.1.1 Notation

Die verwendete Notation entspricht grundsätzlich derjenigen, welche bereits aus der Literatur bekannt sind. Einzig die Verwendung der sogenannten Multi-Index-Notation könnte für einige Leser zu Unklarheiten führen, daher hier eine kurze Einführung.

Unter der Multi-Index-Notation versteht man einen Index, der einem  $n$ -Tupel

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_k \in \mathbb{N}_0$$

entspricht. Zur klaren Unterscheidung zu normalen Indices, wird meist ein griechischer Buchstabe verwendet. Der absolute Wert eines Multi-Indices ist wie folgt definiert

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Nützlich ist diese Notation insbesondere, wenn mit Summen gearbeitet wird. So kann mittels der Forderung  $|\alpha| = k$  und unter Ausnutzung der “Symmetrie” von  $k$  und  $l$  die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k a_{l,k-l} \tag{10.2}$$

auch geschrieben werden kann als

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Dies liefert uns

$$a_{(0,0)} + a_{(0,1)} + a_{(1,0)} + a_{(0,2)} + a_{(1,1)} + a_{(2,0)} + a_{(0,3)} + \dots$$

Wie man sehen kann, entspricht dies genau dem in Gleichung (10.2) geforderten 2-Tupel  $(l, k - l)$ .

### 10.1.2 Formelzusammenstellung

Einige Umformungen, die wir in den nächsten Abschnitten vornehmen werden, verwenden teilweise nicht ganz geläufige Funktionen. Damit nicht immer gleich Wikipedia bemüht werden muss, werden diese hier zusammengestellt.

Die Signum-Funktion (kurz  $\text{sgn}(x)$ ):

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{10.3}$$

Die  $\text{sgn}$ -Funktion können wir dazu verwenden, die Berechnung von Sinus und Kosinus eines absoluten Wertes zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sin(|x|) &= \text{sgn}(x) \sin(x) & \Leftrightarrow & \sin(x) = \text{sgn}(x) \sin(|x|) \\ \cos(|x|) &= \cos(x) \end{aligned} \tag{10.4}$$

Produkte von Sinus und Kosinus können wir mit folgenden Identitäten in einfache Summen umwandeln. Unter anderem kann dies mit Hilfe der komplexen Zahlentheorie gezeigt werden:

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))\end{aligned}$$

## 10.2 Erweiterung der Basisfunktionen

Die Suche neuer Basisfunktionen beginnt mit denjenigen, die bereits in Gleichung (2.28) erwähnt sind. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass diese auch ein wenig anders geschrieben werden können:

$$\begin{aligned}\sin(ax)\sin(y) &= \sin(1ax)\sin(1y), \\ \cos(ax)\sin(y) &= \cos(1ax)\sin(1y), \\ \sin(2y) &= \cos(0ax)\sin(2y).\end{aligned}$$

Nun fügen wir ein paar zusätzliche, auf den ersten Blick etwas nutzlose, Gleichungen hinzu:

$$\begin{aligned}0 &= \sin(0ax)\sin(2y) \\ \sin(ax)\sin(y) &= \sin(1ax)\sin(1y) \\ 0 &= \sin(2ax)\sin(0y) \\ \sin(2y) &= \cos(0ax)\sin(2y) \\ \cos(ax)\sin(y) &= \cos(1ax)\sin(1y) \\ 0 &= \cos(2ax)\sin(0y)\end{aligned}$$

Daraus lässt sich nun das Muster

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1 ax)\sin(\alpha_2 y) \\ \cos(\alpha_1 ax)\sin(\alpha_2 y)\end{aligned}\tag{10.5}$$

erkennen, wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  Teile eines Multi-Indices sind und die Bedingung  $|\alpha| = k = 2$  erfüllen.

Für unser dreidimensionales Modell hatten wir also Basisfunktionen zweiten Grades ( $k = 2$ ) gefunden. Mit den neuen Funktionen können wir aber nicht nur die uns bekannten generieren, sondern diese auch noch erweitern indem wir den Grad  $k$  variieren.

Leicht zu erkennen ist, dass für  $k = 0$  nur die 0-Funktion übrig bleibt, da einzig das  $(0, 0)$ -Tupel die Bedingung  $|\alpha| = 0$  erfüllt.  $k = 1$  generiert die beiden Tupel  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$ , womit die Funktion  $\sin(y)$  übrig bleibt. Somit können wir Grad  $k \geq 1$  voraussetzen. Damit wird auch gleich das Problem einer möglichen Division durch 0 elegant umgangen, wie wir später sehen werden.

## 10.3 Höherdimensionales Lorenzsystem

Nun nehmen wir die Grundgleichungen aus Gleichung (10.1) und unsere neuen Basisfunktionen aus Gleichung (10.5) und bauen daraus ein höherdimensionales Lorenzsystem.

Als ersten Schritt werden die in Gleichung (2.26) und Gleichung (2.27) gefundenen Lösungen erweitert und es resultiert

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \quad (10.6)$$

sowie

$$\vartheta(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} b_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y). \quad (10.7)$$

Als nächstes betrachten wir nochmals die Gleichung (10.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= v \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}. \end{aligned}$$

Um das Einsetzen und Vereinfachen der Terme einfacher zu gestalten, ist es sinnvoll, systematisch vorzugehen. Es ist leicht zu erkennen, dass wir sowohl partielle Ableitungen nach  $x$  als auch nach  $y$  brauchen werden. Daher fangen wir an, uns Bausteine zurechtzulegen, indem wir die Gleichungen (10.6) und (10.7) je zwei Mal nach  $x$  und  $y$  ableiten.

Für  $\psi(x, y, t)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 a_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \cos(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1^2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2^2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

und für  $\vartheta(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 b_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 b_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \cos(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1^2 b_{\alpha}(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2^2 b_\alpha(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y).$$

Damit haben wir alles zusammen um den einfachen Laplace Operator  $\Delta$  für  $\psi(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ &= -a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1^2 a_\gamma(t) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2^2 b_\delta(t) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

und  $\vartheta(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \\ &= -a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1^2 b_\gamma(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2^2 b_\delta(t) \cos(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) b_\alpha(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

aufzulösen. In Gleichung (10.6) brauchen wir zudem  $\Delta^2 \psi(x, y, t)$ . Dafür benötigen wir die zweifachen Ableitungen von  $\Delta \psi(x, y, t)$  nach  $x$  und  $y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} &= a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1^2 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \cos(\alpha_2 y), \\ \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial y^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2^2 (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) a_\alpha(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \end{aligned}$$

und können dann

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi &= \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial y^2} \\ &= a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1^2 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) a_\gamma(t) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2^2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_\delta(t) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2)^2 a_{\alpha}(t) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y)$$

zusammenbauen.

Wem bei den Gleichungen für die Laplace Operatoren aufgrund der Addition zweier unendlicher Summen etwas mulmig war, soll unbesorgt sein. Diese Umformung sei uns erlaubt, da wir davon ausgehen müssen, dass die einzelnen Reihen konvergent sind. Zudem hält uns nichts davon ab, die Indices der beiden unabhängigen Summen so umzubenennen, dass diese übereinstimmen. Damit ist klar, dass die gleichen Basisfunktionen generiert werden und die Summen somit vereinfacht werden können.

Mit unseren bisherigen Bausteinen haben wir jetzt fast alles zusammen, um diese in Gleichung (10.1) einzusetzen. Einzig die Funktionaldeterminanten fehlen noch. Diese sind auch der haarige Teil des Gleichungssystems, denn es sorgt für die Kopplung der beiden Terme.

Beginnen wir also damit die erste Funktionsdeterminante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} \\ &= \left( a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \right) \left( - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_{\delta}(t) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \right) \\ &\quad - \left( \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \right) \left( -a \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 (\eta_1^2 a^2 + \eta_2^2) a_{\eta}(t) \cos(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \right) \\ &= -a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &\quad + a \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 (\eta_1^2 a^2 + \eta_2^2) a_{\eta}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \cos(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\ &= -a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (\delta_1^2 a^2 + \delta_2^2) a_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &\quad + a \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 a_{\delta}(t) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) a_{\gamma}(t) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (a^2 (\gamma_1^2 - \delta_1^2) + (\gamma_2^2 - \delta_2^2)) a_{\delta}(t) \\ &\quad \cdot \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (a^2 (\gamma_1 - \delta_1)(\gamma_1 + \delta_1) + (\gamma_2 - \delta_2)(\gamma_2 + \delta_2)) a_{\delta}(t) \\ &\quad \cdot (\sin((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \\ &\quad + \sin((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \\ &\quad - \sin((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \\ &\quad - \sin((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y)) \\ &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (a^2 (\gamma_1 - \delta_1)(\gamma_1 + \delta_1) + (\gamma_2 - \delta_2)(\gamma_2 + \delta_2)) a_{\delta}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\operatorname{sgn}(\gamma_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \sin(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \\ & + \operatorname{sgn}(\gamma_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \sin(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y) \\ & - \operatorname{sgn}(\gamma_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \sin(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \\ & - \operatorname{sgn}(\gamma_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \sin(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y)) \end{aligned}$$

und analog dazu kann auch die zweite

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\vartheta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \\ &= \left( a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 b_{\delta}(t) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \right) \\ &\quad - \left( \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \right) \left( -a \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 b_{\eta}(t) \sin(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \right) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 b_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &\quad + a \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} \xi_2 a_{\xi}(t) \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=r} \eta_1 b_{\eta}(t) \sin(\xi_1 ax) \cos(\xi_2 y) \sin(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_1 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 b_{\delta}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \\ &\quad + a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} \gamma_2 a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_1 b_{\delta}(t) \sin(\gamma_1 ax) \cos(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left( \gamma_1 \delta_2 \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \cos(\delta_1 ax) \cos(\delta_2 y) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 \delta_1 \sin(\gamma_1 ax) \cos(\gamma_2 y) \sin(\delta_1 ax) \sin(\delta_2 y) \right) \\ &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left( \gamma_1 \delta_2 \left( \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \right. \\ &\quad \left. + \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right. \\ &\quad \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \\ &\quad \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right) \\ &\quad + \gamma_2 \delta_1 \left( \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \\ &\quad \left. - \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right. \\ &\quad \left. - \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \\ &\quad \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right) \Big) \\ &= \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left( (\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1) \left( \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \right. \right. \\ &\quad \left. + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right) \\ &\quad + (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1) \left( \cos((\gamma_1 - \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 - \delta_2)y) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos((\gamma_1 + \delta_1)ax) \sin((\gamma_2 + \delta_2)y) \Big) \Big) \\
= & \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=i} a_{\gamma}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \Big( (\gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1) (\operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \cos(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y) \\
& + \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \cos(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y)) \\
& + (\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1) (\operatorname{sgn}(\gamma_2 - \delta_2) \cos(|\gamma_1 - \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 - \delta_2|y) \\
& + \operatorname{sgn}(\gamma_2 + \delta_2) \cos(|\gamma_1 + \delta_1|ax) \sin(|\gamma_2 + \delta_2|y)) \Big)
\end{aligned}$$

aufgelöst werden. Jetzt haben wir alle Bausteine zusammen und können diese in die einzelnen Gleichungen einsetzen. Damit erhalten wir einerseits

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= \nu \Delta^2 \psi + c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} \\
\Leftrightarrow & - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{a}_{\gamma}(t) (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
& = \nu \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} a_{\xi}(t) (\xi_1^2 a^2 + \xi_2^2)^2 \sin(\xi_1 ax) \sin(\xi_2 y) \\
& - ca \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=s} b_{\eta}(t) \eta_1 \sin(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\
& - \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\zeta|=i} \zeta_1 a_{\zeta}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} \delta_2 (a^2 (\zeta_1 - \delta_1) (\zeta_1 + \delta_1) + (\zeta_2 - \delta_2) (\zeta_2 + \delta_2)) a_{\delta}(t) \\
& \quad \cdot (\operatorname{sgn}(\zeta_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \sin(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y) \\
& \quad + \operatorname{sgn}(\zeta_1 + \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \sin(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \delta_2|y) \\
& \quad - \operatorname{sgn}(\zeta_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \sin(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y) \\
& \quad - \operatorname{sgn}(\zeta_1 - \delta_1) \operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \sin(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \delta_2|y)) \\
\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{a}_{\gamma}(t) (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) \sin(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left( (-\nu (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2)^2 a_{\alpha}(t) + \alpha_1 c a b_{\alpha}(t)) \sin(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \right. \\
& \quad + \frac{\alpha_1 a}{4} a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \beta_2 (a^2 (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) (\alpha_2 + \beta_2)) a_{\beta}(t) \\
& \quad \cdot (\operatorname{sgn}(\alpha_1 + \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \sin(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y) \\
& \quad + \operatorname{sgn}(\alpha_1 + \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \sin(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y) \\
& \quad - \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \sin(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y) \\
& \quad \left. - \operatorname{sgn}(\alpha_1 - \beta_1) \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \sin(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y) \right)
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \Delta \vartheta + \frac{T_0}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(\psi, \vartheta)}{\partial(x, y)}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{b}_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
& = -\kappa \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{|\xi|=q} b_{\xi}(t) (\xi_1^2 a^2 + \xi_2^2) \cos(\xi_1 ax) \sin(\xi_2 y) \\
& \quad + \frac{aT_0}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{|\eta|=s} \eta_1 a_{\eta}(t) \cos(\eta_1 ax) \sin(\eta_2 y) \\
& \quad - \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\zeta|=i} a_{\zeta}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\delta|=j} b_{\delta}(t) \left( (\zeta_1 \delta_2 + \zeta_2 \delta_1) (\operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \cos(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \cos(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \zeta_2|y)) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + (\zeta_1 \delta_2 - \zeta_2 \delta_1) (\operatorname{sgn}(\zeta_2 - \delta_2) \cos(|\zeta_1 - \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 - \delta_2|y) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \operatorname{sgn}(\zeta_2 + \delta_2) \cos(|\zeta_1 + \delta_1|ax) \sin(|\zeta_2 + \delta_2|y)) \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\gamma|=k} \dot{b}_{\gamma}(t) \cos(\gamma_1 ax) \sin(\gamma_2 y) \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left( \left( -\kappa (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) b_{\alpha}(t) + \frac{\alpha_1 a T_0}{\pi} a_{\alpha}(t) \right) \cos(\alpha_1 ax) \sin(\alpha_2 y) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. - \frac{a}{4} a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} b_{\beta}(t) \left( (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (\operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \cos(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y) \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \cos(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y)) \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (\operatorname{sgn}(\alpha_2 - \beta_2) \cos(|\alpha_1 - \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 - \beta_2|y) \right. \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. + \operatorname{sgn}(\alpha_2 + \beta_2) \cos(|\alpha_1 + \beta_1|ax) \sin(|\alpha_2 + \beta_2|y)) \right) \right)
\end{aligned}$$

als Gleichungen die es nun zu lösen gilt.

Da wir die  $x$  und  $y$  Komponenten loswerden wollen, damit nur noch  $t$  übrig bleibt, brauchen wir Gleichungen für einzelne  $\dot{a}_{\gamma}(t)$  für  $|\gamma| > 0$

$$\begin{aligned}
(\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) \dot{a}_{\gamma}(t) & = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left( \left( -v (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2)^2 a_{\alpha}(t) + \alpha_1 c a b_{\alpha}(t) \right) f_{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. + \frac{\alpha_1 a}{4} a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \beta_2 (a^2 (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) (\alpha_2 + \beta_2)) a_{\beta}(t) \right. \\
& \quad \quad \quad \cdot \left( f_{\gamma}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + f_{\gamma}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right. \\
& \quad \quad \quad \left. \left. - f_{\gamma}(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) - f_{\gamma}(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right) \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \dot{a}_{\gamma}(t) = \left( -v (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) a_{\gamma}(t) + \frac{\gamma_1 c a}{\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2} b_{\gamma}(t) \right) \operatorname{sgn}(\gamma_1) \operatorname{sgn}(\gamma_2) + \frac{a}{4 (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2)} \\
& \quad \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \alpha_1 a_{\alpha}(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} \beta_2 (a^2 (\alpha_1 - \beta_1) (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) (\alpha_2 + \beta_2)) a_{\beta}(t) \\
& \quad \cdot \left( f_{\gamma}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + f_{\gamma}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right. \\
& \quad \left. \left. - f_{\gamma}(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) - f_{\gamma}(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \right) \quad (10.8)
\right)
\end{aligned}$$

und analog für

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_\gamma(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \left( \left( -\kappa (\alpha_1^2 a^2 + \alpha_2^2) b_\alpha(t) + \frac{\alpha_1 a T_0}{\pi} a_\alpha(t) \right) g_\gamma(\alpha_1, \alpha_2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a}{4} a_\alpha(t) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} b_\beta(t) \left( (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\gamma_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + g_\gamma(\gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\gamma_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) + g_\gamma(\gamma_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)) \right) \right) \\
 \Leftrightarrow \dot{b}_\gamma(t) &= \left( -\kappa (\gamma_1^2 a^2 + \gamma_2^2) b_\gamma(t) + \frac{\gamma_1 a T_0}{\pi} a_\gamma(t) \right) \operatorname{sgn}(\gamma_2) - \frac{a}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha(t) \\
 &\quad \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{|\beta|=j} b_\beta(t) \left( (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + g_\gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)) \right. \\
 &\quad \left. + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (g_\gamma(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) + g_\gamma(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)) \right). \quad (10.9)
 \end{aligned}$$

Die beiden Hilfsfunktionen  $f_\gamma(q, s)$  und  $g_\gamma(q, s)$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 f_\gamma(q, s) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(s) & |q| = \gamma_1, |s| = \gamma_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 g_\gamma(q, s) &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(s) & |q| = \gamma_1, |s| = \gamma_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## 10.4 Lorenzsystem vierten Grades

Anhand des Lorenzsystems vierten Grades wollen wir nun zeigen, welche Information verloren geht, wenn wir uns alleinig auf ein System zweiten Grades konzentrieren.

Zuerst brauchen wir allerdings alle Gleichungen von  $k = 1$

$$\begin{aligned}
 |\gamma| = 1 \quad \dot{a}_{(1,0)}(t) &= 0 \\
 \dot{a}_{(0,1)}(t) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_{(1,0)}(t) &= 0 \\
 \dot{b}_{(0,1)}(t) &= -\kappa b_{(0,1)}(t) \\
 &\quad + \frac{a}{4} a_{(1,1)}(t) b_{(1,2)}(t) + \frac{a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(1,1)}(t) \\
 &\quad + \frac{a}{4} a_{(1,2)}(t) b_{(1,3)}(t) + \frac{a}{4} a_{(1,3)}(t) b_{(1,2)}(t) \\
 &\quad + \frac{a}{2} a_{(2,1)}(t) b_{(2,2)}(t) + \frac{a}{2} a_{(2,2)}(t) b_{(2,1)}(t)
 \end{aligned}$$

über  $k = 2$

$$\begin{aligned}
 |\gamma| = 2 \quad \dot{a}_{(2,0)}(t) &= 0 \\
 \dot{a}_{(1,1)}(t) &= -(a^2 + 1) \nu a_{(1,1)}(t) + \frac{ac}{a^2 + 1} b_{(1,1)}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9a(a^2 - 1)}{4(a^2 + 1)} a_{(1,2)}(t) a_{(2,1)}(t) \\
& + \frac{a(3a^2 - 5)}{a^2 + 1} a_{(1,3)}(t) a_{(2,2)}(t) + \frac{a(5a^2 - 3)}{a^2 + 1} a_{(2,2)}(t) a_{(3,1)}(t) \\
\dot{a}_{(0,2)}(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\dot{b}_{(2,0)}(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{(1,1)}(t) = & -(a^2 + 1)\kappa b_{(1,1)}(t) + \frac{aT_0}{\pi} a_{(1,1)}(t) \\
& + aa_{(1,1)}(t)b_{(0,2)}(t) \\
& - \frac{a}{2} a_{(1,2)}(t)b_{(0,1)}(t) + \frac{3a}{2} a_{(1,2)}(t)b_{(0,3)}(t) \\
& + \frac{3a}{4} a_{(1,2)}(t)b_{(2,1)}(t) + \frac{3a}{4} a_{(2,1)}(t)b_{(1,2)}(t) \\
& - aa_{(1,3)}(t)b_{(0,2)}(t) + aa_{(1,3)}(t)b_{(2,2)}(t) + 2aa_{(1,3)}(t)b_{(0,4)}(t) \\
& + aa_{(2,2)}(t)b_{(1,3)}(t) + aa_{(2,2)}(t)b_{(3,1)}(t) + aa_{(3,1)}(t)b_{(2,2)}(t) \\
\dot{b}_{(0,2)}(t) = & -4\kappa b_{(0,2)}(t) \\
& - \frac{a}{2} a_{(1,1)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
& - aa_{(2,1)}(t)b_{(2,1)}(t) \\
& + \frac{a}{2} a_{(1,1)}(t)b_{(1,3)}(t) + \frac{a}{2} a_{(1,3)}(t)b_{(1,1)}(t) - \frac{3a}{2} a_{(3,1)}(t)b_{(3,1)}(t)
\end{aligned}$$

mit  $k = 3$

$$|\gamma| = 3 \quad \dot{a}_{(3,0)}(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{(2,1)}(t) = & -(4a^2 + 1)\nu a_{(2,1)}(t) + \frac{2ac}{4a^2 + 1} b_{(2,1)}(t) \\
& + \frac{9a}{4(4a^2 + 1)} a_{(1,1)}(t)a_{(1,2)}(t) \\
& + \frac{5a(8a^2 - 3)}{4(4a^2 + 1)} a_{(1,2)}(t)a_{(3,1)}(t) + \frac{25a}{4(4a^2 + 1)} a_{(1,2)}(t)a_{(1,3)}(t) \\
\dot{a}_{(1,2)}(t) = & -(a^2 + 4)\nu a_{(1,2)}(t) + \frac{ac}{a^2 + 4} b_{(1,2)}(t) \\
& - \frac{9a^3}{4(a^2 + 4)} a_{(1,1)}(t)a_{(2,1)}(t) \\
& + \frac{5a(3a^2 - 8)}{4(a^2 + 4)} a_{(1,3)}(t)a_{(2,1)}(t) - \frac{25a^3}{4(a^2 + 4)} a_{(2,1)}(t)a_{(3,1)}(t) \\
\dot{a}_{(0,3)}(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\dot{b}_{(3,0)}(t) = 0$$

$$\dot{b}_{(2,1)}(t) = -(4a^2 + 1)\kappa b_{(2,1)}(t) + \frac{2aT_0}{\pi} a_{(2,1)}(t)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3a}{4}a_{(1,1)}(t)b_{(1,2)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(1,1)}(t) + 2aa_{(2,1)}(t)b_{(0,2)}(t) \\
& + \frac{5a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(1,3)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(1,3)}(t)b_{(1,2)}(t) - aa_{(2,2)}(t)b_{(0,1)}(t) \\
& + \frac{5a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(3,1)}(t) + \frac{5a}{4}a_{(3,1)}(t)b_{(1,2)}(t) + 3aa_{(2,2)}(t)b_{(0,3)}(t) \\
\dot{b}_{(1,2)}(t) = & -(a^2 + 4)\kappa b_{(1,2)}(t) + \frac{aT_0}{\pi}a_{(1,2)}(t) \\
& - \frac{a}{2}a_{(1,1)}(t)b_{(0,1)}(t) \\
& + \frac{3a}{2}a_{(1,1)}(t)b_{(0,3)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(1,1)}(t)b_{(2,1)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
& - \frac{5a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(3,1)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(3,1)}(t)b_{(2,1)}(t) + \frac{5a}{4}a_{(1,3)}(t)b_{(2,1)}(t) \\
& + \frac{5a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(1,3)}(t) - \frac{a}{2}a_{(1,3)}(t)b_{(0,1)}(t) + 2aa_{(1,2)}(t)b_{(0,4)}(t) \\
\dot{b}_{(0,3)}(t) = & -9\kappa b_{(0,3)}(t) \\
& - \frac{3a}{4}a_{(1,1)}(t)b_{(1,2)}(t) - \frac{3a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
& - \frac{3a}{2}a_{(2,1)}(t)b_{(2,2)}(t) - \frac{3a}{2}a_{(2,2)}(t)b_{(2,1)}(t)
\end{aligned}$$

und  $k = 4$

$$|\gamma| = 4 \quad \dot{a}_{(4,0)}(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{(3,1)}(t) = & -(9a^2 + 1)\nu a_{(3,1)}(t) + \frac{3ac}{9a^2 + 1}b_{(3,1)}(t) \\
& + \frac{15a(1 - a^2)}{4(9a^2 + 1)}a_{(1,2)}(t)a_{(2,1)}(t) \\
& + \frac{12a(1 + a^2)}{4(9a^2 + 1)}a_{(1,1)}(t)a_{(2,2)}(t) + \frac{8a(5 - 3a^2)}{4(9a^2 + 1)}a_{(1,3)}(t)a_{(2,2)}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{(2,2)}(t) = & -4(a^2 + 1)\nu a_{(2,2)}(t) + \frac{ac}{2(a^2 + 1)}b_{(2,2)}(t) \\
& + \frac{2a}{a^2 + 1}a_{(1,1)}(t)a_{(1,3)}(t) - \frac{2a^3}{a^2 + 1}a_{(1,1)}(t)a_{(3,1)}(t) \\
& + \frac{4a^3}{a^2 + 1}a_{(1,3)}(t)a_{(3,1)}(t) - \frac{4a}{a^2 + 1}a_{(1,3)}(t)a_{(3,1)}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{(1,3)}(t) = & -(a^2 + 9)\nu a_{(1,3)}(t) + \frac{ac}{a^2 + 9}b_{(1,3)}(t) \\
& + \frac{15a(1 - a^2)}{4(a^2 + 9)}a_{(1,2)}(t)a_{(2,1)}(t) \\
& - \frac{12a(1 + a^2)}{4(a^2 + 9)}a_{(1,1)}(t)a_{(2,2)}(t) + \frac{8a(3 - 5a^2)}{4(a^2 + 9)}a_{(2,2)}(t)a_{(3,1)}(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{a}_{(0,4)}(t) = 0$$

$$\dot{b}_{(4,0)}(t) = 0$$

Grad $k$	Anzahl Gleichungen
1	2
2	$2 + 3$
3	$2 + 3 + 4$
4	$2 + 3 + 4 + 5$
$\dots$	$\dots$
$n$	$\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$

Tabelle 10.1: Wachstum der Anzahl Gleichung mit dem Grad  $k$ 

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{(3,1)}(t) &= -(9a^2 + 1)\kappa b_{(3,1)}(t) + \frac{3aT_0}{\pi}a_{(3,1)}(t) \\
&\quad + \frac{5a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(1,2)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(2,1)}(t) \\
&\quad + 3aa_{(3,1)}(t)b_{(0,2)}(t) + aa_{(1,1)}(t)b_{(2,2)}(t) - aa_{(2,2)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
&\quad - 2aa_{(1,3)}(t)b_{(2,2)}(t) + 2aa_{(2,2)}(t)b_{(1,3)}(t) \\
\dot{b}_{(2,2)}(t) &= -(4a^2 + 4)\kappa b_{(2,2)}(t) + \frac{2aT_0}{\pi}a_{(2,2)}(t) \\
&\quad - aa_{(2,1)}(t)b_{(0,1)}(t) + 3aa_{(2,1)}(t)b_{(0,3)}(t) \\
&\quad + aa_{(1,1)}(t)b_{(1,3)}(t) - aa_{(1,3)}(t)b_{(1,1)}(t) - aa_{(1,1)}(t)b_{(3,1)}(t) - aa_{(3,1)}(t)b_{(1,1)}(t) \\
&\quad + 2aa_{(1,3)}(t)b_{(3,1)}(t) + 2aa_{(3,1)}(t)b_{(1,3)}(t) + 4aa_{(2,2)}(t)b_{(0,4)}(t) \\
\dot{b}_{(1,3)}(t) &= -(a^2 + 9)\kappa b_{(1,3)}(t) + \frac{aT_0}{\pi}a_{(1,3)}(t) \\
&\quad - aa_{(1,1)}(t)b_{(0,2)}(t) \\
&\quad - \frac{a}{2}a_{(1,2)}(t)b_{(0,1)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(1,2)}(t)b_{(2,1)}(t) - \frac{5a}{4}a_{(2,1)}(t)b_{(1,2)}(t) \\
&\quad - aa_{(1,1)}(t)b_{(2,2)}(t) - aa_{(2,2)}(t)b_{(1,1)}(t) - 2aa_{(2,2)}(t)b_{(3,1)}(t) - 2aa_{(3,1)}(t)b_{(2,2)}(t) \\
&\quad + 2aa_{(1,1)}(t)b_{(0,4)}(t) \\
\dot{b}_{(0,4)}(t) &= -16\kappa b_{(0,4)}(t) \\
&\quad - aa_{(1,2)}(t)b_{(1,2)}(t) \\
&\quad - aa_{(1,1)}(t)b_{(1,3)}(t) - aa_{(1,3)}(t)b_{(1,1)}(t) - 2aa_{(2,2)}(t)b_{(2,2)}(t).
\end{aligned}$$

Terme die verloren gehen, wenn man beim jeweiligen  $k$  stoppen würde, sind *blau* (dritter Grad), beziehungsweise *rot* (vierter Grad) hervorgehoben.

Vergleicht man die Resultate für  $k = 2$  mit denjenigen aus Gleichung (2.29) stellt man fest, dass diese übereinstimmen, womit auch wieder gezeigt ist, dass unsere neuen Basisfunktionen eine echte Erweiterung sind. Bereits jetzt ist aber ersichtlich, dass die Anzahl zu lösenden Gleichungen, in  $O(k^2)$  mit dem Grad  $k$  wächst (Tabelle 10.1). Beispielsweise muss für  $k = 10$  ein Gleichungssystem mit

$$2 \left( \frac{(10+1)(10+2)}{2} - 1 \right) = 11 \cdot 12 - 2 = 130$$

Gleichungen gelöst werden, das zudem noch aus Gleichungen besteht, die über etliche Kopplungen miteinander verbunden sind.

## 10.5 Numerische Lösung

Mit den Gleichungen (10.8) und (10.9) aus Abschnitt 10.3 haben wir Gleichungen gefunden, die wir mit Hilfe eines Computers berechnen können. Dabei können wir natürlich unterschiedlich vorgehen. Was wir sicher brauchen, ist ein Programm, mit dessen Hilfe wir gewöhnliche Differentialgleichungen lösen können. In unserem Fall traf die Wahl auf `octave`, nicht nur weil es auf allen gängigen Plattformen verfügbar und open-source ist, sondern auch weil es mit `lsode` einen mächtigen ODE-Solver beinhaltet.

Wie sich herausstellt, ist eine direkte Implementation unserer gefundenen gewöhnlichen Differentialgleichungen Gleichung (10.8) und Gleichung (10.9) in `octave` keine sonderlich effiziente Lösung. Der Algorithmus braucht selbst für kleine Grad  $k$ , auf dem Testsystem mit einer Intel®Core™ i7-3930K CPU mit 3.20 GHz, sehr lange. So dauerte zum Beispiel das Berechnen von Grad  $k = 7$  mit der direkten Implementation fast 12 Stunden, was verglichen mit den rund 25 Minuten der am Schluss verwendeten Implementation schon einiges über die Ineffizienz dieses Ansatzes aussagt.

Um das ganze etwas zu optimieren, nehmen wir also am besten ein Computer-Algebra Programm, mit dessen die Gleichungen bereits soweit vereinfachen können, dass nur noch ein Vektor mit einfachen Summen übrig bleibt. Mit `maxima` haben wir dazu wieder ein open-source Programm, das auf allen Plattformen zur Verfügung steht.

Wir haben jetzt alles zusammen, um die Gleichungen mit `maxima` zu vereinfachen und uns eine Funktion für `octave` zu generieren, die schnell ist. Trotz unseren Optimierungen ist das Lösen der Gleichungen immer noch äußerst Rechen- und Zeitintensiv. Dies zeigen auch Laufzeitmessungen für das Zeitintervall  $t = [0, 100]$  und für  $t = [0, 40]$  auf dem Testsystem, die in Abb. 10.1 veranschaulicht sind. Die Laufzeit liegt gemäß diesen Messungen etwa bei  $O(k^5)$  mit einer Tendenz zu sogar  $O(k^6)$ .

Eine der Ursachen für die stark wachsende Laufzeit kann die fehlende Parallelisierung des Algorithmus sein, was dazu führt, dass für jeden Grad  $k$  nur ein CPU Core verwendet wird. Das erlaubt es zwar die Berechnung einzelner Grade  $k$  gleichzeitig durchzuführen, indem wir unterschiedliche `octave`-Instanzen für die jeweiligen  $k$  starten, doch ist der Nutzen aufgrund der rasant wachsenden Laufzeit nicht sonderlich gross. Zudem hat auch die Wahl des  $t$ -Intervalls und auch die an `lsode` gestellten Toleranzen Auswirkungen auf die Laufzeit. So kann man durch Lockerung unserer absoluten und relativen Toleranzabweichung von  $10^{-12}$  respektive  $10^{-13}$  mit Sicherheit noch etwas an Laufzeit gewinnen, was dann aber zu einem Verlust an Genauigkeit führen würde.

Noch gar nicht angesprochen wurden die gewählten Anfangsbedingungen und Parameterwerte. Bei den Anfangswerten setzen wir alles bis auf  $b_{(0,2)}$  und  $b_{(1,1)}$  gleich 0, dies da diese bereits für Grad  $k = 2$  Verfügbar sind. Die Parameter sind so gewählt, dass sie chaotisches Verhalten für ein dreidimensionales Lorenzsystem, also eines mit Grad 2, hervorrufen. Experimentell konnten so die Werte für

$$a = \sqrt{1/2}, \quad T_0 = 5, \quad c = 82, \quad \nu = 1.43, \quad \text{und} \quad \kappa = 0.143$$

bestimmt und die Lorenzsysteme mit Grad  $k = \{2, 3, \dots, 22\}$  erfolgreich berechnet werden.

Die Lösungen führen teilweise zu erstaunlichen Ergebnissen, wie Abb. 10.2 bis 10.22 zeigen. Dabei ist auf der linken Seite jeweils ein Plot der verschiedenen  $a_\gamma(t)$  und  $b_\gamma(t)$  zu sehen und rechts davon eine 3D Abbildung von  $f(a_{(1,1)}, b_{(1,1)}) = b_{(0,2)}$ . Eines der augenfälligsten Ergebnisse ist, dass ab Grad  $k = 4$  das chaotische Verhalten nicht mehr aufzutreten scheint. Erkennbar ist dies daran, dass auf der linken Seite alle Koeffizienten entweder konvergieren oder in eine stabile Schwingung über gehen. Auf der rechten Seite verschwinden dadurch die für ein Lorenzsystem typischen “Schmetterlingsflügel”.

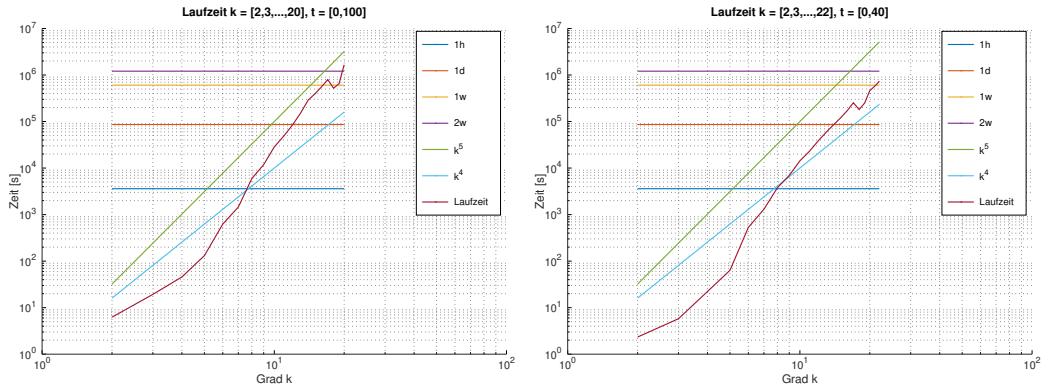
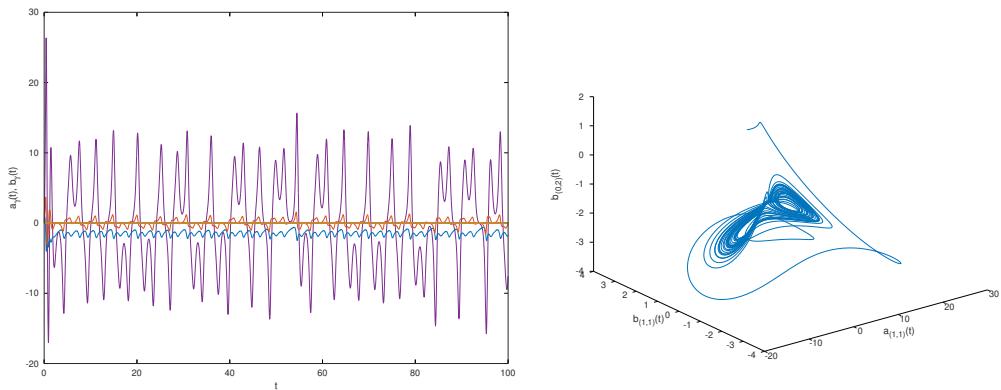
Abbildung 10.1: Laufzeit für Berechnung von einem Lorenzsystems mit Grad  $k$ 

Abbildung 10.2: Lorenzsystem mit Grad 2

Eine mögliche Ursache des Verschwindens ist, dass wir durch die Reduktion und Vereinfachung des Ursprungssystems chaotisches Verhalten herbeigeführt haben. Oder es liegt schlicht daran, dass wir den Anfangsbedingungs- und Parameterraum nicht untersucht haben und es eine mögliche Auswahl gibt, die wieder chaotisches Verhalten erzeugt. Es kann aber natürlich auch sein, dass wir einfach noch grössere Grade  $k$  berechnen müssen und die Lösung nach und nach wieder chaotisch wird.

