2.8 Speciální typy matic

- Řídká matice má většinu prvků $= 0$.

  Pro řešení soustav s řídkou maticí se často používají gradientní metody, spočívající v minimalizaci vhodného kvadratické formy, např. $\|\mathbf{A}\vec{x}-\vec{b}\|_{III}^2$. Pro řídkou matici je totiž počet operací pro výpočet $\mathbf{A}\vec{x} \sim n$, a ne $\sim n^2$ jako pro plnou matici.

- Matice $\mathbf{A}$ je pásová, pokud $a_{ij} = 0$ pro $|i-j| > p$.
  Tridiagonální matice pro $p = 1$, pětidiagonální matice pro $p = 2$. Pro pásové matice se používají přímé metody, pro ostatní řídké matice jsou přímé metody většinou neefektivní.

- Soustavy s tridiagonální maticí

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

  Tridiagonální matici zapíšeme do 3 vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. V praxi téměř vždy tridiagonální matice, u kterých výběr hlavního prvku není potřebný (silně regulární matice).

  Řešení: Předpokládáme zpětný běh $x_k = \mu_k x_{k+1} + \rho_k$. Dosadíme

$$c_i\left(\mu_{i-1}x_i + \rho_{i-1}\right) + a_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i,$$

  po úpravě

$$x_i = \frac{-b_i}{c_i\mu_{i-1} + a_i}\, x_{i+1} + \frac{f_i - c_i\rho_{i-1}}{c_i\mu_{i-1} + a_i},$$

  výsledek

$$\mu_i = \frac{-b_i}{c_i\mu_{i-1} + a_i}, \qquad\qquad \rho_i = \frac{f_i - c_i\rho_{i-1}}{c_i\mu_{i-1} + a_i}.$$

  Startování $c_1 = 0,\ b_n = 0,\ \{\mu_0,\ \rho_0,\ x_{n+1}\}$ libovolné.

- Blokově tridiagonální matice: $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_i$ jsou malé matice $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\mu_i}$, $\boldsymbol{\rho_i}$ jsou malé matice

2.9 Úlohy se žádným řešením nebo ∞ řešeními

m rovnic o n neznámých, lineárně závislé $n \times n$ systémy.

Metoda SVD (singular value decomposition): pokud $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ má ∞ řešení, určí řešení s nejmenší Eukleidovskou normou a bázi nulprostoru, pokud řešení neexistuje, najde řešení ve smyslu nejmenších čtverců - vektor $\vec{x}$ minimalizující $\|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|_{III}$.

SVD: $\mathbf{A}, \mathbf{U}$ matice $m \times n$, $\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{I}$ matice $n \times n$, $\mathbf{W}$ diagonální, $\mathbf{I}$ jednotková, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ ortogonální $(\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I})$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \mathbf{V} \cdot [\text{diag}(1/w_j)] \cdot \mathbf{U}^T \cdot \vec{b}$$

Pokud $w_j = 0$ $(w_j \simeq 0)$ nahradíme $\frac{1}{w_j} \to 0$ (signalizuje singulárnost matice).