STUDII ŞI CERCETĂRI DE FIZICĂ

TOMUL 42 | Nr. 1 | 1990

SUMAR

STUDII MONOGRAFICE DE ANSAMBLU

FIZICA GENERALĂ

FOLOSIREA TRANSFORMĂRII WIGNER PENTRU DESCRIEREA ASPECTELOR CLASICE ALE SISTEMELOR CUANTICE*)

V. Băran

Facultatea de Fizică, Universitatea București, România

(Primit la redacție la 19 mai 1989)

THE USE OF WIGNER TRANSFORMATION FOR THE DESCRIPTION OF THE CLASSICAL ASPECTS OF THE QUANTUM SYSTEMS. 1. Introduction. 2. Canonical coherent states. 3. The operators Hilbert space. 4. Wigner transformation. 5. Conclusions.

The mutual relation between the classical phase space and the operators Hilbert space are explicitly written down. In particular, the Wigner transformation maps the Hilbert space onto the classical space of functions defined on two dimensional manifold.

1. INTRODUCERE

În cuantificarea unui sistem dinamic clasic este întîlnită mereu următoarea „dificultate": mărimilor fizice clasice, care sînt privite ca funcții definite pe o varietate diferențială — spațiul fazelor — caracterizată prin coordonatele locale q și p [1] (coordonatele și impulsurile generalizate), deci funcțiilor $f(q, p)$ de mărimi comutative q și p le corespund observabilele cuantice — operatorii $f(\hat{q}, \hat{p})$ — înlocuind variabilele reale q, p prin operatorii care nu comută $\hat{q}$ și $\hat{p}$; aceasta determină posibilitatea ca uneia și aceleiași mărimi clasice să-i corespundă mai mulți operatori diferiți. De exemplu, pentru un hamiltonian

$$H = p^2 q$$

putem avea

$$\hat{H}_1 = \hat{p}^2 \hat{q} \quad \text{sau} \quad \hat{H}_2 = \hat{p}\hat{q}\hat{p}$$

și se pune problema alegerii expresiei corecte. De fapt, răspunsul la această problemă [2] este că ambele expresii sînt corecte și că ele corespund la două sisteme cuantice diferite, care au același analog clasic. Numai confruntarea calculelor teoretice în cele două cazuri cu rezultatele experimentale poate decide forma adecvată a hamiltonianului sistemului respectiv,

*) Dedic această lucrare memoriei profesorului Ion Bunget.

Fiind mai detailată, mecanica cuantică poate arăta diferențe între anumite fenomene, pe care mecanica clasică să nu le evidențieze [3].

Astfel, au apărut diferite reguli de cuantificare (de asociere) [4] care, în esență, exprimă situația de mai sus, fiecare asociind unei mărimi clasice un operator într-o anumită formă ordonată, specifică regulii.

Articolul [5], în care este introdusă transformarea Wigner, și dezvoltările ulterioare [6, 7] arată cum pot fi obținute valorile așteptate ale unor observabile cuantice printr-o integrare în spațiul fazelor similară celei din mecanica statistică, dar cu o funcție de distribuție ale cărei proprietăți reflectă substratul cuantic [8] (poate lua valori negative).

În acest mod s-a cristalizat reprezentarea mecanicii cuantice în spațiul fazelor generalizat, care permite formularea unor rezultate, anterior disparate, într-o manieră sistematică și unitară [9, 10].

De aici putem deduce rolul transformării Wigner și al funcției de distribuție Wigner corespunzătoare, legătura sa directă cu problema cuantificării. Ea oferă un mod de tratare a problemelor de mecanică cuantică cu ajutorul funcțiilor de variabile comutative. În plus se dovedește o metodă semiclasică folositoare în multe domenii de interes.

Scopul nostru este de a prezenta într-un context mai larg această transformare, ca o reprezentare a mecanicii cuantice în spațiul fazelor generalizat cu dorința de a oferi un cîmp mai deschis posibilității de înțelegere a semnificației funcției de distribuție Wigner, dincolo de caracterul formal al definiției. Acest lucru este dificil de făcut datorită naturii sale cuantice, în ciuda proprietăților care o apropie oarecum de o distribuție de probabilitate veritabilă. Un mod interesant de abordare a acestei chestiuni se poate găsi în [11], în care este interpretată mai degrabă ca o constantă de mișcare corespunzînd unei coordonate colective decît ca funcție de distribuție.

Pentru aceasta, în prima parte vom defini stările coerente canonice și vom prezenta cîteva proprietăți ale lor și ale operatorului care le generează necesare în introducerea spațiului Hilbert al operatorilor. Apoi ilustrăm legătura între bazele de operatori din acest spațiu pe de o parte și diferite reguli de asociere și reprezentări ale mecanicii cuantice în spațiul fazelor pe de altă parte.

Aceasta ne permite să concluzionăm că transformarea Wigner corespunde la o alegere particulară a unei baze în acest spațiu și că este în strînsă legătură cu regula de asociere Weyl. În continuare arătăm cum se calculează valorile medii și cum se scriu ecuațiile de mișcare ale operatorilor în acest formalism.

În ultima parte ne ocupăm de studiul proprietăților și dinamicii funcției de distribuție Wigner și de comportarea în limita clasică.

Întreaga prezentare se va face în cadrul sistemelor cu un singur grad de libertate, de multe ori generalizarea la sisteme cu mai multe grade de libertate fiind directă.

Peste tot unde nu se specifică integrarea trebuie înțeleasă a fi făcută de la $-\infty$ la ∞.