## 10.6 Schlussfolgerungen

Wir haben somit gezeigt, dass es möglich ist, ein höherdimensionales Lorenzsystem mittels Erweiterung der bekannten Basisfunktionen zu bestimmen. Wir können weiter die benötigten Gleichungen mittels Computer generieren und auswerten, auch wenn dies mit grösser werdendem Grad  $k$  mit einem starken Anstieg der Laufzeit einher geht. Eine mögliche Verbesserung wäre beispielsweise eine parallele Berechnung der einzelnen gewöhnlicher Differentialgleichungen, was aber nicht untersucht wurde. In einem weiteren Schritt müsste zudem der Raum der Anfangsbedingungen und Parameter weiter untersucht werden, um zu zeigen, dass das chaotische Verhalten wirklich ab  $k = 4$  verloren

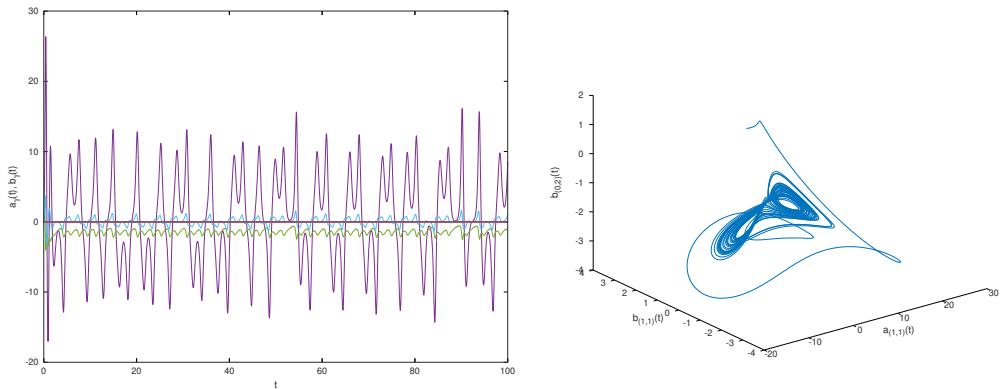


Abbildung 10.3: Lorenzsystem mit Grad 3

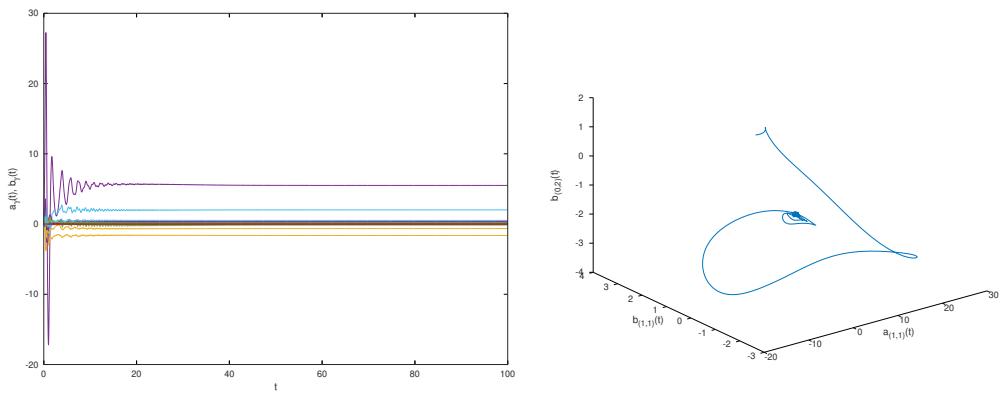


Abbildung 10.4: Lorenzsystem mit Grad 4

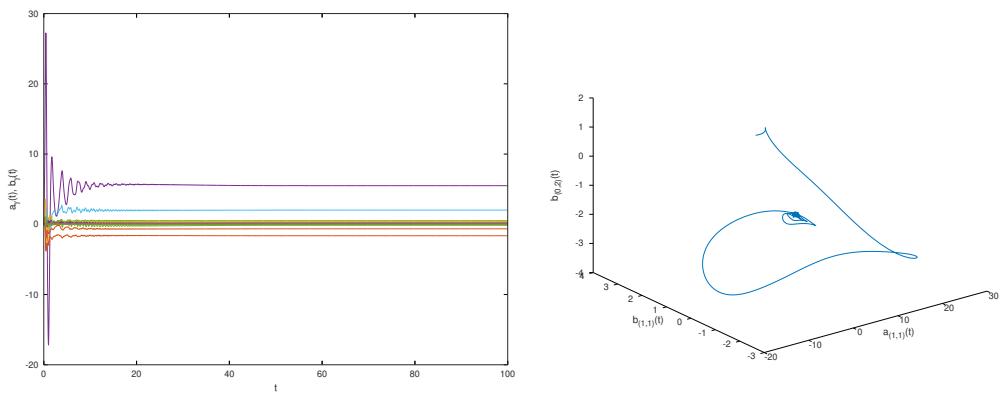


Abbildung 10.5: Lorenzsystem mit Grad 5

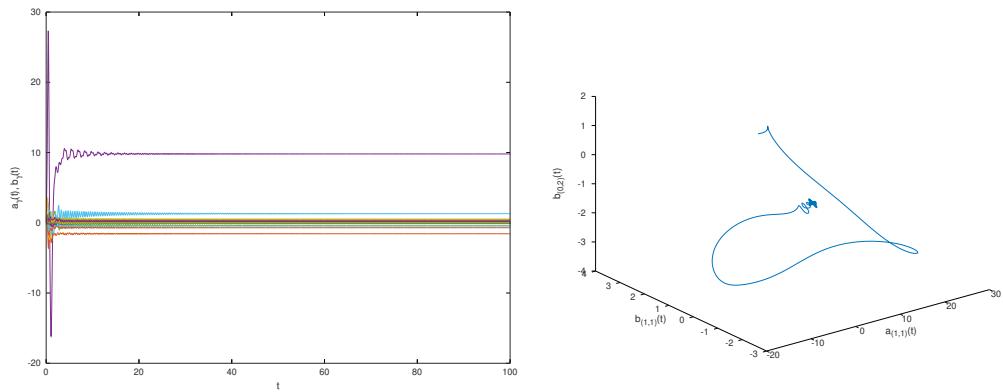


Abbildung 10.6: Lorenzssystem mit Grad 6

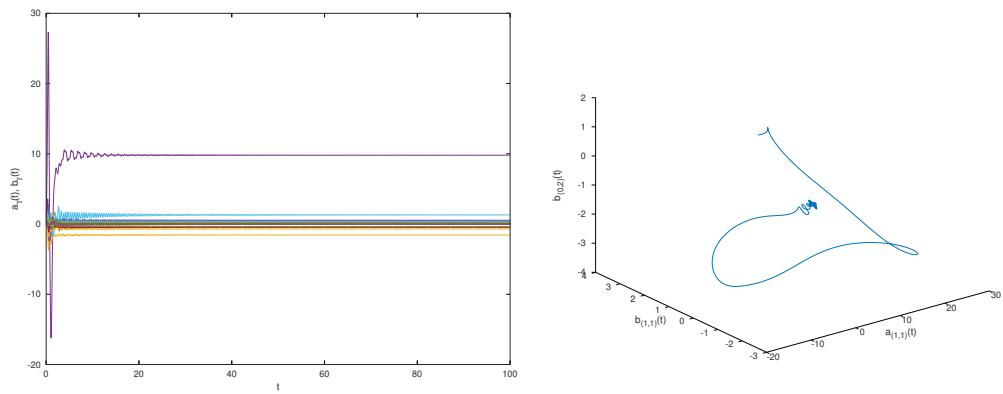


Abbildung 10.7: Lorenzssystem mit Grad 7

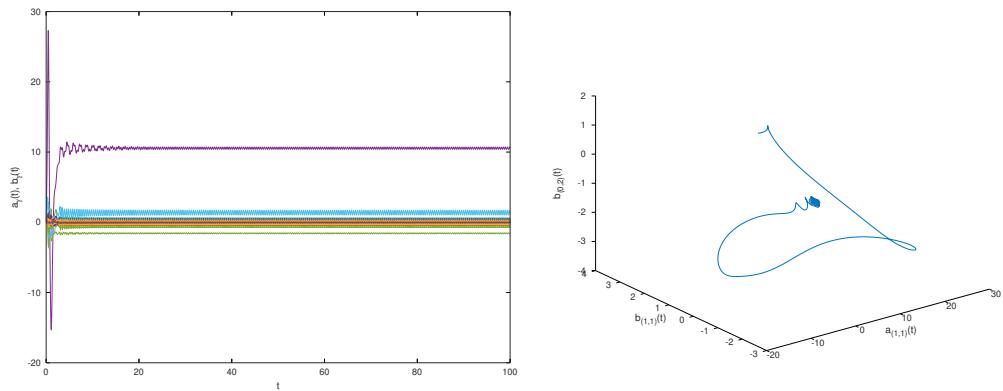


Abbildung 10.8: Lorenzssystem mit Grad 8

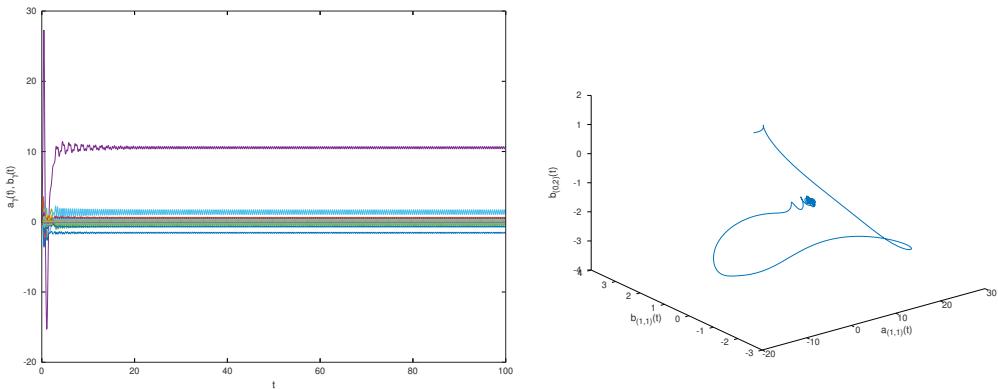
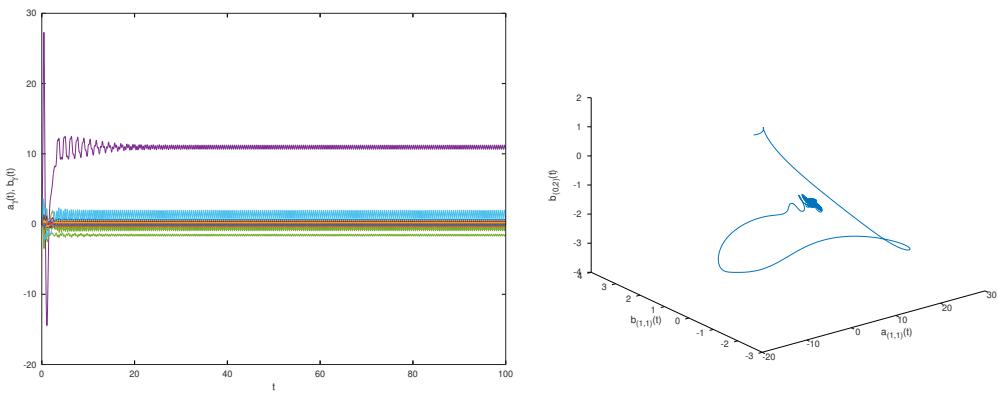
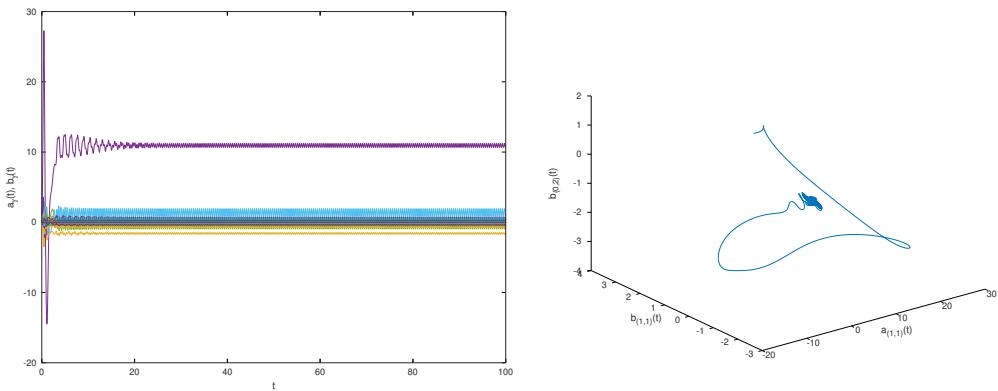
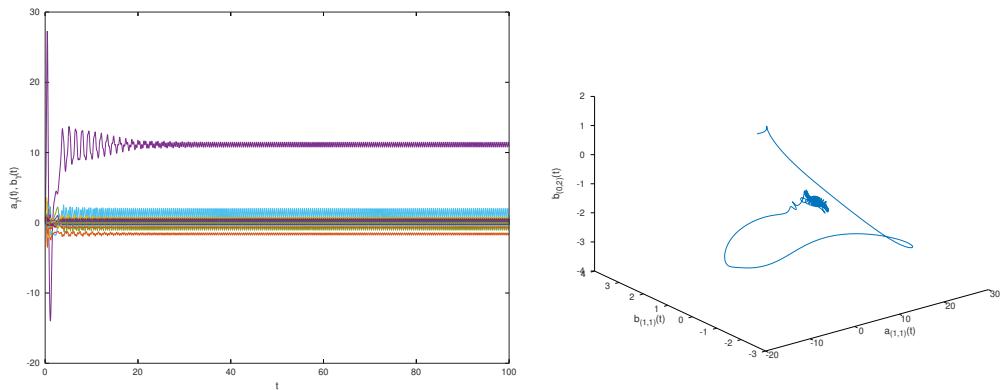
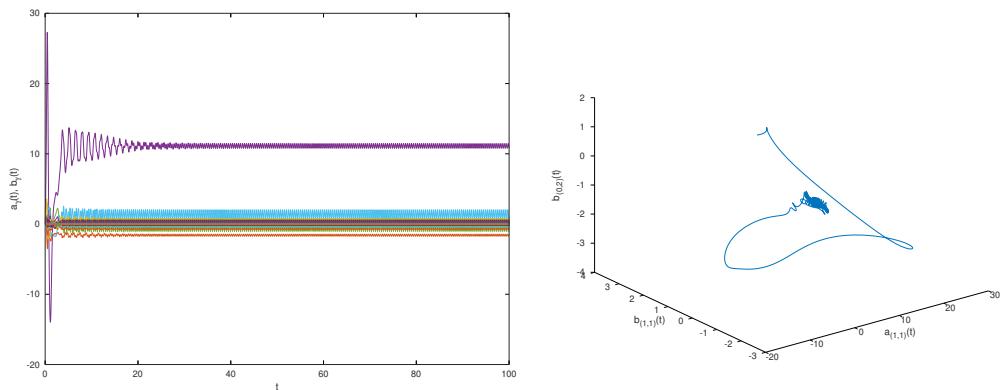
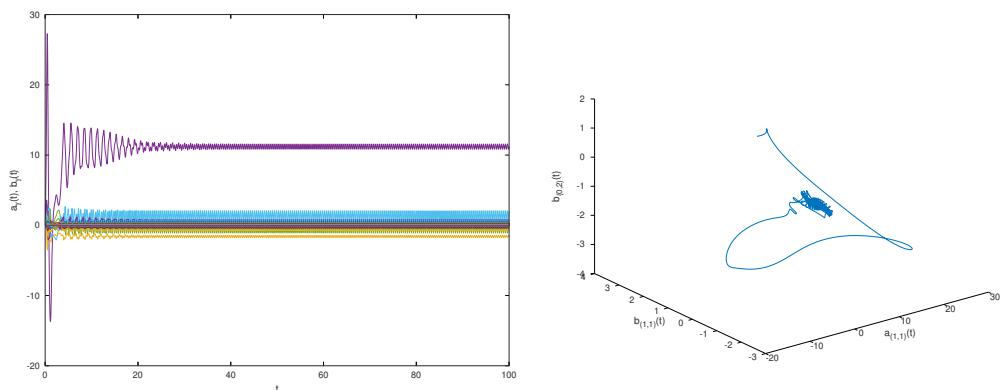
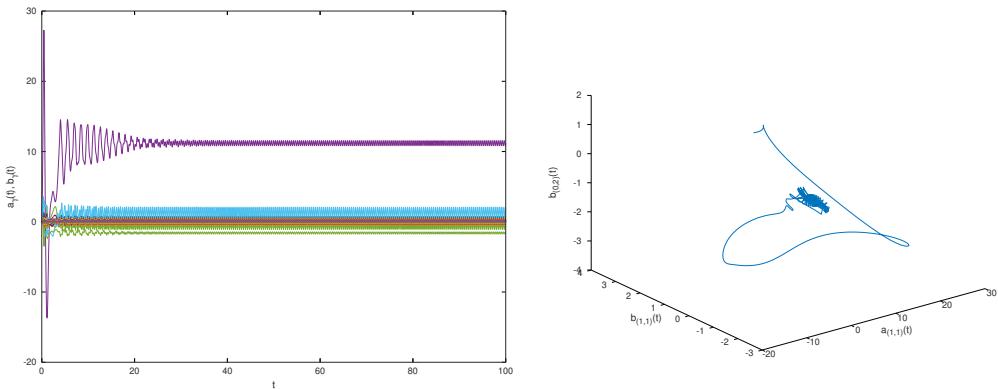
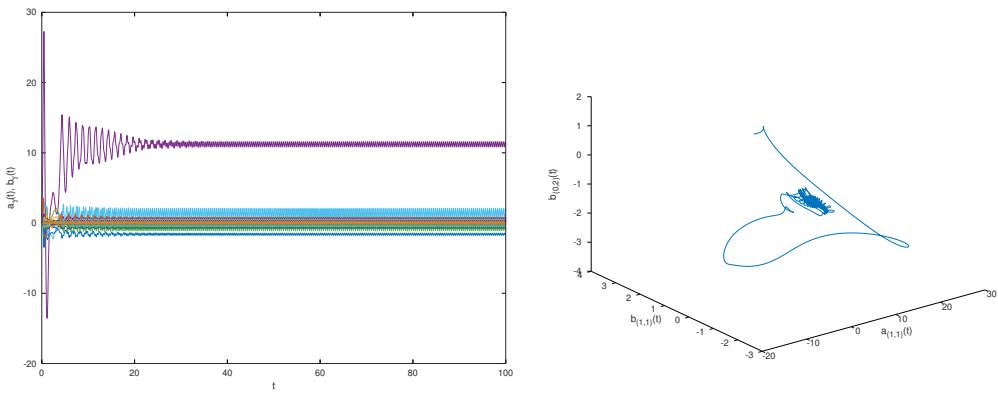
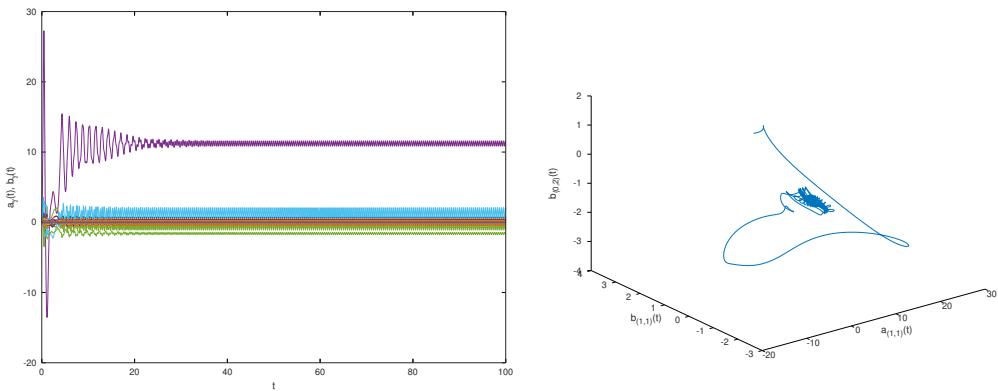
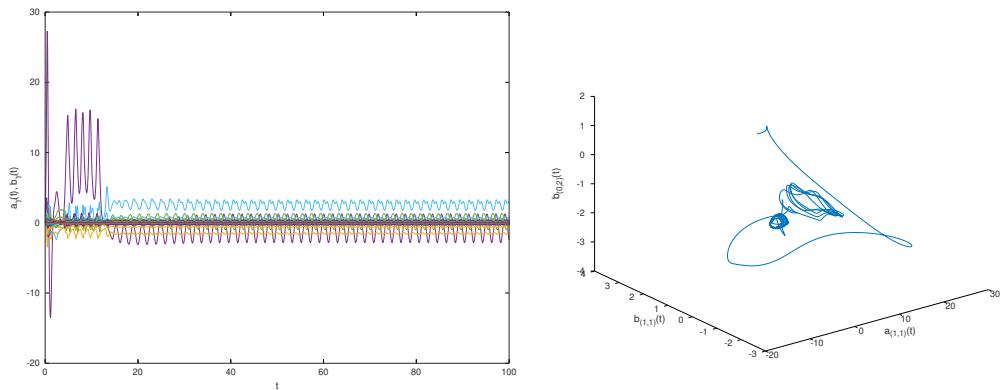
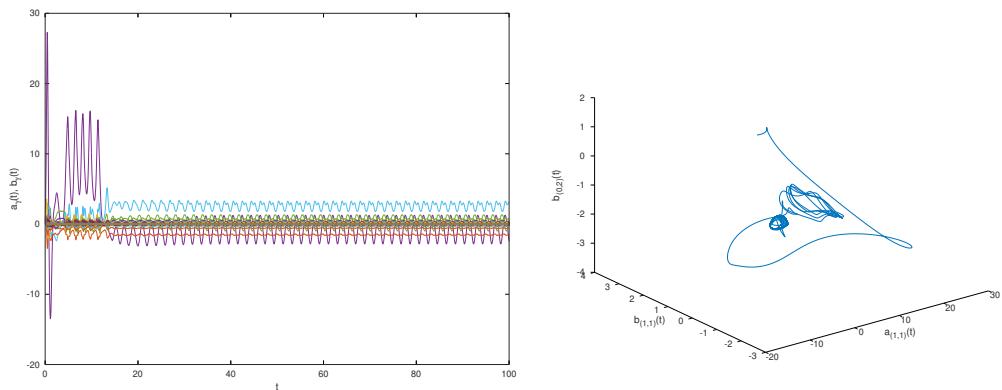
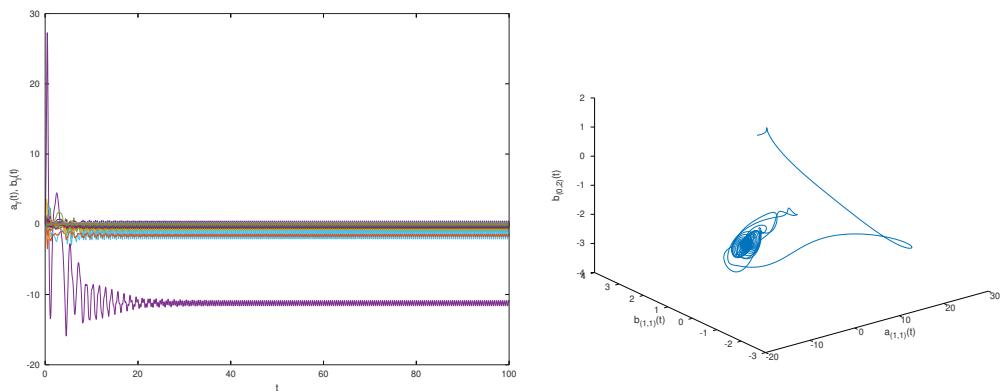


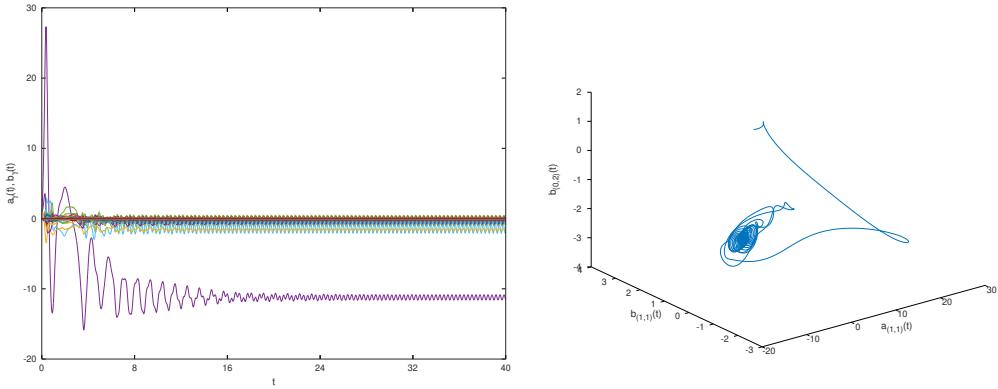
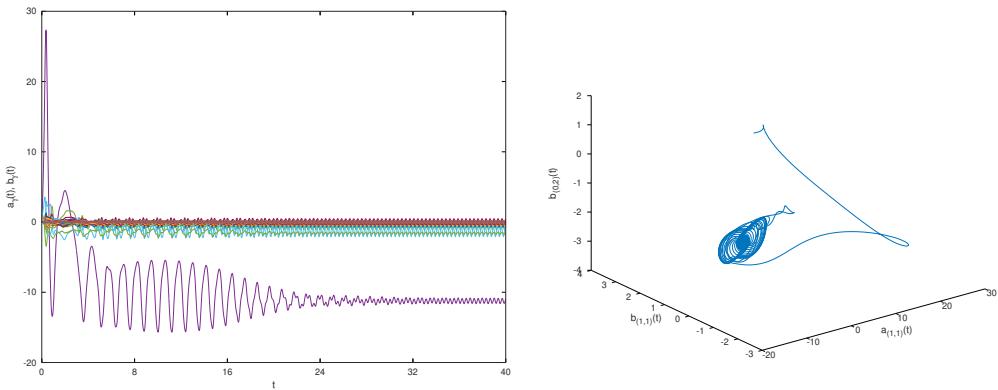
Abbildung 10.9: Lorenzsystem mit Grad 9

Abbildung 10.10: Lorenzsystem mit Grad 10,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.11: Lorenzsystem mit Grad 11,  $t = [0, 100]$

Abbildung 10.12: Lorenzssystem mit Grad 12,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.13: Lorenzssystem mit Grad 13,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.14: Lorenzssystem mit Grad 14,  $t = [0, 100]$

Abbildung 10.15: Lorenzsystem mit Grad 15,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.16: Lorenzsystem mit Grad 16,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.17: Lorenzsystem mit Grad 17,  $t = [0, 100]$

Abbildung 10.18: Lorenzssystem mit Grad 18,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.19: Lorenzssystem mit Grad 19,  $t = [0, 100]$ Abbildung 10.20: Lorenzssystem mit Grad 20,  $t = [0, 100]$

Abbildung 10.21: Lorenzsystem mit Grad 21,  $t = [0, 40]$ Abbildung 10.22: Lorenzsystem mit Grad 22,  $t = [0, 40]$ 

geht oder ob es schlicht an den von uns gewählten Anfangs- und Parameterwerten liegt. Zu guter Letzt könnte auch noch untersucht werden, was passiert, wenn der Grad  $k$  noch weiter gesteigert wird, denn es ist möglich, dass wir einfach noch mehr Terme benötigen um die "Schmetterlingsflügel" und somit das chaotische Verhalten wieder zu erzeugen. Dafür müsste, mit der momentanen Implementation, allerdings viel Geduld mitgebracht werden.

# **Kapitel 11**

# **Machine Learning und Klimamodelle**

Martin Stypinski

## **11.1 Abschnitt**

## **11.2 Schlussfolgerung**



# Kapitel 12

## 3-Box-Modell der Thermohalinen Zirkulation

Jonas Gründler

### 12.1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich damit, das in Kapitel 4 entwickelte 2-Box Modell zur Simulation der Thermohalinen Zirkulation zu einem 3-Box Modell zu erweitern. Mit diesem erweiterten Modell soll dann versucht werden, reale Strömungen zu simulieren. Weiter wird der Einfluss der Klimaerwärmung auf diese Strömungen untersucht und mit anderen, weiter entwickelten, Modellen verglichen.

more coming soon

### 12.2 Thermohaline Zirkulation, was ist das?

Die hier als THC abgekürzte thermohaline Zirkulation ist eine weltumspannende Meeresströmung. Diese Strömungen sorgen für eine Durchmischung der verschiedenen Ozeane und den damit enthaltenen Energie und Nährstoffaustausch. Die Auswirkung dieses Energieaustausches sind spürbar, so heizt zum Beispiel der Golfstrom, welcher auch zu diesen Strömungen gehört, Nordeuropa um mehrere Grad auf. Doch wie entsteht diese Strömung?

Diese Frage wurde schon im Kapitel 4 behandelt, darum hier nur eine kurze Zusammenfassung.

#### 12.2.1 Einflussfaktoren

Es gibt viele Faktoren die zur Entstehung und Veränderung dieser Strömungen beitragen. Dazu gehören die Verteilung der Kontinente, die Corioliskraft, die Wasserdichte und auch Wetter und Winde. Hier gehen wir jedoch nur auf den Einfluss der Wasserdichte ein. Die Verteilung der Kontinente und auch die Corioliskraft ändern sich nicht und können daher als konstant betrachtet werden. Wind und Wetter lassen wir weg, da ihr Einfluss nur schwer vorherzusagen ist und sich schnell ändern kann.

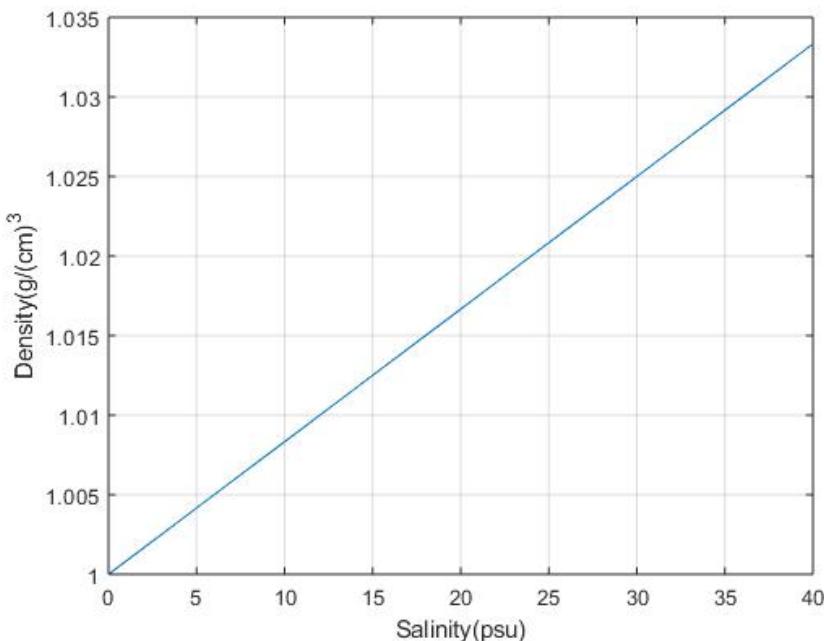


Abbildung 12.1: Dichteänderung abhängig vom Salzgehalt

Mit dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Modell lassen sich diese Komponenten auch gar nicht Simulieren.

## 12.2.2 Dichte

Wie bereits erwähnt, fokussieren wir auf die Dichte. Die THC wird hauptsächlich durch Dichteunterschiede im Wasser hervorgerufen. Wie allgemein bekannt ist, sinkt dichtes (relativ zur Umgebung) Wasser ab, und weniger dichtes Wasser steigt auf. Die Wasserdichte wird hauptsächlich durch Temperatur und Salzgehalt des Wassers beeinflusst.

Durch einen hohen Salzgehalt wird das Wasser dichter und beginnt zu sinken. Die Temperatur hat den inversen Einfluss, ist jedoch weniger linear. Je wärmer das Wasser wird, desto mehr verringert sich die Dichte. Dieser Effekt sorgt auch dafür, dass gefrorenes Wasser auf flüssigem Wasser schwimmt.

Wenn nun dichtes Wasser irgendwo absinkt muss dort an der Oberfläche Wasser nachfliessen. Dies erzeugt eine starke Oberflächenströmung. Wenn dann an einem anderen Ort (am Meeresgrund), die Dichte des Tiefenwassers reduziert wird, beginnt es aufzusteigen. So muss dort Tiefenwasser nachfliessen. Wenn wir nun diese beiden Ereignisse kombinieren entsteht so ein Kreislauf. Skaliert man dies nun auf Weltmeergroßes, ist die Thermohaline Zirkulation beschrieben. Die Einflüsse, welche das Wasser an bestimmten Stellen aufsteigen und absinken lassen, werden später an einem konkreten Beispiel aufgezeigt.

In Abbildung 17.1 ist der Zusammenhang zwischen Dichte und Salinität dargestellt, in Abbildung 17.2 die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur.

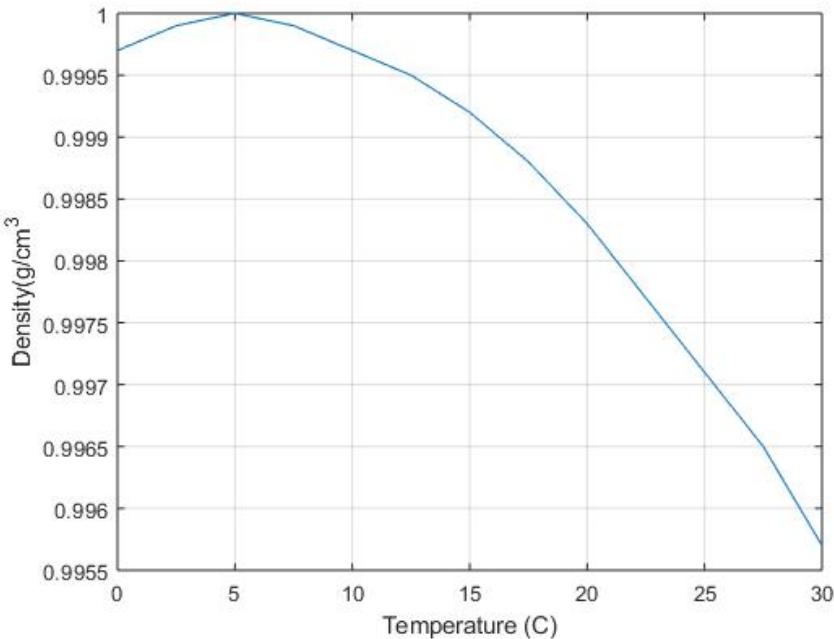


Abbildung 12.2: Dichteänderung abhängig von der Temperatur

Diese Einflüsse lassen sich in einer Gleichung zusammenfassen, mit welcher sich die Dichte des Wassers berechnen lässt. Damit lässt sich dann später über eine Dichtedifferenz, einen Wasserfluss bestimmen.

$$\varrho = \varrho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (12.1)$$

Weitere Details zur grundlegenden Funktion der Simulation finden sich wie bereits erwähnt in Kapitel 4.2.2.

## 12.3 Golfstrom

Da die Simulation des weltumspannenden THC viel zu umfangreich und kompliziert ist, beschränken wir uns hier auf einen bestimmten Strom, den Golfstrom. Der Golfstrom eignet sich bestens zur Simulation da er sich grob in 3 Regionen aufteilen lässt und so gut in das Modell passt. Zusätzlich ist es der Strom, welcher Nordeuropa warm hält. Dies hat auch für die Schweiz eine grosse Bedeutung.

Eine weitere Frage ist, was passiert mit dem Golfstrom, wenn Klimaerwärmung und Umweltverschmutzung weiter ansteigen.

### 12.3.1 Funktionsweise

Doch zuerst dazu, wie der Golfstrom genau funktioniert. Da der Golfstrom ein Kreislauf ist und keinen Ursprung hat, können wir an einem beliebigen Startpunkt mit der Beschreibung beginnen.

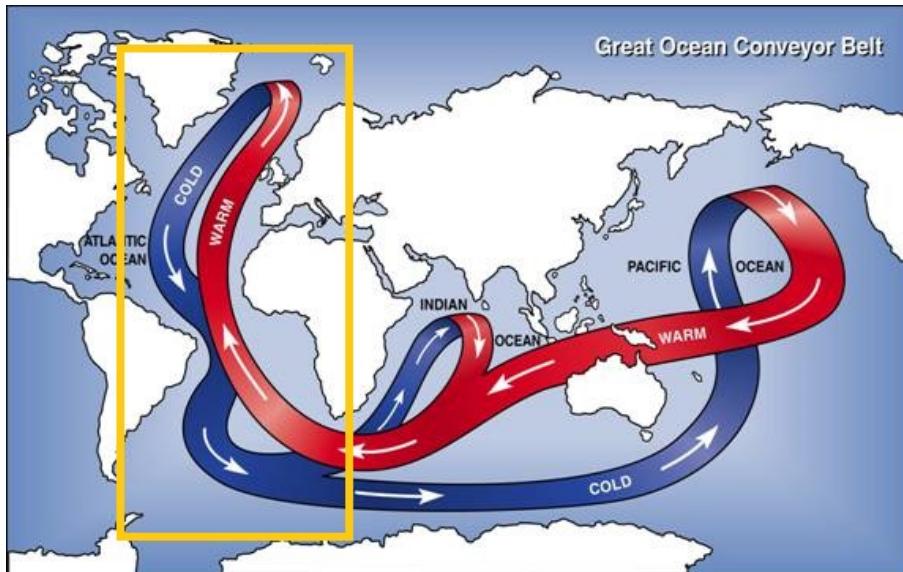


Abbildung 12.3: Golfstrom

Im Golf von Mexiko wird warmes Wasser von Winden und der Erdrotation nach norden getrieben, wobei es an Nordeuropa vorbeiströmt. Auf diesem Weg kühlt das Wasser langsam ab, und wird durch die fortlaufende Verdunstung des Wassers immer salziger. Da der relative Einfluss der Salinität grösser ist als der der Temperatur, beginnt das Wasser im Norden, durch die nun hohe Dichte, abzusinken. Wenn das Wasser dann abgesunken ist, treibt es dem Grund des Meeres und Südafrika entlang bis zum Südpol. Dort steigt es wieder auf und fliesst in Richtung Atlantik und Mexiko, was den Kreislauf schliesst.

