
429336 Naprogramujte **gradientní metodou řešení lineárního systému** $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{i+j}{7} & \text{pro} \quad i-j = 0, \pm 3, \pm 9, \pm 27, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad \text{a} \qquad b_i = 1, \quad \forall i.$$

Vyzkoušejte pro různá $n < 200$.

724341 **LU metodou** bez výběru hlavního prvku (pivotingu) vypočtěte **vlastní čísla** matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

LU metoda je zde využita v iterační posloupnosti $\mathbf{A}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)}\mathbf{L}^{(i)}$, kde matice $\mathbf{L}^{(i)}$ a $\mathbf{U}^{(i)}$ jsou dány rozkladem $\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)}\mathbf{U}^{(i)}$. Ověřte, že iterační posloupnost konverguje k diagonální matici.

127359 Naprogramujte **metodu řízené relaxace** (nestacionární iterační metoda) pro řešení lineárního systému $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Matice $\mathbf{B_k}$ a vektory $\vec{c_k}$ vypisujte při každém iteračním kroku, stejně tak jako přibližné řešení $\vec{x_k}$. Vyzkoušejte pro

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Porovnejte se stacionární metodou dle vlastního výběru ve smyslu rychlosti konvergence.

125365 Řešte **LU metodou** sadu soustav $\mathbf{A}^k\vec{x} = \vec{b}$ pro $k = 1, \dots, M$. Omezte počet nutných rozkladů matice. Vyzkoušejte pro $M = 6$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6.036 & 0.732 & -2.134 & -1.324 \\ -4.821 & 0.356 & 1.052 & 4.267 \\ 3.006 & -2.307 & 1.506 & 0.728 \\ 5.604 & 4.112 & 3.283 & 3.415 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -0.930 \\ 5.713 \\ 8.361 \\ 8.478 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{522370}$ Naprogramujte řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ **Gaussovou eliminací**:

a) bez výběru hlavního prvku (pivotu)

b) s částečným výběrem hlavního prvku (ve sloupci).

Pro každý z případů vypište počet provedených aritmetických operací. Obě řešení porovnejte i s přesnějším řešením vypočteným jednoduše např. v Matlabu ze vztahu $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4.821 & 5.356 & 1.052 & 4.267 \\ 6.036 & -0.732 & 2.134 & -1.324 \\ 3.006 & -2.307 & 1.506 & 0.728 \\ 5.604 & -41.112 & 3.283 & 3.415 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -0.930 \\ 5.713 \\ 8.361 \\ 8.478 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{021385}$ Na intervalu $\langle -1, 3\rangle$ aproximujte funkci $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ pomocí **Čebyševových polynomů** 30. stupně.

- Do grafu zobrazte aproximaci a původní funkci.
- Dále graficky porovnejte aproximace derivace funkce pomocí Čebyševových polynomů 10. a 20. stupně s derivací analytickou.
- Porovnejte hodnoty integrálu získané jednak odečtením hodnot integrálu Čebyševovy aproximace (polynomy 10. a 20. stupně) v krajních bodech, jednak numerickou integrací pomocí složeného lichoběžníkového pravidla s malým krokem.
- Nakreslete graf Čebyševova rozvoje integrálu funkce $f(x)$ s použitím polynomů 10. resp. 20. stupně a integrační konstantou zvolenou tak, aby $F(-1) = 0$. Porovnejte s grafem získaným ukládáním mezivýsledků v lichoběžníkové integraci původní funkce $f(x)$.

  POZN.: Všimněte si, že označíme-li hledaný rozvoj $F(x)$, potom $F(x) = \int_{-1}^{x} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$, kde $\tilde{f}(x)$ je Čebyševovou aproximací $f(x)$.