2. STĂRI COERENTE CANONICE

Prin proprietățile lor specifice, stările coerente s-au dovedit a fi utile în multe domenii ale fizicii. Considerațiile teoretice făcute au lărgit clasa acestor obiecte însă toate au în comun două trăsături esențiale pe care le vom explicita în cele ce urmează. Pentru aceasta, să notăm cu $\mathscr{H}$ spațiul Hilbert al stărilor unui sistem fizic arbitrar, iar cu C o mulțime de stări din $\mathscr{H}$

Dacă : 1. Pentru $(\forall)\,|\psi\rangle \in C$ și $(\forall)\,\delta > 0\ (\exists)\ C \ni |\psi'\rangle \neq |\psi\rangle$ astfel încît

$$\|\,|\psi\rangle - |\psi'\rangle\,\| < \delta \tag{2.1}$$

2. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu vectorii din C generează spațiul Hilbert (deci operatorul unitate poate fi reprezentat sub forma unei integrale peste proiectorii pe stările din C)

atunci C constituie o mulțime de stări coerente [12].

Mai riguros, indexînd stările din C cu elementele unei mulțimi $\mathscr{I}$ înzestrate cu o topologie convenabilă, condițiile 1 și 2 se mai scriu :

1. Vectorii $|\mu\rangle$ $\mu \in \mathscr{I}$ sînt funcții continue de indicii μ, adică pentru orice șir convergent de indici $\mu' \to \mu$

$$\|\,|\mu'\rangle - |\mu\rangle\,\| \to 0$$

și cum

$$\|\,|\mu'\rangle - |\mu\rangle\,\| = \langle\mu'|\mu'\rangle + \langle\mu|\mu\rangle - 2\mathrm{Re}\langle\mu'|\mu\rangle \tag{2.2}$$

aceasta înseamnă continuitatea în indicii lor a funcțiilor de forma $\langle\mu'|\mu\rangle$

2. Există o măsură pozitivă $\delta\mu$ în $\mathscr{I}$ astfel încît

$$\hat{I} = \int_{\mathscr{I}} |\mu\rangle\langle\mu|\,\delta\mu \tag{2.3}$$

Intuitiv, 1 arată că mulțimea C va conține vectori arbitrar de „apropiați" unii de alții, formînd o varietate continuă, în $\mathscr{H}$, ceea ce o deosebește de mulțimea vectorilor proprii ai unui operator hermitic (cu spectru discret sau continuu). Drept urmare, 2 nu mai constituie o consecință imediată a unei teoreme de completitudine cum rezultă pentru spectrul operatorilor hermitici și ea trebuie verificată pentru orice mulțime de stări care ar putea fi coerente.

Să considerăm perechea de operatori conjugați hermitic $\hat{a}$ și $\hat{a}^+$ care verifică relația de comutare

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \hat{I} \tag{2.4}$$

Ei pot fi operatorii de anihilare $\hat{a}$ și creare $\hat{a}^+$ bosonici sau operatorii ridicător, respectiv coborîtor, în cazul oscilatorului armonic. În acest ultim caz ei pot fi definiți prin relațiile

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\,\hat{q} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\omega\hbar}}\,\hat{p} \tag{2.5}$$

$$\hat{a}^+ \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\,\hat{q} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\omega\hbar}}\,\hat{p} \tag{2.6}$$

unde operatorii hermitici $\hat{q}$, $\hat{p}$ ascultă de relația de comutare

$$[\hat{q}, \hat{p}] \equiv \hat{q}\,\hat{p} - \hat{p}\,\hat{q} = i\hbar\,\hat{I} \tag{2.7}$$

De fapt, relațiile (2.5) și (2.6) pot fi privite ca relații de definiție în ambele sensuri ((2.23); (2.24))

Operatorul hermitic

$$\hat{N} \equiv \hat{a}^+\hat{a} \tag{2.8}$$

este numit operator număr de particule, vectorii săi proprii constituind un set complet ortonormat. Valorile sale proprii

$$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|\,n\rangle \tag{2.9}$$

sînt numerele naturale $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, efectul acțiunii operatorilor $\hat{a}$ și respectiv $\hat{a}^+$ pe starea $|n\rangle$ fiind

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{2.10}$$

$$\hat{a}^+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{2.11}$$

Vom nota cu $|0\rangle$ starea de vid (starea fundamentală), care are proprietatea

$$\hat{a}\,|\,0\rangle = 0 \tag{2.12}$$

Folosind relația (2.11) putem scrie:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(\hat{a}^+)^n\,|\,0\rangle \tag{2.13}$$

Definiție. Stările coerente obținute prin transformarea stării fundamentale $|0\rangle$:

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{(z\hat{a}^+ - z^*\hat{a})}\,|\,0\rangle \tag{2.14}$$

unde $z \in \mathbb{C}$, sînt numite stări coerente canonice [13]

Să arătăm că mulțimea $\{|z\rangle\}$ cu $z \in \mathbb{C}$ verifică 1 și 2. Mai întîi, exprimăm starea coerentă canonică $|z\rangle$ ca o suprapunere de stări proprii ale operatorului număr de particule. Pentru aceasta, vom folosi identitatea Baker-Hausdorf

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,\,B]}\,\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} \tag{2.15}$$

adevărată dacă A și B comută cu comutatorul lor $[A, B]$
Astfel

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\,\mathrm{e}^{z\hat{a}^+}\,\mathrm{e}^{-z^*\hat{a}}|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\,z^n\,|\,n\rangle \tag{2.16}$$

Evident

$$\langle z| = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\,z^{*n}\,\langle n| \tag{2.17}$$