### 12.3.2 Einfluss des Klimawandels

Um den Einfluss des Klimawandels auf den Golfstrom zu verstehen, müssen wir verschiedene Stellen des Stromes betrachten. Der erste Punkt ist das Kap der guten Hoffnungen an der südlichen Spitze Afrikas. Dort stellt sich die Frage, in welcher Richtung der Indische Ozean und der Atlantik ihr Salz austauschen und ob überhaupt. Denn wenn der Golfstrom nicht kontinuierlich mit Salz versorgt wird, ist es dem Wasser am Nordpol nicht mehr möglich zu sinken. Eine leichte Veränderung der Salzbilanz, durch eine Störung der Salzzufuhr, könnte den Golfstrom zum Erliegen bringen. Hier gehen die Meinungen von Forschern jedoch auseinander. Salzmessungen im offenen Meer sind sehr schwierig und die Resultate mit Vorsicht zu geniessen. Im Moment zeigen diese jedoch, dass der Golfstrom weiter Salz in den Atlantik importiert und sich so selber am Leben erhält. Dies könnte sich jedoch durch den Klimawandel ändern. Die Mechanismen der Salzverteilung sind noch nicht komplett verstanden, doch sie lassen sich mit dem aktuellen Klima in Verbindung bringen. Die weltweiten Strömungen sind ein kompliziertes und fragiles System das leicht aus dem Gleichgewicht gebracht werden kann.

Zusätzlich spielt noch die Erhöhung des CO<sub>2</sub>-Gehaltes in der Luft und die somit einhergehende Klimaerwärmung eine wichtige Rolle. Sie hat zwei direkte Auswirkungen auf den Golfstrom:

- Durch die Erhöhung der Lufttemperatur kann das Wasser auf dem Weg in den Norden nicht mehr genug abkühlen, um danach abzusinken.
- Das Abschmelzen der Polkappen, welches viel Frischwasser freisetzt, kann die Salzkonzentration so weit verringern, dass das Wasser, aufgrund der reduzierten Dichte, nicht mehr absinken kann.

Diese beiden Prozesse, wären alleine in der Lage den Golfstrom zu stören, doch zusammen ist die Wirkung noch viel gravierender.

Laut einer Studie des Forschers Liu Wei von der Universität Yale vom 04 Jan 2017 [**thermohalin:liuwei**] könnte dieses Szenario in den nächsten 300 Jahren tatsächlich eintreten. Sie haben den Golfstrom mit der doppelten CO<sub>2</sub> Konzentration wie vor Industrialisierungsbeginn simuliert, also mit einer Konzentration vom 560ppm. Die Resultate waren dramatisch. Innert 100 Jahren würde der Strom um eine Drittel abnehmen, und innert 300 Jahren ganz anhalten. Momentan ist die Lage noch nicht so schlimm da die aktuelle CO<sub>2</sub> Konzentration ca. 403ppm [**thermohalin:c02**] beträgt. Wenn die Konzentration aber weiter steigt wie jetzt, wären wir bereits in 31 Jahren so weit.

### 12.3.3 Folgen

Was passiert, falls der Golfstrom zum erliegen kommt, oder sogar seine Richtung ändert. Der Katastrophenfilm *The day after tomorrow* von Roland Emmerich zeigt auf eindrückliche Weise, was in so einem Fall passieren könnte. Die Handlung des Filmes ist folgende:

Immer mehr Forscher warnen vor einem drastischen Klimawandel. Sie glauben, dass der Golfstrom wegen der abschmelzenden Polkappen abkühlen und zum Stillstand kommen könnte. Was eine neue Eiszeit zur Folge hätte. Zusätzlich hat ein Forscherteam eine Modell entwickelt, welches diese Ereignisse nur wenige Wochen in der Zukunft voraussagt. Zu diesem Zeitpunkt melden bereits erste Bojen rasant absinkende Wassertemperaturen vor der amerikanischen Küste. Innerhalb kürzester Zeit treffen dann Katastrophennachrichten von überall ein. Neu-Dheli versinkt im Schnee, Tokyo leidet unter Hagelschauern, Los Angeles wird von Tornados zerstört und Superstürme entstehen über Europa, Russland und den USA. Innert weniger Tage versinkt die ganze Welt in einer neuen Eiszeit.

Das ist natürlich ein wenig übertrieben Dargestellt, doch die Richtung stimmt. Falls der Golfstrom stoppt, würde Nordeuropa, trotz Klimaerwärmung, um einige Grad kälter werden. Es gibt noch viele weitere Folgen, doch diese lassen sich nicht so einfach abschätzen, da das Klima ein dynamisches System ist.

## 12.4 Simulation

Der erste Schritt ist ein Modell zu erstellen. Dazu wird der Golfstrom in drei Zonen aufgeteilt. Die jeweiligen Polarregionen und der Äquator werden je zu einer Zone. Diese Zonen erhalten dann je eine Box. Im Laufe des Seminars wurden zwei Modelle erstellt. Der erste Ansatz war sehr lehrreich, hatte aber schlussendlich nichts mit dem realen Golfstrom gemeinsam. Der zweite Ansatz war erfolgreicher und der Golfstrom kann mit diesem Modell qualitativ simuliert werden. In den folgenden zwei Kapiteln werden diese zwei Modelle vorgestellt und die jeweiligen Resultate diskutiert.

### 12.4.1 Zwei-Fluss Modell( 1. Ansatz)

In diesem Modell werden die Boxen jeweils durch Rohre verbunden wie im 2-Box Modell. Nun werden jedoch zwei Flüsse simuliert, die von den jeweiligen Dichtegradienten der unterschiedli-

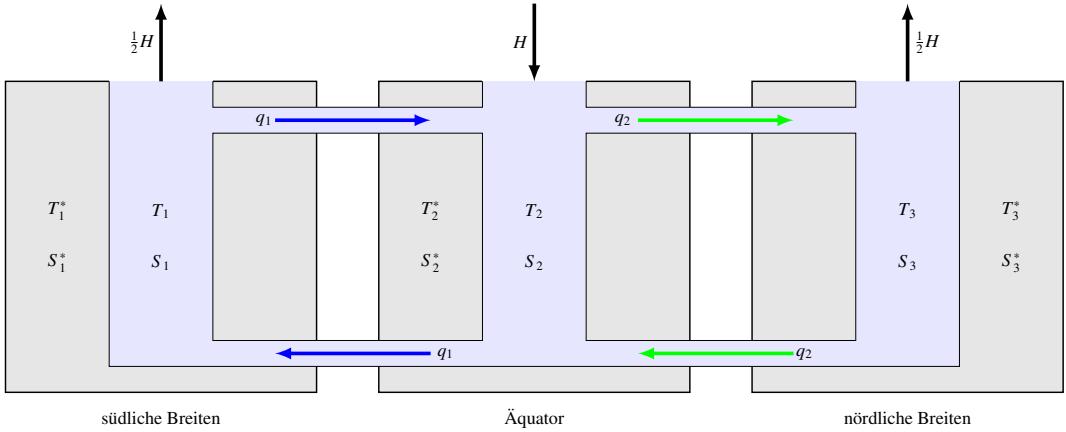


Abbildung 12.4: Zwei-Fluss Modell des THC

chen Boxen abhängen.  $q_1$  ist also nur vom Dichteunterschied zwischen Box 1 und Box 2 abhängig. Dementsprechend hängt auch  $q_2$  nur vom Dichteunterschied der Boxen 2 und 3 ab. Der Vorteil der Aufteilung der Flüsse ist, dass wir sie entkoppeln können und sie nicht von der jeweiligen dritten Box abhängig sind. Eine Darstellung des Modelles ist in Abbildung 9.4 zu finden.

So lassen sich nun für jede Box die zugehörigen Salinitäts- und Temperaturgleichungen aufstellen. So ist auch ersichtlich, dass Box 1 und 3 jeweils einen Fluss in der Gleichung haben. Im Gegensatz dazu hat Box 2 jedoch zwei Flüsse in der Gleichung. Das liegt daran, dass wie aus der Abbildung ersichtlich, die mittlere Box von beiden Strömen durchflossen wird.

$$\begin{aligned}\frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q_1|(T_2 - T_1) \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q_1|(T_1 - T_2) + |q_2|(T_3 - T_2) \\ \frac{dT_3}{dt} &= c(T_3^* - T_3) + |q_2|(T_2 - T_3)\end{aligned}\quad (12.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= -\frac{H}{2} + d(S_1^* - S_1) + |q_1|(S_2 - S_1) \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S_2^* - S_2) + |q_1|(S_1 - S_2) + |q_2|(S_3 - S_2) \\ \frac{dS_3}{dt} &= -\frac{H}{2} + d(S_3^* - S_3) + |q_2|(S_2 - S_3)\end{aligned}\quad (12.3)$$

Dazu die Flussgleichungen die jeweils nur von den Dichteunterschieden der jeweiligen Boxen abhängig sind:

$$\begin{aligned}q_1 &= k[\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1)] \\ q_2 &= k[\alpha(T_3 - T_2) - \beta(S_3 - S_2)]\end{aligned}\quad (12.4)$$

## Matlab-Code der Simulation

Als Ziel ist es, die oben aufgestellten Differentialgleichungen mittels Matlab zu lösen. Dies wird mit dem Differentialgleichungslöser `ode45` aus der Matlab Funktionenbibliothek erreicht. Dazu müssen wir der Funktion nur einen Zustandsvektor, einen Zeitvektor und die Konstanten der jeweiligen Umgebungstemperaturen und Umgebungssalinitäten übergeben.

```

1 || %% Startvariablen, Timebase, Konstanten
2 ||
3 || y0 = [T1; T2; T3; S1; S2; S3];
4 || tspan = [t0 tmax];
5 || const = [T1c ; T2c; T3c; S1c; S2c; S3c];

```

Diese werden wie folgt dem Differentialgleichungslöser übergeben:

```

1 || %% Loesung Diffgl
2 || [t,y] = ode45(@(t,y) odefun_3box(t,y,val), tspan, y0);

```

Daraufhin wird im File `odefun_3Box.m`<sup>1</sup> Das Gleichungssystem schrittweise gelöst und die Resultate zurückgegeben. Gleichzeitig wird der Zustandsvektor mit 0 initialisiert und die Naturkonstanten zur Flussberechnung definiert.

```

1 || function dydt = odefun_3box(t, y, const)
2 ||
3 || % Initialisierung mit 0
4 || dt1 = 0;
5 || dt2 = 0;
6 || dt3 = 0;
7 || ds1 = 0;
8 || ds2 = 0;
9 || ds3 = 0;
10 || % Definierung der Naturkonstanten
11 || k = 1.5*10^(-6);
12 || a = 1.5*10^(-4);
13 || b = 8*10^(-4);
14 || H = 0.00000001;
15 || c = 0.00001;
16 || d = 0.00001;
17 || % Flussgleichungen
18 || q1 = k*(a*(y(2)-y(1)) - b*(y(5)-y(4)));
19 || q2 = k*(a*(y(3)-y(2)) - b*(y(6)-y(5)));
20 || % Diffgleichungen
21 || dt1 = c*(const(1)-y(1)) + abs(q1)*(y(2)-y(1));
22 || dt2 = c*(const(2)-y(2)) + abs(q1)*(y(1)-y(2)) + abs(q2)*(y(3)-y(2));
23 || dt3 = c*(const(3)-y(3)) + abs(q2)*(y(2)-y(3));
24 || ds1 = -H/2 + d*(const(4)-y(4)) + abs(q1)*(y(5)-y(4));
25 || ds2 = H + d*(const(5)-y(5)) + abs(q1)*(y(4)-y(5)) + abs(q2)*(y(6)-y(5));
26 || ds3 = -H/2 + d*(const(6)-y(6)) + abs(q2)*(y(5)-y(6));
27 ||
28 || dydt = [dt1; dt2; dt3; ds1; ds2; ds3];

```

Die Rückgabewerte werden in einem Array gespeichert und dann geplottet. Um den Text nicht in die Länge zu ziehen wird hier nur der Code zur Erstellung des Temperaturplots dargestellt. Die Salinität folgt dem gleichen Schema. Da die Flüsse innerhalb der `ode45`-Funktion berechnet wurden, muss dies nachträglich noch einmal gemacht werden, um die Werte nachher plotten zu können. Dazu

<sup>1</sup>Der Code zur Simulation ist im Github-Repository des Seminars enthalten: <https://github.com/AndreasFMueller/SeminarKlima.git>

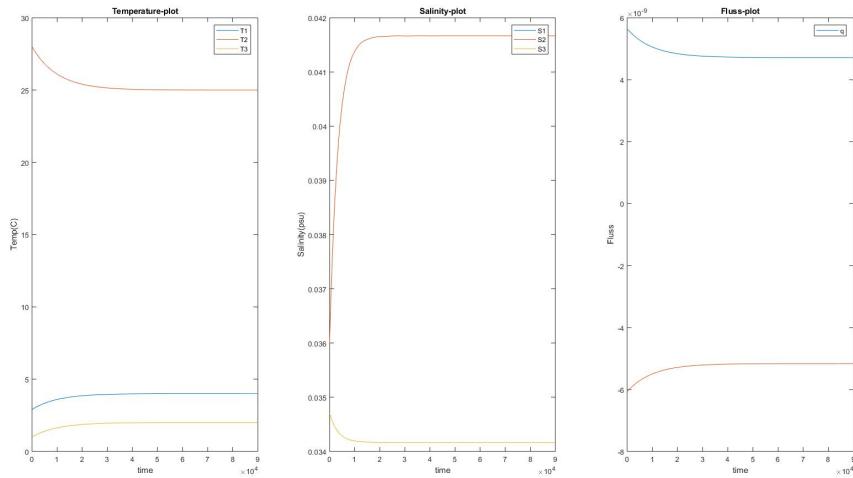


Abbildung 12.5: Simulationsresultate

müssen die jeweiligen Werte aus dem Lösungsvektor extrahiert und die Flüsse wiederholt berechnet werden.

```

1 % create Subplots
2 p1 = subplot(1,3,1);
3 p2 = subplot(1,3,2);
4 p3 = subplot(1,3,3);
5
6 % Plot temperature
7 plot(p1, t,y(:,1), t, y(:,2), t, y(:,3));
8 title(p1, 'Temperature-plot')
9 xlabel(p1, 'time')
10 ylabel(p1, 'Temp(C)')
11 legend(p1, 'T1', 'T2', 'T3')
```

Die so entstehenden Figuren werden im folgenden Kapitel ausgewertet und diskutiert.

## Resultate

Soweit sieht alles vielversprechend aus und die ersten Durchläufe ergaben auch brauchbare Resultate. Wenn nun jedoch mit den Umgebungsvariablen verändert werden, treten plötzlich unmögliche Phänomene auf. Einer der beiden Flüsse wird negativ und ändert seine Richtung. Das resultiert in zwei gegenläufigen Strömen welche in keiner Weise mit dem Golfstrom übereinstimmen. Das führt dazu, dass am Äquator eine Absinkstelle entsteht. In der Realität ist klar zu erkennen, dass Absink- und Aufsteigstellen jeweils nur an den Polen vorhanden sind. Ein Plot der Simulationsresultate findet sich in Abbildung 12.5.

Durch die Entkoppelung der zwei Flüsse, war es möglich, dass ein Fluss seine Richtung ändert. Die Simulation hat zwar funktioniert, nur ist das Modell fehlerhaft. Wir müssen also unsere Darstellung des Modells anpassen werden. Das Resultat der Anpassung ist in Abbildung 12.6 zu sehen.

Nun lässt sich die neu entstandene Absinkstelle auch sofort erkennen. Mit diesem Modell lässt sich der Golfstrom also nicht erfolgreich simulieren. Der nächste, erfolgreichere, Ansatz wird im

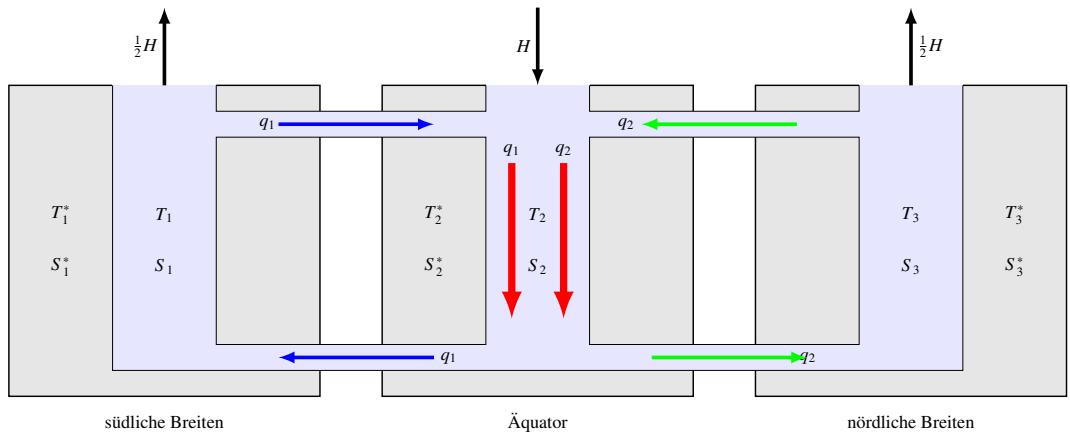


Abbildung 12.6: Angepasstes Zwei-Fluss Modell

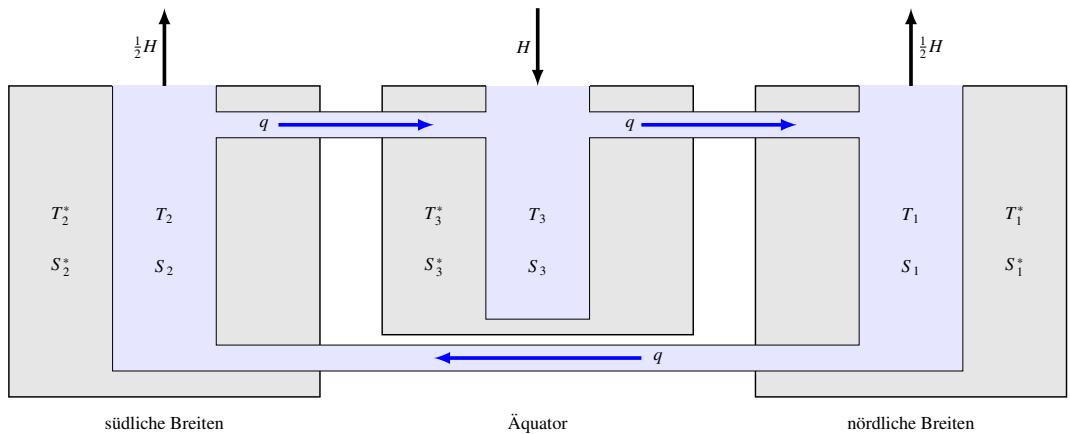


Abbildung 12.7: Ein-Fluss Modell des THC

nächsten Abschnitt vorgestellt.

### 12.4.2 Ein-Fluss Modell (2. Ansatz)

Dieses Modell ist der verbesserte Nachfolger des Zwei-Fluss Modelles. Es stammt aus einer Aufgabe von **Mathematics and Climate [skript:kaperengler]**.

Um zu verhindern, dass in der mittleren Box eine zusätzliche Absinkzone entsteht, muss dieser Weg versperrt werden. Das erreicht man am einfachsten, wenn der Tiefenstrom von der Äquatorbox getrennt wird. Die Äquatorzone ist nur via Oberflächenströmungen mit den anderen Boxen verbunden und die Tiefenströmung verbindet nur die Polzonen.

Wie im vorherigen Modell benötigen wir wieder 3 Gleichungen für Temperatur- und Salinitätsänderung der jeweiligen Boxen. Jedoch gibt es nur noch einen Fluss welchen die Boxen verbindet. Das stimmt auch viel besser mit der Realität überein. Der Fluss wird nun von der Temperatur- und Salinitätsdifferenz zwischen der Betrachteten und der vorherigen Box getrieben. Folgend ist die

Gleichung für Box Nr. 1 dargestellt, um die Zusammenhänge zu erläutern:

$$\frac{dT_1}{dt} = c(T_p - T_1) + \begin{cases} q(T_3 - T_1) & q > 0 \\ |q|(T_2 - T_1) & q < 0 \end{cases} \quad (12.5)$$

Der erste Term beschreibt wie bisher den Temperaturaustausch zwischen Box und Umgebung. Der Zweite Term ist jedoch anders als vorher, da der Fluss je nach Flussrichtung von anderen Boxen getrieben wird. Wenn der Fluss positiv ist, also  $q > 0$ , dann wird für die Berechnung Box Nr. 3 und die aktuelle Box verwendet, da die dritte Box die Quellbox darstellt. Wenn der Fluss nun negativ wird, ist die Quellbox jedoch Box Nr. 2 also muss hier die Differenz zwischen der zweiten und der dritten Box berechnet werden. Um die Simulation zu erleichtern, wird im Falle eines negativen Fluxes mit dem Absolutbetrag gerechnet. Damit die Resultate trotzdem stimmen werden bei der Differenzbildung jeweils die Terme vertauscht damit die Richtung trotzdem stimmt.

Das gesamte Gleichungssystem hat also folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= c(T_p - T_1) + \begin{cases} q(T_3 - T_1) & q > 0 \\ |q|(T_2 - T_1) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_p - T_2) + \begin{cases} q(T_1 - T_2) & q > 0 \\ |q|(T_3 - T_2) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dT_3}{dt} &= c(T_e - T_3) + \begin{cases} q(T_2 - T_3) & q > 0 \\ |q|(T_1 - T_3) & q < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -H/2 + d(S_p - S_1) + \begin{cases} q(S_3 - S_1) & q > 0 \\ |q|(S_2 - S_1) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S_p - S_2) + \begin{cases} q(S_1 - S_2) & q > 0 \\ |q|(S_3 - S_2) & q < 0 \end{cases} \\ \frac{dS_3}{dt} &= -H/2 + d(S_e - S_3) + \begin{cases} q(S_2 - S_3) & q > 0 \\ |q|(S_1 - S_3) & q < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (12.7)$$

Der Fluss  $q$  wird weiter aus den Dichteunterschieden berechnet. Für die Berechnungen werden jedoch nur die polaren Boxen verwendet.

$$q = k[\alpha(T_1 - T_3) - \beta(S_3 - S_1)] \quad (12.8)$$

Aufgrund dieser Gleichungen kann dann der neue Matlabcode geschrieben werden, welcher im nächsten Abschnitt erklärt wird.

### Matlab-code

Die Übergabe der Startwerte und Konstanten, der Aufruf des Differentialgleichungslösers und das Plotten der Resultate sind gleich geblieben und werden deshalb nicht noch einmal gezeigt (siehe 12.4.1). Die Änderungen befinden sich in der Funktion selber. Je nachdem ob der Fluss positiv oder negativ ist muss ein anderer Fall der Gleichung berechnet werden. Dies wird mit einem if-Statement erreicht, welches in jedem Durchgang neu ausgewertet wird.

```

1 | function dydt = odefun_3Box_1Flux(t, y, const)
2 |
3 | % Initialisierung mit 0
4 | dt1 = 0;
5 | dt2 = 0;
6 | dt3 = 0;
7 | ds1 = 0;
8 | ds2 = 0;
9 | ds3 = 0;
10 | % Definierung der Naturkonstanten
11 | k = 1.5*10^(-6);
12 | a = 1.5*10^(-4);
13 | b = 8*10^(-4);
14 | H = 0.0000001;
15 | c = 0.0001;
16 | d = 0.0001;
17 | % Flussgleichung
18 | q = k*(a*(y(2)-y(1)) - b*(y(5)-y(4)));
19 | % Diffgleichungen mit if-Statement
20 | if q > 0
21 |     dt1 = c*(const(1)-y(1)) + q*(y(3)-y(1));
22 |     dt2 = c*(const(2)-y(2)) + q*(y(1)-y(2));
23 |     dt3 = c*(const(3)-y(3)) + q*(y(2)-y(3));
24 |     ds1 = -H/2 + d*(const(4)-y(4)) + q*(y(6)-y(4));
25 |     ds2 = H + d*(const(5)-y(5)) + q*(y(4)-y(5));
26 |     ds3 = -H/2 + d*(const(6)-y(6)) + q*(y(5)-y(6));
27 | elseif q < 0
28 |     dt1 = c*(const(1)-y(1)) + abs(q)*(y(2)-y(1));
29 |     dt2 = c*(const(2)-y(2)) + abs(q)*(y(3)-y(2));
30 |     dt3 = c*(const(3)-y(3)) + abs(q)*(y(1)-y(3));
31 |     ds1 = -H/2 + d*(const(4)-y(4)) + abs(q)*(y(5)-y(4));
32 |     ds2 = H + d*(const(5)-y(5)) + abs(q)*(y(6)-y(5));
33 |     ds3 = -H/2 + d*(const(6)-y(6)) + abs(q)*(y(4)-y(6));
34 | end
35 | dydt = [dt1; dt2; dt3; ds1; ds2; ds3];

```

## Resultate

Nach mehrfacher Simulation scheint es so, dass dieses Modell tatsächlich funktioniert. Für Umgebungswerte, welche realen Werten entsprechen, reagiert die Simulation wie der richtige Golfstrom. Der Golfstrom fliesst vom Süd- zum Nordpol, sinkt dort ab und fliesst am Meeresgrund wieder bis zum Südpol, wo er aufsteigt und so den Kreislauf schliesst. Ein Plot der Resultate ist in Abbildung 12.8 dargestellt.

Wie ersichtlich wird, bleiben die Temperaturen ungefähr konstant. Dies liegt daran, dass die Temperaturstartwerte schon den Umgebungswerten angepasst wurden, was bedeutet dass diese Anpassung schon geschehen ist. Beim Salinitätsplot ist jedoch klar der Effekt des virtuellen Salzflusses zu sehen, welcher dazu führt, dass die Salinität in der Äquatorregion leicht steigt und in Polnähe dementsprechend abnimmt. Das Resultat stimmt jedoch und der Golfstrom fliesst in die uns bekannte Richtung.

Spannend wird es nun, wenn die Umgebungsvariablen so angepasst werden, dass sie eine Klimaerwärmung und deren Folgen darstellen. Wie bereits in Abschnitt 12.3.2 erläutert, muss dazu die Salinität am Nordpol und die Temperatur am Äquator erhöht werden. Dies sollte dazu führen, dass der Golfstrom schwächer wird, anhält oder gar seine Richtung ändert. Der Vektor welcher die

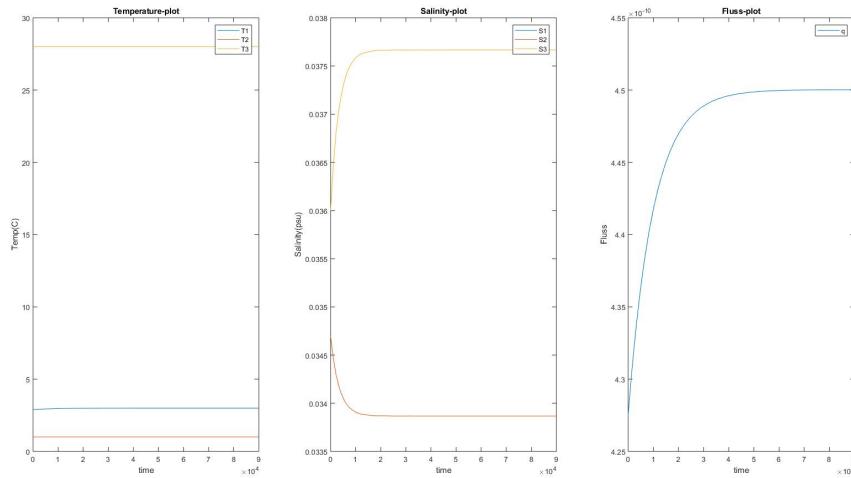


Abbildung 12.8: Resultat der Ein-Fluss Simulation ohne Klimawandel

Umgebungsvariablen enthält wird also dementsprechend angepasst.

$$val = \begin{pmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \\ S_1^* \\ S_2^* \\ S_3^* \end{pmatrix}$$

Die Werte von  $S_1^*$  (Salinität Nordpol) und  $T_3^*$  (Temperatur Äquator) werden also erhöht.

Das Resultat entspricht den Erwartungen. Bei einer kleinen Veränderung wird der Strom nur schwächer, je grösser die Abweichungen jedoch sind desto stärker wird der Effekt. Bis sich dann die Richtung des Stromes ändert.

Wenn das nun mit dem Paper von Liu Wei [[thermohalin:liuwei](#)] verglichen kommen wir auf vergleichbare Resultate.

## 12.5 Schlussfolgerung/Fazit

Es ist erstaunlich, wie sich die Realität mittels eines, auf den ersten Blick ziemlich simplen, Modells nachstellen lässt. Trotzdem ist die Simulation mit Vorsicht zu genießen, da die Resultate nur qualitativ zu interpretieren sind. Genaue Temperaturen und Salinitäten abzulesen ist in diesem Zustand der Simulation nicht möglich. Die Resultate sind eher als Trend in eine gewisse Richtung zu verstehen. Trotzdem ist es erfreulich, wie gut diese Simulation funktioniert. Als weiterer Schritt könnten noch die virtuellen Salzflüsse aufgeteilt werden um Nord- und Südpol unabhängig zu machen. Zusätzlich könnte die Simulation mit zuverlässigeren Daten füttern werden damit genauere Resultate entstehen. Auch sind die Zeitkonstanten der Salinität und Temperatur willkürlich gewählt,

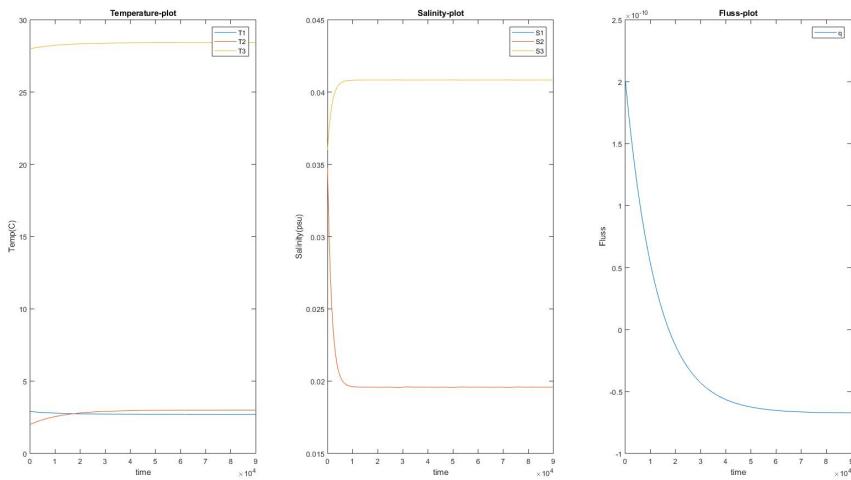


Abbildung 12.9: Resultat der Ein-Fluss Simulation mit Klimawandel

was aber keinen Einfluss auf die Simulation hat. Bei der genaueren Einstellung dieser Werte liesse sich vielleicht sogar eine Aussage über den Zeitraum machen. Dazu müsste aber das restliche Modell fehlerfrei sein, da diese Fehler wiederum die Resultate verfälschen würden. Um tatsächlich Temperaturen und Salinitäten abzulesen müsste man die Simulation massiv erweitern, und grosse Datenmengen verwenden. Dies hätte jedoch den Rahmen dieses Projektes gesprengt. Die Forscher um Liu Wei [**thermohaline**] verwendeten die NCAR SSCM3<sup>2</sup> Simulation, welche dieser hier meilenweit überlegen ist. Diese Simulationssoftware ist in Module aufgeteilt, so lassen sich Wasser, Atmosphäre, Eis und Land separat oder in Kombination simulieren. Das hat den grossen Vorteil, dass man bei der Strömungssimulation nicht nur den Ozean, sondern auch seine Wechselwirkung mit Atmosphäre und Kontinenten berücksichtigen kann. Schlussendlich war das Verstehen und Programmieren dieser Modelle sehr lehrreich. Der Einblick in das mathematische Gebiet der Simulation und deren Resultate waren sehr spannend. Schön ist auch, dass sich tatsächlich eine Simulation erstellen liess, welche auch nur rudimentär, tatsächlich die Realität wiedergibt.

Der gesamte Simulationscode welcher im Rahmen dieses Seminars erstellt wurde, ist im Unterkapitel **thermohaline** des Gitrepository des Seminarbuches abgelegt: [texttthhttps://github.com/AndreasFMueler/thermohaline](https://github.com/AndreasFMueler/thermohaline)

<sup>2</sup>Die Software inklusive Dokumentation kann unter diesem Link bezogen werden: <http://www.cesm.ucar.edu/models/ccsm4.0/>



# Kapitel 13

## Eis

Silvio Marti

### 13.1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich damit, wie die Anwesenheit von Eis an den Polen modelliert werden kann. Immer wieder hört man, dass das Polareis rasant schmilzt und der Eisschwund ein bedrohliches Ausmass angenommen hat. Als Grund wird jeweils die globale Erwärmung genannt. Das scheint plausibel, denn wie man schon im Modell von Budyko [Verweis auf Skript Budyko](#) sehen kann, gilt für eine höhere Gleichgewichtstemperatur eine tiefere Albedo  $a$ , was bedeutet, dass es weniger reflektierendes Eis geben muss. Es sei aber betont, dass die Funktion  $a(T)$  [Verweis auf Skript Funktion  \$a\(T\)\$](#)  sich nur auf die beiden Punkte *Snowball earth* ( $T = 250K$ ,  $a = 0.7$ ) und *kein Eis* ( $T = 280K$ ,  $a = 0.3$ ) stützt und dazwischen mit einer willkürlich gewählten tanh Funktion modelliert wurde.

#### 13.1.1 Eisschmelze am Nordpol

Um eine Idee über das Ausmass der Eisschmelze in den letzten 25 Jahren zu bekommen, dient Abbildung 13.1. Die Abbildung 13.2 zeigt die Veränderung der globalen Durchschnittstemperatur über einen ähnlichen Zeitraum. Obwohl es wenig Sinn macht, die Temperaturwerte absolut anzugeben, wollen wir das hier tun; wir sehen in Abschnitt 13.5 die Verwendung. Der Vergleichspunkt, um aus den differenziellen Werten [[skript:eis:vitalsign\\_NASA](#)] absolute zu bekommen, ist das Jahr 2017, in welchem die Temperatur  $14.7^{\circ}\text{C}$  [[skript:eis:ref2017](#)] betragen haben soll.

#### 13.1.2 Problem an der Eisschmelze

Warum ist den Polkappen eine so grosse Bedeutung für das Klima zuzuschreiben? Folgen für das Klima einer grossen Eisschmelze aufgrund einer Temperaturerhöhung sind unter Anderem:

- Wenn das Eis schmilzt, kommt irgendwann der darunterliegende Boden zum Vorschein. Das führt dazu, dass die Albedo an diesen Stellen sofort um mehr als die Hälfte sinkt, was bedeutet, dass global betrachtet die aufgenommene Strahlungsleistung zunimmt und die Erwärmung weiter vorangetrieben wird.

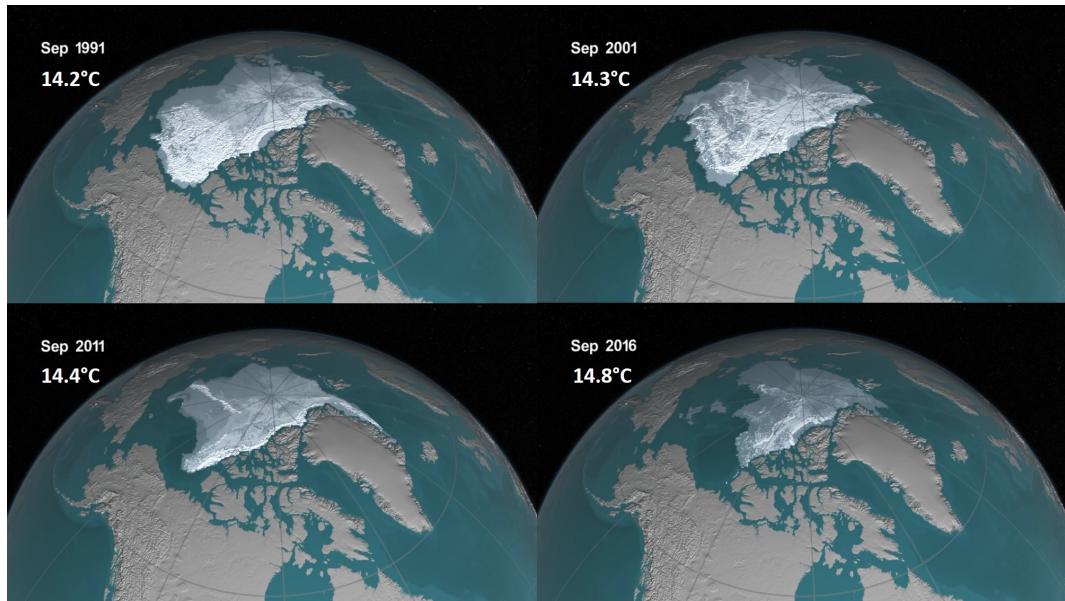


Abbildung 13.1: Ausschnitt aus einer Animation der NASA [skript:eis:animation\_NASA]. Dargestellt ist das Polareis (nur das Meereis, ganz Grönland ist z.B. auch vereist) jeweils im September des angegebenen Jahres. Je weisser das Eis, desto älter ist es (ganz weiss entspricht vier Jahre und älter). Dazu ist auch die globale Jahresschnittstemperatur eingetragen.