325399 Napište proceduru pro výpočet hodnoty **trilineární interpolace** funkce $f(x, y, z)$. Trilineární znamená lineární vzhledem ke každé z proměnných x, y, z (tedy při zafixování ostatních dvou). Ověřte na příkladu funkce

$$f(x, y, z) \;=\; \sqrt{x}\, y^2 + 20\, z^{3/2}$$

zadané na pravidelné trojrozměrné síti bodů (x, y, z) se souřadnicemi $x, y, z \in \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\}$. (Známe tedy hodnoty v $6^3 = 216$ uzlech sítě). Výstupem testovacího programu nechť jsou dvojice hodnot (vždy přesná a interpolovaná) ve středech buněk sítě (zde tedy $5^3 = 125$ dvojic čísel).

Proceduru dále otestujte s funkcí

$$f(x, y, z) \;=\; \cos\left(x^2 y\right) \ln\left(x + z + 1\right) \mathrm{e}^{y^3 z^2}$$

zadanou na stejné oblasti a s použitím stejných bodů jako v předchozím případě.

821401 Proveďte **metodou nejmenších čtverců** aproximaci dat

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0.45	0.9	1.35	1.79	2.24	2.69	3.14
y_i	2.74	1.70	1.57	0.04	-1.30	-0.70	-1.36	-0.78

i	9	10	11	12	13	14	15
x_i	3.59	4.04	4.49	4.93	5.38	5.83	6.28
y_i	-0.50	-0.31	1.63	2.74	2.78	3.77	1.39

pomocí rozvoje do harmonických funkcí

$$y = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi\,(x - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi\,(x - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}\right)$$

($x_{\min} = x_1, x_{\max} = x_{15}$) za předpokladu, že váha všech bodů je konstantní. Určete neznámé koeficienty a_0, a_1, b_1.

726418 Proveďte **metodou nejmenších čtverců** aproximaci dat

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2.8	-2.4	-2.0	-1.6	-1.2	-0.8	-0.4	0
y_i	-13.5	-6.0	1.1	6.0	6.1	6.9	4.1	3.5

i	9	10	11	12	13	14	15
x_i	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8
y_i	1.2	-0.7	0.1	-2.5	2.3	4.3	1.1

obecným polynomem stupně N za předpokladu, že váha všech bodů je konstantní.

- Pro různá N vypočítejte chybu aproximace zadaných dat.
- Vyberte nejvhodnější stupeň polynomu, určete jeho koeficienty a své rozhodnutí zdůvodněte.

325429 Proveďte **metodou nejmenších čtverců** aproximaci dat

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.0	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0
y_i	0.0	1.11	1.79	1.87	1.54	1.24	1.40	2.16	3.31	4.39	4.99

polynomem 4. stupně.

- Soustavu normálních rovnic řešte numericky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovou metodou, podle toho, která je vhodnější (zdůvodněte). Zvolenou metodu (metody) naprogramujte sami, nepoužívejte knihovní funkce.
- Vhodným způsobem vyjádřete chybu aproximace zadaných dat.
- Body i aproximující funkci zakreslete do grafu.

222436 **Metodou nejmenších čtverců** nalezněte parametry α a β pro aproximaci hodnot

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.1	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.5	1.7	1.9	2
y_i	0.0058	0.0068	0.2565	0.9747	1.25	2.3178	6.9253	7.659	15.15	10.37

pomocí funkce

$$\tilde{y}(x) = \alpha\, x^{\beta}.$$

- Formulujte sadu nelineárních rovnic, kterou je potřeba pro tento optimalizační problém řešit.
- Při řešení této soustavy nepoužívejte automatické řešiče z knihoven.
- Výslednou funkci vykreslete společně se zadanými body.

124448

- Napište program pro výpočet hodnot Lagrangeovy interpolace v zadané množině bodů pomocí **Nevillova algoritmu**. Tímto programem aproximujte z dat

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-2	-1	2	3	4
y_i	-7.54	2.86	12.82	11.26	-4.54	-19.58

  hodnoty $y(x_k)$ v bodech $x_k \in \{-2.5, -1.5, 0, 1.5, 2.5, 3.5\}$.