și

$$\langle z_1\,|\,z_2\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z_1|^2 + z_1^* z_2 - \frac{1}{2}|z_2|^2} \tag{2.18}$$

deci într-o stare dată $|z_2\rangle$ se află oricare altă stare $|z_1\rangle$ cu o pondere $\langle z_1|z_2\rangle \neq 0$
În plus,

$$|\langle z_1\,|\,z_2\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|z_1 - z_2|^2} \tag{2.19}$$

Deoarece $\langle z_1|z_2\rangle$ este o funcție continuă de z_1 și z_2, condiția 1 este îndeplinită. Spațiul indicilor $\mathscr{I}$ în acest caz este planul complex $\mathbb{C}$. Ne vom alege o măsură

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\,(\mathrm{Re}\,z)\,\mathrm{d}\,(\mathrm{Im}\,z) \tag{2.20}$$

și trecînd la coordonate polare $z = r\,\exp\,(\mathrm{i}\theta)$ cu (2.16) și (2.17) obținem

$$\int |z\rangle\,\langle z|\,\mathrm{d}^2 z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|m\rangle\,\langle n|}{\sqrt{m!\,n!}}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2}\,r^{m+n+1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

deci

$$\frac{1}{\pi}\int |z\rangle\,\langle z|\,\mathrm{d}^2 z = \hat{I} \tag{2.21}$$

fiind verificată și 2.

Starea coerentă canonică $|z\rangle$ este o stare proprie cu valoarea proprie z a operatorului $\hat{a}$:

$$\hat{a}\,|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\,z^n\,\hat{a}\,|\,n\rangle = z\,|z\rangle \tag{2.22}$$

Putem avea o reprezentare fizică a acestor stări exprimind pe $|z\rangle$ în spațiul coordonatelor (respectiv impulsurilor) ale căror operatori asociați sînt $\hat{q}$ (respectiv $\hat{p}$) definiți din (2.5) și (2.6) prin

$$\hat{q} \equiv \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} (\hat{a}^{+} + \hat{a}) \tag{2.23}$$

$$\hat{p} \equiv \mathrm{i}\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^{+} - \hat{a}) \tag{2.24}$$

Se observă din (2.22), (2.23), (2.24) că

$$q_0 \equiv \langle z|\hat{q}|z\rangle = \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2} \mathrm{Re}\, z \tag{2.25}$$

$$p_0 \equiv \langle z|\hat{p}|z\rangle = (2\hbar\omega)^{1/2}\, \mathrm{Im}\, z \tag{2.26}$$

ceea ce dă o semnificație părților reală și imaginară ale parametrului z.

Folosind definițiile

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \tag{2.27}$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \tag{2.28}$$

(păstrăm simbolurile q_0, p_0 pentru notațiile care rezultă din (2.25) și (2.26) în ecuația

$$\left(\frac{1}{2\hbar\omega}\right)^{1/2} (\omega\hat{q} + i\hat{p})\,|z\rangle = z|z\rangle \tag{2.29}$$

via

$$\langle q|\,\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\langle q| \tag{2.30}$$

obținem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\langle q|z\rangle = -2\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} q - z\right\}\langle q|z\rangle \tag{2.31}$$

Soluția, pînă la un factor de fază, care verifică și condiția de normare este

$$\langle q|z\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{(\mathrm{Im}\, z)^2} e^{-\left[\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} q - z\right]^2} \tag{2.32}$$

Analog

$$\langle p|z\rangle = \left(\frac{1}{\pi\hbar\omega}\right)^{1/4} e^{(\mathrm{Re}\, z)^2} e^{-\left[\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} p + iz\right]^2} \tag{2.33}$$

Din (2.32) putem găsi probabilitatea ca în starea coerentă $|z\rangle$ sistemul să aibă coordonata q (să se afle în starea $|q\rangle$)

$$|\langle q|z\rangle|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar}(q - q_0)^2} \tag{2.34}$$

care este evident o distribuție gaussiană centrată în valoarea medie q_0.

Pentru starea fundamentală $|0\rangle$ avem reprezentarea

$$|\langle q|0\rangle|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar}q^2} \tag{2.35}$$

și putem afirma că stările coerente sînt forme deplasate ale stării fundamentale $|0\rangle$, înțelegînd prin aceasta că distribuția de probabilitate $|\langle q|z\rangle|^2$ este tot gaussiană, dar centrată în $q = q_0$ și nu în $q = 0$. Pentru aceasta, după cum s-a văzut în (2.16), trebuie să suprapunem toate stările $|n\rangle$ într-un mod bine stabilit. Discuții similare se pot face și pentru reprezentarea în spațiul impulsului.

O proprietate interesantă este legată de faptul că abaterile

$$(\Delta q)^2 = \langle\hat{q}^2\rangle - \langle\hat{q}\rangle^2 \tag{2.36}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2 \tag{2.37}$$

calculate pe aceste stări dau produsul minim principial posibil :

$$(\Delta q)\,(\Delta p) = \frac{1}{2}\hbar \tag{2.38}$$

Putem afla o semnificație pentru $|z|$, calculînd valoarea medie a energiei pentru hamiltonianul

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{2.39}$$

într-o stare coerentă $|z\rangle$:

$$\langle z|\hat{H}|z\rangle = \langle z|\hat{N}|z\rangle\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = |z|^2\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} \tag{2.40}$$

deci $|z|^2$ reprezintă numărul mediu de particule, $\bar{N}$, pe starea $|z\rangle$.

Trebuie subliniat că datorită proprietății (2.18) stările coerente constituie un sistem supercomplet în spațiul Hilbeert al stărilor, fiind suficientă o submulțime (chiar numărabilă) pentru a exprima toate stările din acest spațiu.