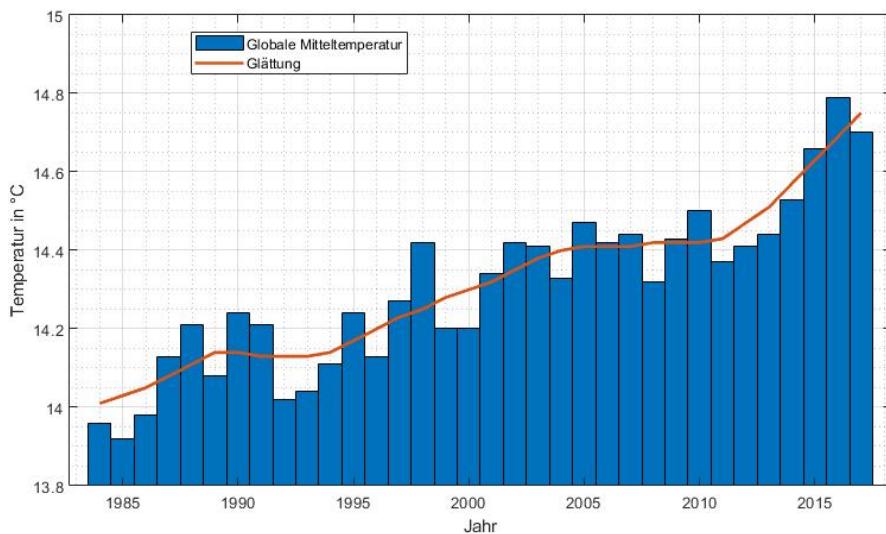


Abbildung 13.2: Globale Jahresschnittstemperatur 1984 bis 2017

- Taut Permafrost auf, gelangen grosse Mengen des Klimagases Methan, welches zuvor im Permafrost eingeschlossen war, in die Atmosphäre, was ebenfalls zu einer zusätzlichen Erwärmung führt.

Veränderungen der Eismenge verstärken sich also von selbst. Die Eisschmelze ist somit ein Prozess mit einer Mitkopplung mit globalen Auswirkungen.

Entscheidend für die genannten Prozesse ist nicht die Dicke des Eises, sondern nur die Fläche. Wie in Abbildung 13.1 zu erkennen ist, befindet sich das Eis ungefähr innerhalb eines Kreises um die Pole.

**Definition 13.1.** *Der Begriff ice line oder Eislinie meint denjenigen Breitengrad, wo die Grenze der Vereisung ist. Alle darüber liegenden Breitengrade sind als vereist zu betrachten, die darunter nicht.*

## 13.2 Ziel

Offensichtlich existiert ein Zusammenhang zwischen der globalen Temperatur und der vorhandenen Eisfläche bzw. der Eislinie. Das Ziel ist, einen mathematischen Zusammenhang zu finden, um Aussagen über zukünftige Entwicklungen zu machen.

## 13.3 Von Budyko zur zonalen Energiebilanz

Budykos Modell konnte die Eisschmelze an den Polen nicht darstellen, bzw. aufgrund der nur geschätzten  $a(T)$  Verweis auf Skript Funktion  $a(T)$  Funktion keine präzise Aussage über die vorhandene Eisfläche machen. Das Problem besteht darin, dass in diesem Modell einige globale Annahmen getroffen wurden, die nachfolgend identifiziert und manche verbessert werden.

- Gleichmässige Einstrahlung. In Budykos Modell trifft das Sonnenlicht auf der gesamten Erdoberfläche mit derselben Intensität auf. Diese Annahme entspricht offensichtlich nicht der Realität, weil das Sonnenlicht nicht überall senkrecht auftrifft. Die ortsabhängige Intensität der Sonneneinstrahlung muss deshalb berücksichtigt werden.
- Gleichmässige Eisverteilung. Die grossen Eisflächen konzentrieren sich nur auf die Polargebiete, entsprechend wird nur dort Sonnenlicht reflektiert. Weil die Einstrahlung auch nicht gleichmäßig ist, wird wichtig, welche Teile der Erdoberfläche von Eis bedeckt sind. Die Albedo soll deshalb abhängig vom Breitengrad und der Eislinie sein.
- Gleichmässige Land- und Wasserverteilung. Budykos Modell geht davon aus, dass die Landmassen auf der Erdoberfläche gleich verteilt sind. Das spielt bei der Vereisung eine Rolle, weil sich auf dem Land schneller Eis bildet als auf dem Meer. Besonders der Unterschied von der Nord- und Südhalbkugel ist von Bedeutung.
- Gleichmässige Temperaturverteilung. Auf der Erde sind grosse regionale Temperaturunterschiede auszumachen. Weil die abgestrahlte Leistung proportional zu  $T^4$  ist, wird nicht überall gleich viel Leistung abgestrahlt. Diese Tatsache werden wir hier aber nicht berücksichtigen.

Wir möchten nun Budykos Modell in ein realistischeres überführen, in dem wir die Erde in Zonen (Breitengrade) aufteilen und obige Überlegungen zonenabhängig durchführen.

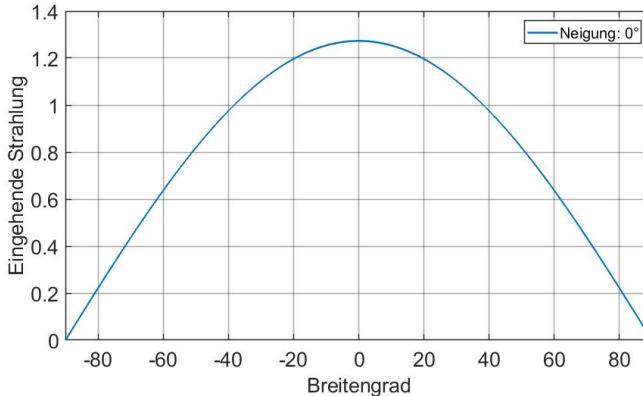


Abbildung 13.3: Energieverteilung abhängig vom Breitengrad  $\vartheta$

### 13.3.1 Einstrahlung abhängig vom Breitengrad

Die eintreffende Energie pro Fläche ist, wie in Abbildung 1.2 ersichtlich, abhängig vom Einstrahlungswinkel, der dem Breitengrad  $\vartheta$  entgegengesetzt ist. Die Energie pro Fläche ist somit proportional zu  $\cos(\vartheta)$ . Um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Gegenden um den Äquator mehr Energie als die polaren Regionen erhalten, führen wir die breitengradabhängige Energieverteilungsfunktion

$$s(\vartheta) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(\vartheta) d\phi, \quad \vartheta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \quad (13.1)$$

ein. Der Faktor  $\frac{2}{\pi^2}$  wird für die Normalisierungsbedingung in Abschnitt 13.3.3 verwendet. Wird wie hier nur der Breitengrad berücksichtigt, ergibt sich eine Energieverteilung gemäss Abbildung 13.3.

### 13.3.2 Einstrahlung in Abhängigkeit vom Neigungswinkel

Weil die Erdachse einen Neigungswinkel hat, geht die Sonne im Sommer im hohen Norden nicht unter, was bedeutet, dass auch die Pole Einstrahlung erhalten. Abbildung 13.3 kann somit nicht stimmen, die Neigung  $\eta$  muss berücksichtigt werden. Um dem Rechnung zu tragen, führen wir den Index  $\eta$  ein und schreiben ab jetzt  $s_\eta(\vartheta)$ . Die Energieverteilungsfunktion ist jetzt gegeben durch ein elliptisches Integral

$$s_\eta(\vartheta) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (\cos \vartheta \sin \eta \cos \phi - \sin \vartheta \cos \eta)^2} d\phi, \quad (13.2)$$

welches in Kapitel [Verweis Skript Kap 5](#) erläutert wurde. Es kann gezeigt werden, dass die Formel (13.1) der Spezialfall von (13.2) für eine Neigung von  $0^\circ$  ist. Zurzeit beträgt die Neigung  $\eta = 23.4^\circ$ , damit verändert sich die Energieverteilung, wie in Abbildung 13.4 zu sehen ist. Wichtig zu sehen ist hier, dass die Energie an den Polen eben nicht 0 ist, der Einfluss der Neigung ist somit beträchtlich.

Die saisonalen Schwankungen der Eislinie betragen über ein Dutzend Breitengrade. Aufgrund der Überlegungen über die Neigung wird jetzt auch klar, für welche Jahreszeit wir die Eislinie berechnen wollen. Im Winter, wenn keine Einstrahlung am Nordpol statt findet, wird auch keine Energie vom Eis reflektiert, dessen Ausbreitung verliert also im Winter an Bedeutung. Relevant für unser

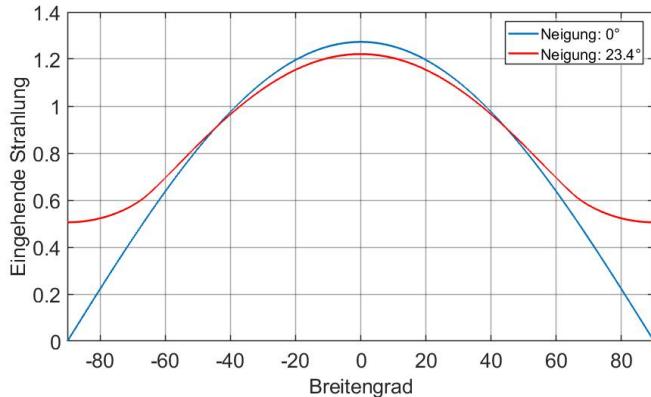


Abbildung 13.4: Energieverteilung abhängig vom Breitengrad  $\vartheta$  und dem Neigungswinkel  $\eta$

Modell ist deshalb nur das Eis im Sommer. Weil es zu Beginn jeweils noch viel Eis vom Winter übrig hat, legen wir uns auf den Monat September fest, wo die Ausbreitung ihr Minimum erreicht. Sämtliche Resultate werden sich also auf den Spätsommer beziehen und geben die minimale jahreszeitenabhängige Vereisung an.

### 13.3.3 Normalisierungsbedingung

Bei den verwendeten Formeln muss sichergestellt werden, dass die eingestrahlte Leistung immer dieselbe ist. Sie darf nur verteilt, aber nicht verändert werden. Dies lässt sich sicherstellen, indem  $s_\eta(\vartheta)$  die Gleichung

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} s_\eta(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = 1 \quad (13.3)$$

erfüllen muss. Weil die Fläche einer normierten positiven Cosinushalbwelle 2 ist, wird dies hier mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  auf 1 korrigiert.

### 13.3.4 Approximation der Energieverteilung

Für die breitengradabhängige Einstrahlung erweist es sich als mühsam, die Formel (13.2) zu benutzen, weil für jeden Breitengrad das Integral aufgelöst werden muss. Die Funktion soll deshalb für eine fixe Neigung von  $\eta = 23.4^\circ$  approximiert werden. Dazu wird eine Fourier-Analyse gemäß Kapitel 6 durchgeführt. Weil die Funktion symmetrisch ist, entfallen alle Sinus- sowie die ungeraden Cosinusterme. Es scheint gemäß Abbildung 13.4 besonders die Frequenz  $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  stark vertreten zu sein, höhere Frequenzen sind aufgrund des flachen Kurvenverlaufs kaum zu erwarten. Wir versuchen deshalb, (13.2) mit

$$\tilde{s}(\vartheta) = s_0 + s_1 \cos(2\vartheta) \quad (13.4)$$

zu approximieren. Selbstverständlich muss auch die Approximation die Normalisierungsbedingung (13.3) erfüllen, was der Fall ist, wenn wir  $s_0 = 0.881$  und  $s_1 = 0.358$  wählen. Wie in Abbildung 13.5 zu sehen ist, deckt sich die Approximation bereits so gut mit der Originalfunktion, dass auf höherfrequente Cosinusterme verzichtet wird.

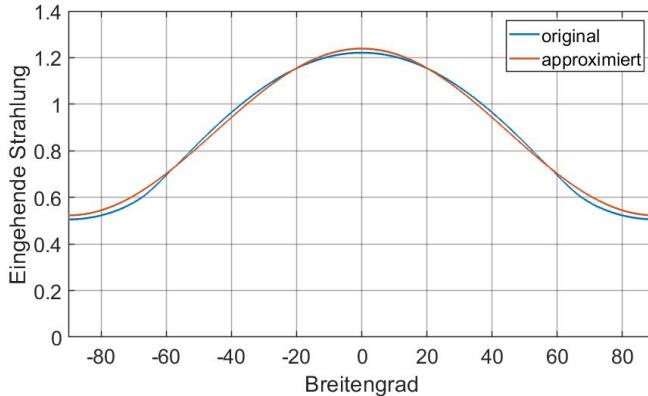


Abbildung 13.5: Vergleich der Energieverteilungsfunktion gemäss (13.2) mit der Approximation (13.4)

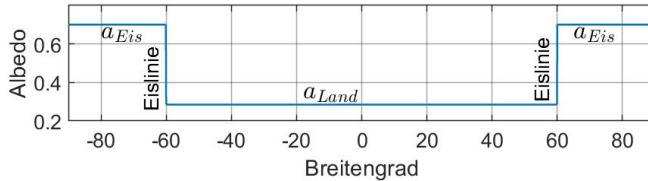


Abbildung 13.6: Veranschaulichung der Gleichung (13.5) für eine Eislinie bei 60°.

### 13.3.5 Absorptionsverteilung

In den vereisten Breitengraden wird mehr Sonnenlicht reflektiert, die Albedo ist deshalb dort grösser als bei einer nicht vereisten Oberfläche. Gemäss der Definition in Abschnitt 13.1 ergibt sich für die Albedo

$$a(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}}) = \begin{cases} a_{\text{Eis}} & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq -\vartheta_{\text{iceline}} \quad \text{Südpolarkappe} \\ a_{\text{Land}} & -\vartheta_{\text{iceline}} \leq \vartheta \leq \vartheta_{\text{iceline}} \\ a_{\text{Eis}} & \vartheta_{\text{iceline}} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{Nordpolarkappe} \end{cases}, \quad (13.5)$$

wobei wir die Parameter  $a_{\text{Eis}} = 0.7$  und  $a_{\text{Land}} = 0.285$  wählen. Diese Funktion ist in Abbildung 13.6 dargestellt.

## 13.4 Energiegleichung

Nun haben wir alle Komponenten zusammen, um sie wieder in Budykos Modell einzufügen. Mit Berücksichtigung der Zonen ergibt sich die Gleichung

$$E_{\text{in}}(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}}) = (1 - a(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}})) \cdot \tilde{s}_b(\vartheta) \cdot Q \quad (13.6)$$

für die eingehende Strahlung pro Breitengrad, wobei  $Q = \frac{1}{4} S_0$ . Damit die gesamte einfallende Energie betrachtet werden kann, muss die Gleichung (13.6) über alle Breitengrade integriert werden.

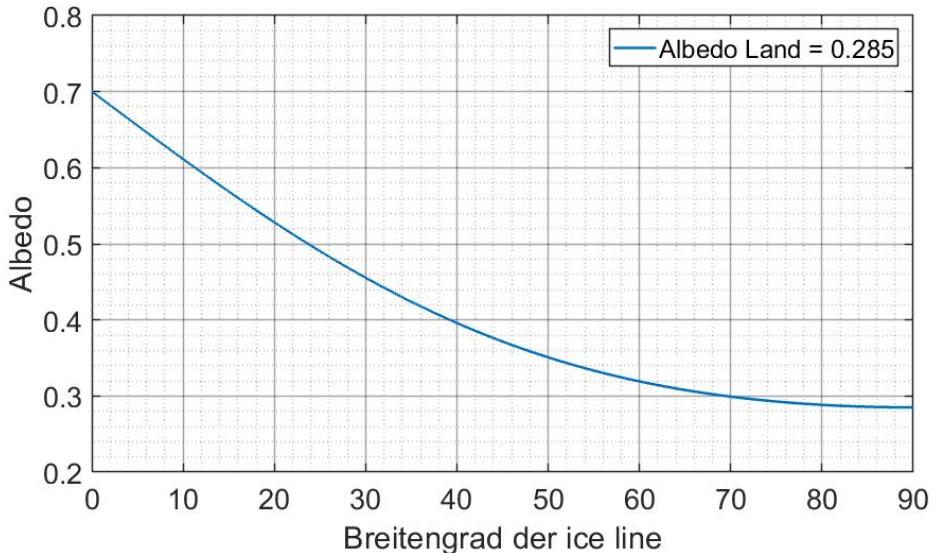


Abbildung 13.7: Globale Albedo abhängig von der Eislinie. Ist die Erde zugefroren nimmt die globale Albedo den Wert des Eises an, existiert kein Eis, resultiert der Wert des Landes. Reduziert sich die Eismenge, fällt die Albedo monoton.

Dafür wird die Normalisierungsbedingung (13.3) verwendet. Wird alles eingesetzt, resultiert

$$E_{\text{in}}(\vartheta_{\text{iceline}}) = \frac{Q}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - a(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}})) \cdot \tilde{s}(\vartheta) \cdot \cos \vartheta d\vartheta, \quad (13.7)$$

wobei  $E_{\text{in}}$  nur noch abhängig von der Eislinie ist, was das Ziel war. Um die Gleichgewichtslösungen zu erhalten, setzen wir  $E_{\text{in}}$  mit  $E_{\text{out}}$  gleich wie in [Verweis Skript Budyko](#) und bekommen

$$E_{\text{in}}(\vartheta_{\text{iceline}}) = \varepsilon \sigma T^4, \quad (13.8)$$

wobei  $T$  in  $K$  angegeben ist.

## 13.5 Resultate

### 13.5.1 Albedo abhängig von der Eislinie

Die Gleichung der Normalisierungsbedingung (13.3) kann auch dazu verwendet werden, die globale Albedo abhängig von der Eislinie

$$a(\vartheta_{\text{iceline}}) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a(\vartheta, \vartheta_{\text{iceline}}) \cdot \tilde{s}_\eta(\vartheta) \cdot \cos \vartheta d\vartheta \quad (13.9)$$

zu berechnen. Wie schon im Modell von Budyko angenommen, ist in Abbildung 13.7 klar ersichtlich, dass die Anwesenheit von Eis in den Polregionen nur wenig Einfluss auf die globale Albedo hat.

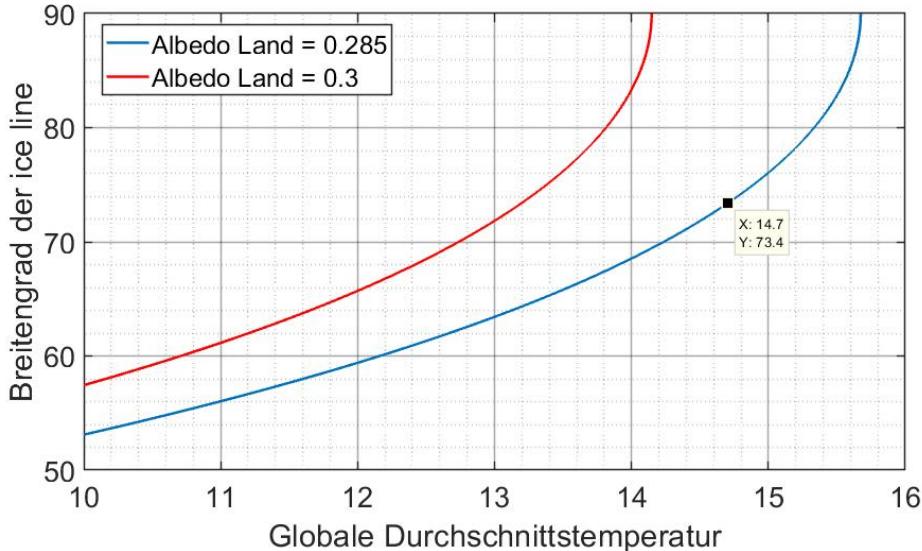


Abbildung 13.8: Abhängigkeit der Eislinie von der Temperatur für zwei verschiedene Werte der Land Albedo. Der Messpunkt ist bei der Jahrestemperatur von 2017 eingetragen.

### 13.5.2 Eislinie abhängig von der Temperatur

Wird die Gleichgewichtsgleichung (13.8) nach der Temperatur  $T$  aufgelöst, kann die Eislinie in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt werden. Abbildung 13.8 zeigt, wie sich die Eislinie bei einer globalen Erwärmung verhält. Je weniger Eis vorhanden ist, desto empfindlicher reagiert die Eislinie auf eine Temperaturänderung, bis das Eis fast schlagartig verschwindet.

Hier erklärt sich auch, warum für  $a_{\text{Land}}$  der Wert 0.285 und nicht wie bei Budyko 0.3 verwendet wurde: Das Modell würde uns seit 20 Jahren kein Eis mehr zugestehen, entsprechend musste der Wert so angepasst werden, dass es realistischer wird. Erwärmt sich die Erde weiter wie bis anhin, könnte das Polareis noch in diesem Jahrhundert im Sommer vollständig verschwinden.

### 13.5.3 Eisfläche abhängig von der Temperatur

Ist die Eislinie bekannt, kann daraus mit

$$A_{\text{Eis}} = 2 \cdot 2\pi R^2 (1 - \sin \vartheta) \quad (13.10)$$

die Eisfläche am Nord- und Südpol berechnet werden, wobei  $R$  dem Polradius von 6356km entspricht. Etwas unerwartet zeigt sich in Abbildung 13.9, dass dieser Zusammenhang beinahe linear ist. Bei einer Erwärmung ausgehend vom Jahr 2017 um weitere  $0.5^{\circ}\text{C}$  werden 10 Mio.  $\text{km}^2$  Eis schmelzen, was rund  $\frac{1}{50}$  der Erdoberfläche entspricht. Diese Zahlen stimmen aber so nicht wirklich, weil innerhalb der Eislinie doch nicht alles vereist ist. Sie zeigen aber die drastischen Auswirkungen einer geringen Temperaturerhöhung.

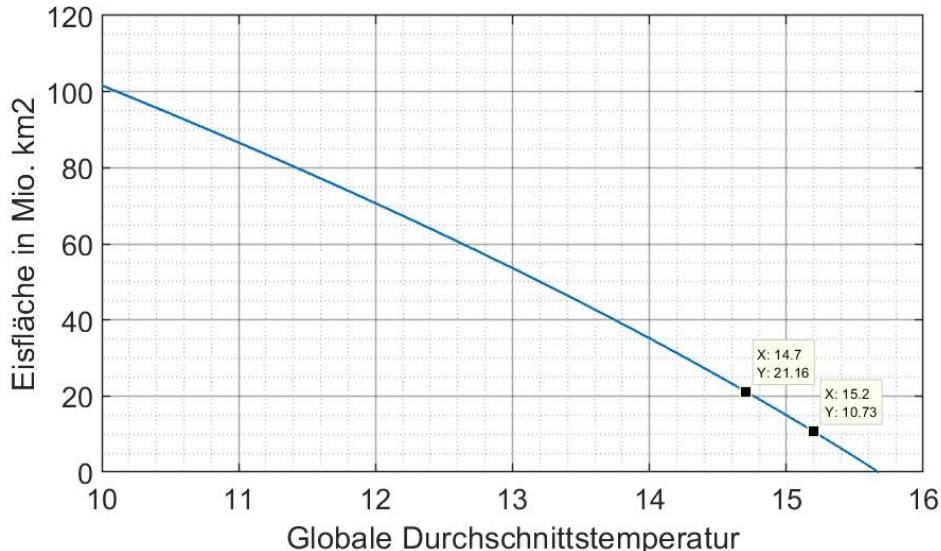


Abbildung 13.9: Zusammenhang der globalen Eisfläche und der Durchschnittstemperatur. Die Datenpunkte sind für die Temperatur vom Jahr 2017 und für eine zusätzliche Erwärmung von  $0.5^\circ$ .

### 13.5.4 Vergleich mit der Realität

Wie gut stimmt das Modell mit der Realität überein? Wir wollen dafür wieder die Bilder der NASA anschauen und die Daten des Modells einfügen. Dies wurde in Abbildung 13.10 gemacht. Besonders in der Region Alaska und Kanada ist die Übereinstimmung gut, an anderen Orten, wie über Skandinavien, deutlich schlechter, dort hat der Golfstrom einen grossen Einfluss. Zu beachten ist, dass ganz Grönland auch vereist ist. Das Modell kann also die Eisschmelze der letzten Jahre beschreiben, es scheint somit auch für zukünftige Temperaturen brauchbare Prognosen zu liefern.

## 13.6 Modellfehler

Obwohl das Modell plausible Resultate liefert, wollen wir hier die Fehler und getroffenen Annahmen diskutieren. Folgende Punkte sind dabei besonders wichtig:

- Kein Wärmefluss. Der gesamte Energieaustausch zwischen den Breitengraden in Form von Wärmeleitung und besonders von Konvektion durch die Meeresströmungen (siehe Abbildung 4.1), wurde unterbunden. So führt beispielsweise der Golfstrom dazu, dass es in Skandinavien weniger Permafrost und oberhalb weniger Meereis gibt, als in vergleichbaren Regionen.
- Symmetrie (ungleiche Land- und somit Eisverteilung zwischen der Nord- und Südhalbkugel). Landflächen vereisen einfacher bis in tiefe Breitengrade als Meer, weil die fehlende Strömung zu weniger Wärmetransport an die Oberfläche führt. In der Folge bildet sich auf dem Land bereits ab etwa dem 55. Breitengrad Permafrost. Auf der Nordhalbkugel hat es in den Breitengraden von  $55^\circ$  bis  $70^\circ$  bedeutend mehr Landfläche als auf der Südhalbkugel, deshalb darf dort mit mehr Eis gerechnet werden. So sind grosse Gebiete wie Teile von Kanada, Alaska,

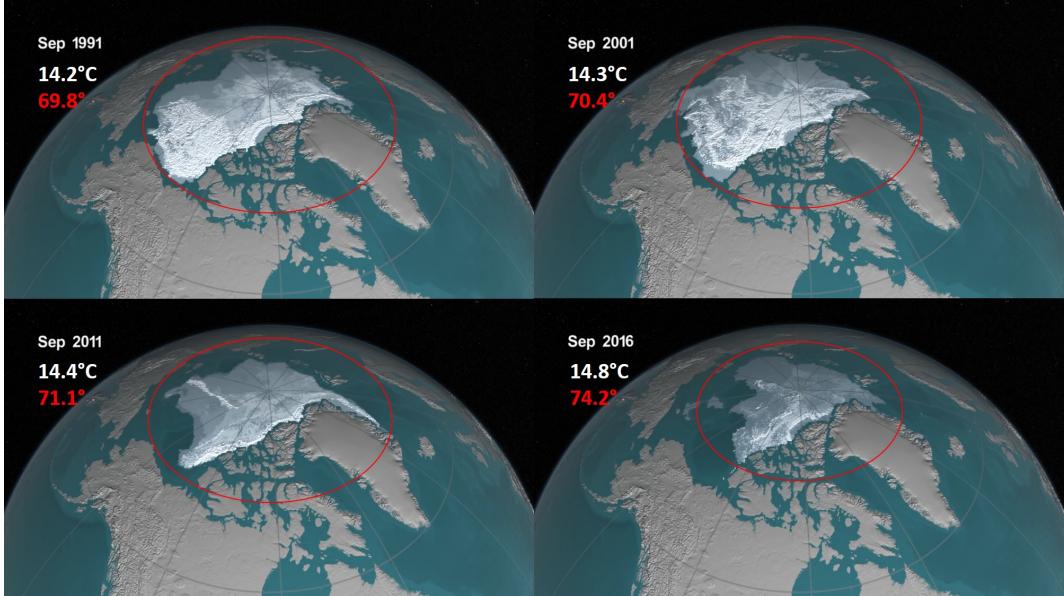


Abbildung 13.10: Siehe Abb. 13.1. Vergleich der Eisflächen mit der für die angegebene Durchschnittstemperatur berechneten Eislinie.

Sibirien und Skandinavien auch im Sommer gefroren, wo es im Vergleich zur Antarktis kein Eis gibt.

- Die abgestrahlte Leistung ist auch temperatur- und somit breitengradabhängig. Indem wir Zonen mit und ohne Eis und eine globale Durchschnittstemperatur über  $0^{\circ}\text{C}$  haben, lassen wir implizit unterschiedliche Oberflächentemperaturen zu. Weil die abgestrahlte Leistung proportional zu  $T^4$  ist, wird an den Polen bestimmt nicht gleich viel Energie abgestrahlt, wie am Äquator.
- Kein Wärmespeichereffekt. Dies führt dazu, dass keine Jahreszeiten abgebildet werden können; die Eislinie schwankt über das Jahr um über ein Dutzend Breitgrade. Das Eis mittelt Temperaturschwankungen auch über mehrere Jahre aus.
- Approximationen. Zu guter Letzt sei erwähnt, dass die Energieverteilung mit der Gleichung (13.4) approximiert wurde. Der Einfluss auf das Ergebnis dürfte aufgrund der guten Übereinstimmung mit (13.2) aber gering ausfallen.

## 13.7 Schlussfolgerung

- Es kann ein einfaches Modell berechnet werden, welches einen Zusammenhang zwischen der Eislinie und der globale Durchschnittstemperatur herstellt.
- Das Modell kann die Veränderungen der Eislinie der letzten Jahre aufgrund der Temperaturerhöhung plausible wiedergeben.

- Die Eislinie reagiert sehr empfindlich auf eine Temperaturänderung. Bei der Eisfläche sieht es weniger schlimm aus.

Mit Sicherheit kann gesagt werden, dass das Eis an den Polen zukünftig noch mehr zurückgehen wird, wenn sich die Erde weiterhin erwärmt. Es ist denkbar, dass wir einmal einen im Sommer eisfreien Nordpol noch erleben könnten. Die gute Nachricht dabei: Das Modell macht keine Aussage darüber, dass der Prozess der Eisbildung nicht reversibel wäre. Sollte sich die Erde also wieder abkühlen, wird es wieder mehr Eis geben, andernfalls ist aber mit einem massiven Anstieg des Meeresspiegels und der damit verbundenen Flutung von Küstenstädten und ganzen Inseln zu rechnen.



# Kapitel 14

## Numerische Lösung einer verzögerten Differentialgleichung

Raphael Unterer

### 14.1 Einleitung

Verzögerte Differentialgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen, bei welchen die Ableitung von früheren Funktionswerten abhängt. Ein gutes Beispiel dafür ist die Populationsentwicklung in der Biologie. Für das Populationswachstum bei Tieren ist entscheidend wie viele junge Tiere geschlechtsreif werden. Somit hängt das Wachstum von einem früheren Wachstum ab, da es einige Zeit dauert bis die Jungen geschlechtsreif sind. Es gibt diverse weitere Anwendungen für verzögerte Differentialgleichungen in Physik, Chemie und Biologie (vgl. [verzoegert:erneux]).

Hier wollen wir vor allem die verzögerte Differentialgleichung zur Modellierung des El Niño Phänomens (vgl. 7.4) betrachten. Wir lernen zuerst einige grundlegende Methoden kennen, um eine verzögerte Differentialgleichung analytisch zu untersuchen. Danach wird gezeigt, wie eine numerische Berechnung erfolgen kann.

### 14.2 Grundlagen verzögerte Differentialgleichungen

#### 14.2.1 Definitionen

**Definition 14.1.** Eine allgemeine verzögerte Differentialgleichung 1. Ordnung sieht folgendermaßen aus:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)) \quad (14.1)$$

Dabei ist  $f$  eine beliebige Funktion. Die Verzögerungen  $\tau_1, \dots, \tau_n$  sind gegeben und nach der Grösse geordnet, also  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$ .

Verzögerte Differentialgleichungen werden als DDE (engl. "Delayed Differential Equation") abgekürzt.

Im Unterschied zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist das Anfangswertproblem nicht mehr eindimensional, d.h. es genügt nicht mehr den Anfangszustand zu kennen. Alle Werte von  $-\tau_n$  bis 0 müssen gegeben sein. Es braucht nicht nur einen einzelnen Anfangswertvektor, sondern eine ganze Funktion von Anfangswertvektoren im Intervall  $[-\tau_n, 0]$ .

### 14.2.2 Analytische Lösungsverfahren an einem Beispiel

Um die analytischen Lösungsverfahren zu verstehen, werden diese zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert. In den folgenden Betrachtungen analysieren wir die DDE:

$$\dot{y}(t) = ky(t - \tau). \quad (14.2)$$

#### Schrittweises Lösen

Beim schrittweisen Lösen wird die DDE immer in Schritten von einem  $\tau$  gelöst. Wir nehmen an, dass  $y$  im Bereich von  $-\tau$  bis 0 immer konstant bleibt. Somit haben wir die folgende Funktion der Anfangswerte:

$$y(t) = 1 \quad \text{wenn} \quad -1 \leq t < 0. \quad (14.3)$$

Daraus folgt, dass im Bereich von  $0 \leq t < \tau$  die Ableitung

$$\dot{y}(t) = k \quad (14.4)$$

wird. Durch Integrieren von (14.4) erhalten wir

$$y(t) = 1 + kt \quad (14.5)$$

für den Bereich  $0 \leq t < \tau$ . Dieses  $y(t)$  kann als Anfangswert für den nächsten Schritt genommen werden. Wir erhalten für den zweiten Schritt  $\tau \leq t < 2\tau$

$$\dot{y}(t) = k(1 + k(t - \tau)) = k + k^2(t - \tau). \quad (14.6)$$

Es ist offensichtlich, dass diese Methode nur für kurze Zeiten, einfache Anfangswerte und einfache Formeln funktioniert. Bereits (14.6) ist nicht mehr ganz einfach zu integrieren. Für längere Zeiten werden die Integrale immer komplexer.

In Abbildung 14.1 sieht man die Lösung für das Beispiel (14.2). Die lineare Funktion (14.5) ist als erster Schritt gut sichtbar. Ab Schritt 2 ist die Lösung nicht mehr eine lineare Funktion, sondern eine komplexere Polynomfunktion.

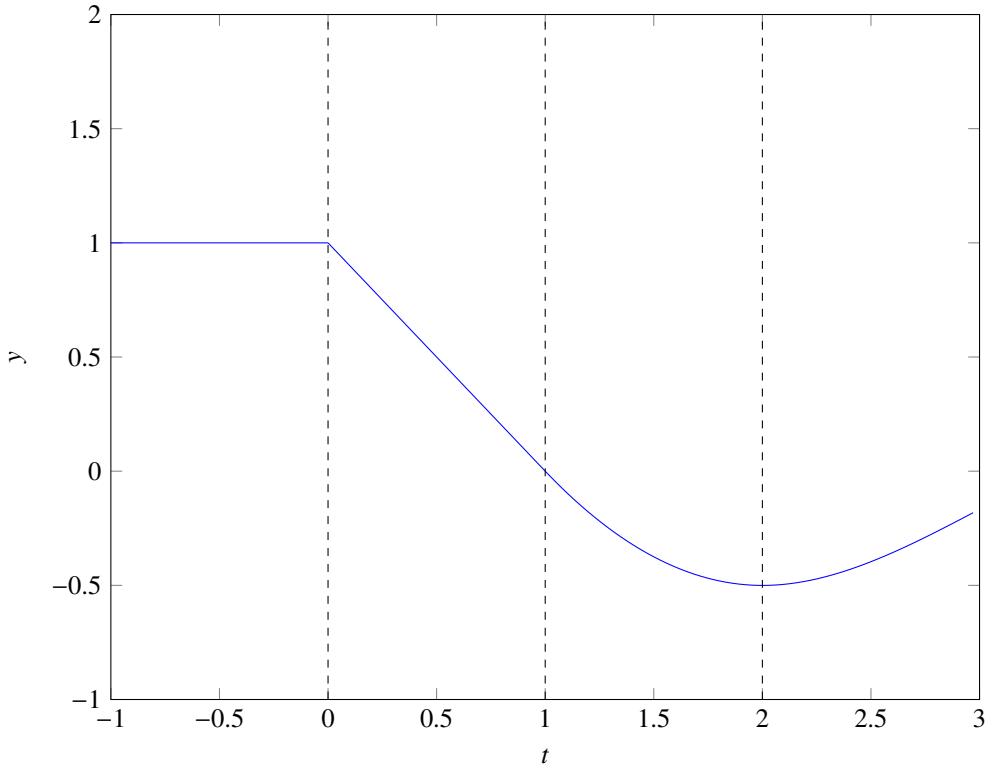
#### Charakteristische Gleichung

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen können Lösungen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms gefunden werden. Bei DDEs wird das Polynom zu einer Gleichung. Wir betrachten wiederum die Gleichung (14.2) und verwenden als Lösungsansatz

$$y(t) = ce^{\lambda t}. \quad (14.7)$$

Dieser klassische Ansatz eignet sich (fast) immer, da die Exponentialfunktion beim Differenzieren erhalten bleibt. (14.7) eingesetzt in (14.2) ergibt

$$\lambda ce^{\lambda t} = kce^{\lambda(t-\tau)}. \quad (14.8)$$

Abbildung 14.1: Beispiel mit  $k = -1$  und  $\tau = 1$ 

Diese Gleichung kann durch  $ce^{\lambda t}$  gekürzt werden zu

$$\lambda - ke^{-\lambda \tau} = 0. \quad (14.9)$$

Damit können nun verschiedene Werte für die Konstante  $k$  berechnet werden, je nachdem wie die Lösung  $\lambda$  aussehen soll. Wir nehmen an, dass  $\lambda$  komplex ist und setzen  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  in die Gleichung (14.9) ein.

$$\lambda_r + i\lambda_i - ke^{-(\lambda_r + i\lambda_i)\tau} = 0 \quad (14.10)$$

Real- und Imaginärteil dieser Gleichung können wir mit Hilfe der eulerschen Formel  $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$  trennen und erhalten

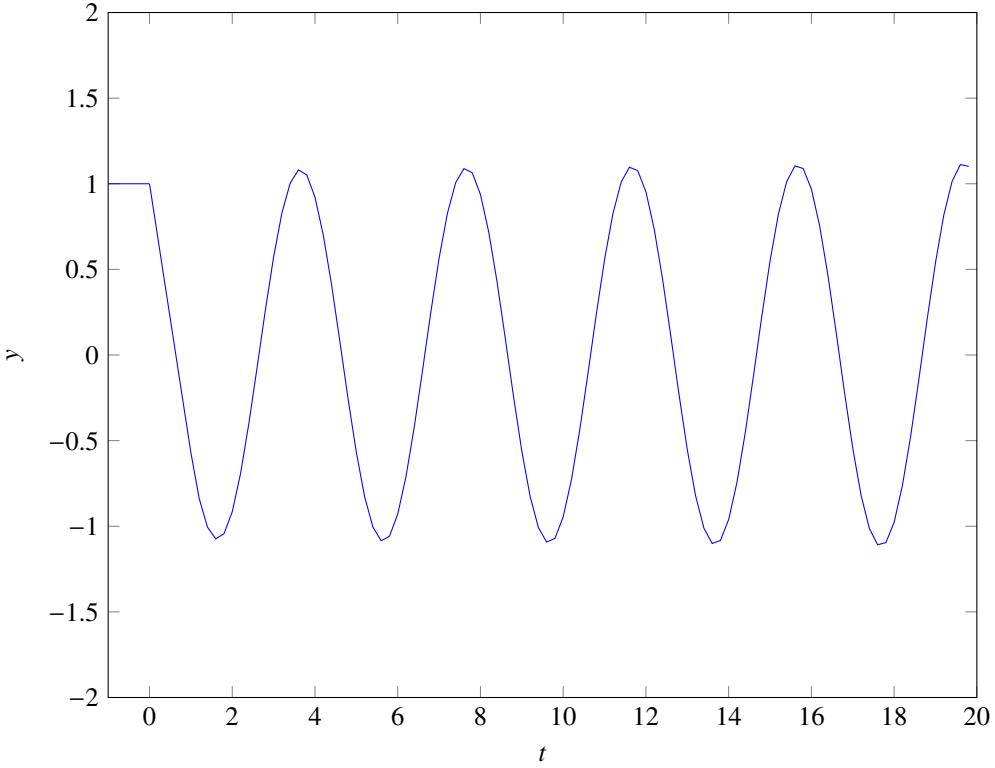
$$\lambda_r - ke^{-\lambda_r \tau} \cos(\lambda_i \tau) = 0 \quad (14.11)$$

$$\lambda_i + ke^{-\lambda_r \tau} \sin(\lambda_i \tau) = 0. \quad (14.12)$$

Nimmt man den zweiten Term auf die rechte Seite und dividiert die beiden Gleichungen, erhält man

$$-\frac{\lambda_r}{\lambda_i} = \cot(\lambda_i \tau). \quad (14.13)$$

Damit lassen sich nun beliebig viele Kombinationen von  $\lambda$  und  $k$  generieren. Als Beispiel wollen wir eine periodische Schwingung mit gleichbleibender Amplitude erreichen. Daraus ergibt sich ein

Abbildung 14.2: Beispiel mit  $k = -\frac{\pi}{2}$  und  $\tau = 1$ 

$\lambda_r = 0$ . Die Verzögerung ist gegeben als  $\tau = 1$ . Eingesetzt in (14.13) erhalten wir:

$$\cot(\lambda_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = (2n - 1)\frac{\pi}{2}. \quad (14.14)$$

Mit  $n \in \mathbb{N}$  können wir z.B. die kleinste Frequenz  $n = 1$  einsetzen und erhalten  $\lambda_i = \frac{\pi}{2}$ . Damit können wir aus (14.12) die Konstante  $k$  bestimmen.

$$\frac{\pi}{2} + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\pi}{2} \quad (14.15)$$

Zur Überprüfung wurde mit diesen Werten die Gleichung numerisch berechnet (vgl. Abbildung 14.2). Man sieht dort gut die gleichbleibende Amplitude und die Periodendauer von  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ .

## 14.3 El Niño DDE

### 14.3.1 Gleichung

Zur Modellierung des El Niño Effektes wurde im Kapitel 7.4 die folgende DDE gefunden

$$\dot{T}(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) - bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)). \quad (14.16)$$

Mit dieser DDE wird die Änderung der Meerestemperaturanomalie  $T$  vor der Küste Südamerikas beschrieben. Die Konstanten  $c, a, b$  müssen so bestimmt werden, dass die DDE ein möglichst gutes Resultat ergibt. Erst wenn diese Konstanten grob bestimmt sind, kann eine sinnvolle numerische Simulation gestartet werden. Hilfreich sind vor allem ungefähre Verhältnisse zwischen den Konstanten, so dass man zumindest einen Anhaltspunkt für die Simulation hat. Die Verzögerungen  $\tau_K$  und  $\tau_R$  sind ungefähr bekannt aus physikalischen Untersuchungen der Rossby- und Kelvinwellen (vgl. [verzoegert:kaperengler]).

$$\tau_K \approx \frac{1}{6} \text{yr} \text{ und } \tau_R \approx 1 \text{yr} \quad (14.17)$$

### 14.3.2 Charakteristische Gleichung

Die charakteristische Gleichung für die DDE (14.16) scheint schwierig zu sein. Aus diesem Grund vereinfachen wir die DDE so weit, bis wir einen Ansatz versuchen können. Weil  $\tau_K \ll \tau_R$  setzen wir  $\tau_K = 0$  und erhalten

$$\dot{T}(t) = -cT(t) + aT(t) - bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R)). \quad (14.18)$$

Nun stellen wir eine einfache DDE auf, mit  $\alpha = a - c$ ,  $\beta = b$  und  $\tau = \frac{1}{2}\tau_R$ .

$$\dot{T}(t) = \alpha T(t) - \beta T(t - \tau) \quad (14.19)$$

In diese DDE setzen wir nun den bekannten Ansatz  $e^{\lambda t}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein und erhalten

$$\lambda e^{\lambda t} = \alpha e^{\lambda t} - \beta e^{\lambda(t-\tau)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha - \beta e^{-\lambda\tau}. \quad (14.20)$$

Es sind beliebig viele Lösungen für  $\lambda$  und die Konstanten möglich. Wir suchen nun die Lösung, welche dem El Niño Phänomen entspricht. Da der El Niño in grober Näherung ohne Dämpfung oszilliert (vgl. Abbildung 14.3), betrachten wir nur die Lösungen bei denen  $\lambda$  rein imaginär wird. Wir setzen also  $\lambda = i\omega$  und nach der Formel von Euler wird die Gleichung (14.20) umgeschrieben zu

$$i\omega = \alpha - \beta(\cos(-\omega\tau) + i \sin(-\omega\tau)). \quad (14.21)$$

Es ergeben sich daraus zwei Gleichungen für Imaginär- und Realteil

$$\alpha - \beta \cos(\omega\tau) = 0 \quad \text{und} \quad \beta \sin(\omega\tau) = \omega. \quad (14.22)$$

Wenn diese beiden Gleichungen miteinander dividiert werden, erhalten wir die Bedingung

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (14.23)$$

### 14.3.3 Berechnen der Konstanten

Aus der Bedingung (14.23) können die Konstanten näherungsweise berechnet werden. Zuerst geben wir die Kreisfrequenz der Oszillation  $\omega$  an. Auf der Abbildung 14.3 können wir mit etwas Phantasie eine Periodendauer zwischen drei und sieben Jahren erkennen. Wir bestimmen für die folgenden Berechnungen eine durchschnittliche Periodendauer von 4 Jahren. Eine plausible Periode könnte mit Hilfe der Fouriertheorie (vgl. Kapitel 6) bestimmt werden. Alle Zeitangaben werden in Jahren angegeben.

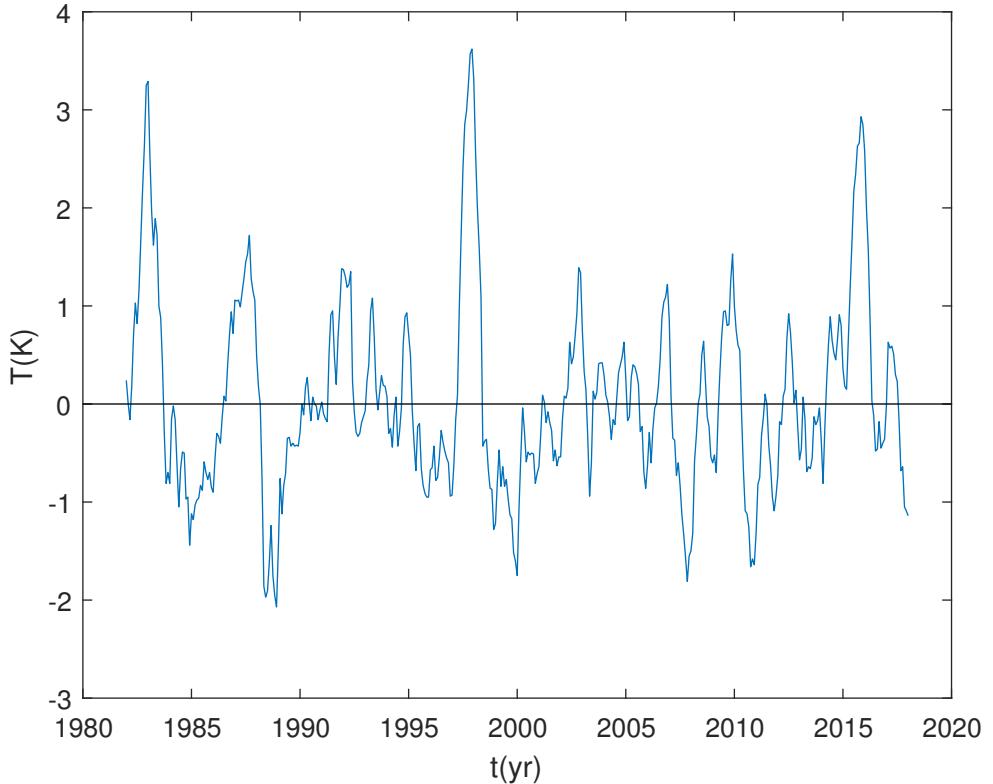


Abbildung 14.3: El-Niño (Temperaturanomalie  $T$  vor der Küste Südamerikas) gemessen von 1982 bis 2017

Aus der Periodendauer ergibt sich  $\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{Periode}}} = \frac{\pi}{2}$  und aus der Bedingung (14.23) erhalten wir nun

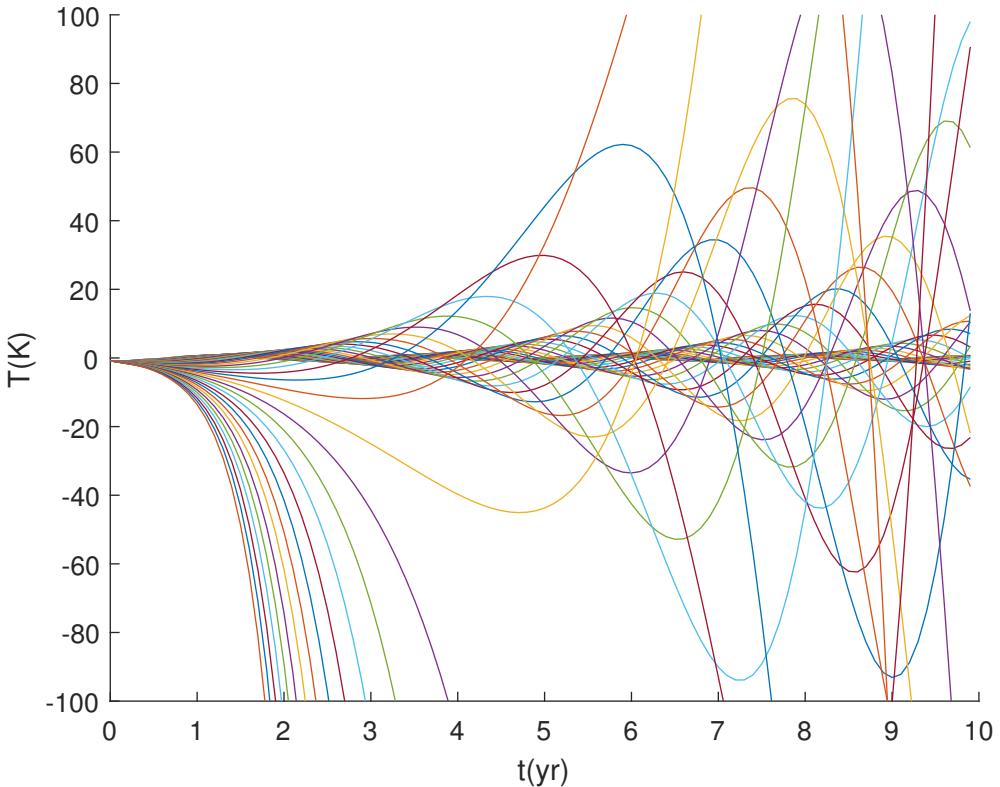
$$a - c = \alpha = \frac{\omega}{\tan(\frac{1}{2}\tau_R\omega)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6. \quad (14.24)$$

Weiter berechnen wir  $\beta$  aus (14.22) und erhalten

$$b = \beta = \frac{\omega}{\sin(\frac{1}{2}\tau_R\omega)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{4})} \approx 2.3. \quad (14.25)$$

#### 14.3.4 Chaotisches Verhalten

Die Lösungen der Gleichung (14.16) zeigen ein chaotisches Verhalten. Chaotisches Verhalten bedeutet, dass kleinste Änderungen der Konstanten extrem unterschiedliche Lösungen verursachen können. In Abbildung 14.4 sieht man das chaotische Verhalten bei einer Änderung der Konstante  $a$ . Dieses Verhalten ist unerwünscht, da wir die Ausgangslage nicht genau kennen und die Konstanten anpassen müssen. Um dieses chaotische Verhalten zu unterbinden, wird ein Limitierungsterm

Abbildung 14.4: Chaotisches Verhalten bei der Änderung von  $a = 0$  bis  $a = 5$ 

eingeführt. Dieser besteht aus  $-\varepsilon T(t)^3$  und verhindert explodierende Lösungen. Bei zunehmendem Funktionswert nimmt der limitierungsterm mit der dritten Potenz zu und dämpft somit den Funktionswert. Wir erhalten die Gleichung

$$\dot{T}(t) = -cT(t) + aT(t - \frac{1}{2}\tau_K) - bT(t - (\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K)) - \varepsilon T(t)^3. \quad (14.26)$$

In Abbildung 14.5 wird die gleiche Änderung von  $a$  gezeigt, aber mit einem  $\varepsilon = 0.1$ . Man sieht nun sehr gut den Einfluss, den die Konstante  $a$  auf die Lösung hat (verändert Frequenz und Amplitude).

## 14.4 Numerische Lösung

Die El-Niño-DDE soll mithilfe von Matlab numerisch gelöst werden. Matlab stellt zum Lösen von DDEs eine fertige Funktion zu Verfügung (`dde23`). Da diese Funktion auf anderen Systemen (z.B. Octave) nicht verwendbar ist, soll eine eigene Lösungsfunktion geschrieben werden. Beim Schreiben dieser Funktion wird darauf geachtet, dass die Syntax mit `dde23` vergleichbar ist.

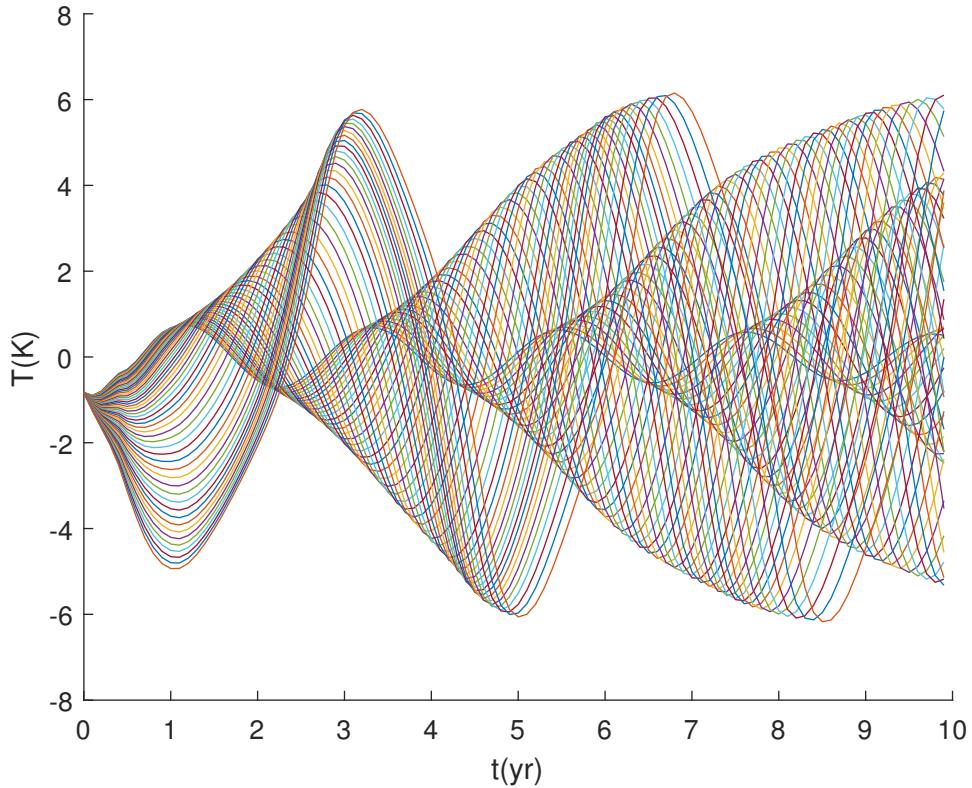


Abbildung 14.5: Verhalten bei der Änderung von  $a = 0$  bis  $a = 5$  mit Limitierung  $\varepsilon = 0.1$

#### 14.4.1 Analyse der Funktion dde23

Die offizielle Syntax von dde23 (vgl. [verzögert:dde23]) lautet:

```
1 ||      sol = dde23(ddefun, lags, history, tspan);
```

Wir analysieren zunächst alle Parameter.

##### Parameter: ddefun

Die ddefun stellt die eigentliche DDE dar, welche als Funktion übergeben werden muss. Unsere El-Niño-DDE (14.16) hat als eigene Parameter die Zeit (t), den aktuellen Wert (y), die verzögerten Werte (Z) und alle Konstanten.

```
1 ||      function dydt = dde_full(t,y,Z,c,a,b,e)
2 ||      ylag1 = Z(:,1);
3 ||      ylag2 = Z(:,2);
4 ||      dydt = -c*y+a*ylag1-b*ylag2-e*y.^3;
```

Damit diese Funktion akzeptiert wird, müssen die Konstanten gesetzt werden.

```
1 ||      c = 1; a = 2.6; b = 3; e = 0.1;
2 ||      my_dde = @(t,y,Z) dde_full(t,y,Z,c,a,b,e);
```

**Parameter: lags**

Die Verzögerungen (in Jahren) entsprechen einem normalen Vektor.

```
1 ||      tau_k = 0.15; tau_r = 1;
2 ||      tau = [0.5*tau_k 0.5*tau_r+tau_k];
```

**Parameter: history**

Die history entspricht einer Funktion, welche die Werte aus der Vergangenheit ausgibt. Das kann mit Vektoren (mit realen Daten aus [NOAA:Daten]) und einer Interpolation gelöst werden.

```
1 || function s = dde_hist(t)
2 || t_v = [-0.67,-0.58,-0.5,-0.42, ...];
3 || s_v = [0.71,0.5,-0.06,-0.4,...];
4 || s = @t interp1(t_v,s_v,t);
```

**Gesamte Anwendung**

Der Parameter `tspan` gibt die zu berechnende Zeitspanne (hier 0-3 Jahre) an.

```
1 || sol = dde23(my_dde,tau,dde_hist,[0, 3]);
```

Der Aufruf `dde23` soll nun durch eine eigene Funktion ersetzt werden.

**14.4.2 Berechnung mit kurzen Zeitschritten**

Bei diesem Ansatz wird immer die Ableitung zu einer bestimmten Zeit berechnet. Diese Ableitung wird dann für einen (kurzen) Zeitschritt als Konstant genommen und damit der nächste Wert berechnet.

**Algorithm 1** Numerischer DDE-Solver

- 
- 1: Initialisieren, d.h. Zeitachse erstellen, Zeitschritt `dt` berechnen, etc
  - 2: **for** `dt` in `t` **do**
  - 3:     Bestimmen, ob die verzögerten Werte `dde_hist` oder in alter Lösung (wenn  $t > \tau$ ) vorkommen
  - 4:     **for** `i` in `tau` **do**
  - 5:         Korrekte verzögerte Wert für jedes  $\tau$  finden
  - 6:     **end for**
  - 7:     dde-Funktion aufrufen und `dydt` speichern
  - 8:     Nächster Wert = aktueller Wert + `dydt*dt`
  - 9: **end for**
- 

Mit diesem Algorithmus wird ein identisches Ergebnis wie mit `dde23` erreicht (vgl. Abbildung 14.6). Es werden jeweils 10000 Datenpunkte berechnet. Bei mehr Datenpunkten dauert die Berechnung sehr lange, wohl auch weil der Algorithmus nicht optimiert ist.

**14.4.3 Instabilität bei wenigen Datenpunkten**

Der Algorithmus von `dde23` berechnet viel weniger Datenpunkte. Wenn wir die Anzahl Datenpunkte in unserem Algorithmus reduzieren, werden die Lösungen schnell instabil (vgl. Abbildung 14.7). Auf den ersten Blick scheint dieses Resultat verblüffend, da 100 Datenpunkte immer noch relativ viel sind.

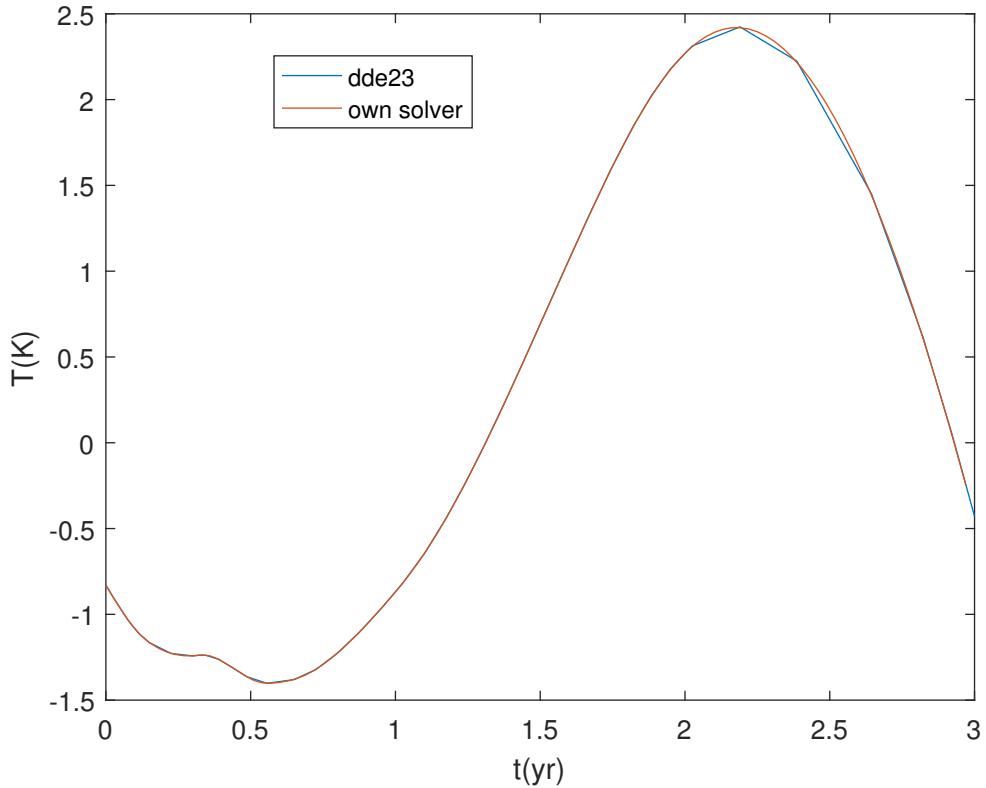


Abbildung 14.6: Vergleich der eigenen Lösungsfunktion mit dde23

### Theoretische Betrachtung

Um diese Instabilität zu verstehen, analysieren wir zuerst einmal unseren Algorithmus mathematisch.

Unser Algorithmus (Algorithm 1) entspricht einem expliziten Euler Verfahren. Dieses Verfahren beschreiben wir für eine gewöhnliche DDE mit  $\dot{y}_n = f(y_n, y_{n-\tau_1}, y_{n-\tau_2}, \dots)$ . Dann geben wir die Schrittweite  $dt$  als  $h$  an und stellen den Algorithmus mathematisch dar:

$$y_0 = y(0) \quad (14.27)$$

$$y_1 = y(0 + h) = y_0 + h f(y_0, y_{-\tau_1}, y_{-\tau_2}, \dots) \quad (14.28)$$

Um die Betrachtung zu vereinfachen, analysieren wir das explizite Euler-Verfahren für eine gewöhnliche Differentialgleichung. Am Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird gezeigt, wie die Stabilitätsbetrachtung funktioniert.

Wir gehen von der einfachen Differentialgleichung  $\dot{y} = ky$  aus. Dabei ist  $k < 0$ , die Schrittweite beträgt  $h$  und die Anfangsbedingung lautet  $y(0) = 1$ .

$$y_0 = 1 \quad (14.29)$$

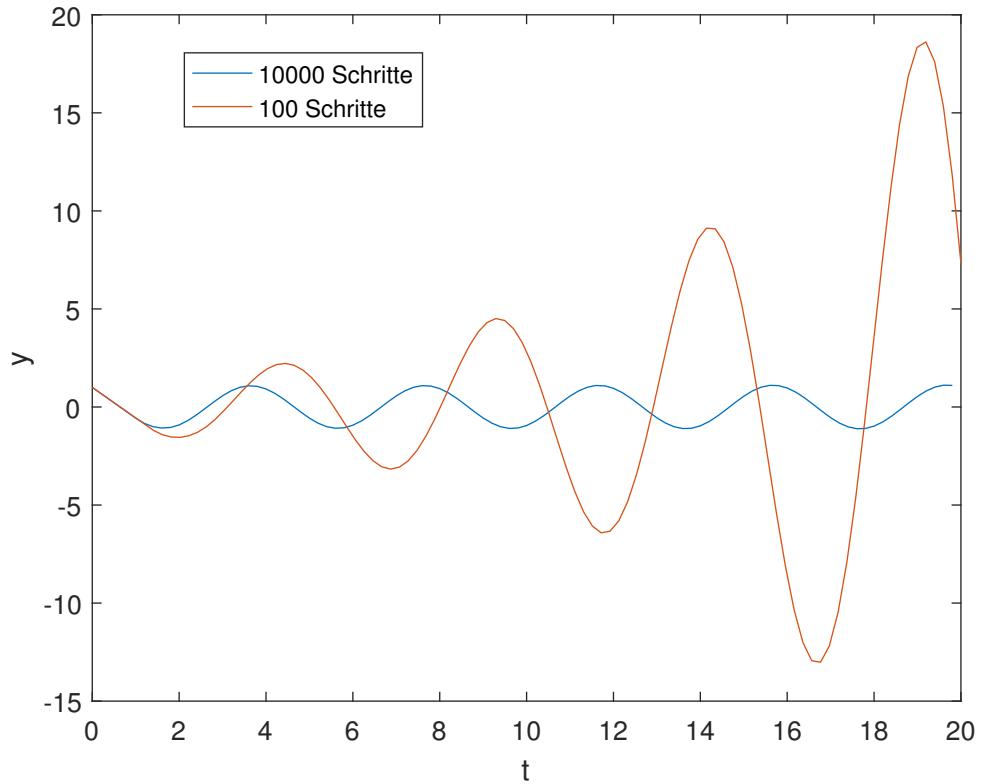


Abbildung 14.7: Vergleich der Lösung mit 10000 Datenpunkten und der Lösung mit 100 Datenpunkten. Gelöst wurde das Beispiel von (14.2).

$$y_1 = y(h) = 1 + hk \quad (14.30)$$

$$y_2 = 1 + hk + hk(1 + hk) = (1 + hk)^2 \quad (14.31)$$

$$y_3 = (1 + hk)^3 \quad (14.32)$$

usw.

Nun ist bekannt das  $y$  gegen 0 gehen muss, wenn  $t$  erhöht wird. Dies geschieht nur, falls  $|1 + hk| < 1$  ist. Falls  $|1 + hk| \geq 1$ , explodiert oder schwingt die Lösung.

Die gleiche Rechnung lässt sich als Vektorgleichung neu schreiben.

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + hk & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

Bei einem gegebenen Anfangsvektor kann das Resultat  $y_n$  berechnet werden, indem die Matrix  $A$  potenziert wird.

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{-1} \end{pmatrix} \quad (14.34)$$

Das Potenzieren der Matrix  $A$  hat zur Folge, dass die Lösung explodiert, falls die Eigenwerte von  $A$  den Wert 1 übersteigen. Unsere Matrix im Beispiel hat nur einen sinnvollen Eigenwert  $\lambda = 1 + hk$ . Wir erhalten damit folgende Ungleichung:

$$|1 + hk| < 1. \quad (14.35)$$

Dies entspricht der Stabilitätsfunktion des expliziten Euler-Verfahren (vgl. [verzoegert:euler]).

## Berechnung der Eigenwerte am Beispiel

Am Beispiel (14.2) sieht die Berechnung komplexer aus, da Werte aus der Vergangenheit wichtig sind. Wir berechnen das Ganze für eine Schrittweite  $h = 0.2$ , also mit 100 Berechnungsschritten (vgl. Abbildung 14.7). Beim Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ y_{n-3} \\ y_{n-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & kh \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ y_{n-3} \\ y_{n-4} \\ y_{n-5} \end{pmatrix} \quad (14.36)$$

Wie man sieht, hängt die Größe der Matrix  $A$  von der Schrittweite  $h$  und der Verzögerung  $\tau$  ab. Hier werden 5 Schritte pro  $\tau$  benötigt.

Wenn man die Eigenwerte für  $k = -\frac{\pi}{2}$  berechnet, erhält man als maximalen Absolutwert  $|\lambda| = 1.0129$ . Dieser Eigenwert ist größer als 1. Also haben wir für  $h = 0.2$  eine Instabilität. Dies erklärt das Verhalten auf Abbildung 14.7.

Die ganze Berechnung der Eigenwerte kann mit Matlab durchgeführt werden. In Abbildung 14.8 sieht man die Abhängigkeit des maximalen Eigenwertes von der Schrittweite. Bis zu einer maximalen Schrittweite von 0.01 beträgt der maximale Eigenwert genau 1. Danach übersteigt der maximale Eigenwert die Grenze von 1 und instabile Lösungen können auftreten.

## 14.5 Auswertung

### 14.5.1 Simulation El-Niño mit realen Werten

Der Matlab-Code zur Simulation des El-Niño DDE ist nun vorhanden. Zur Überprüfung ob die Simulation plausibel ist, wird eine Zeitperiode in der Vergangenheit berechnet. Ausgewählt zur Simulation wird die Zeitperiode ab September 1995. Also werden die Daten von Januar bis September 1995 als History genommen.

Simuliert wird 1 Jahr (Abbildung 14.9), 3 Jahre (Abbildung 14.10) und 10 Jahre (Abbildung 14.11). Die Konstanten wurden so verändert, dass das Resultat auf 3 Jahre gut stimmt. Mit den richtigen Konstanten lassen sich für kurze Zeiten relativ gute Vorhersagen machen. Allerdings ist das El-Niño-Phänomen (vgl. Abbildung 14.3) extrem unkonstant und bräuchte ein komplexeres Modell. Über längere Zeit versagt das Modell, da es immer zu einer gleichmäßigen Oszillation kommt.

Interessant ist, dass die DDE das kurzfristige Verhalten (1 Jahr, Abbildung 14.9) richtig berechnet. Das sieht man an der kurzen Richtungsänderung zwischen 0.3 und 0.4 Jahren.

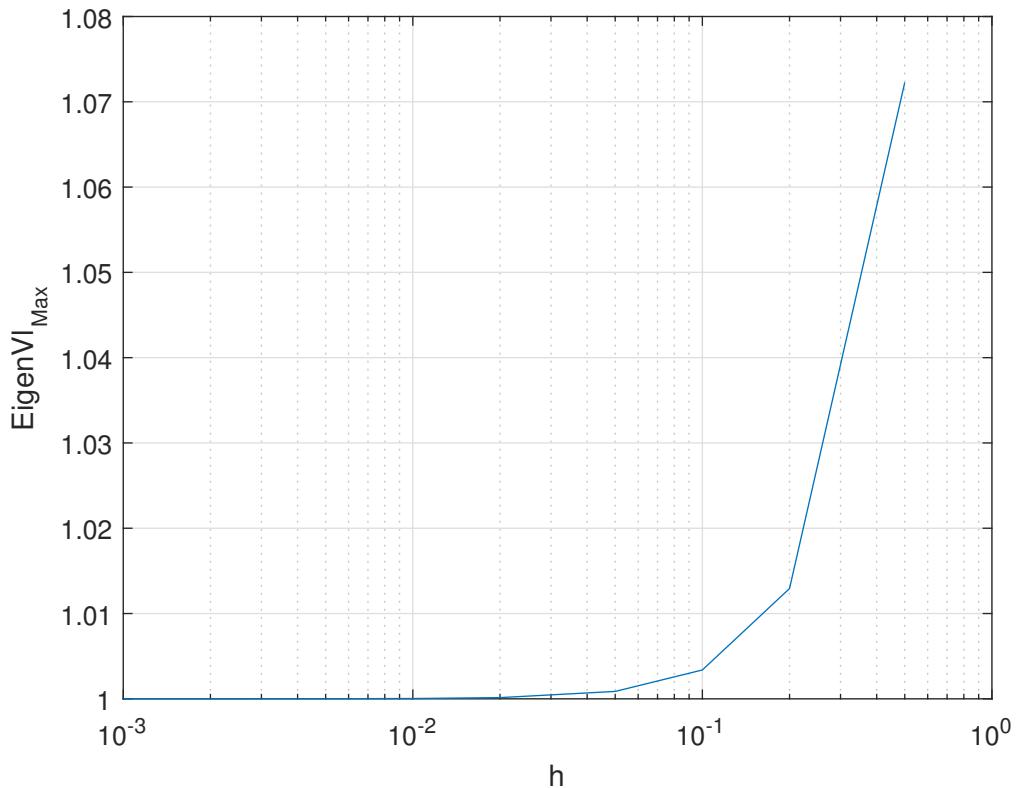
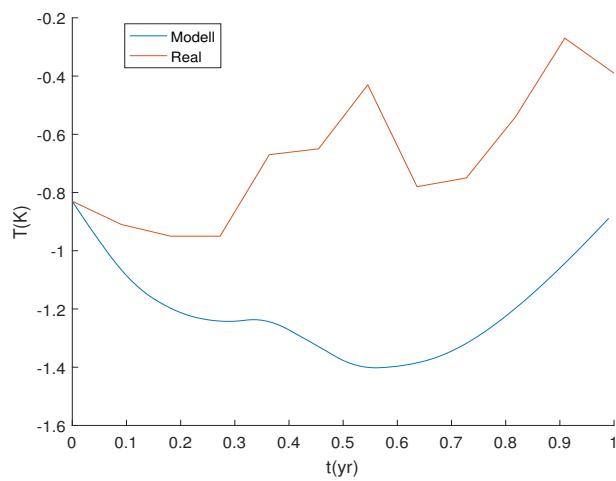
Abbildung 14.8: Maximale Eigenwerte in Abhängigkeit der Schritweite  $h$ 

Abbildung 14.9: El-Niño Simulation von 1995-1996 und Vergleich mit realen Daten

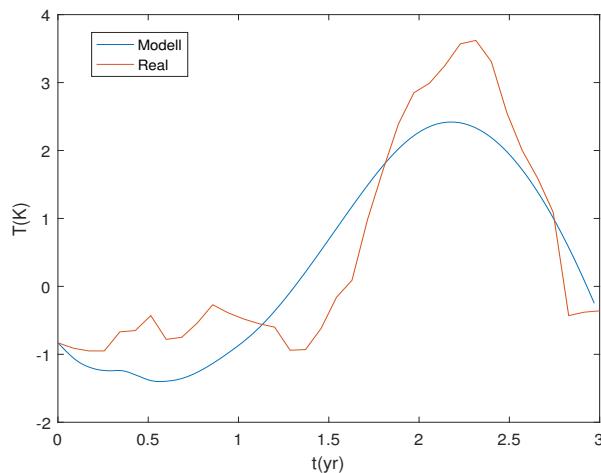


Abbildung 14.10: El-Niño Simulation von 1995-1998 und Vergleich mit realen Daten

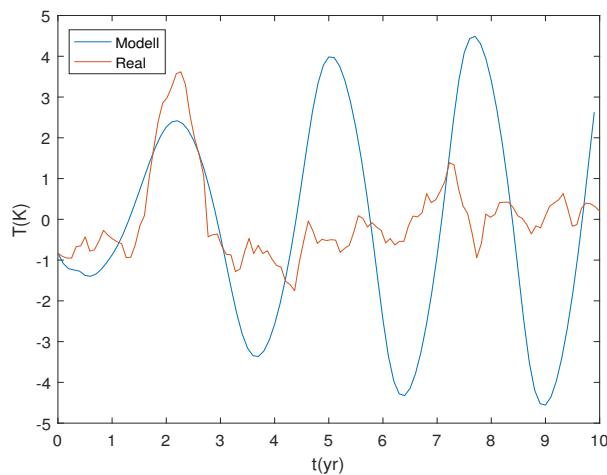


Abbildung 14.11: El-Niño Simulation von 1995-2005 und Vergleich mit realen Daten

### 14.5.2 Fazit

Mit verzögerten Differentialgleichungen können diverse Probleme gelöst werden. DDEs können analytisch untersucht werden, die Komplexität nimmt allerdings schnell zu. Eine numerische Simulation ist daher zwingend. Eine solche Simulation kann relativ einfach erstellt werden und liefert gute Resultate. Man sollte die Resultate trotzdem genau prüfen, da die Lösungen schnell instabil werden können (vgl. 14.4.3).

Das Modell zur Modellierung des El-Niño-Phänomens ist sicher noch nicht vollständig. Es ist aber ein schönes Beispiel einer Anwendung von verzögerten Differentialgleichungen.



# Kapitel 15

## Klima auf anderen Planeten

Nicolas Tobler

### 15.1 Einleitung

venus co<sub>2</sub> bindung wie ist venus co geworden

was führt zu wasserlosen athmosphäre mars keine venus ohne wasser erde zwischendrin  
boxmodell anteile element

Auf allen Planeten kann flüssiges Wasser auftreten (Godilooks-Zone).

Merkur ist in der Tabelle vertreten um zu verdeutlichen, dass nahe an der Sonne nicht direkt eine heisse Mitteltemperatur bedeutet.