- Použijte stejný program pro interpolaci z N diskrétních hodnot funkce

$$y(x) = \frac{1}{1 + 5x^4}$$

  na intervalu $x \in \langle -5, 5 \rangle$:

  * Pro různé počty N ekvidistantních uzlových bodů z tohoto intervalu porovnejte hodnoty interpolace v 11 bodech $x_k \in \{0, \pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5, \pm 3.5, \pm 4.5\}$ s analytickými hodnotami $y(x_k)$.
  * Stejné srovnání proveďte pro výsledky získané s N uzly, které jsou kořeny Čebyševova polynomu příslušného stupně (po transformaci do intervalu $\langle -5, 5 \rangle$).

124459 Změřili jste velikost proudu v závislosti na čase v neekvidistantních bodech, takže teď máte tabulku 50 hodnot x a y. Napište proceduru pro výpočet derivace a primitivní funkce z těchto dat pomocí **kubického spline**.

- Protože měření jste provedli jen "virtuální", tabulku hodnot si nagenerujte z funkce $y(x) = \frac{0.1x^3-2x}{x^2+1}$ na rozsahu $\langle -5, 5\rangle$ v 50 náhodně vygenerovaných disjunktních bodech.
- Výpočet koeficientu splinu naprogramujte. Nemusíte programovat výpočet matic (lze použít knihovnu, Matlab apod.).

Porovnejte s analytickým výpočtem derivace a primitivní funkce.

927464 Váš program pro raytracingové simulace elektronové optiky musí počítat pro každý paprsek při průchodu soustavou hodnoty funkce

$$y(x) = \mathrm{erfc}(\cos(\pi + \ln(x+4))) + \sqrt{\mathrm{erfc}(\cos(x))}.$$

Protože posíláte miliony elektronů, rozhodli jste se urychlit výpočet pomocí **aproximace**. Proto si nagenerujete tuto funkci ve čtyřiceti rovnoměrně rozmístěných bodech na intervalu $\langle 0, 10\rangle$. Výpočet komplementární chybové funkce $\mathrm{erfc}(x)$ můžete provést například v Matlabu nebo s použitím vhodné knihovní procedury.

- Napište proceduru, která body fituje polynomy stupně 2 až 7.
- Zjistěte, jaké chyby se typicky dopouštíte náhradou složité funkce polynomem. (Například určete směrodatnou odchylku a nakreslete její závislost na stupni polynomu.)
- Zjistěte, jaké urychlení výpočtu lze čekat při nahrazení složité funkce polynomem a vypište či zobrazte toto zrychlení jako funkci množství poslaných elektronů (např. pro 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, ...).
- *Volitelné:* Místo aproximace funkce $y(x)$ aproximujte přímo chybovou funkci $\mathrm{erfc}(x)$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a zopakujte výpočty s použitím funkce y analyticky počítané z této aproximace hodnot $\mathrm{erfc}(x)$. Porovnejte rychlost s předchozím postupem.

125475 V raytracingové simulaci počítáte průsečík s rotační symetrickou plochou. Plocha je dána funkcí $f(x) = \sqrt{x+5}$ na intervalu $\langle 0, 20\rangle$, a roztáčíte ji kolem osy x. Paprsek je dán body $A = (-1, 30, 10)$ a $B = (15, 0, 0)$.

- Napište proceduru která pro zadanou funkci $f(x)$ a body A a B spočítá polohu průsečíku. Přitom víte, že znaménko druhé derivace funkce se nebude měnit (funkce bude konvexní). Dále víte, že body budou vždy zadány tak, že bude existovat právě jeden průsečík.
- Přitom je dobré si uvědomit, že přímka se protne s rotační plochou tehdy, když je vzdálenost bodů přímky od osy x při daném x stejná jako poloměr rotační plochy na témže x (z toho lze napsat rovnici kterou je třeba řešit). Metodu **řešení nelineární rovnice** naprogramujte.
- *Volitelné:* Povrch, přímku i spočtený průsečík zobrazte.