Să considerăm hamiltonianul

$$\hat{H}_1 = \hbar\omega\hat{a}^{+}\hat{a} - \hbar\omega(z_1\hat{a}^{+} - z_1^{*}\hat{a}) \qquad (2.41)$$

care are proprietatea că nu conservă numărul de oscilații (z_1 este un parametru complex). Avînd în vedere (2.22), se observă că starea coerentă $|z_1\rangle$ este stare proprie a acestuia, cu valoarea proprie $\hbar\omega|z_1|^2$.

În încheiere subliniem legătura care există între stările coerente și teoria grupurilor. Fie G un grup Lie și T o reprezentare ireductibilă unitară a sa care acționează pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}$. În $\mathcal{H}$ ne alegem o stare arbitrară $|\psi_0\rangle$. Vom nota cu H grupul staționar al stării $|\psi_0\rangle$ adică mulțimea elementelor din G ai căror operatori corespunzători din T nu o modifică decît pînă la un factor de fază. H este subgrup al lui G și putem construi grupul factor G/H.

Vectorii obținuți de la $|\psi_0\rangle$ prin acțiunea elementelor din T corespunzînd la același complex conjugat gH, $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$, $q \in gH$ diferă între ei numai printr-un factor de fază, deci reprezintă aceeași stare, iar stări distincte corespund la complecși conjugați diferiți. Astfel, putem indica o stare prin $|x\rangle$, unde $x \in G/H$. Se poate arăta că mulțimea acestor stări

$$S = \{|x\rangle \; |x \in G/H\}$$

are proprietățile 1) și 2) enumerate la început, deci reprezintă un sistem de stări coerente [23]. În cazul particular cînd grupul Lie corespunde algebrei Lie generate de operatorii $\hat{a}, \hat{a}^{+}$ și I, el are ca reprezentare ireductibilă operatorii Weyl $e^{\alpha\hat{a}^{+} - \alpha^{*}\hat{a}}$ (pînă la un factor de fază). Alegînd $|\psi_0\rangle$ ca fiind starea de vid $|0\rangle$ definită prin (2.12), obținem chiar stările coerente canonice.

3. SPAȚIUL HILBERT AL OPERATORILOR

3.1. BAZE DE OPERATORI ÎN SPAȚIUL HILBERT AL OPERATORILOR

Vom dezvolta un formalism general pe baza căruia putem ajunge la definirea transformării Wigner. Rolul central îl va juca operatorul

$$\hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^{+} - z^{*}\hat{a}} \qquad (3.1)$$

cu care am construit stările coerente. De aceea, să deducem întîi unele proprietăți ale sale.

Din (2.15), $\hat{D}(z)$ se mai scrie

$$\hat{D}(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{z\hat{a}^{+}} e^{-z^{*}\hat{a}} \qquad (3.2)$$

și în plus

$$\hat{D}(z_1)\,\hat{D}(z_2) = e^{\frac{1}{2}(z_1 z_2^{*} - z_1^{*} z_2)}\,\hat{D}(z_1 + z_2) \qquad (3.3)$$

Deci

$$\hat{D}(z_1)|z_2\rangle = e^{\frac{1}{2}(z_1 z_2^{*} - z_1^{*} z_2)}|z_1 + z_2\rangle \qquad (3.4)$$

Cum $\hat{D}(0) = \hat{I}$, din (3.3) obținem

$$\hat{D}(-z) = \hat{D}^{-1}(z) \qquad (3.5)$$

De asemenea, din (3.2) și (3.5) găsim că $\hat{D}(z)$ este unitar

$$\hat{D}^{-1}(z) = \hat{D}^{+}(z)$$

Putem deduce ușor, folosind proprietatea

$$[\hat{a}, (\hat{a}^{+})^{n}] = n(\hat{a}^{+})^{n-1} \qquad (3.6)$$

următoarele relații:

$$\hat{D}^{+}(z)\,\hat{a}\hat{D}(z) = \hat{a} + z\hat{I} \qquad (3.7)$$

$$\hat{D}^{+}(z)\,\hat{a}^{+}\hat{D}(z) = \hat{a}^{+} + z^{*}I \qquad (3.8)$$

în virtutea cărora $\hat{D}(z)$ mai poartă numele de operator deplasare.

Să calculăm Tr $\hat{D}(z)$. Pentru aceasta folosim

$$\mathrm{Tr}\,\hat{A} = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,\langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle \qquad (3.9)$$

care se deduce astfel:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{A} = \sum_n \langle n|\hat{A}|n\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\iint \sum_n \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle\langle\beta|n\rangle\, d^2\alpha\, d^2\beta = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,\langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle \qquad (3.10)$$

Acum

$$\mathrm{Tr}\,\hat{D}(z) = \frac{1}{\pi}\int\langle\alpha|\hat{D}(z)|\alpha\rangle\, d^2\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\langle\alpha|\alpha + z\rangle\, e^{\frac{1}{2}(z\alpha^{*} - z^{*}\alpha)}\, d^2\alpha = \pi\delta^{(2)}(z) \qquad (3.11)$$

deoarece

$$\frac{1}{\pi^2}\int e^{\alpha^* z - \alpha z^*}\,d^2\alpha = \delta^{(2)}(z) \tag{3.12}$$

în care $\delta^{(2)}(z)$ înseamnă $\delta(\mathrm{Re}z)\,\delta(\mathrm{Im}z)$.
În mod analog

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{D}^+(z_1)\,\hat{D}(z_2)] = \pi\delta^{(2)}(z_1 - z_2) \tag{3.13}$$