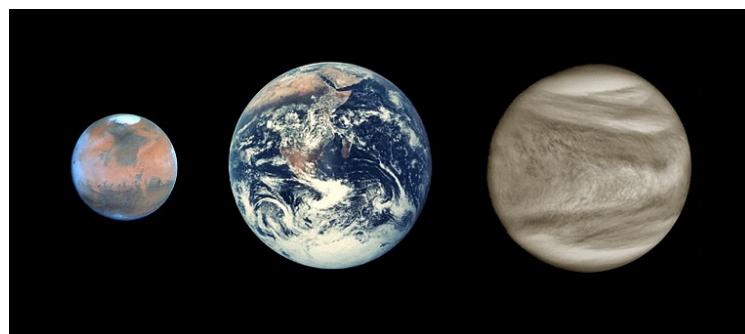


Abbildung 15.1: Mars, Erde und Venus massstabsgerecht

	Mars	Erde	Venus	Merkur
Temperatur (Mittel)	218 K	288 K	737 K	440 K
Wolken	< 5%	68%	$\approx$ 100%	-
Atmosphäre	$6 \cdot 10^{-3}$ bar	1 bar	92 bar	$10^{-15}$ bar

Tabelle 15.1: Planeten im Vergleich

### 15.1.1 Temperatur

### 15.1.2 Albedo

### 15.1.3 Atmosphärische Eigenschaften

dünne Atmosphäre

Wann und wieso verlor der Mars seine Atmosphäre

Rückgang der Atmosphäre durch Sonnenwind <https://www.nasa.gov/press-release/nasa-mission-reveals-speed-of-solar-wind-stripping-martian-atmosphere>

### 15.1.4 Treibhausgase

wasser

co2

## 15.2 Modell

Für alle Planeten geltendes Modell erstellen

Das Modell sollte Erdähnliche Bedingungen bewusst erstreben, um zu sehen ob diese auf den Planeten Mars und Venus auch bestehen können.

Betrachtet wird ein früher Zeitpunkt der Geschichte des Sonnensystems, als die betrachteten Planeten ähnliche oder annähernd gleiche materielle und Atmosphärische Eigenschaften aufwiesen.

Es wird vor allem angenommen, dass grosse Mengen an Wasser auf allen Planeten vorhanden war.

Andere klimabestimmenden atmosphärischen Gase werden nicht simuliert, um das Modell im gegebenen Rahmen umzusetzen.

Vereinfacht: Erde nehmen, auf Mars Grösse skallieren, in den Mars-Orbit setzen und schauen was passiert.

Das hier erarbeitete Modell konzentriert sich nur auf die Strahlungsbilanz und den Wasserkreislauf.

Wasser stellt auf der Erde den grössten Anteil zum Treibhauseffekt bei. Des Weiteren ist es für den Menschen interessant Planeten mit Erdähnlichen Zuständen anzutreffen.

Dazu müssen einige Annahmen getroffen werden.

Annahmen Gleiche materielle Eigenschaften Gleicher Vorkommen an Wasser Wasser hat grösste Auswirkung auf Klima

Möglichst auf einfachen Physikalischen Gesetzen basieren.

Am Schluss müssen freie Parameter abgeschätzt werden, um überhaupt plausible Lösungen zu erreichen.

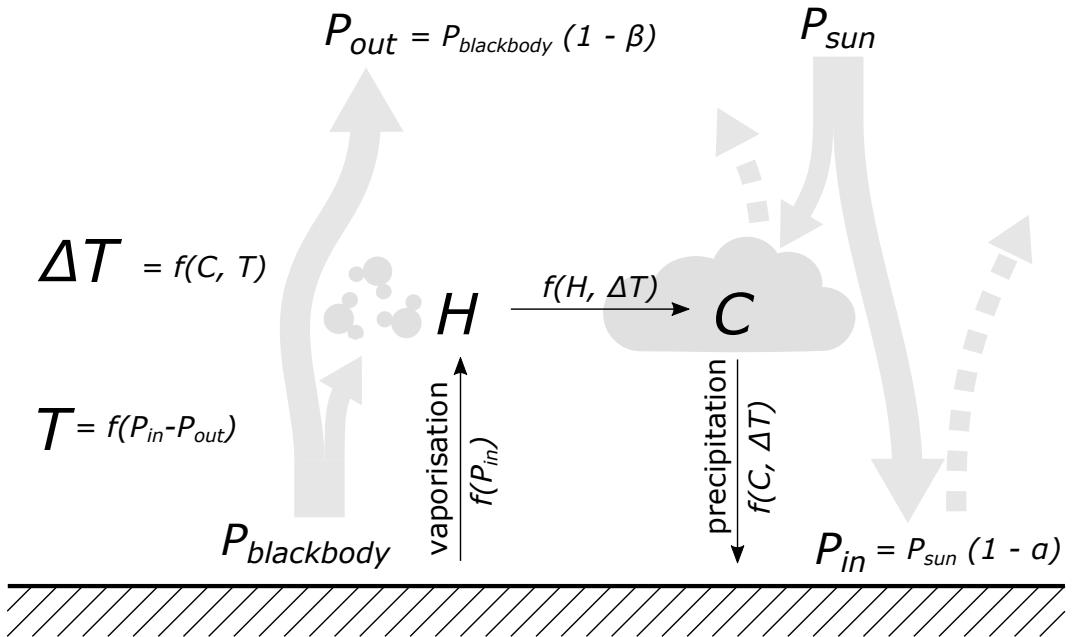


Abbildung 15.2: Modell

### 15.2.1 Strahlungsbilanz

Die Strahlungsbilanz wird in Kapitel [reference needed](#) ausführlich beschrieben. Das hier verwendeten Modell baut direkt darauf auf.

Damit die Durchschnittstemperatur eines Planeten stabil ist, muss die Leistungsbilanz Null sein.

$$\dot{T} = \xi_1(P_{in} - P_{out}) \quad (15.1)$$

Die Eintreffende Leistung  $P_{in}$  besteht primär aus der absorbierten Sonnenstrahlung. Andere Energiequellen wie ein Aktives Planet-Inneres und die Energie aus Gezeiten wird vernachlässigt. Es gilt:

$$P_{in} = \sigma T_{\odot}^4 \left( \frac{R_{\odot}}{a_{planet}} \right)^2 \cdot (1 - \alpha) \quad (15.2)$$

Dabei ist  $\alpha$  das Albedo des Planeten.

Die Abgestrahlte Leistung besteht praktisch ausschliesslich aus der Black-body strahlung, welche sich aus der Durchschnittstemperatur  $T$  und dem Radius  $R$  des Planeten bestimmen lässt. Diese Leistung bleibt jedoch teilweise durch Treibhausgase in der Atmosphäre gefangen. Es gilt:

$$P_{out} = (4\pi R^2 \sigma T_s^4) \epsilon \quad (15.3)$$

Dabei ist  $\sigma$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $\epsilon$  der Anteil der durchdringenden Leistung.

### 15.2.2 Albedo

Das Albedo wird als Funktion der prozentualen Wolkenabdeckung  $C$  modelliert. Es wird ein linearer Zusammenhang erwartet.

$$\alpha(C) = (0.65 \cdot C) + 0.15; \quad (15.4)$$

Unter der Annahme, dass bei allen Planeten das Oberflächenalbedo  $\alpha_{surface}$  gleich ist, wird ein minimales  $\alpha_{min}$  und maximales Albedo  $\alpha_{max}$  definiert. Bei 100% Wolkendeckung soll der Maximalwert erreicht werden und bei 0% das Oberflächenalbedo.

$$\alpha = \alpha_{surface} + C(\alpha_{max} - \alpha_{surface}) \quad (15.5)$$

### 15.2.3 Treibhauseffekt

Wasserdampf ist ein sehr effektives Treibhausgas. Es wird angenommen dass der atmosphärische Wasserdampf der Erde für 60% des Treibhauseffekts sorgt.

Im verwendeten Modell wird diese linear zum Teibhauseffekt  $\beta$  modelliert.

$$\epsilon = (1 - \beta) = (1 - 0.5 \cdot H) \quad (15.6)$$

### 15.2.4 Wasserkreislauf

Modellierung von atmosphärischem Wasserdampf  $H$  als relative Luftfeuchtigkeit und Wolken  $C$  als prozentuale Flächendeckung.

#### Wasserdampfbildung

Linearer Zusammenhang zur Auftreffenden Leistung

$$\xi_4(P_{in}) \quad (15.7)$$

#### Wolkenbildung

$$\xi_5 H \frac{dT}{dh} \quad (15.8)$$

Der Temperaturgradient wird linear angenommen somit lässt sich  $\frac{dT}{dh}$  durch  $\Delta T$  vereinfachen.

$$\xi_5 H \Delta T \quad (15.9)$$

#### Wolkenabbau

linear zur Wolkenabdeckung

$$\xi_6 C \quad (15.10)$$

### 15.2.5 Zusammengefasst

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \xi_4 P_{in}(C) & -\xi_5 H \Delta T \\ \dot{C} &= & \xi_5 H \Delta T & -\xi_6 C\end{aligned}\quad (15.11)$$

### 15.2.6 Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} \dot{T} = & \xi_1 (P_{in}(C) - P_{out}(T, H)) \\ \dot{H} = & \xi_4 P_{in}(C) & -\xi_5 H \Delta T \\ \dot{C} = & & \xi_5 H \Delta T & -\xi_6 C \end{vmatrix} \quad (15.12)$$

Um zu verhindern, dass eine Luftfeuchtigkeit oder Wolkenabdeckung von über 100% auftritt, werden zu gewissen linearen Termen noch den gleichen Term mit grosser Potenz dazu addiert. Somit wird der Effekt verstärkt wenn die Grösse nahe an 1 also 100% kommt.

Mit Anpassungen für gesättigten Wasserdampf und Wolkenabdeckung:

$$\begin{vmatrix} \dot{T} = & \xi_1 (P_{in}(C) - P_{out}(T, H)) \\ \dot{H} = & \xi_4 P_{in}(C) & -\xi_5 (H + H^9) \Delta T \\ \dot{C} = & & \xi_5 (H + H^9) \Delta T & -\xi_6 (C + C^5) \end{vmatrix} \quad (15.13)$$

## 15.3 Simulation

Das Modell wurde in MATLAB mittels Transientenanalyse simuliert. Dazu wurde ein ode45 Solver benutzt.

Die Anfangswerte wurden so gesetzt, dass sie Erd-Bedingungen unterstützen Erdbedingungen System anregen Erdähnliche Werte zu generieren.

$$\begin{aligned}T_0 &= 283 \\ H_0 &= 0.5 \\ C_0 &= 0.5\end{aligned}\quad (15.14)$$

### 15.3.1 Ergebnisse

Die Strich-Punkt-Linie der entsprechenden Farbe zeigt den heutigen Wert der Grösse.

## 15.4 Schlussfolgerung

Ergebnisse gleichen dem heutigen Status Extremes Klima von Mars & Venus vermutlich prädestiniert

Abweichungen

Ergebnisse nur mit Vorsicht zu geniessen

Nicht modelierte faktoren: Nur Wasser simuliert Chemische und Physikalische Vorgänge bei extremen Temperaturen

Andere Treibhausgase wie CO<sub>2</sub>, welches heute den grössten Anteil der Venus- und Marsatmosphäre ausmacht, vernachlässigt.

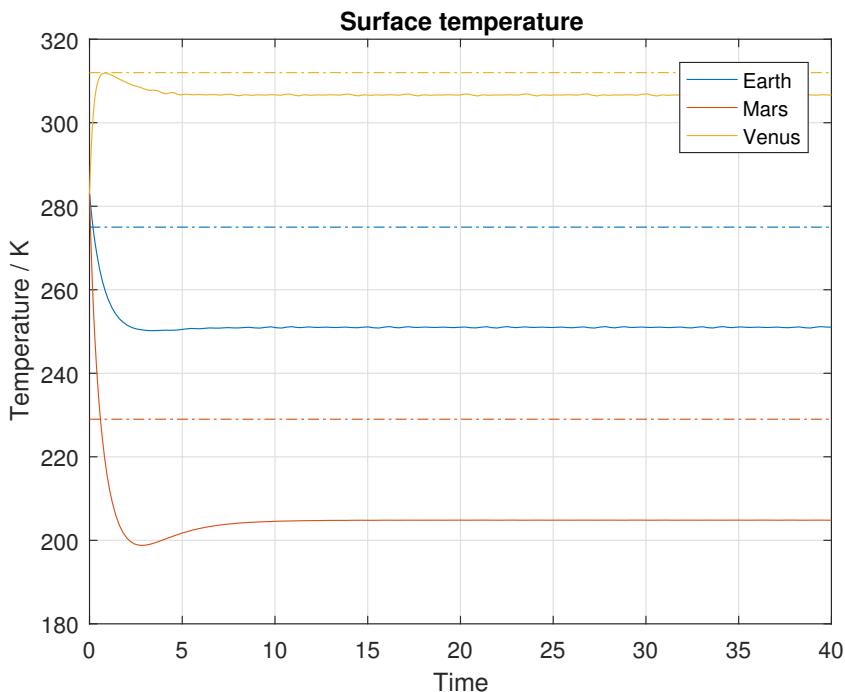


Abbildung 15.3: Globale Durchschnittstemperatur

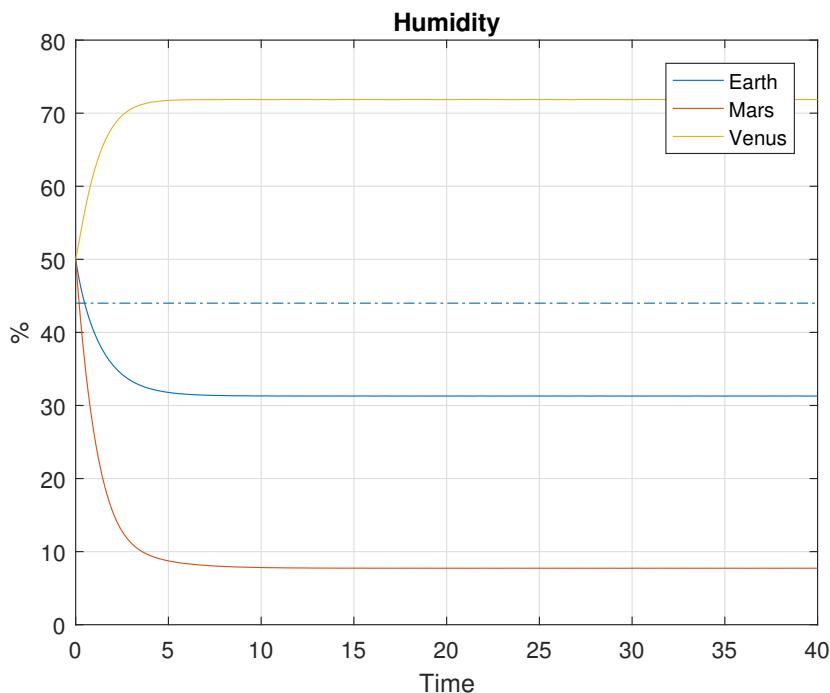


Abbildung 15.4: Relative Luftfeuchtigkeit

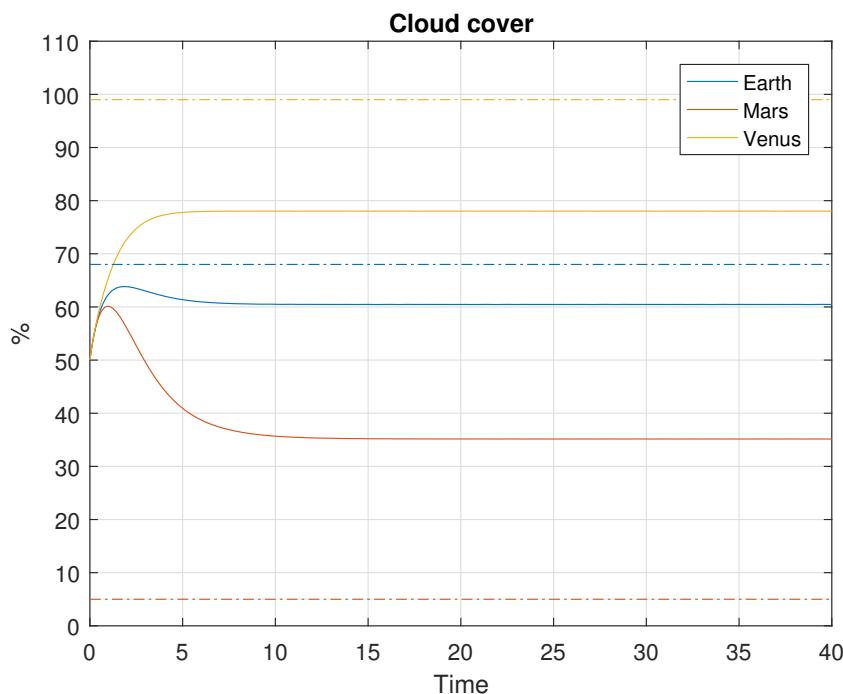


Abbildung 15.5: Prozentuale Wolkenabdeckung

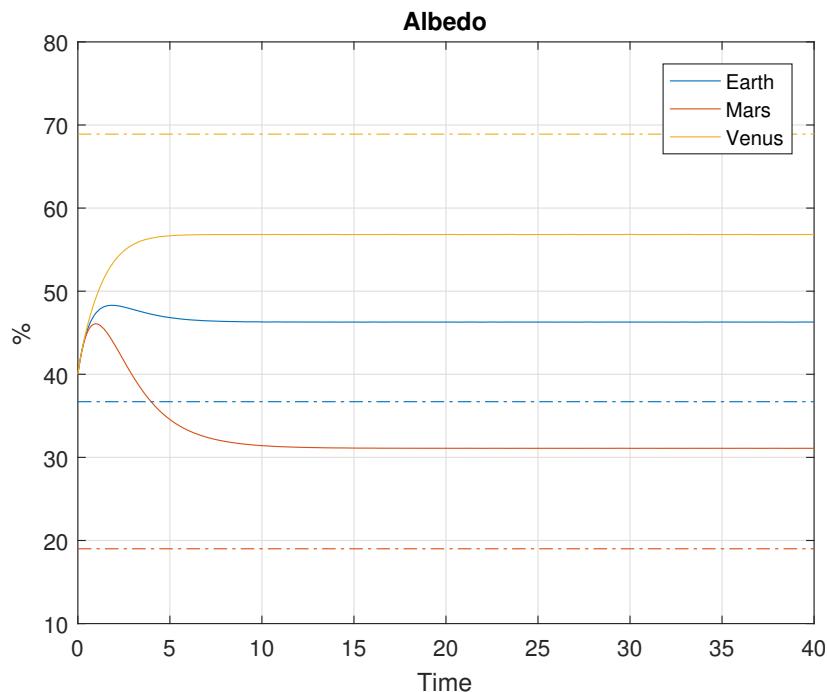


Abbildung 15.6: Albedo

### 15.4.1 Verbesserungsmöglichkeiten

Nächste Schritte das Modell zu verbessern

Um mehr Genauigkeit in den Extremen Bereichen zu erreichen, müssten mehr atmosphärische Gase einbezogen werden. Diese Gase besitzen wiederum unterschiedliche Gefrierpunkte, was die Modellierung der Vereisung zulässt.

Im simulierten Modell wurden lediglich der Durchmesser und die Distanz zur Sonne der Planeten einbezogen. Um die Aussagekraft zu verbessern könnten weitere Planet-abhängige Parameter implementiert werden, wie der Vulkanismus und die Rotationsgeschwindigkeit. Die Rotation erlaubt das Modellieren von Tag- und Nachtseitentemperatur, welche sich stark auf das Klima auswirken.

# **Kapitel 16**

## **Achsneigung und Eiszeiten**

Sebastian Lenhard

### **16.1 Abschnitt**

### **16.2 Schlussfolgerung**



# **Kapitel 17**

## **Vegetation**

Matthias Dunkel

### **17.1 Abschnitt**

### **17.2 Schlussfolgerung**



# Kapitel 18

## Datenassimilation für das Lorenz-System

Michael Müller

### 18.1 Datenassimilation

Die meteorologische Datenassimilation hat zur Aufgabe, Anfangszustände für die numerische Wettervorhersage (analysis or filtering mode), Klimaprojektionen (forecasting or predicting mode) oder Untersuchungen am vergangenen Erdklima (reanalysis or smoothing mode) zur Verfügung zu stellen, die räumlich und zeitlich unvollständig vorliegen. Die Datenassimilation nutzt hierzu direkte und indirekte Messungen der Atmosphäre in Kombination mit berechneten Modellzuständen, um daraus einen in sich stimmigen Gesamtzustand zu ermitteln. Die Ermittlung des Zustandes der Atmosphäre erfolgt in regelmässigen zeitlichen Abständen, dem sogenannten Datenassimilations-Zyklus, durch welchen eine verlässliche Bestimmung der atmosphärischen Grössen wie Druck oder Temperatur möglich wird.

### 18.2 Kalmanfilter

Ein Werkzeug der Datenassimilation ist der Kalmanfilter mit seinen diversen Abwandlungen. In diesem Kapitel wird der Extended Kalmanfilter genauer erklärt und auf die nötigen Parameter eingegangen. Extended bezeichnet hier eine Erweiterung des Kalmanfilters auf nicht-lineare dynamische Systeme, wie in diesem Beispiel dem Lorenz-Modell aus dem Jahre 1963 (LM63). Er wurde im Zuge der Apollo Mission von Stanley F. Schmidt entwickelt und zur Navigation im Weltraum angewendet.

Der Kalmanfilter ist ein rekursives Verfahren zur Filterung von Datensätzen, bei dem der zukünftige Datenpunkt als Linearkombination der Beobachtung und einer Vorhersage durch ein mathematisches Systemmodell geschätzt wird. Voraussetzung für die Beobachtung ist die Messung mindestens einer Systemvariablen mit zugehöriger Varianz. Für das Modell ist eine Matrix nötig, die aus dem

alten Zustand auf den neuen schliessen lässt.

### 18.2.1 Allgemeine Funktionsweise

Die Struktur des Kalmanfilter-Algorithmus erlaubt eine Echtzeitfilterung und macht ihn so für diverse Anwendungen interessant.

Der Algorithmus besteht aus folgender Schrittfolge:

1) Die Vorhersage wird sowohl für den folgenden Datenpunkt sowie dessen Kovarianz durchgeführt, wobei das  $\phi$  die Transformationsmatrix ausdrückt, wie vom jetzigen Zustand auf den nächsten geschlossen werden kann. Die Notation  $\hat{x}_{k+1|k}$  bedeutet die Schätzung von  $x$  zum Zeitpunkt  $k$  für den nächsten Zeitpunkt  $k + 1$ .

$$\hat{x}_{k+1|k} = \phi \hat{x}_k$$

$$P_{k+1|k} = \phi_k P_k \phi_k^t + Q_k$$

#### 2) Kalmanfaktor

Der Kalmanfaktor  $K$ , gewichtet in Abhängigkeit der beiden Fehlerkovarianzen die Beobachtung oder das Systemmodell stärker. Dabei löst der Algorithmus das Problem optimal, so dass sich für die später korrigierte Vorhersage das Minimum der resultierenden Kovarianz ergibt.

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1}$$

#### 3) Korrektur

Die Vorhersage wird nun mit dem Kalmanfaktor und der Messung korrigiert. In der folgenden Beschreibung ist die Gewichtung durch den Kalmanfaktor in der Matrixschreibweise zu erkennen. Dasselbe Vorgehen gilt für die Kovarianzmatrix  $P$ .

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= (I - K_k H_k) \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \\ P_k &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^t + K_k R_k K_k^t\end{aligned}$$

$H$  ist die Messmatrix und gibt an, welche Komponenten, mit allfälliger Verstärkung, gemessen werden können.  $R_k$  und  $Q_k$  sind die Kovarianzen der Messung und des Systems. Die Simulation wie auch die Messung sind mit einem normalverteilten Fehler,  $u_k$  und  $w_k$ , überlagert. Für die Messung sowie das vorangehende Systemmodell gilt folgendes:

$$z_k = H_k x_k + w_k, \text{ mit } w_k \sim N(0, \sigma^2)$$

$$R_k = E(w_k w_k^t)$$

$$x_k = \phi_{k-1} x_{k-1} + u_k, \text{ mit } u_k \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Q_k = E(u_k u_k^t)$$

## 18.2.2 Anwendung auf das Lorenz-System

Als Anwendungsbeispiel für den Kalmanfilter nun die Parameter mit dem LM63. Die Fehlerkovarianzen sind konstant und haben bei vollständig erfassbaren Messwerten folgende Form.

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

Die Messmatrizen, die für diese Arbeit Verwendung finden, sind unten dargestellt. Die Einheitsmatrix  $H_1$  misst zum Beispiel jeden der drei Einträge des Lorenz Systems ( $x \ y \ z$ ). Die zweite Messmatrix misst den x-Eintrag nur als Kombination von x und y sowie den y-Eintrag als Kombination von y und z, was oft die Realität widerspiegelt, wo Messgrößen nicht direkt gemessen werden können.  $H_3$  und  $H_4$  als anspruchsvolle Beispiele für den Filter, wo Messwerte fehlen und damit für je eine Variable keine Korrekturmöglichkeit besteht.

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Messwert mit  $H_3$  sieht dann zum Beispiel wie folgt aus:

$$\hat{z}_k = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{H_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}}_{FehlerR}$$

Eine Schwierigkeit stellt die Herleitung vom  $\phi$  für den Filter dar. Als Einführung ein kurzes Beispiel aus der translatorischen Bewegungsgleichung zur Positionsbestimmung.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_{k+1|k} \\ v_{k+1|k} \\ a_{k+1|k} \end{pmatrix}}_{\hat{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} s_k \\ v_k \\ a_k \end{pmatrix}}_{\hat{x}_k}$$

Eine Matrix  $\phi$  für das nicht-lineare chaotische System wie das LM63 kann nicht auf diese Weise aufgestellt werden. Eine Möglichkeit ist die Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, daher wie stark ändert sich der Zielwert, wenn die Anfangsbedingung um ein  $\Delta x_0$  verändert wird. Wie stark deren Einfluss sein kann, zeigt symbolisch Abbildung 18.1.

Während des Datenassimilations-Zyklus wird das Systemmodell mit den Anfangsbedingungen sowie dem  $\phi$  mittels folgender Formel gelöst und integriert:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ \mathbf{F}(x, y, z)\mathbf{J} \end{pmatrix}, \text{ mit Anfangsbedingung } X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F \text{ als Jakobische Matrix des LM63 } F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

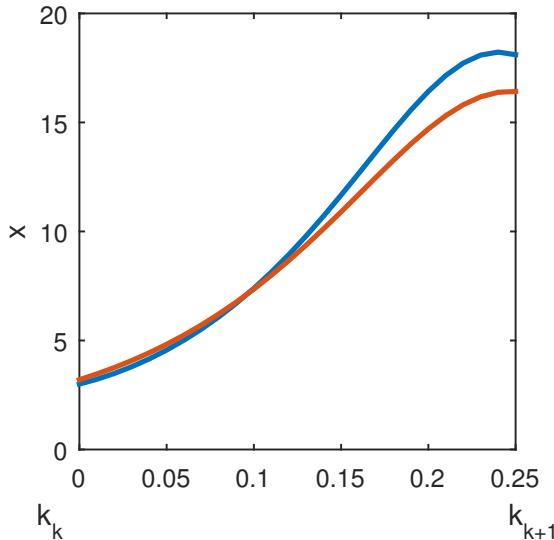


Abbildung 18.1: Ableiten nach den Anfangsbedingungen

**J** und **E** sind  $3 \times 3$  Matrizen, die spaltenweise in den Vektor eingefüllt wurden.  $f(x, y, z)$  ist die rechte Seite des LM63. Der gelöste Vektor hat dann für unser System folgende Form:

$$X_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ J_{11} \\ J_{12} \\ J_{13} \\ J_{21} \\ J_{22} \\ J_{23} \\ J_{31} \\ J_{32} \\ J_{33} \end{pmatrix}$$

Die Herleitung dieser Formeln ist im Buch Differentialgleichungen im Kapitel 2.1.5 Ableitung nach der Anfangsbedingung aus dem mathematischen Seminar im FS2016 zu finden. Die Einträge aus  $X_k$  von 4-12 werden nun wieder spaltenweise in eine  $3 \times 3$  Matrix umgewandelt, welche nun unser gesuchtes  $\phi$  ist.

### 18.2.3 Parameter und Initialisierung

Die Werte für die charakteristischen Parameter des Lorenz-System, unter deren ein chaotisches Verhalten möglich ist, werden auch hier verwendet.

$$\sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28$$

Der Startwert  $x_0$  ist vom Standardwert  $(3 \quad 15 \quad 1)^t$  verschieden, um das chaotische Verhalten schneller herbeizuführen und Rechenzeit einzusparen. Gezeigt wird auch nur jeweils der Ausschnitt zwischen  $t = 5$  und  $t = 10$ , da an der Stelle das chaotische Verhalten ausgeprägt vorhanden ist.  $P_0$ , als Startwert für die Varianz der Simulation, wird zur Sicherheit gross gewählt. Dies hat für die Berechnung keinen signifikanten Einfluss, da der Algorithmus den Wert zeitnah korrigiert.  $J$  wird mit der Einheitsmatrix initialisiert und dient der Berechnung des  $\phi$ . Diese Matrix wird über mehrere Zwischenschritte, mit Vorhersage und Korrektur, bis zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$  integriert.

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zufällige Störsignale in der Messung oder in die Simulation werden keine eingebaut, da aufgrund der starken Vereinfachungen und Transformationen bis hin zum Lorenzmodell aus einem ursprünglichen Messfehler (z.B.  $\pm 1^\circ C$ ) kein Rückschluss mehr möglich wäre.

### 18.2.4 Anmerkungen zur Kovarianzmatrix und dem Kalmanfaktor

Da  $P_{k+1|k} = f(\phi, Q)$ ,  $K = f(P, H, R)$  sowie  $P_k = f(K, H, R)$  im Falle der Positionsbestimmung Konstanten sind, müssen sie nicht in jedem Zyklus neu berechnet werden und können als Konstanten einprogrammiert werden. Im diesem Fall ist das  $\phi$  eine Variable, weshalb die  $K$  und  $P$  auch Variablen sind und jeweils berechnet werden müssen. Zwei Beispiele sind in der Abbildung 18.2 dargestellt. Es ist sowohl eine deutliche Abnahme der Genauigkeit sowie deutlich stärkere Fluktuationen von  $H_1$  zu  $H_2$  erkennen.

## 18.3 Beobachtungen und Erkenntnisse

In diesem Kapitel werden aufgestellte Hypothesen besprochen und mit Simulationen verdeutlicht. Das LM63 wird mit den vorgestellten Messmatrizen gemessen und gefiltert. Um die Anzahl Variablen zu reduzieren, wird die folgende dimensionslose Grösse verwendet. Ein  $F_R > 1$  bedeutet, dass die Messung genauer ist, als die simulierte Vorhersage, sodass diese stärker gewichtet wird. Die absolute Fehlervarianz ist für den Filteralgorithmus irrelevant, da lediglich das Verhältnis Einfluss auf die Gewichtung nimmt.

$$F_R = \frac{Q}{R}$$

Um den Datenassimilations-Zyklus dimensionslos darzustellen, bildet  $S$  die Schrittmenge pro Oszillation. Trotz der chaotischen Oszillation in zwei Richtungen ist diese nahezu konstant. Gilt zum Beispiel  $S = 2$ , so werden pro Oszillation zwei Messungen durchgeführt. Da diese nicht konstant ist, erfolgen die Messungen nicht immer am selben Ort.

Die Untersuchungen werden mit der Oberfläche in Abbildung 18.3 durchgeführt, wobei die rote Linie als Realität, die blauen Sterne als simulierte Vorhersagen und die roten Kreise als gefilterte Werte dargestellt sind. Sie zeigt auch, dass trotz sehr genauer Messung und dadurch einer marginalen Abweichung vom Anfangszustand, eine Vorhersage nur für einen beschränkten Zeitraum möglich ist.

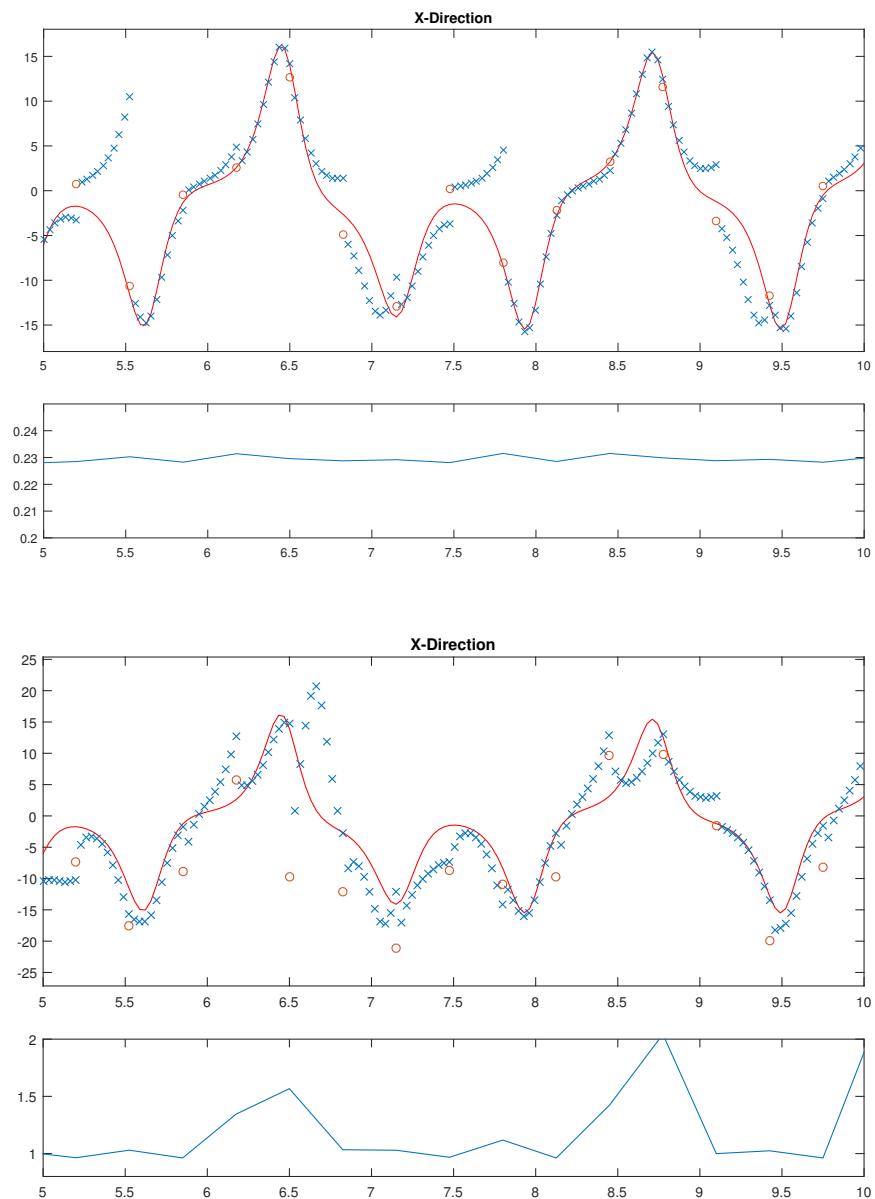


Abbildung 18.2: Filteroutput für die X-Achse mit Kovarianzmatrix  $P_{11}$  bei direkter Messung mit  $H_1$  der Zustandsvariablen (oben) und bei indirekter Messung mit  $H_2$  (unten)

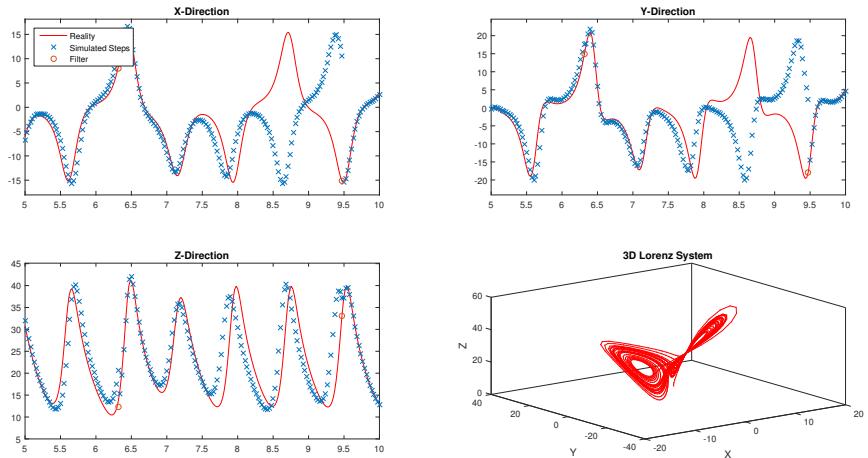


Abbildung 18.3: Arbeitsoberfläche mit Legende

### 18.3.1 Vollständig erfassbares System

Als vollständig erfassbares System gelten hier die Systeme mit den Messmatrizen.

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine naheliegende Vermutung ist, dass eine genauere Messung, bessere Vorhersagen über einen längeren Zeitraum erlaubt. Also aus einem grösseren  $F$  resultieren besser Vorhersagen, was die oberen beiden Bilder in Abbildung 18.4 illustrieren. Dies gilt aber nur, wenn das Systemmodell gut mit der Realität korreliert, was in diesem Versuch der Fall ist, da die Realität genau dem Systemmodell entspricht. Was ein Vergleich der unteren Bilder deutlich zeigt, ist dass der Mehraufwand an Messgenauigkeit auch dadurch kompensiert werden kann, in dem zu einem günstigerem Zeitpunkt gemessen wird. Hierbei zeigt sich deutlich das Chaos des System, wo nicht quantitativ beurteilt werden kann, zu welchen Zeitpunkt welche Genauigkeiten notwendig sind.

Abbildung 18.5 zeigt das Modell in dem Messungen zweimal pro Oszillation zur Verfügung stehen. So steht eine korrigierende Messung schneller zur Verfügung, jedoch wird auch der Vorhersage-Zeitraum kürzer, was denn Zweck des Filters zunehmend einschränkt. Deutliche Verbesserungen gegenüber vorhin sind nicht zu erkennen, sie werden in diesem Beispiel sogar schlechter. Je häufiger das gemessen wird, desto weniger relevant wird zudem der Zeitpunkt der Messung. Um die Relevanz nochmals zu verdeutlichen, eine Vorhersage in die entgegengesetzte Richtung bedeutet, dass die Drehrichtung der Konvektionsströme falsch geschätzt wurde.

Bei fünf Messungen pro Oszillation (Abbildung 18.6), trotz niedriger Messgenauigkeit, ist eine exakte Rekonstruktion der simulierten Realität möglich. Simulierte Zwischenschritte sind meist korrekt, sind aber nur für kurze Intervalle verfügbar und damit immer weniger interessant.

