kde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 < a_2$, a pro každé $i = 1, \dots, n-1$ jsou $g_i, h_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ spojité funkce splňující podmínku $g_i < h_i$ pro vnitřní body Ω.

Buď σ permutace množiny $\{x_1, \dots, x_n\}$. Pokud v předchozích nerovnostech píšeme $\sigma(x_i)$ místo x_i, pak Ω se nazývá **elementární oblast typu** $(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))$.

Věta 2.7 (Fubiniova věta). *Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ elementární oblast typu $(x_1, \dots, x_n)$ a nechť funkce f je Riemannovsky integrovatelná na Ω. Pak*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \\
&\quad \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} \left(\cdots \left(\int_{g_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Pro typ $(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))$ platí analogické tvrzení.

2.2.2 Numerické řešení

Jak již bylo vzpomenuto při popisu numerických metod řešení integrálů funkcí jedné proměnné, i pro vícenásobné integrály existují varianty těchto metod. Mnohdy je však výpočet pomocí těchto numerických metod natolik komplikovaný, že pro použití nejsou výhodné. Existuje však metoda, která je velmi úspěšně použitelná bez ohledu na počet dimenzí – *metoda Monte Carlo*. Návrh další numerické metody pro řešení integrálů funkcí více proměnných je předmětem následující kapitoly.

Monte Carlo integrace

Pro výpočet určitého integrálu reálné funkce n proměnných na uzavřeném $n-$rozměrném intervalu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ lze použít **metodu Monte Carlo**. Zatímco jiné numerické metody vyhodnocují integrand v pravidelné ekvidistantní mřížce, Monte Carlo metoda volí náhodné body z prostoru. Díky tomuto uvolnění tak poskytuje lepší výsledky v prostorech s vyšší dimenzí než klasické kvadraturní metody.

Výpočet určitého integrálu I (viz vztah 2.61) reálné funkce n proměnných f na intervalu $\Omega = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$ metodou Monte Carlo je zaveden v [2, 5, 25] následovně:

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots\,\mathrm{d}x_n. \tag{2.61}$$

Pro střední hodnotu této funkce na daném $n-$rozměrném intervalu platí:

$$\overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{I}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)} = \frac{I}{|\Omega|}, \tag{2.62}$$

kde $|\Omega|$ vyjadřuje v objem dané oblasti, nebo-li platí:

$$I = |\Omega| \overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{2.63}$$

Geometrická představa pro reálnou funkci $f(x)$ jedné proměnné x je následující. Chceme spočítat její určitý integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.64}$$

tj. vypočítat obsah plochy pod křivkou funkce $f(x)$ na daném intervalu. Pak existuje obdélník se stejným obsahem, který má stejnou šířku jako daný interval. Výška takového obdélníka je právě $\overline{f}(x)$, tedy

$$I = (b-a)\overline{f}(x). \tag{2.65}$$

Integrace Monte Carlo metodou vychází z potřeby určení střední hodnoty funkce f:

$$\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \tag{2.66}$$

kde N je zvolený počet bodů a $\xi_i = a_i + \gamma_i(b_i - a_i)$ je náhodně zvolené číslo v intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$, přičemž γ_i je náhodné číslo z rovnoměrného rozdělení v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Střední hodnota funkce f na daném $n-$rozměrném intervalu Ω je aritmetickým průměrem funkčních hodnot funkce f z N náhodně zvolených bodů v tomto intervalu. Určitý integrál libovolné reálné funkce n proměnných f vypočtený metodou Monte Carlo je tvaru:

$$\begin{aligned} I &= |\Omega|\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= |\Omega|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \\ I &= \frac{(b_1 - a_1)\cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \end{aligned} \tag{2.67}$$

kde význam ξ_i byl popsán výše.

Chyba σ při určování střední hodnoty $\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkce f je závislá na počtu N náhodně zvolených bodů v intervalu Ω:

$$\sigma_N \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{2.68}$$

což v důsledku znamená, že pro snížení chyby výsledku $10\times$ je nutné použít $100\times$ více náhodně zvolených bodů. Tato metoda je proto klíčová při výpočtu určitých integrálů funkcí více proměnných, neboť stačí pouze vyčíslovat funkční hodnoty integrandu v N náhodných bodech.