Elementele de matrice pe stările coerente sînt

$$\langle z_1|\,\hat{D}(z)\,|\,z_2\rangle = \langle z_1|\,z_2\rangle\, e^{\left(z z_1^* - z^* z_2 - \frac{1}{2}|z|^2\right)} \tag{3.14}$$

Ne vom referi în continuare la operatorii $\hat{G}$ definiți pe $\mathscr{H}$, care sînt funcții de $\hat{a}$ și $\hat{a}^+$, deci $\hat{G} = \hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)$. Mulțimea operatorilor $\hat{G}$ de clasă Hilbert-Schmidt (pentru care $\mathrm{Tr}(\hat{G}^+\hat{G}) < \infty$) are o structură de spațiu Hilbert, $\mathscr{H}_0$, dacă definim pe ea un produs scalar

$$(\hat{A}\,|\,\hat{B}) = \mathrm{Tr}\,\hat{A}^+\hat{B} \tag{3.15}$$

unde elementele lui $\mathscr{H}_0$, prin analogie cu formalismul lui Dirac, le-am notat cu $|\,\hat{A})$.

Teorema I. *Operatorii $\hat{D}(\alpha)$ cu $\alpha \in \mathbb{C}$ formează o bază ortogonală în spațiul $\mathscr{H}_0$ al operatorilor de clasă Hilbert-Schmidt $\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)$* adică

$$|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\,(\hat{D}(\alpha)|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))\,|\,\hat{D}(\alpha)) \tag{3.16}$$

Demonstrație : Ortogonalitatea este exprimată în (3.13)

$$(\hat{D}(\alpha)\,|\,\hat{D}(\beta)) = \pi\delta^{(2)}(\alpha - \beta) \tag{3.17}$$

Pentru completitudine să considerăm elementele de matrice pe stările coerente ale operatorului

$$|\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\,(\hat{D}(\alpha)|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))\,|\,\hat{D}(\alpha))$$

$$\langle z_1|\,\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,|\,z_2\rangle = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\int\frac{d^2\gamma}{\pi}\,\langle\gamma|\,\hat{D}^+(\alpha)\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)|\gamma\rangle\,\langle z_1|\,\hat{D}(\alpha)\,|\,z_2\rangle =$$

$$= \iiint \frac{d^2\alpha\, d^2\beta\, d^2\gamma}{\pi^3}\,\langle\gamma|\,\hat{D}^+(\alpha)\,|\beta\rangle\,\langle\beta|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,|\,\gamma\rangle\,\langle z_1|\,\hat{D}(\alpha)\,|\,z_2\rangle =$$

$$= \iint \frac{d^2\beta\, d^2\gamma}{\pi^2}\left(\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\, e^{-|\alpha|^2 + \alpha(z_1^* - \gamma^*) - \alpha^*(z_2 - \beta)}\right)\langle z_1|\,z_2\rangle\langle\gamma\,|\,\beta\rangle\langle\beta\,|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,|\gamma\rangle =$$

$$= \iint \frac{d^2\beta\, d^2\gamma}{\pi^2}\,\langle z_1|z_2\rangle\,\langle\gamma\,|\beta\rangle\,\langle\beta\,|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)|\,\gamma\rangle\, e^{-z_1 z_2^* - \beta\gamma^* + \gamma^* z_2 + \beta z_1^*} =$$

$$= \iint \frac{d^2\beta\, d^2\gamma}{\pi^2}\,\langle z_1|\,\beta\rangle\,\langle\alpha\,|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)|\gamma\rangle\,\langle\gamma|\,z_2\rangle =$$

$$\doteq \langle z_1|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)|\,z_2\rangle$$

deci

$$|\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = |\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))$$

Dacă vom numi superoperatori operatorii care acționează pe $\mathscr{H}_0$, atunci teorema I afirmă că superoperatorul unitate, $\hat{1}$, are următoarea descompunere

$$\hat{1} = \int\frac{d^2\alpha}{\pi}\,|\,\hat{D}(\alpha))\,(\hat{D}(\alpha)| \tag{3.18}$$

3.2. BAZE DE OPERATORI ȘI REGULI DE ASOCIERE

O regulă de asociere exprimă modul în care se construiește un operator corespunzător unei mărimi fizice date plecînd de la expresia clasică a acesteia. Astfel, de la monomul $z^m z^{*n}$ putem construi următorii operatori :

Regula normală	$z^m z^{*n} \to \hat{a}^{+m}\,\hat{a}^m$
Regula antinormală	$z^m z^{*n} \to \hat{a}^m\,\hat{a}^{+n}$
Regula Weyl	$z^m z^{*n} \to \{\hat{a}^m\,\hat{a}^{+n}\}_W$

unde $\{\hat{a}^m\,\hat{a}^{+n}\}_W$ denotă produsul Weyl simetrizat, adică suma de toate combinațiile posibile de m $\hat{a}$-uri și n $\hat{a}^+$-uri împărțită la numărul acestor combinații. De exemplu,

$$\{\hat{a}^2\,\hat{a}^{+2}\}_W = \frac{1}{6}(\hat{a}^2\,\hat{a}^{+2} + \hat{a}\,\hat{a}^{+2}\,\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+\,\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\,\hat{a}\hat{a}^+\,\hat{a} + \hat{a}^+\,\hat{a}^2\,\hat{a}^+ + \hat{a}^{+2}\,\hat{a}^2) \tag{3.19}$$

Cele trei reguli specificate nu sînt singurele din mecanica cuantică (altele și o analiză a deficiențelor fiecăreia pot fi găsite în [4]).