Können alle Messwerte gemessen werden, aber nur als Linearkombination wie mit  $H_2$ , sind Verschleppungen von Oszillationen aus einer Achse in eine andere erkennbar. In Abbildung 18.7 ist zu erkennen, das trotz dieser Schwierigkeit, der Filter die Realität sehr gut vorhersagen kann. Jedoch

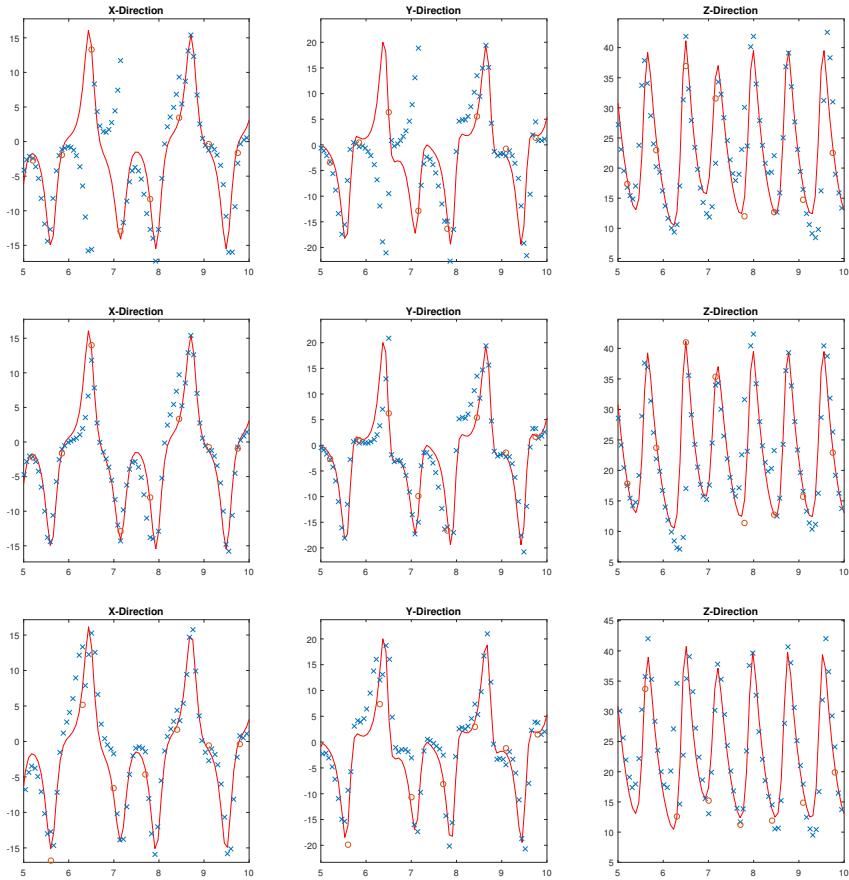


Abbildung 18.4: Messmatrix H1 jeweils mit S=1 und F=10 (oben), F=20 (mitte) und F=10 (unten), letztere mit versetzter Messung

scheint eine Verbesserung der Messgenauigkeit keine Verbesserung der Vorhersagen zu bewirken. Auch die Messrate zu verdoppeln löst die Problematik nur bedingt, da nun häufig kombinierte Werte gemessen werden, die um den Wert anderer Koordinaten verschoben sind. Die Simulation ist hier verlässlicher als mit der Messmatrix H1, trotzdem ist eine regelmässige Referenzierung unerlässlich. So verlief der Versuch unter allen bisher genannten Bedingungen negativ, den Fehler der Simulation stärker zu gewichten als den Messfehler.

Wird die Messkadenz noch einmal wie in Abbildung 18.9 erhöht, scheinen einzig die Werte in X und Z Richtung verlässlichere Vorhersagen und bessere gefilterte Daten zu liefern. Der Y-Wert und deren Simulationen zeigen häufig gar in die falsche Richtung. Dies kann darauf zurück zu führen, da in der Gleichung für Y alle drei Koordinaten Einfluss nehmen und so eine Messung schwierig ist. Aufgrund der resultierenden Abweichung folgt dann eine schlechte Vorhersage des Systems.

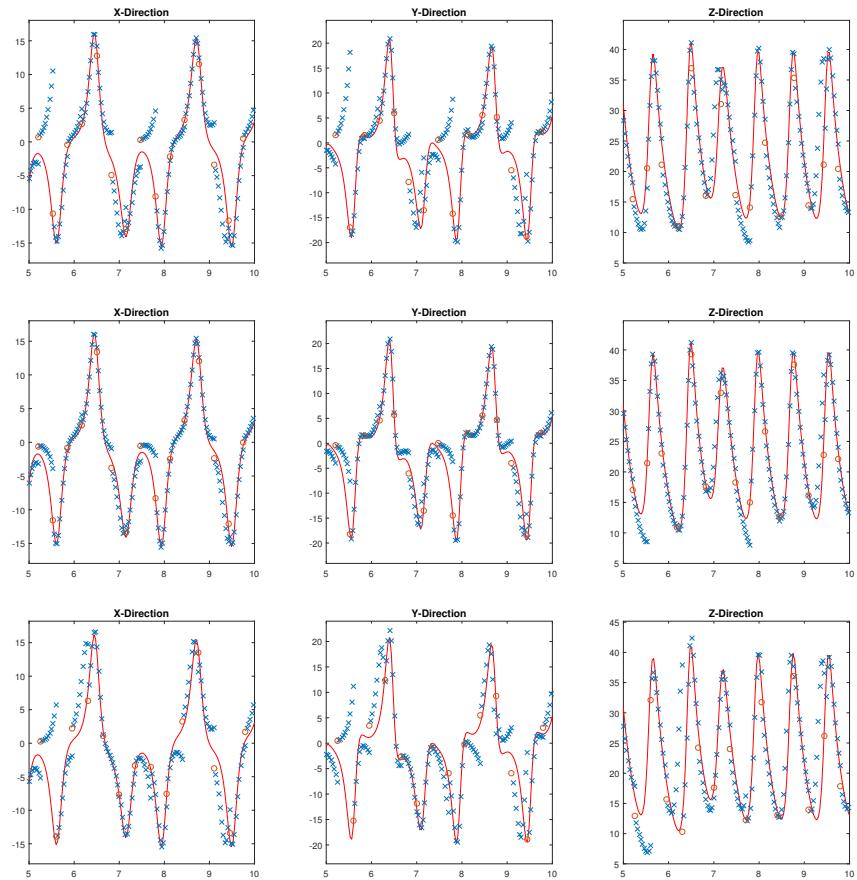


Abbildung 18.5: Messmatrix H1 jeweils mit  $S=2$  und  $F=10$  (oben),  $F=25$  (mitte) und  $F=10$  (unten), letztere mit versetzter Messung

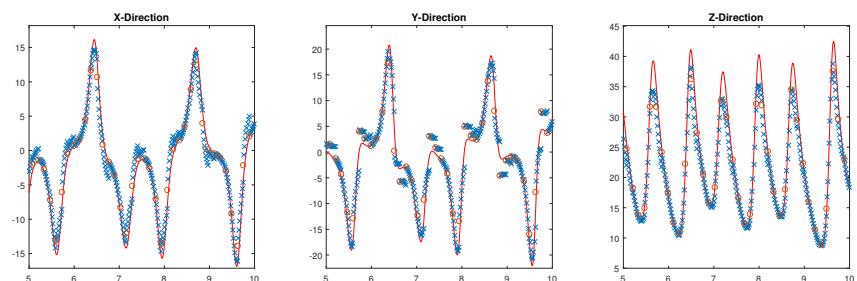
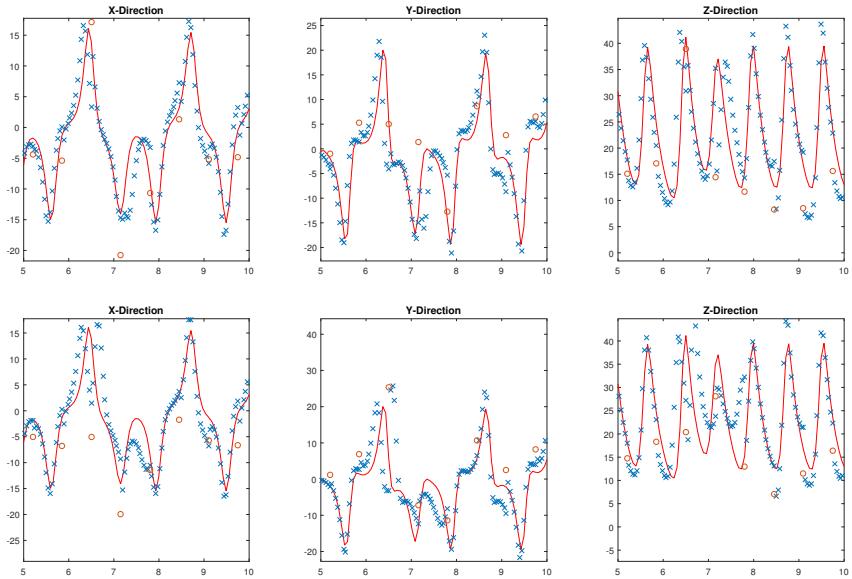
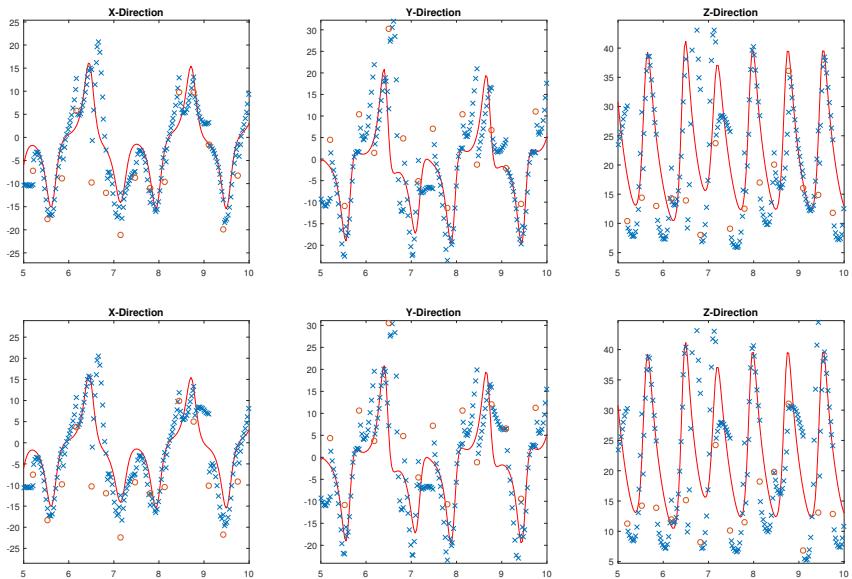


Abbildung 18.6: Messmatrix H1 mit  $S=5$  und  $F=5$

Abbildung 18.7: Messmatrix H2 mit  $S=1$  und  $F=5$  (oben) und  $F=20$  (unten)Abbildung 18.8: Messmatrix H2 mit  $S=2$  und  $F=10$  (oben) und  $F=20$  (unten)

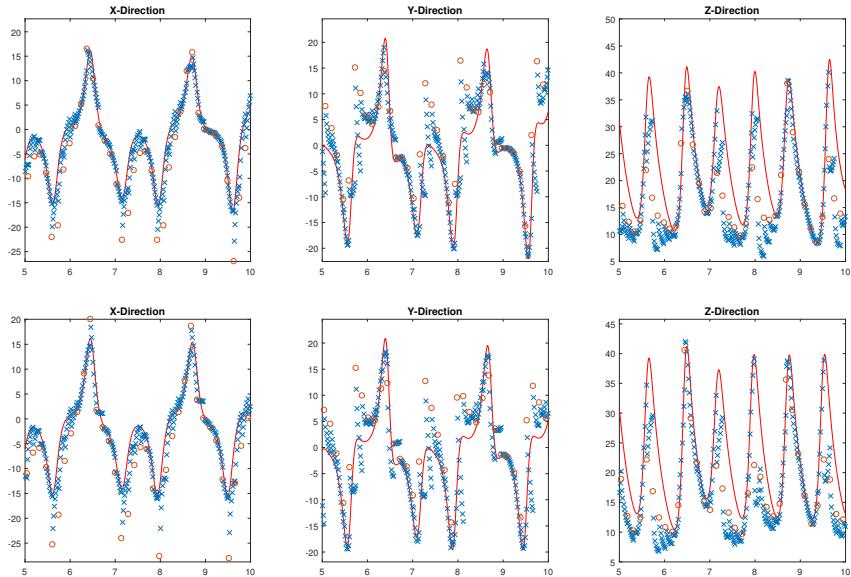


Abbildung 18.9: Messmatrix H2 mit S=5 und F=5 (oben) und F=10 (unten)

### 18.3.2 Unvollständig erfassbares System

Nun noch die unvollständig erfassbaren Systeme mit den Messmatrizen  $H_3$  und  $H_4$ .

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gemäss der rechten Seite des Lorenz Modells ist bekannt, dass alle drei Werte von einander abhängen, und so folglich alle zur Verfügung stehen müssten. In Abbildung 18.11 der Versuch, mit verschiedenen  $F$  und  $S$  der Situation trotzdem Herr zu werden. Erst im mittleren Bild mit  $S = 2$  und  $F = 20$  ist die Anzahl der richtig vorhergesagten Werten, abgesehen von den Werten für Z, in der Überzahl. Wird die Messkadenz weiter erhöht, folgen die Simulation gut der Realität, wobei die Schwierigkeit erneut bei den Werten für Y liegt, da Z Werte komplett auf Simulationen beruhen. Das überhaupt eine Rekonstruktion möglich ist, ist der Tatsache geschuldet, dass die Z-Achse keine Informationen über das Chaos des Systems enthält, daher ob die Konvektionszelle mit oder gegen den Uhrzeigersinn strömt. Dies ist sowohl in den diversen Z-Ansichten zu erkennen, wo die Werte mit annähernd gleichbleibender Oszillation und Amplitude vorkommen, sowie in der Abbildung 18.10 mit der Sicht in die XY-Ebene. Folglich kann mit einer höheren Messkadenz bessere Ergebnisse erzielt werden, als wenn die Messgenauigkeit erhöht wird.

Liegen wie mit  $H_4$  in Abbildung 18.12 lediglich Werte für X und Z vor, reicht dies nicht mehr für eine Rekonstruktion der Realität. Die Simulationen liegen, abgesehen von den Z Werten, öfters daneben, als dass sie die Drehrichtung richtig angeben. Eine Erhöhung der Messkadenz oder genaueres Messen hilft nicht, die Vorhersagen zu verbessern. Dies deshalb, da das Y relevante Informationen über das Gesamtsystem enthält. Da die Messwerte für X und Z zur Verfügung stehen, korrigiert der Filter diese trotzdem richtig. Die Rekonstruktion der Z Werte scheint unter Umst"nden möglich zu sein, da kein chaotisches Verhalten vorliegt und dafür weniger Werte zur Verfügung stehen müssen.

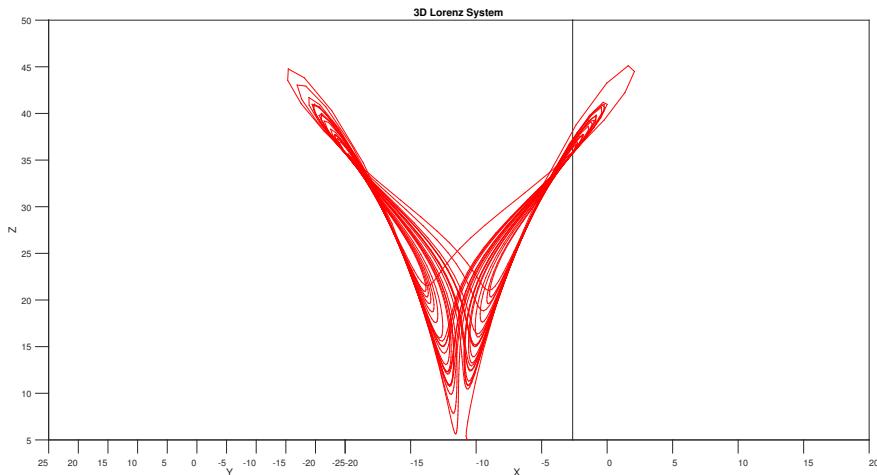


Abbildung 18.10: 3-D Lorenz System mit Sicht auf Z-Achse

## 18.4 Schlussfolgerung

Erkenntnisse:

Fehlender Messwert für Z und trotzdem brauchbare Vorhersagen.

Extrem chaotisches Verhalten bei marginalen Änderungen der Parameter, fast egal welcher, und so sehr schwierig Simulationen genau nachzuvollziehen. Die Tendenzen scheinen aber auch mit theoretischen Überlegungen übereinzustimmen.

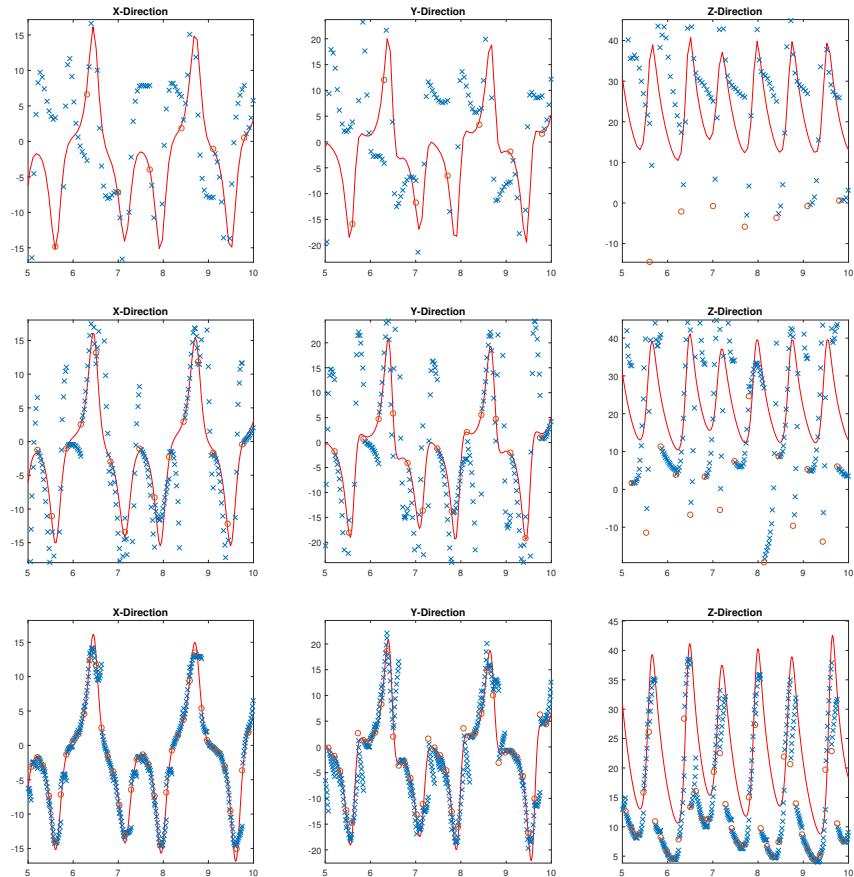


Abbildung 18.11: Messmatrix H3 mit  $S=1$ ,  $F=10$  (oben),  $S=2$  und  $F=20$  (mitte) und  $S=5$  und  $F=5$  (unten)

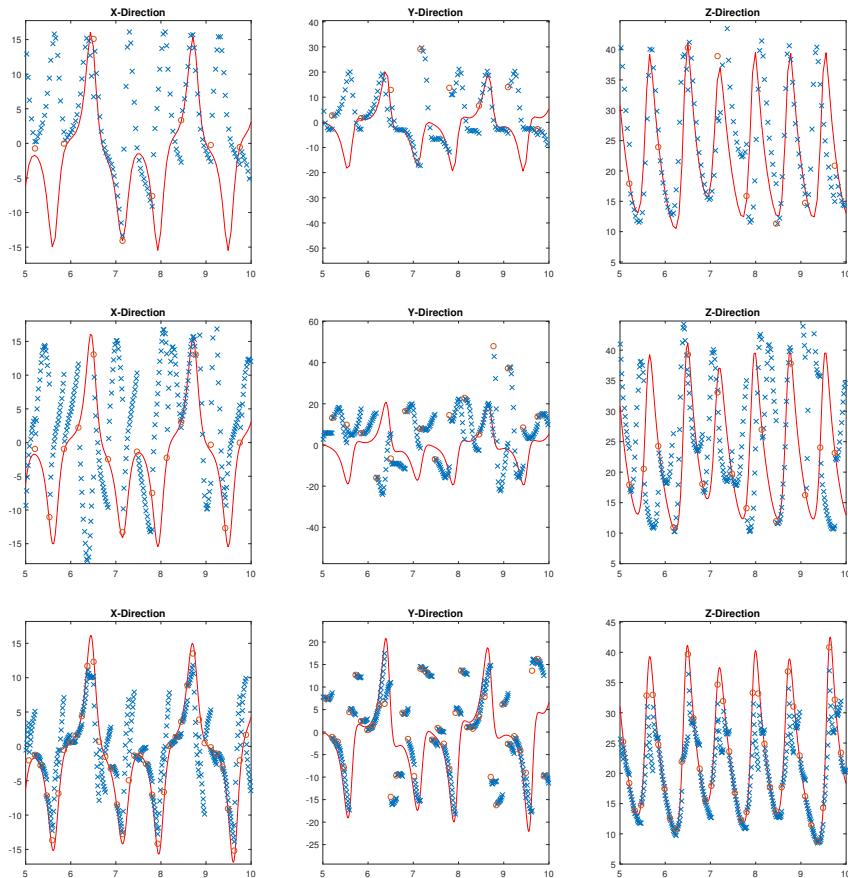


Abbildung 18.12: Messmatrix H4 mit  $S=1$ ,  $F=10$  (oben),  $S=2$  und  $F=20$  (mitte) und  $S=5$  und  $F=5$  (unten)

# Kapitel 19

## Extreme Ereignisse

Melina Staub

### 19.1 Einleitung

Fast täglich erscheinen Schlagzeiten wie diese in der Zeitung:

- Wetter-Extreme häufen sich auch in der Schweiz
- Seit Lothar wird es der vielleicht stärkste Sturm
- Die Schweiz reagiert empfindlich
- Unwetter sorgten für eine chaotische Nacht
- Schweiz besonders stark vom Klimawandel betroffen

Doch wieviel Wahrheit steckt in diesen Headlines? Sind sie nur Hirngespinsten der Nachrichtenindustrie? Wollen uns die Medien täuschen oder geht da draussen wirklich etwas vor sich?

Dass die Natur im Wandel ist, steht ausser Frage. In der Geschichte der Erde waren extreme Ereignisse keine Seltenheit. Ob Eiszeiten, Trockenperioden oder lang anhaltende Regenschauer, wohl jedes vorstellbare Ereignis ist vorgekommen. Vulkanausbrüche pumpten Kohlendioxid in die Atmosphäre und Meteoriteinschläge lösten Tsunamis aus, welche die Landflächen fluteten. Die Erde hat sich von Zeit zu Zeit und nach jedem Ereignis erholt oder angepasst. Doch seit Mitte des 18. Jahrhunderts und somit mit der Industrialisierung hat sich viel verändert.

Vergessen Sie für die nachfolgenden Seiten ihre Vorurteile und Feststellungen rund um den Klimawandel und lassen sie sich am Ende von der Wahrheit überzeugen. Was bereits klar ist, die Erde wird den Klimawandel überstehen, wie sie auch schon extreme Trockenperioden oder Eiszeiten überlebt hat. Doch was wird mit uns?

## 19.2 Was sind extreme Ereignisse?

Die Diskussionen um den Klimawandel erregt die Gemüter auf der ganzen Welt. Einige verleugnen ihn und andere schenken ihm Glauben und tun alles um ihn zu stoppen. Besonders extreme Ereignisse wie starke Regenfälle und die daraus resultierenden Überschwemmungen und Verwüstungen bleiben uns stark in Erinnerung. Eben diese Ereignisse weichen stark von den Durchschnittswerten ab und hinterlassen oft grosse Schäden und ebenso grosse Schadensummen. Doch nicht nur überdurchschnittlich starke Ereignisse, sondern auch sehr kleine wie Trockenperioden oder Wasserknappheit sind extreme Ereignisse. Jetzt stellt sich die Frage, ob diese extremen Ereignisse natürlichen Ursprungs sind, also die Anordnung durch den Zufall bestimmt wird und auch ohne den Einfluss des Menschen passiert wären oder ob diese auf den Klimawandel zurückzuführen sind und somit eine unnatürliche Häufung aufzeigen.

### 19.2.1 Aufzeichnungen in der Schweiz

In den *Schweizer Wetterjahresbücher* und *Analen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt* lassen sich Wetter- und Klimadaten bis ins Jahr 1864 abrufen. Umfangreiche Tabellen und Berichte sind für Wetter- und Klimainteressierte ein historisch sehr bedeutender Datenschatz. Der Monatliche Wetterverlauf wurde ab dem Jahr 1911 geführt, extreme Wetterereignisse in Berichten beschrieben und aufgezeichnet (Abbildung 19.1). Die Analen wurden 2011 durch den Klimareport abgelöst. Seit dem Jahr 2011 sind der Klimabericht wie auch die Analen für die Öffentlichkeit zugänglich und können Online eingesehen werden. Mit diesen langen und genauen Klimadaten lässt sich tief in die Vergangenheit des Schweizer Klima blicken. Ein Blick in die Klima-Vergangenheit wird möglich.

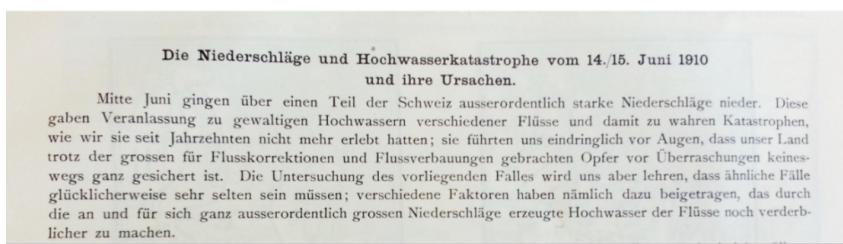


Abbildung 19.1: Originaltext aus den Annalen 1910 zur Hochwasserkatastrophe vom Juni 1910.  
(Quelle: MeteoSchweiz)

### 19.2.2 Homogene Messreihen

Um die Klimadaten der letzten 150 Jahren miteinander zu vergleichen, müssen die Messergebnisse vor dem Vergleich Homogenisiert werden (Abbildung 19.2). Die Modernisierung der Messgeräte, eine Verschiebung des Messstandortes oder die Veränderung der Umgebung führen zu anderen Messwerten als beispielsweise diese des Vorgänger Messgeräts. Die Daten liefern einen verfälschten Vergleich, wenn man sie ohne Homogenisierung miteinander vergleicht. Wenn man den Messstandort verlegt, verändert sich die Höhenlage. Dies wirkt sich auf die Temperaturmessung aus, da sich diese mit der Höhe im Mittel verschiebt. Die Messreihe wird ungenau und ein verfälschtes Bild

zeichnet sich ab, welches nichts mit dem Klima zu tun hat. Um diese Fehlinterpretationen zu vermeiden, sind in den *Schweizer Wetterjahresbücher* und *Analen der Schweizerischen Meteorologischen Zentralanstalt* sämtliche Messwerte homogenisiert worden. Ein direkter Vergleich wird so möglich.

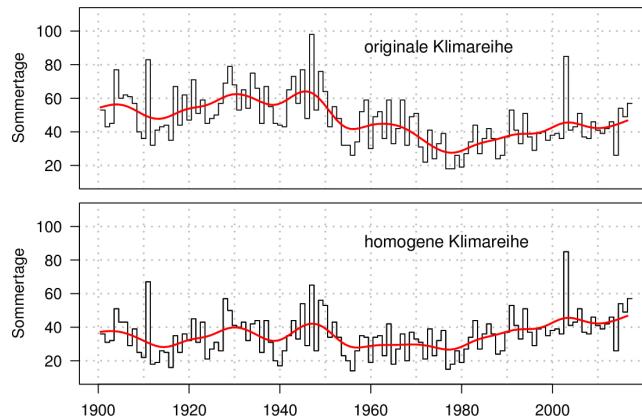


Abbildung 19.2: Entwicklung der Anzahl Sommertage (Maximum-Temperatur  $\geq 25^{\circ}\text{C}$ ) pro Jahr an der Messstation Zürich/Fluntern seit 1901, gerechnet aus der originalen und homogenen Temperatur-Messreihe. Der geglättete Verlauf ist rot eingezzeichnet. (Quelle: MeteoSchweiz)

## 19.3 Unwetterlotto

Um herauszufinden ob extreme Ereignisse nicht durch den Zufall bestimmt werden, benötigen wir vorerst ein Modell um diese Berechnungen durchführen zu können. Hierbei bedienen wir uns dem Glücksspiel, genauer gesagt dem Lotto.



Abbildung 19.3: Unwetterlottoschein exklusive erhältlich für Mathsem Teilnehmer.

Exklusiv für die Leserinnen und Leser dieses Seminarbuches steht der Unwetterlottoschein zur Verfügung, welchen man am Zeitungskiosk (Abbildung 19.3) erwerben und statt auf Zahlen auf Unwetterereignisse tippen kann. Auf dem Unwetter-Lotto-Schein (Abbildung 19.4) kann wie beim

normalen Zahlenlotto aus verschiedenen Zahlen ausgewählt und seine Tipps abgeben werden. Danach gibt es eine Unwetterziehung, welche mit den abgegebenen Tipps verglichen werden können.

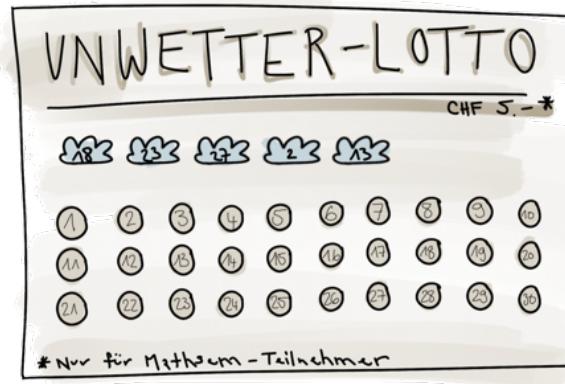


Abbildung 19.4: Unwetterlottoschein.

Die Kugeln 1-30 beschreiben unsere totalen Ereignisse, welche wir **N** nennen. Die fünf Wolken stehen für die Anzahl Kreuze, welche wir machen dürfen. Sprich welche Unwetter **n** wir aus den totalen Ereignissen 1-30 auswählen. Die bei der Unwetterziehung gezogenen Ereignisse **M** sind unsere Stichproben aus allen Ereignissen.

Jetzt stellen wir uns die entscheidende Frage: Wie wahrscheinlich ist ein 5er im Unwetter-Lotto (Abbildung 19.6) zu erhalten? Diese Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit **k**.

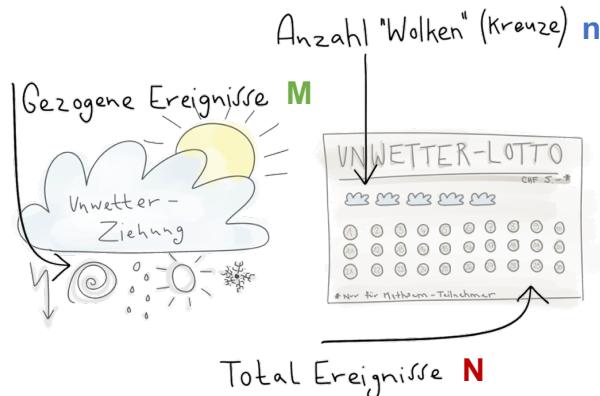


Abbildung 19.5: Unwetterlottoschein mit den Variablen und der Unwetterziehung.



Abbildung 19.6: Wahrscheinlichkeit, einen 5er im Unwetterlotto zu erhalten.

### 19.3.1 Lottoproblem

Mit dem Unwetterlotto wurde das bekannte Lottoproblem beschrieben. Ein Experiment ohne zurücklegen. Mit jeder Ziehung ändert sich im Laufe des Experiments die Grundgesamtheit und somit auch die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis zu ziehen. Der Ziehmodus ist gegeben und somit ist auch der Gewinn bekannt.

### 19.3.2 Unwetter-Verteilung

Die Unwetter-Verteilung (Abbildung 19.7) und das oben beschriebene Lottoproblem liefern uns folgendes Ergebnis:

Wie wahrscheinlich ist es...

- ... auf einem Lotozettel mit **N** Feldern...
- ... auf welchem man **n** Unwetter ankreuzen kann...
- ... und bei der Ziehung **M** Unwetter gezogen werden...
- ... genau **k** Richtige zu haben?

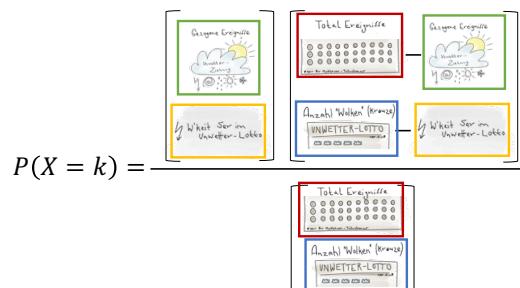


Abbildung 19.7: Unwetterverteilung mit den Ereignissen ergeben die Wahrscheinlichkeit für den 5er im Unwetterlotto.

## 19.4 Die hypergeometrische Verteilung

Um die Frage zu beantworten, ob sich das Klima verändert und ob immer häufiger extreme Ereignisse auftreten, bedienen wir uns aus dem Werkzeugkasten der Statistik. Die Unwetter-Verteilung ist somit nichts anderes als die hypergeometrische Verteilung. Die hypergeometrische Verteilung ist eine diskrete Verteilung.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit aus N gegebenen Elementen, mit M Elementen einer speziellen Eigenschaft, und einer Stichprobe aus n Elementen genau k Treffer zu erzielen. Anders als die Binomialverteilung ist die hypergeometrische Verteilung ein Experiment ohne zurücklegen. Sprich die Wahrscheinlichkeit ändert sich mit jeder Ziehung.

### 19.4.1 Herleitung

Die hypergeometrische Verteilung setzt sich aus verschiedenen Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

zusammen.

Um im Kapitel 19.6 Messpunkte Schweiz die Klimadaten auszuwerten, werden in der folgenden Herleitung der hypergeometrischen Verteilung die folgenden Werte für die entsprechenden Variablen verwendet:

$$\begin{array}{ll} N = 75 & n = 7 \\ M = 10 & k = 3 \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(X = 3)$  ergibt sich aus:

Anzahl der Möglichkeiten, genau 3 extreme Ereignisse (und damit genau 4 normale) Ereignisse auszuwählen, dividiert durch die Anzahl Möglichkeiten 7 Ereignisse aus allen Ereignissen auszuwählen.

Dabei gibt es

$$\binom{M}{k} = \binom{10}{3} = 120$$

Möglichkeiten, genau 3 extreme Ereignisse auszuwählen.

Zudem gibt es

$$\binom{N-M}{n-k} = \binom{75-10}{7-3} = \binom{65}{4} = 677040$$

Möglichkeiten, genau 4 normale Ereignisse auszuwählen.

Da jede Möglichkeit 3 extreme Ereignisse mit jeder Möglichkeit 4 normale Ereignisse auszuwählen kombiniert werden kann, ergibt sich

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \binom{75-10}{7-3} = 120 \cdot 677040 = 81244800$$

Möglichkeiten für genau 3 extreme und 4 normale Ereignisse auszuwählen.

Zusätzlich gibt es insgesamt

$$\binom{N}{n} = \binom{75}{7} = 1984829850$$

Möglichkeiten, 7 Ereignisse aus allen Ereignissen zu ziehen.

Für  $k = 3$  erhalten wir somit die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\binom{10}{3} \binom{75-10}{7-3}}{\binom{75}{7}} \\ &= \frac{120 \cdot 677040}{1984829850} = 0.0409329 \end{aligned}$$

Sprich in rund 4.09 % aller Fälle werden genau 3 extreme und 4 normale Ereignisse vorkommen. Diese Berechnung lässt sich mit allen  $X = k$  durchführen, dies wird im Kapitel 19.4.2 Dichte der hypergeometrischen Verteilung gemacht.

## 19.4.2 Dichte der hypergeometrischen Verteilung

Im vorangehenden Beispiel wurde die Dichte der hypergeometrischen Verteilung berechnet für  $f(k = 3)$ .

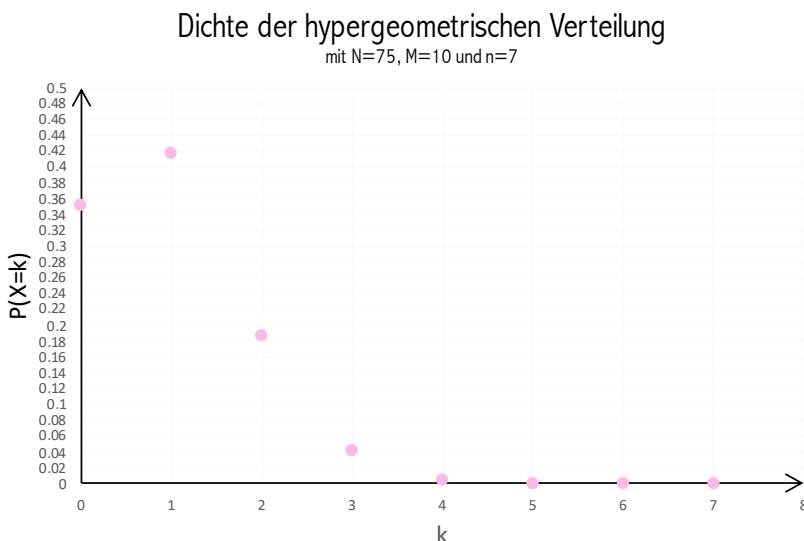
**Definition 19.1.** Die Dichte der hypergeometrischen Verteilung, sind die Wahrscheinlichkeitswerte für alle  $P(X = k)$ .

Für alle  $P(X = k)$  ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten (Abbildung 19.8).