624485 Polynom

$$32x^6 - 224x^5 + 256x^4 + 1024x^3 - 1814x^2 - 314x - 13$$

má pouze reálné (jedno- i vícenásobné) kořeny. Najděte hodnoty a násobnost těchto kořenů. Použijte metody **řešení nelineárních rovnic** a **hledání extrémů**, případně syntetického dělení.

824495 Proveďte **Gauss-Legendreovu integraci** řádu 2 až 20 u integrálu

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cos\left(\sqrt{x}\right)\, \mathrm{d}x$$

a vhodným způsobem vyjádřete závislost výsledku na řádu metody.
Porovnejte s výsledky integrace složeným lichoběžníkovým pravidlem

- na stejných bodech
- na stejných počtech ekvidistantních bodů.

$\boxed{027504}$ Najděte **Laguerrovou metodou** všechny kořeny polynomů

$$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \qquad \text{a} \qquad x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 5x + 5.$$

$\boxed{524516}$ Napište proceduru pro výpočet funkce

$$f(\xi) = \int_0^\infty \frac{q \sin(q\xi)}{1 + q^4} \, \mathrm{d}q$$

Rombergovou integrační metodou a ověřte její funkčnost pro některé hodnoty $\xi \in \langle 0, 100 \rangle$.

$\boxed{029521}$ Napište proceduru pro **výpočet 2D integrálu** v konvexní oblasti. Pro 1D integraci v každé dimenzi využijte **lichoběžníkové pravidlo**. Program vyzkoušejte na integrálu

$$\iint \mathrm{e}^{-x^2 - 2y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

přes oblast

$$x^2 + y^2 - xy \leq 2.$$

$\boxed{821537}$ Vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

metodou Monte Carlo s využitím generátoru náhodných čísel s normálním rozdělením.

- Spočtěte, nakreslete a okomentujte závislost velikosti integrálu na parametru α.
- Zhodnoťte rychlost konvergence s rostoucím počtem výstřelů.

$\boxed{027542}$ Simulujete průchod paprsku komplikovanou optikou s proměnlivým indexem lomu (tzv. GRIN optika). Vyšel vám tvar popsaný parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= \cos(t)\, e^{-t} \\ y &= \sin(t)\, e^{-t} \end{aligned}\;, \qquad t \in \langle 0, t_{\max} \rangle, \qquad 0 < t_{\max} < \infty.$$

Protože potřebujete počítat zda dojde k interferenci, potřebujete znát optickou dráhu kterou paprsek urazí. Parametrické vyjádření navíc zjevně končí v konečné vzdálenosti pro nekonečné t. Proto:

- Křivku zobrazte.
- Napište proceduru pro výpočet délky křivky pro zadané $t_{\max}$ (konečné i nekonečné) s tím, že by mělo být možné snadno změnit rovnice křivky.
- Zobrazte délku křivky jako funkci $t_{\max}$.

$\boxed{524550}$ Laserem svítíte na optickou plochu (např. zrcadlo, křemíkový salámek, čočku, atd.) a měříte směr odraženého paprsku. Z těchto směrů se pokusíte **metodou sítí** zrekonstruovat povrch optické plochy.

- Vygenerování "naměřených" dat
  - ∗ Napřed si zvolte tvar plochy a rozměr plochy jako funkci 2 proměnných, $f(x, y)$, například $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
  - ∗ V pravidelné 2D mřížce 50×50 bodů si spočítejte parciální derivace zvolené funkce v obou směrech, tedy $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. To budou vaše "naměřená data", zobrazte je. (Derivaci můžete spočítat analyticky pro tuto konkrétní funkci, lépe však obecně pro libovolnou vámi zadanou funkci f numericky.)
- Povrch spočítáte tak, že víte, že $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$. Pravou stranu rovnice umíte spočítat z vašich měření, stačí tedy vyřešit metodou sítí parciální diferenciální rovnici. Metodu sítí sami naprogramujte.
- Výsledek zobrazte a srovnejte s kýženým tvarem $f(x, y)$, tedy s analytickou funkcí z prvního bodu.