Pentru o funcție clasică, exprimată prin integrala Fourier,

$$F(z, z^*) = \int f(\alpha, \alpha^*)\, e^{\alpha z^* - \alpha^* z}\, d^2\alpha \tag{3.20}$$

cu

$$f(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int F(z, z^*)\, e^{-(\alpha z^* - \alpha^* z)}\, d^2 z \tag{3.21}$$

operatorii corespunzători fiecărei reguli se obțin înlocuind funcția $e^{\alpha z^* - \alpha^* z}$ cu

$$|\hat{D}_\Omega(\alpha)) = \Omega(\alpha, \alpha^*)\; e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}} \tag{3.22}$$

în care $\Omega(\alpha, \alpha^*)$ depinde de regula de asociere.

$\Omega_N(\alpha, \alpha^*) = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2}$ pentru regula normală

$\Omega_{AN}(\alpha, \alpha^*) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$ pentru regula antinormală

$\Omega_W(\alpha, \alpha^*) = 1$ pentru regula Weyl

Deci

$$|\hat{F}^{(\Omega)}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \int f(\alpha, \alpha^*)\, |\hat{D}_\Omega(\alpha))\, d^2\alpha \tag{3.23}$$

Putem lărgi mulțimea regulilor de asociere considerînd funcții mai generale, care se obțin de la o funcție $\Omega(\alpha, \beta)$ avînd următoarele proprietăți:

1) $\Omega(\alpha, \beta)$ este o funcție de două variabile complexe analitică pe tot domeniul de definiție $\mathbb{C}^2$;

2) $\Omega(\alpha, \beta)$ nu are zerouri;

3) $\Omega(0, 0) = 1$

4) $\Omega(-\alpha, -\beta) = \Omega^*(\alpha, \beta)$

5) $\Omega(-\alpha, -\beta) = \Omega(\alpha, \beta)$

Proprietatea 3) ne asigură că unității îi corespunde operatorul unitate, iar 4) că unei mărimi clasice reale îi va corespunde un operator hermitic.

În virtutea proprietăților 1) și 2) $\Omega(\alpha, \beta)$ trebuie să fie de forma

$$\Omega(\alpha, \beta) = e^{\chi(\alpha, \beta)} \tag{3.24}$$

în care $\chi(\alpha, \beta)$ este ea însăși o funcție analitică. Avînd în vedere 3) și dezvoltînd pe $\chi(\alpha, \beta)$ într-o serie de puteri

$$\chi(\alpha, \beta) = A\alpha + B\beta + \mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \lambda\alpha\beta + \ldots \tag{3.25}$$

obținem

$$\Omega(\alpha, \beta) = e^{A\alpha + B\beta + \mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \lambda\alpha\beta + \ldots} \tag{3.26}$$

Deoarece dorim să avem corespondența

$$z \to \hat{a} \tag{3.27}$$

$$z^* \to \hat{a}^+ \tag{3.28}$$

trebuie ca $A = B = 0$ sau echivalent

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = 0 \quad \text{cînd } \alpha = \beta = 0 \tag{3.29}$$

care este satisfăcută pentru toate funcțiile $\Omega(\alpha, \beta)$ cu proprietatea 5).

Prin particularizări evidente ale coeficienților μ, ν, λ, ... putem obține toate regulile de asociere cunoscute.

Produsul Ω — ordonat $\{a^m a^{+n}\}_\Omega$ adică operatorul care corespunde monomului $z^m z^{*n}$ prin regula Ω se obține conform relației

$$\{a^m \hat{a}^{+n}\}_\Omega = \frac{\partial^{m+n}}{\partial \alpha^n (-\alpha^*)^m} \,|\, \hat{D}_\Omega(\alpha))\,|_{\alpha = \alpha^* = 0} \tag{3.30}$$

ușor de demonstrat avînd în vedere (3.21) și (3.23).

Operatorii $|\hat{D}_\Omega(\alpha))$ formează o bază în spațiul Hilbert al operatorilor, în sensul că

$$\hat{1} = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \,|\, \hat{D}_\Omega(\alpha))\, (\hat{D}_{\tilde{\Omega}}(\alpha)| \tag{3.31}$$

unde

$$|\hat{D}_{\tilde{\Omega}}(\alpha)) = \tilde{\Omega}(\alpha, \alpha^*)\, \hat{D}(\alpha) \tag{3.32}$$

cu

$$\tilde{\Omega}(\alpha, \alpha^*) = [\Omega(-\alpha, -\alpha^*)]^{-1} \tag{3.33}$$

În plus, este verificată relația de ortogonalitate

$$(\hat{D}_{\tilde{\Omega}}(\alpha) \,|\, \hat{D}_\Omega(\beta)) = \pi\, \delta^2(\alpha - \beta) \tag{3.34}$$

Deci putem afirma că fiecărei reguli de asociere îi corespunde o bază în spațiul Hilbert al operatorilor. Putem face mai evidentă această idee pleeînd în discuția noastră direct de la funcția clasică $F(z, z^*)$ și nu de la spectrul său Fourier. Pentru aceasta, folosim (3.21) în (3.23):

$$|\hat{F}(a, \hat{a}^+)) = \frac{1}{\pi^2}\int\left(\int F(z, z^*) e^{-(\alpha z^* - \alpha z^*)} d^2 z\right) \Omega(\alpha, \alpha^*) e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}} d^2\alpha \qquad (3.35)$$

și schimbînd ordinea de integrare rezultă

$$|\hat{F}(\hat{a}\, \hat{a}^+)) = \frac{1}{\pi}\int F(z, z^*)\, |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))\, d^2 z \qquad (3.36)$$

unde

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z, z^*)) \equiv \frac{1}{\pi}\int \Omega(\alpha, \alpha^*) e^{\alpha(\hat{a}^+ - z^*) - \alpha^*(\hat{a} - z)} d^2\alpha \qquad (3.37)$$

