Next Up Previous

Next: Výběr hlavního prvku (pivoting) **Up:** Přímé metody řešení soustav **Previous:** Řešení soustav s trojúhelníkovou

Gaussova a Gauss-Jordanova eliminace

Řeším soustavu rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. *V prvním kroku nechť prvek* $a_{11} \neq 0$ *(lze vždy dosáhnout přehozením rovnic). Prvek* a_{11} *, použitý k úpravě rovnic 2, ..., n nazveme* *hlavním prvkem* *(pivot).*

Od i-té rovnice odečteme 1.rovnici násobenou multiplikátorem $m_i^{(1)} = -a_{i1}/a_{11}$.

Modifikovaná soustava bude mít v 1.sloupci pod diagonálou samé 0. Úprava prováděná současně s pravou stranou odpovídá násobení rovnice maticí

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Rovnice po první úpravě má tvar $\mathbf{D_1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{D_1}\vec{b}$, *označíme* $\mathbf{D_1}\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{(1)}$ *a* $\mathbf{D_1}\vec{b} \equiv \vec{b}^{(1)}$.

Po $k-1$ *úpravách má matice* $\mathbf{A}^{(k-1)}$ *tvar*

$$\mathbf{A}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2,k-1}^{(1)} & a_{2k}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1}^{(k-2)} & a_{k-1,k}^{(k-2)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k-2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \dots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k}^{(k-1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & \dots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Zde horní index značí počet úprav daného prvku.

Pokud $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, *lze ho zvolit za* *hlavní prvek*, *spočítat multiplikátory*

$m_i^{(k)} = -a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$ *pro* $i = k+1, \dots,$ n *a upravit příslušné rovnice.*

V k *-tém kroku úpravy používám jako hlavní prvek prvek* $k-1$ *-krát upravený (odečítání!)*

hlavní prvek $\rightarrow$ *ztráta přesnosti* $\Rightarrow$ *výběr hlavního prvku.*

Bez výběru hlavního prvku - přímé metody nepoužitelné pro obecné matice!!

Počet operací

Na každou 0 $\rightarrow \leq n$ *vnitřních cyklů, potřebuji* $n(n-1)$ *prvků* $\rightarrow$ *0. Celkový počet vnitřních cyklů* $\sim n^3$ *(přesněji* $\simeq 1/3\, n^3$*), složitost algoritmu je řádu* n^3.

Gauss-Jordanova eliminace

Upravují se všechny prvky mimo diagonálu. Matice se převede na jednotkovou $\mathbf{I}$. *Přímo spočtu inverzní matici* $\mathbf{A}^{-1}$. *Vyšší počet operací* $\simeq n^3$ *vnitřních cyklů.*

Next Up Previous

Next: Výběr hlavního prvku (pivoting) **Up:** Přímé metody řešení soustav **Previous:** Řešení soustav s trojúhelníkovou

Jiri Limpouch
2000-03-08