027563 Buffonova jehla je slavná úloha z 18. století - na podlaze je velký list papíru, který je rozdělen rovnoběžnými linkami. Vzdálenost mezi všemi linkami je stejná. Na tento papír se libovolným způsobem hází jehla, jejíž délka je rovna vzdálenosti mezi linkami. Jaká je pravděpodobnost, že jehla po dopadu bude ležet tak, že protne některou z linek?

- Naprogramujte házení jehlou na podlahu, v podstatě jde o jednoduchou **Monte-Carlo** simulaci.
- Odhadněte (spočítejte) touto simulací pravděpodobnost, s jakou jehla protne některou z linek a vyneste ji do grafu jako funkci počtu hodů.
- Modifikujte úlohu pro případ, že délka jehly je větší nebo menší než vzdálenost mezi linkami, určete pravděpodobnost.

828574 Počítáte integrál funkce ve fázovém prostoru v teoretické mechanice a došli jste k tomu, že potřebujete spočítat integrál

$$\int\int\int\int \frac{1}{1+x+y+z+u}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u$$

přes oblast $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4u^2 \leq \frac{1}{2}$.

- Naprogramujte **Monte Carlo integraci** uvedeného integrálu přes danou konvexní oblast.
- Zobrazte velikost integrálu jako funkci počtu výstřelů (pro vhodně zvolené počty, např. 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7). Dále zobrazte v těchto bodech také rozdíl mezi spočteným integrálem a integrálem používajícím co největší počet výstřelů.
- Potom zjistíte, že rozměr u je zbytečný, takže ho zrušíte a počítáte integrál znovu jen ve 3D prostoru, stejnou metodou, opět vytvoříte dva grafy.
- Srovnejte grafy pro 3D a 4D případy.

629580 V raytracingových simulacích potřebujete **generovat náhodné** směry fotonů **podle nějakého rozdělení**, které však dopředu neznáte. Proto jste postaveni před úkol napsat systém který vezme libovolnou funkci (nějakou hezkou, žádná nekonečna, ale nenormovanou) na daném intervalu jako hustotu pravděpodobnosti a nageneruje podle ní náhodná data.

- Při psaní funkce je třeba si uvědomit, že vaše $f(x)$ není nijak normována. Nejlepší je tedy nalézt maximum této funkce na daném intervalu (naprogramujte) a potom při generování náhodného čísla vždy nagenerovat dvojici (x, y), kde x náleží do hledaného intervalu a y do intervalu $\langle 0, \max(f(x))\rangle$. Pokud y je menší než $f(x)$, pak x je hledané náhodné číslo, jinak opakujete.
- Na začátku si nadefinujte funkci $f(x)$ a interval, například $f(x) = \cos(x)$ a interval $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Při odevzdání ukážete že funguje i pro jiné, nebo necháte cvičícího zvolit nějakou funkci.
- Naprogramujte funkci, která vezme vaši funkci $f(x)$, interval, a vygeneruje náhodné číslo s rozdělením $f(x)$ v daném intervalu.
- Nagenerujte 1000 náhodných čísel a zobrazte histogram. Srovnejte s původní funkcí $f(x)$.

320592 Naprogramujte **metodu prediktor-korektor** 4. řádu s konstantním krokem pro řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' = p(x)\,y' + q(x)\,y + r(x).$$

Program ověřte na rovnici

$$y'' = \sqrt{x}\;y$$

s počátečními podmínkami

$$y\,(0) = 0, \quad y'\,(0) = a.$$

Speciálně pro

$$a = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{5}} \frac{\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0.781216173$$

je analytické řešení rovnice

$$y\,(x) = \sqrt{x}\mathrm{I}_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\right),$$

kde $\mathrm{I}_n\,(x)$ je modifikovaná Besselova funkce. Porovnejte svůj výsledek s tímto řešením.

820608 Užitím **Runge-Kuttových metod** a **implicitní Eulerovy metody** řešte rovnici

$$y'' = -\frac{19}{4}y - 10y'$$

s počátečními podmínkami

$$y\,(0) = -9, \quad y'\,(0) = 0.$$

Jedná se o "stiff" problém. Dá se ukázat, že maximální stabilní délka kroku pro R-K metody je $h_{\max} = \frac{4}{19}$. Porovnejte řešení R-K metodou a implicitní Eulerovou metodou pro krok $\frac{1}{2}h_{\max}$ a $2h_{\max}$.