Se observă că fiecare regulă de asociere determină o aplicație liniară, o vom nota cu Ω

$$\Omega : \mathcal{M} \to \mathcal{H}_0 \qquad (3.38)$$

de la $\mathcal{M}$, mulțimea funcțiilor clasice $F(z, z^*)$ la spațiul operatorilor $\mathcal{H}_0$, avînd proprietățile:

$$\Omega(F(z, z^*)) = |\hat{F}^{\Omega}(\hat{a}, \hat{a})) \qquad (3.39)$$

$$\Omega(c_1 F_1 + c_2 F_2) = c_1 \Omega(F_1) + c_2 \Omega(F_2) \qquad (3.40)$$

$$\Omega(c) = c\, \hat{1} \qquad (3.41)$$

Operatorul obținut prin aplicația Ω de la funcția $F(z, z^*)$ este Ω-ordonat, adică dacă $F(z, z^*)$ admite dezvoltarea în serie de puteri

$$F(z, z^*) = \sum_{m,n} d_{mn} z^m z^{*n} \qquad (3.42)$$

atunci

$$|\hat{F}^{(\Omega)}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \sum_{m,n} d_{mn} \{\hat{a}^m \hat{a}^{+n}\} \qquad (3.43)$$

$\{\hat{a}^m \hat{a}^{+n}\}_\Omega$ fiind definit prin (3.30)

Mulțimea $\{|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))\}$, cu $z \in \mathbb{C}$ formează o bază ortogonală în spațiul Hilbert $\mathcal{H}_0$:

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)| =$$

$$= \int \frac{d^2 z}{\pi} \iint \frac{d^2\alpha\, d^2\beta}{\pi^2} \Omega(\alpha, \alpha^*) \tilde{\Omega}^*(\beta, \beta^*) e^{-(\alpha-\beta)z^* + (\alpha^* - \beta^*)z} |\hat{D}(\alpha))(\hat{D}(\beta)| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \Omega(\alpha, \alpha^*) \tilde{\Omega}^*(\beta, \beta^*) \delta^{(2)}(\alpha - \beta) |\hat{D}(\alpha))(\hat{D}(\beta)|\, d^2\alpha\, d^2\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int |\hat{D}(\alpha))(\hat{D}(\alpha)|\, d^2\alpha = \hat{1}$$

deci

$$\hat{1} = \int \frac{d^2 z}{\pi} |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)| \qquad (3.44)$$

De asemenea

$$(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z')) = \pi \delta^{(2)}(z - z') \qquad (3.45)$$

În concluzie, fiecare regulă de asociere corespunde la o alegere a unei anumite baze $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))$ $z \in \mathbb{C}$, fiind complet definită de aceasta conform (3.36)

În continuare vrem să demonstrăm cîteva proprietăți mai importante ale operatorilor $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))$

a) Operatorul $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0))$ corespunde funcției $\delta^{(2)}(z - z_0)$ prin aplicația liniară Ω.

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0)) = \Omega(\delta^{(2)}(z - z_0).) \qquad (3.46)$$

fapt evident din definiția (3.36)

b) $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0))$ este hermitic

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0))^+ = |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0)) \qquad (3.47)$$

Într-adevăr, în virtutea proprietății 4) a lui $\Omega(\alpha, \alpha^*)$, schimbînd variabila de integrare de la α la $-\alpha$ în relația de mai jos

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0))^+ = \int \Omega^*(\alpha, \alpha^*) e^{-\alpha(\hat{a}^+ - z^*) + \alpha^*(\hat{a} - z_0)} d^2\alpha \qquad (3.48)$$

obținem egalitatea dorită.

c) $$\mathrm{Tr}(\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0)) = (\hat{1}\, |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0)) = 1. \qquad (3.49)$$

datorită relației (3.11) și proprietății 3) a lui $\Omega(\alpha, \alpha^*)$.

d) $$\mathrm{Tr}(\hat{\Delta}^{(\Omega_1)}(z_1)\, \Delta^{(\Omega_2)}(z_2)) = \frac{1}{\pi}\int \Omega_1(\alpha, \alpha^*)\, \Omega_2(-\alpha, -\alpha^*) \exp^{\alpha(z_2^* - z_1^*) - \alpha^*(z_2 - z_1)} d^2\alpha \qquad (3.50)$$

Pentru demonstrație este suficientă relația (3.13).

e) $$\int d^2 z_0\, |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0)) = \pi\, \hat{1}. \qquad (3.51)$$

fapt evident integrînd mai întîi în raport cu z_0 și folosind $\Omega(0, 0) = 1$

3.3. BAZE DE OPERATORI ȘI REPREZENTAREA MECANICII CUANTICE ÎN SPAȚIUL FAZELOR GENERALIZAT

În reprezentarea mecanicii cuantice în spațiul fazelor generalizat locul operatorilor $\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)$ este luat de funcții care depind de doi parametri comutativi, $G^{(\Omega)}(z, z^*)$, cu $z, z^* \in \mathbb{C}$, parametrii determinînd o varietate numită spațiul fazelor generalizat. Modul în care sînt obținute aceste funcții de la operatorii corespunzători este dat prin reguli bine precizate pe care le vom explicita în cele ce urmează.

Proprietățile geometrice ale varietății construite se deosebesc de cele ale spațiului fazelor clasic și parametrii din funcția $G^{(\Omega)}(z, z^*)$ [14] nu trebuie identificați (confundați) cu variabilele de care depindea o funcție clasică $F(z, z^*)$. Motivația pentru care am păstrat aceeași notație este că în limita $\hbar \to 0$ ele capătă semnificație clasică (acele unde este posibil), spațiul fazelor generalizat confundîndu-se cu cel clasic.