Die Wahrscheinlichkeit beschreibt dabei, wie wahrscheinlich es ist, genau  $k$  extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren zu finden. Beachte, dass die Werte  $N$ ,  $M$  und  $n$  das Experiment beschreiben und nicht mehr verändert werden. Die Variable  $x$  hingegen kann alle möglichen Ausgänge des Experiments annehmen, in unserem Beispiel also von 0 bis 7.

In der Grafik (Abbildung 19.9) ist sehr gut ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit bei genau einem extremen Ereignis in den letzten 10 Jahren am höchsten ist. Wohingegen genau 3 Ereignisse nur noch eine Wahrscheinlichkeit von 4.09% aufweisen, was bereits sehr unwahrscheinlich ist. Häufungen von Ereignissen, welche die Menge 3 überschreiten, sind so unwahrscheinlich, das sie kaum natürlichen Ursprungs sein können.

k	$P(X=k)$
0	0.3507558
1	0.4161509
2	0.1872679
3	0.0409329
4	0.0046214
5	0.0002640
6	$6.87 \cdot 10^{-6}$
7	$6.04 \cdot 10^{-8}$

Abbildung 19.8: Wahrscheinlichkeiten  $P(X = k)$  der verschiedenen Ereignisse.Abbildung 19.9: Die Dichte  $f(x)$  für die hypergeometrische Verteilung unseres Beispiels. Sie zeigt auf, wie wahrscheinlich es ist, genau  $k$  extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren zu erhalten.

### 19.4.3 Sind viele extreme Ereignisse wahrscheinlich?

Stellt man sich nun die Frage ob viele extreme Ereignisse wahrscheinlich sind, muss berechnet werden wie wahrscheinlich es ist k oder mehr Ereignisse in den letzten M Jahren zu erhalten. Die Verteilungsfunktion der hypergeometrischen Verteilung ist nichts anderes, als die aufsummierten der Dichte über alle möglichen Ausgänge. Weil für unser Beispiel aber wichtig ist wie Wahrscheinlich es ist, drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden, muss die Komplementäre Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \geq I) = \sum_{k=I}^n P(X = k)$$

angeschaut werden.

Möchten wir also die Wahrscheinlichkeit wissen, drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden, müssen die einzelnen Wahrscheinlichkeiten aufsummiert werden:

$$\begin{aligned} F(3) &= P(X \geq 3) \\ &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= 0.0409329 + 0.0046214 + 0.00026340 + 6.8710^{-6} + 6.0410^{-8} \\ &= 0.045833 \Rightarrow 4.58\% \end{aligned}$$

Drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 4.58% möglich.

Für unser Beispiel ergeben sich folgende Werte

k	P(X=k)	P(X ≥ I)
0	0.3507558	
1	0.4161509	0.649244
2	0.1872679	0.233093
3	0.0409329	0.045833
4	0.0046214	0.004892
5	0.0002640	0.000271
6	6.87 10 <sup>-6</sup>	6.93 10 <sup>-6</sup>
7	6.04 10 <sup>-8</sup>	6.04 10 <sup>-8</sup>

Abbildung 19.10: Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq I)$  aller Ereignisse unseres Beispiels. Rosa markiert ist das oben berechnete Beispiel mit drei oder mehr extremen Ereignissen in den letzten 10 Jahren.

Die Wahrscheinlichkeit ein oder zwei extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren zu haben ist mit 64.49% und 23.30% relativ hoch. Ab drei oder mehr Ereignissen nimmt die Wahrscheinlichkeit rasant ab. Ohne Äußere Einwirkungen sind drei oder mehr Ereignisse sehr unwahrscheinlich und ab 5 oder mehr nahezu unmöglich.

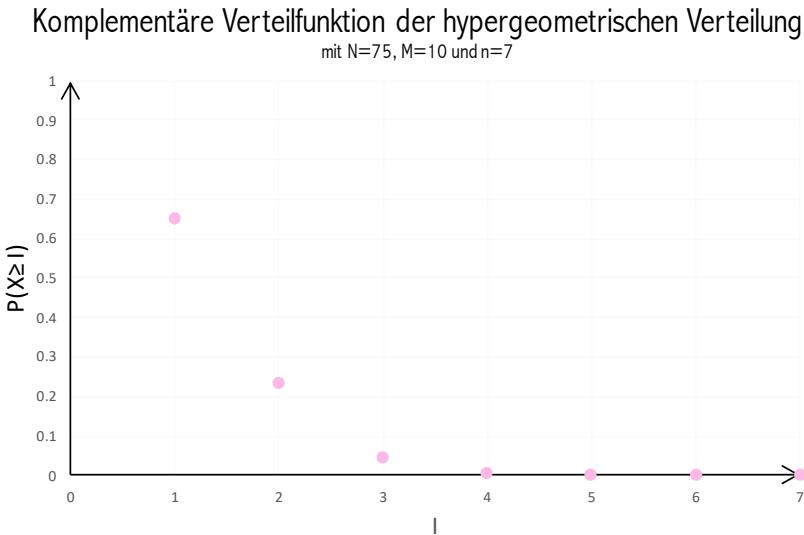


Abbildung 19.11: Die komplementäre Verteilfunktion  $F(x)$  der hypergeometrischen Verteilung zeigt auf, wie wahrscheinlich es ist mehr als  $k$  Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorzufinden.

## 19.5 Hypothesentest

Hypothesentests werden immer dann durchgeführt, wenn man aus erhobenen Daten etwas nachweisen möchte, zum Beispiel das sich extreme Ereignisse in den letzten Jahren häufen. Der Grundsatz bei allen statistischen Tests ist, dass wir das Gegenteil widerlegen müssen - wir müssen also widerlegen, dass extreme Ereignisse in den letzten Jahren willkürlich verteilt sind. Das heisst die Häufung entscheidet der Zufall und keine Unbekannte von ausserhalb.

Zu vergleichen ist ein Hypothesentest mit einer Gerichtsverhandlung. Im Zweifel für den Angeklagten. Es muss davon ausgegangen werden, dass die Hypothese stimmt, auch wenn man es nicht weiss bis das Gegenteil bewiesen werden kann. Hierfür benötigt es genügend Beweise, welche die Schuld oder hier die Hypothese widerlegen, ohne das Zweifel aufkommen können. Falls ungenügend viele Beweise vorliegen, muss davon ausgegangen werden, dass die Hypothese stimmt oder eben der Angeklagte unschuldig ist. Zuerst muss eine Nullhypothese aufgestellt werden, welche das Gegenteil besagt von dem zu beweisenden Ziel.

### 19.5.1 Nullhypothese

Unsere Nullhypothese welche geprüft werden soll, heisst somit:

In den letzten Jahren gab es keinen Wandel oder eine Häufigkeit von extremen Ereignissen.

Kurz gesagt:

- Das Klima verändert sich nicht
- Alles bleibt beim alten

- Der Zufall bestimmt die Anordnung der (extremen) Ereignisse

Diese Nullhypothese muss nun widerlegt werden, um den Klimawandel zu beweisen.

### 19.5.2 Signifikanzniveau

Die Grenze für die Widerlegung der Nullhypothese beschreibt die statistische Signifikanz  $\alpha$ . Über diesen Wert wird eine bestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit abgeschätzt. Bei der Festlegung dieser Schwelle wird bedacht, was für Konsequenzen es hätte, das ein beobachteter Unterschied nur zufällig erfolgt. Sind die Folgen gravierend, wählt man eher ein tiefes Niveau (1 % statt 5%).

Bei einem Medikament wird daher eher ein tiefes Signifikanzniveau gewählt. Als Vergleich, beim Nachweis der Existenz des Higgs-Bosons<sup>1</sup> wurde ein noch viel strengeres Kriterium gewählt, es entspricht einem Wert von 1 in 3.5 Millionen. Da extreme Ereignisse nicht direkt Lebensbedrohlich sind, wird ein  $\alpha = 5\%$  gewählt. Falls die Nullhypothese richtig ist, darf die Wahrscheinlichkeit dafür das sie fälschlicherweise abgelehnt wird, nicht unter 5% fallen. In unserem Beispiel bedeutet das:

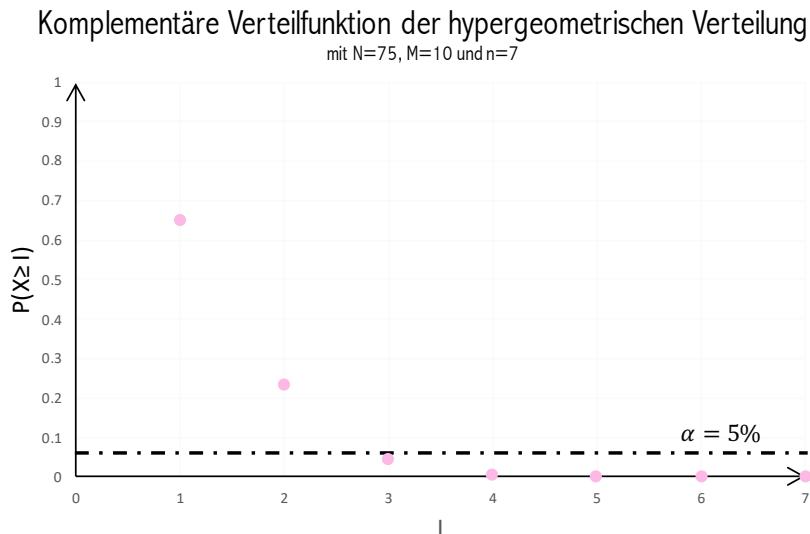


Abbildung 19.12: Die komplementäre Verteilfunktion der hypergeometrischen Verteilung mit der  $\alpha$  Schranke.

Eine Häufung von 3 oder mehr extremen Ereignissen wären nicht mehr durch den Zufall bestimmt.

Konkret: Wenn von den 7 extremsten Ereignissen der letzten 75 Jahre 3 oder mehr in den letzten 10 Jahren waren, müssen wir auf den Klimawandel schliessen.

<sup>1</sup>Das Higgs-Boson ist Elementarteilchen (Benannt nach dem britischen Physiker Peter Higgs), deren Existenz wurde im Juli 2012 durch das CERN (mit dem Large Hadron Collider LHC) bestätigt.

## 19.6 Messpunkte Schweiz

Um eine möglichst grosse Vielfalt von Messreihen zu bekommen, werden verschiedene Messpunkte in der Schweiz angeschaut.

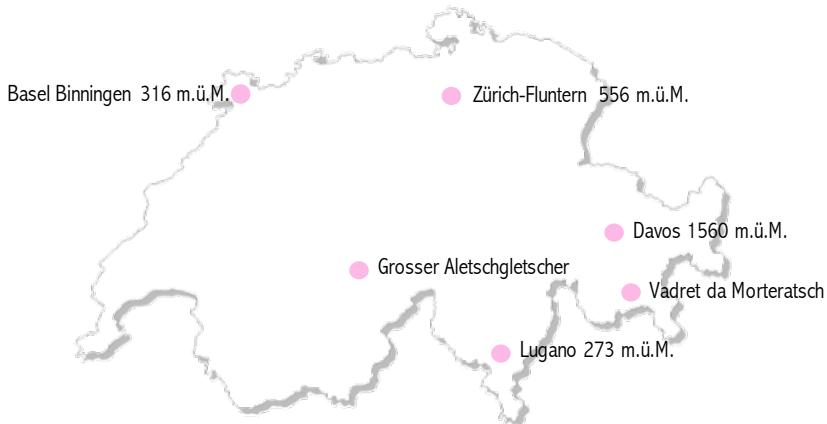


Abbildung 19.13: Gewählte Messpunkte in der Schweiz.

Die Messreihen der Standorte Basel Binningen, Zürich-Fluntern, Lugano und Davos sind von MeteoSchweiz und sind öffentlich zugänglich. Die Daten sind bereits homogenisiert. Die Messdaten der Gletscher werden vom Schweizerischen Gletschermessnetz GLAMOS<sup>2</sup> ebenfalls öffentlich zugänglich zur Verfügung gestellt.

### 19.6.1 Prüfung Messreihe

Die Messreihen geben einen Einblick über die letzten 74 Jahre, nämlich von 1943 - 2017. Damit die Hypothese widerlegt wird und somit der Klimawandel nachgewiesen werden kann, müssen drei oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorkommen (Abbildung 19.10). Dann wäre das Signifikanzniveau  $\alpha$  von 0.05 unterschritten und die Hypothese ohne jegliche Zweifel widerlegt.

## 19.7 Temperatur

Die Jahres Mitteltemperatur in der Schweiz ist seit 1864 rund 2° gestiegen (Stand 2018, MeteoSchweiz). Der grösste Anstieg passierte in den letzten Jahrzehnten. Dennoch ist für die breite Bevölkerung ein Anstieg von 2° schwierig nachzuvollziehen. In den nachfolgenden Beispielen, wurden Klimaindikatoren gewählt welche jeder kennt und bemerkt werden.

### 19.7.1 Jahres Mitteltemperatur

Die Jahres Mitteltemperatur ist wie folgt definiert

<sup>2</sup>Die Veränderungen der Schweizer Gletscher werden jährlich gemessen. Das Messnetz GLAMOS wird getragen durch die ETH Zürich und die Universitäten Fribourg und Zürich mit finanzieller Unterstützung durch das Bundesamt für Umwelt BAFU, MeteoSchweiz und SCNAT.

**Definition 19.2.** Mittlere Jahrestemperatur in °C.

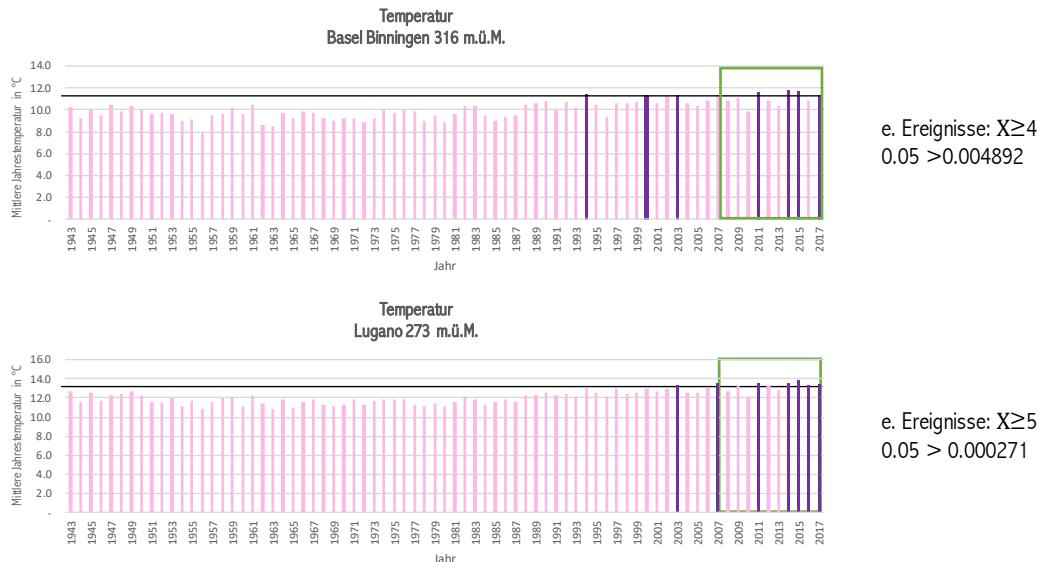


Abbildung 19.14: BLaBLa

Bei der Jahresmitteltemperatur ist das Ergebnis eindeutig (Abbildung 19.14). Bei beiden Messpunkten, sowohl Lugano als auch Basel Binningen, wird der Hypothesentest widerlegt da die Alphagrenze unterschritten wird. Bei Basel Binningen kommen vier der extremsten Ereignisse in den letzten 10 Jahren vor. In Lugano sind es sogar deren fünf!

## 19.7.2 Sommertage

Ein Sommertag ist wie folgt definiert

**Definition 19.3.** Maximale Temperatur  $\geq 25^\circ\text{C}$  und langjähriger Mittelwert (1961 - 1990).

Die Sommertage in Lugano waren in den letzten 10 Jahren nie extrem. Zu Beginn der Messungen um die Jahre 1943-1959 zeigten sich Extremwerte. Wohingegen Davos eine Häufung der Anzahl von Sommertagen in den letzten 10 Jahren zeigt. In den früheren Messjahren waren keine oder nur sehr wenige Sommertage vorhanden. In den letzten 10 Jahren ist die Anzahl aber immer weiter gestiegen und ist mit 5 Ereignissen nahezu unmöglich. In Davos wird die Hypothese widerlegt und somit ein Wandel im Klima nachgewiesen.

## 19.7.3 Tropennächte

Eine Tropennacht ist wie folgt definiert

**Definition 19.4.** Minimale Temperatur  $\geq 20^\circ\text{C}$  und langjähriger Mittelwert (1961 - 1990).

Sowohl in Lugano wie auch Basel Binningen sind in den letzten 10 Jahren eine extreme Anzahl von Tropennächten gemessen worden. Mit vier Ereignissen pro Standort wird die Alpha-Grenze klar unterschritten.

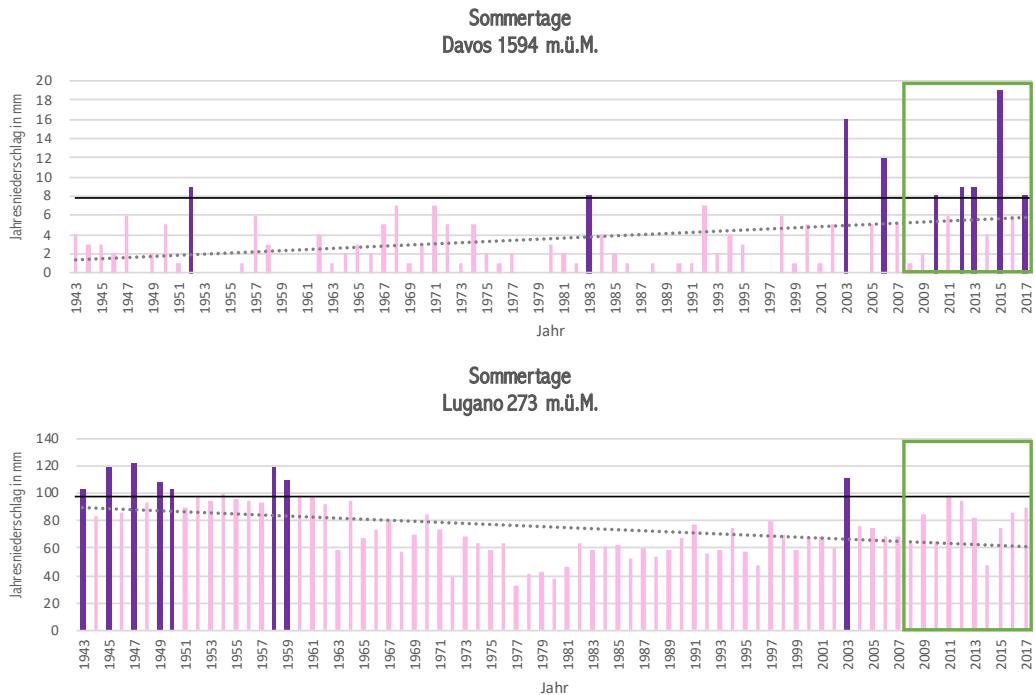


Abbildung 19.15: BLaBLa

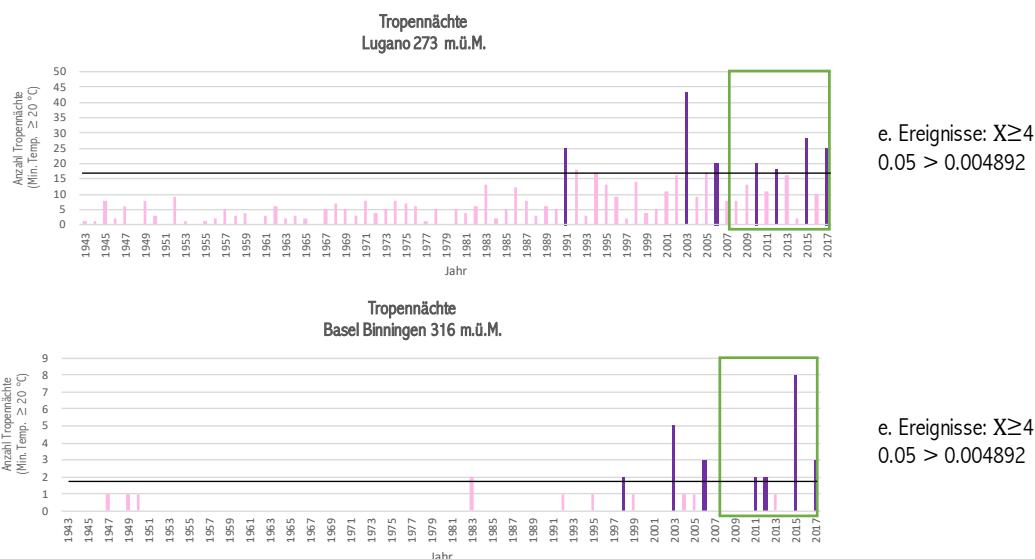


Abbildung 19.16: BLaBLa

## 19.7.4 Hitzetage

Ein Hitzetag ist wie folgt definiert

**Definition 19.5.** *Maximale Temperatur  $\geq 30^\circ\text{C}$  und langjähriger Mittelwert (1961 - 1990).*

Bei den Hitzetagen ist im Klima kein Wandel zu erkennen. Weder in Zürich-Fluntern noch in Lugano wurden in den letzten Jahren extrem viele Hitzetage gemessen. Bei beiden Orten, waren die Hitzetage zu Beginn der Messreihe (um 1943) vermehrt vorgekommen.

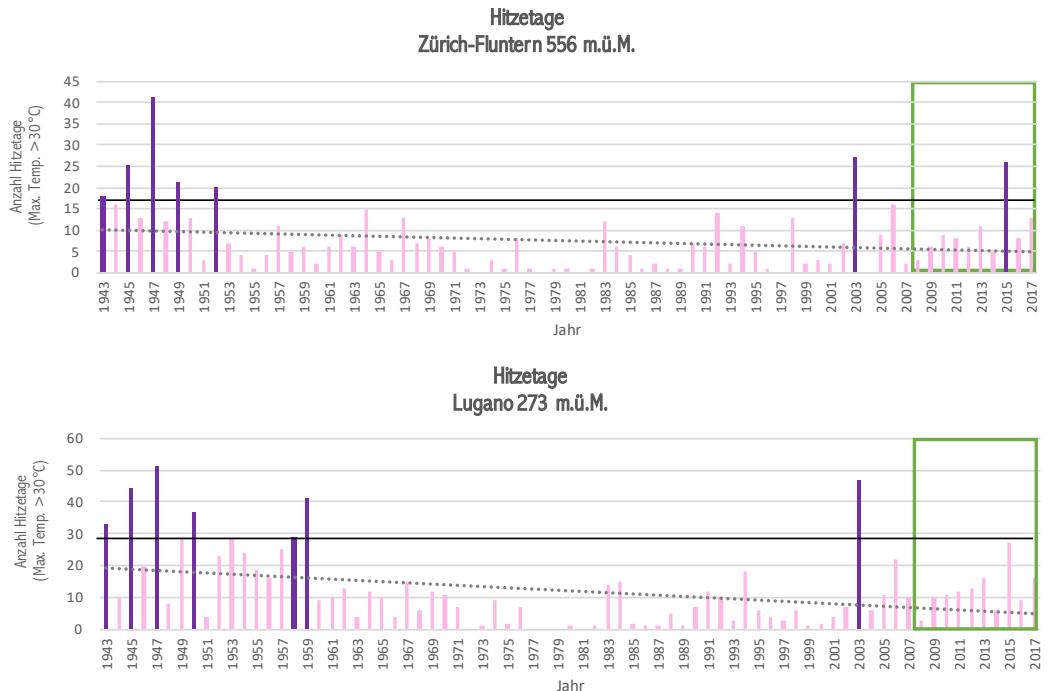


Abbildung 19.17: BLaBLa

## 19.7.5 Frosttage

Ein Frosttag ist wie folgt definiert

**Definition 19.6.** *Minimale Temperatur  $< 0^\circ\text{C}$  und langjähriger Mittelwert (1961 - 1990).*

Wie bereits bei den Hitzetagen 19.17 BLaBLa ist auch bei den Frosttagen weder in Basel Binningen noch in Lugano kein Wandel im Klima zu erkennen. Ebenso wurden die Extreme vermehrt zu Beginn der Messreihe gemessen.

## 19.7.6 Eistage

Ein Eistag ist wie folgt definiert

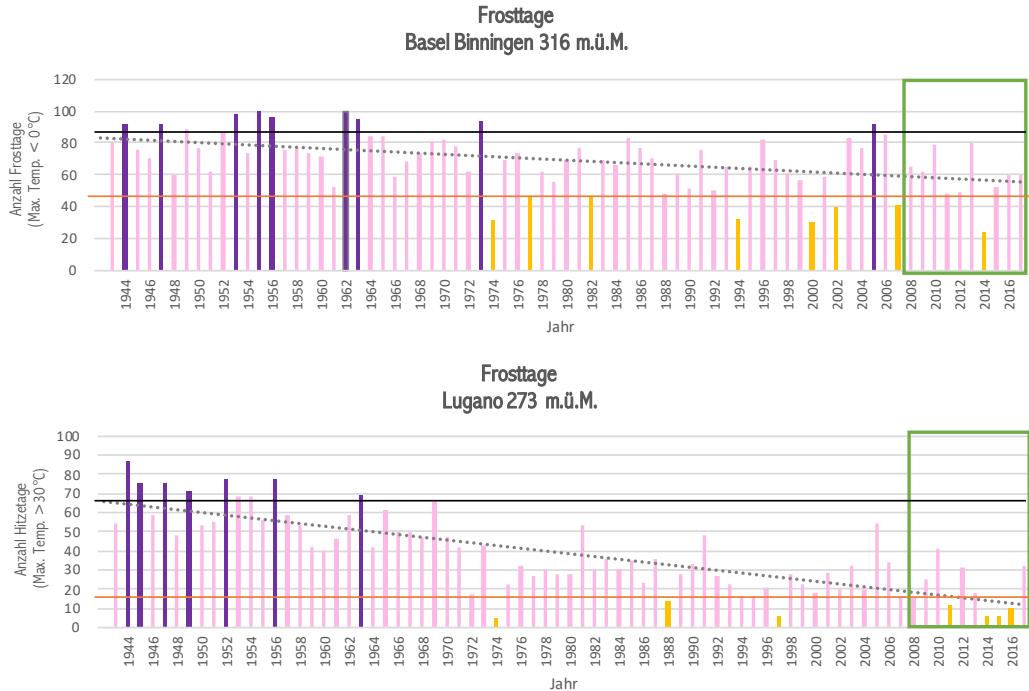


Abbildung 19.18: BLaBLa

**Definition 19.7.** Maximale Temperatur  $< 0^{\circ}\text{C}$  und langjähriger Mittelwert (1961 - 1990).

Anhang der Anzahl Eistage in Zürich-Fluntern und Davos, kann kein Klimawandel festgestellt werden. Weder in den oberen noch in den unteren Extremen Ereignissen.

## 19.8 Niederschlag

### 19.8.1 Jahresniederschlag

Der Jahresniederschlag ist wie folgt definiert

**Definition 19.8.** Jahresniederschlag in mm.

### 19.8.2 Neuschnee

Die Neuschneemenge ist wie folgt definiert

**Definition 19.9.** Neuschneemenge, Jahressumme der täglichen Aufzeichnung in cm.

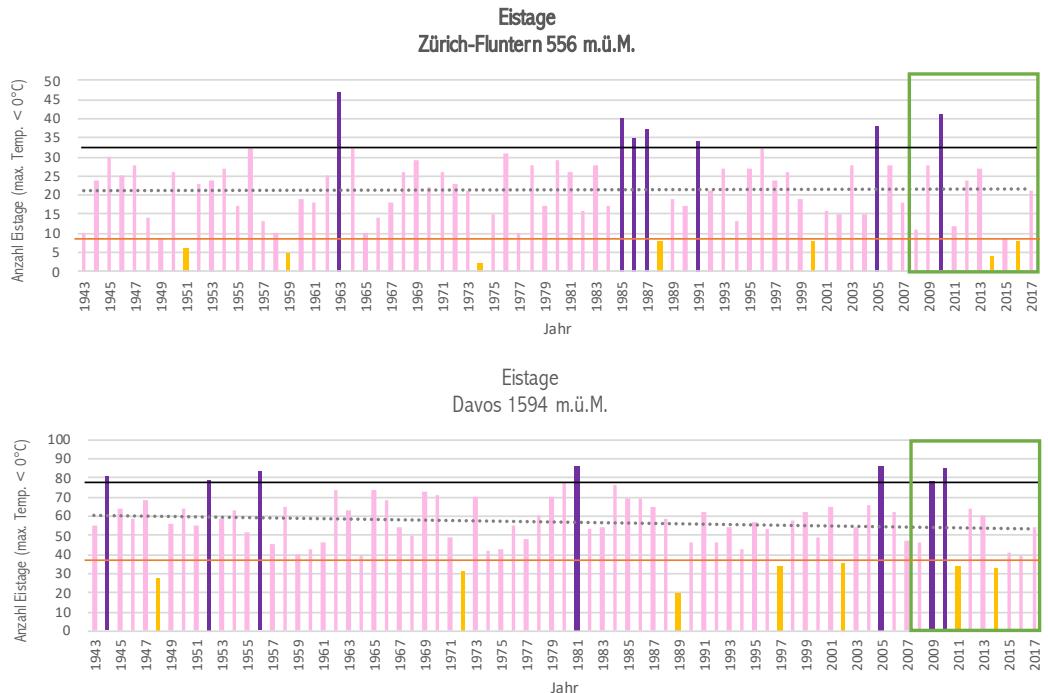


Abbildung 19.19: BLaBLa

## 19.9 Gletscher

Bei den Gletscherdaten wurde ein Zeitraum von 1881 - 2017 gewählt. Durch die Anzahl der Messjahre verschieben sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse. In den Beispielen der Gletscher müssen aber ebenso 3 oder mehr extreme Ereignisse in den letzten 10 Jahren vorkommen um diese dem Klimawandel zuschreiben zu können.

### 19.9.1 Grosser Aletschgletscher

## 19.10 Gletscher

### 19.10.1 Grosser Aletschgletscher

### 19.10.2 Vadret da Morteratsch

## 19.11 Ist die Klimaerwärmung in der Schweiz real?

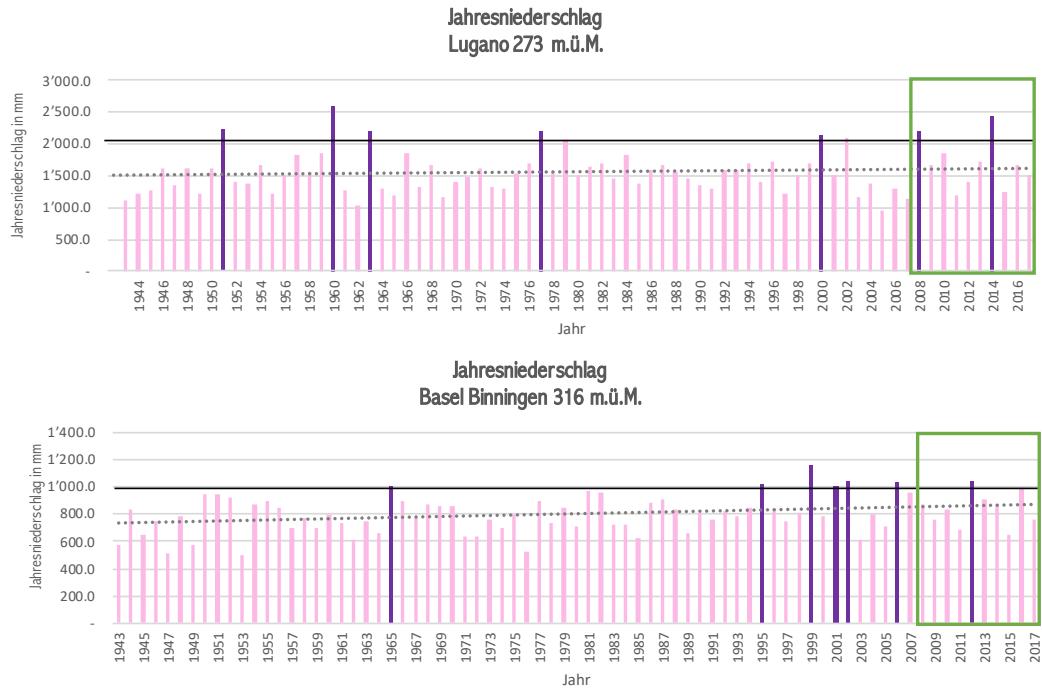


Abbildung 19.20: BLaBLa

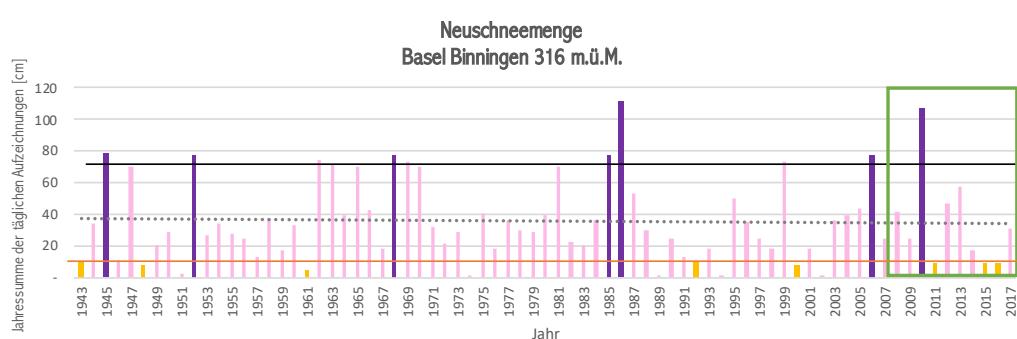
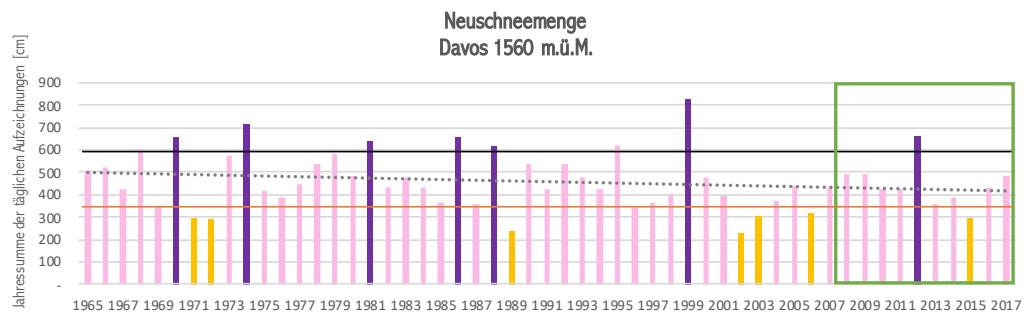


Abbildung 19.21: BLaBLa

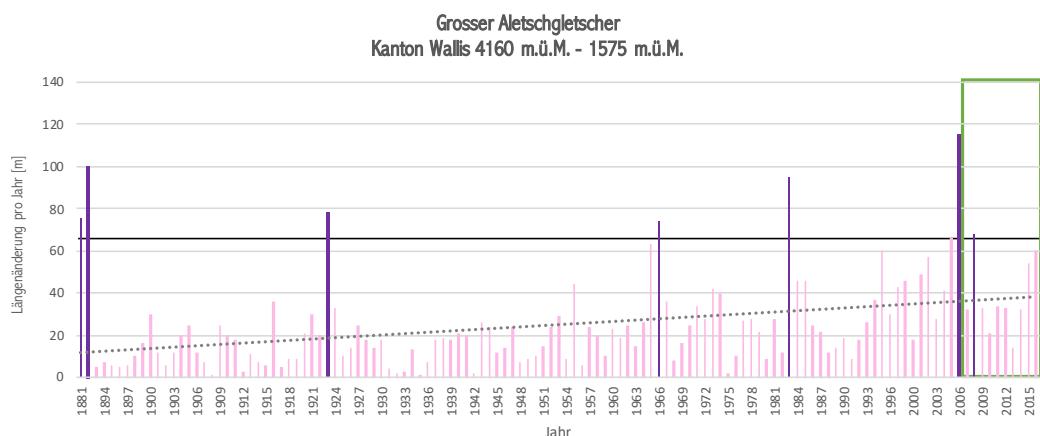


Abbildung 19.22: DBLaBLa



Abbildung 19.23: Der grosse Aletschgletscher im Wandel der Zeit. Links im Jahr 2015 und rechts im Jahr 2010.

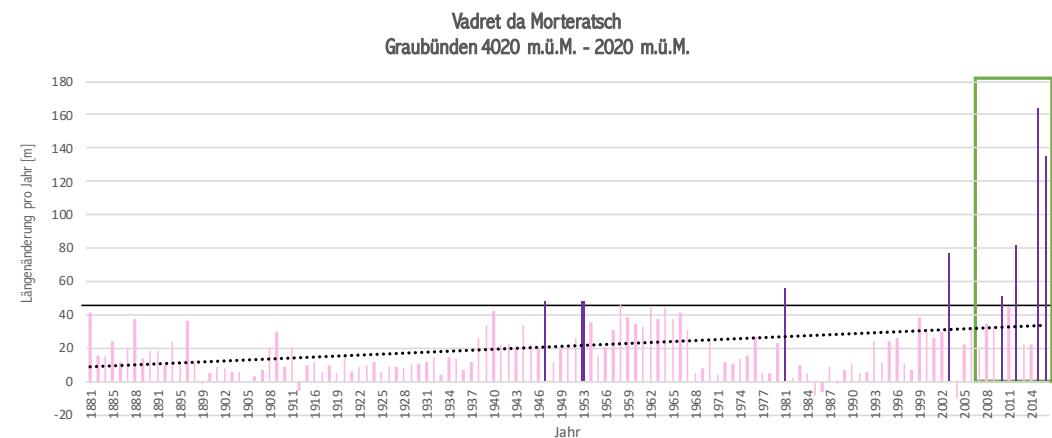


Abbildung 19.24: BlaBla



Abbildung 19.25: Der Morteratschgletscher im Wandel der Zeit. Links im Jahr 2015 und rechts im Jahr 1985.