129617 Pohybová rovnice kyvadla je

$$\vartheta'' = -\frac{g}{l}\sin\vartheta,$$

kde konstanta $g = 9.806\ m/s^2$ značí tíhové zrychlení, l je délka kyvadla a ϑ jeho výchylka. Řešte rovnici pro různé počáteční výchylky ϑ_0 a nulovou počáteční rychlost.

– Určete výpočtem periodu kyvadla a výsledek porovnejte s grafem.

– Kontrolujte přesnost splnění zákona zachování celkové energie.

321628

- Napište proceduru pro řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

  $$y'' = p(x)\,y' + q(x)\,y + r(x)$$

  s okrajovými podmínkami

  $$y(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta$$

  metodou střelby pro libovolné funkce $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ spojité na uvažovaném intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Testujte program na rovnicích

  ① $\quad y'' + y = \sqrt{x+1}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(1) = 0,$

  ② $\quad y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0, \qquad y(0.01) = 1, \qquad y'(2) = 0.$

- Volitelné: proceduru zobecněte tak, aby okrajovou podmínku na každé straně bylo možné zadat buď funkční hodnotou, nebo hodnotou derivace.

$\boxed{624632}$ Řešte **metodou střelby** úlohu

$$\dot{x} = v\cos\theta, \qquad \dot{v} = -0.2v^2 - 10\sin\theta,$$
$$\dot{y} = v\sin\theta, \qquad \dot{\theta} = -\frac{10}{v}\cos\theta$$

s okrajovými podmínkami

$$x(0) = 0, \qquad v(0) = 25,$$
$$y(0) = 0$$

a cílovým bodem na souřadnicích $(7, 1)$.

$\boxed{020648}$ **Metodou střelby** řešte

$$y'' - \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)y = 0, \qquad y\,(0) = 1, \qquad y\,(x \to +\infty) = 0.$$

121655 • Napište proceduru pro řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' = p(x)\, y' + q(x)\, y + r(x)$$

s okrajovými podmínkami

$$y(a) = \alpha, \qquad\qquad y(b) = \beta$$

metodou konečných diferencí pro libovolné funkce $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ spojité na uvažovaném intervalu $\langle a, b\rangle$.

- Testujte program na rovnicích

① $\quad x^2 y'' + x\, y' + y = 0, \qquad y(1) = 0, \qquad y(2) = 0.638961,$

② $\quad y'' = x\, y, \qquad y(1) = 1.5, \qquad y(2) = 3.$

- Volitelné: proceduru zobecněte tak, aby okrajovou podmínku na každé straně bylo možné zadat buď funkční hodnotou, nebo hodnotou derivace.

429660 Naprogramujte **implicitní Eulerovu metodu**

$$\vec{y}^{\,n+1} = \vec{y}^{\,n} + h \cdot \vec{f}\left(x^{n+1}, \vec{y}^{\,n+1}\right)$$

pro systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$. Vyzkoušejte program na systému rovnic chemické kinetiky

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t} &= -\left(k_{12} + k_{13}\right) c_1 + k_{21} c_2 + k_{31} c_3 \\
\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t} &= k_{12} c_1 - \left(k_{21} + k_{23}\right) c_2 + k_{32} c_3 \\
\frac{\mathrm{d}c_3}{\mathrm{d}t} &= k_{13} c_1 + k_{23} c_2 - \left(k_{31} + k_{32}\right) c_3
\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ pro rychlostní konstanty

$$k_{31} = 0.3, \qquad k_{21} = 0.3, \qquad k_{13} = 0.1,$$
$$k_{32} = 0.4, \qquad k_{23} = 0.2.$$

Za k_{12} postupně dosaďte hodnoty 1, 10, 100 a 1000.