Indicele (Ω) are un dublu rol : în primul rînd prezența lui ne va permite să deosebim funcția de mărimi comutative $G^{(\Omega)}(z, z^*)$ de o funcție clasică ; în al doilea rînd, funcțiile care corespund la operatori sînt în strînsă legătură cu aplicațiile liniare Ω introduse în secțiunea anterioară prin intermediul bazelor de operatori.

Ne propunem în continuare să expunem principalele rezultate ale acestui formalism utile în înțelegerea transformării Wigner.

Fie $|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^*))$ un element al spațiului $\mathscr{H}_0$ și $\{|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))\}\, z, z^* \in \mathbb{C}$ o bază definită prin (3.37), corespunzînd funcției $\Omega(\alpha, \alpha^*)$, cu ajutorul căreia

$$|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \frac{1}{\pi}\int (\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,|\,\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))\,\mathrm{d}^2 z \tag{3.52}$$

unde

$$(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})+}(z)] \tag{3.53}$$

Deoarece operatorii $|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z))$ sînt hermitici :

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})+}(z)] = \mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)] \tag{3.54}$$

Definiție : Numim echivalent Ω al operatorului $|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))$ funcția de doi parametri comutativi z și z^* definită prin :

$$G^{(\Omega)}(z, z^*) = \mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)\,\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)] \tag{3.55}$$

sau, în virtutea relației (3.54),

$$G^{(\Omega)}(z, z^*) = (\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(\hat{a})\,|\,\hat{G}(\hat{a}, \hat{a})) \tag{3.56}$$

Observații : 1) După cum se observă, echivalentul Ω al operatorului $|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))$ se obține folosind operatorul $|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z))$ corespunzător funcției $\tilde{\Omega}(\alpha, \alpha^*)$.

2) În definiția (3.56) am apelat la proprietatea de hermiticitate a lui $|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z))$, ceea ce ne-a permis să introducem într-un mod mai sugestiv echivalentul Ω ca fiind coeficientul dezvoltării în baza $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))$ a lui $|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))$. În alte referințe [9], în care $|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z))$ nu este hermitic ($\Omega(\alpha, \alpha^*)$ nu verifică 5)), se apelează numai la (3.55).

Această definiție permite introducerea unei aplicații liniare Θ

$$\Theta : \mathscr{H}_0 \to Q \tag{3.57}$$

unde $\mathscr{H}_0$ este spațiul Hilbert al operatorilor de clasă Hilbert-Schmidt, iar Q este mulțimea funcțiilor de doi parametri comutativi. Θ are proprietățile :

$$\Theta\,(|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+))) = (\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+)) \tag{3.58}$$

$$\Theta\,(c_1\,|\,\hat{G}_1) + c_2\,|\,\hat{G}_2)) = c_1\,\Theta\,(|\,\hat{G})) + c_2\,\Theta(|\,\hat{G}_2)) \tag{3.59}$$

$$\Theta\,(c\,|\,\hat{I})) = c_0 \tag{3.60}$$

Aplicația liniară Θ este într-un anumit sens inversa aplicației liniare Ω :

Teorema II : *Echivalentul Ω al operatorului Ω — ordonat $|G^{(\Omega)}(\hat{a}, \hat{a}^+))$ este funcția clasică $G(z, z^*)$ privită ca o funcție de doi parametri comutativi.*

Demonstrație :

$$G^{(\Omega)}(z, z^*) = (\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}^{(\Omega)}(\hat{a}, \hat{a}^+)) =$$

$$= \int G(z', z'^*)\,(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z')\,\mathrm{d}^2 z',$$

și ținînd cont de (3.45)

$$G^{(\Omega)}(z, z^*) = G(z, z^*) \tag{3.61}$$

Observații : 1) Evident funcția clasică $G(z, z^*)$ privită ca o funcție de doi parametri comutativi este un element al mulțimii Q și nu al mulțimii $\mathscr{M}$. Vom nota cu $Q_{\mathscr{M}}$ submulțimea lui Q construită de la funcțiile clasice în acest fel. Cu alte cuvinte, doar formal, echivalentul Ω are aceeași expresie ca funcția clasică veritabilă, fizic păstrînd informația cuantică de la operatorul de la care a fost obținut.

2) Domeniul de definiție al aplicației Θ include imaginea prin Ω a mulțimii de funcții clasice veritabile $\mathscr{M}$ și de asemenea imaginea prin Θ a lui $\mathscr{H}_0$ include submulțimea $Q_{\mathscr{M}}$. Prin abuz, admițînd că Ω ar acționa pe $Q_{\mathscr{M}}$ și pe $\mathscr{M}$, atunci restricția lui Θ la mulțimea operatorilor Ω-ordonați, în virtutea teoremei II, este inversa lui Ω :

$$\Theta\Omega = \Omega\,\Theta = 1 \tag{3.62}$$

3) Observația 1) este argumentată și de faptul că dacă aplicația Θ_1 este definită cu ajutorul unei baze $|\hat{\Delta}^{(\Omega_1)}(z))$ pentru care $\Omega_1 \neq \Omega$ atunci echivalentul Ω al unui operator Ω-ordonat $|\hat{G}^{(\Omega)}(\hat{a}, \hat{a}^*))$ nu mai are expresia matematică a funcției clasice veritabile, adică Θ_1 nu mai este inversa lui Ω. Altfel spus, există o infinitate de perechi de aplicații liniare