Θ și Ω, una inversa alteia, dar nimic nu ne împiedică să folosim pentru cuantificarea unui sistem o aplicație Ω, iar pentru reprezentarea în spațiul fazelor generalizat o aplicație Θ_1 care nu este inversa lui Ω. Alegerea aplicației Θ este determinată numai de considerente de ușurință a calculului sau simetrie.

Importanța echivalentului Ω introdus prin definiția anterioară reiese din următoarea teoremă:

Teorema III: *Urma produsului a doi operatori* $|\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+))$ și $|\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+))$ *se poate exprima sub forma unei integrale pe spațiul fazelor generalizat:*

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{G}_1\hat{G}_2) = (\hat{G}_1^+(\hat{a}, \hat{a}^+)\,|\,\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2z\, G_1^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)\, G_2^{(\Omega)}(z, z^*) \tag{3.63}$$

unde

$$G_1^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*) = (\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z)\,|\,\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+)) \tag{3.64}$$

$$G_2^{(\Omega)}(z, z^*) = (\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+)) \tag{3.65}$$

Demonstrație: Folosim relația de completitudine (3.44):

$$(\hat{G}_1^+(\hat{a}, \hat{a}^+)\,|\,\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+)) = \frac{1}{\pi}\int(\hat{G}_1^+(\hat{a}, \hat{a}^+)|\,\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+))\,\mathrm{d}^2z =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int(\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z)|\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+))(\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)\,|\,\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+))\mathrm{d}^2z =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}^2z\, G_1^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)\, G_2(z, z^*)$$

Pentru cazul particular cînd $|\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+)$ este chiar matricea densității $\hat{\rho}$, relația (3.63) se scrie:

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\hat{G}) = (\hat{\rho}\,|\,\hat{G}) = \int\mathrm{d}^2z\,\frac{\rho^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)}{\pi}\,G^{(\Omega)}(z, z^*) =$$

$$= \int\mathrm{d}^2z\, F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)\, G^{(\Omega)}(z, z^*) \tag{3.66}$$

adică valoarea medie a unei mărimi fizice este exprimată într-o formă similară cu cea din mecanica clasică.

$F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)$ are rolul unei funcții de distribuție, dar nu poate fi identificată cu o densitate de probabilitate adevărată, deoarece nu posedă toate proprietățile acesteia din urmă (poate lua valori negative).

Semnificația lui $F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)$ este de valoare medie a operatorului $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))$

$$F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z_0, z_0^*) = \mathrm{Tr}[\,\hat{\rho}\,\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_0)] \tag{3.67}$$

sau avînd în vedere (3.46), de valoare medie a imaginii prin Ω a funcției $\delta^{(2)}(z - z_0)$

$$F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z_0, z_0^*) = \mathrm{Tr}[\,\hat{\rho}\,\Omega(\delta^{(2)}(z - z_0))] \tag{3.68}$$

Pentru $\hat{G} = \hat{I}$ deoarece $G^{(\Omega)}(z, z^*) = 1$ obținem că $F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)$ este corect normată:

$$\int F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)\;\mathrm{d}^2z = 1 \tag{3.69}$$

În cazul în care operatorul $|\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^*))$ este Ω-ordonat, fiind obținut prin aplicația Ω de la o funcție clasică $G(z, z^*)$, iar Θ este inversa lui Ω, atunci privind pe $G(z, z^*)$ ca un element al mulțimii $Q_{\mathcal{M}}$, în virtutea teoremei III are loc:

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\;\hat{G}) = \int\mathrm{d}^2z\, F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)\, G(z, z^*) \tag{3.70}$$

Este interesant să particularizăm rezultatele de pînă acum pentru $\Omega_N(\alpha, \alpha^*) = \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$. După cum vom vedea, aceasta corespunde reprezentării P a matricei densității.

Mai întîi, evaluînd operatorul $|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z))$

$$|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z)) = \frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}^2\alpha\,\tilde{\Omega}_N(\alpha, \alpha^*)\,\mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z}\,|\,\hat{D}(\alpha))$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}^2\alpha\;\mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z}\,\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^+}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{d}^2\alpha\,\mathrm{d}^2z_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z^* + \alpha^* z}\,\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\,|z_0\rangle\langle z_0|\,\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^+}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\mathrm{d}^2\alpha\,\mathrm{d}^2z_0\;\mathrm{e}^{-\alpha(z^* - z_0^*) + \alpha^*(z - z_0)}\,|z_0\rangle\langle z_0|$$

$$= \int\mathrm{d}^2z_0\;\delta^{(2)}(z - z_0)\,|z_0\rangle\langle z_0| = |z\rangle\langle z| \tag{3.71}$$

observăm că aceasta este tocmai proiectorul pe starea coerentă $|z\rangle$.

Echivalentul Ω_N al unui operator $\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)$ este:

$$G^{(\Omega_N)}(z, z^*) = (\hat{\Delta}^{(\Omega_N)}(z) \,|\, \hat{G}) = \mathrm{Tr}[\,|z\rangle\langle z|\hat{G}] = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha \,|\, z\rangle\langle z \,|\hat{G}|\alpha\rangle =$$

$$= \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \langle z \,|\, \hat{G} \,|\, \alpha\rangle\langle \alpha \,|\, z\rangle = \langle z \,|\hat{G}\,|\, z\rangle \tag{3.72}$$

deci elementul de matrice diagonal pe starea coerentă $|z\rangle$. În decursul calculului am folosit proprietatea de completitudine a sistemului de stări coerente.

Pentru a calcula valoarea medie a lui $\hat{G}(\hat{a}, \hat{a}^+)$ printr-o integrală în spațiul fazelor a lui $G^{(\Omega_N)}(z,z^*)$ avem nevoie de

$$F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega}_N)}(z, z^*) = \frac{1}{\pi} (\Delta^{(\Omega_N)}(z) \,|\, \hat{\rho}) \tag{3.73}$$

care, în virtutea relației de completitudine (3.44) scrisă sub forma

$$\hat{1} = \int \frac{d^2z}{\pi} \,|\, \hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega}_N)}(z))(\Delta^{(\Omega)}(z) \,| \tag{3.74}$$

și ținînd cont de (3.71), deducem că reprezintă ponderea din dezvoltarea după proiectorii pe stările coerente a matricei densității:

$$\hat{\rho} = \int d^2z \, F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega}_N)}(z, z^*) \,|\, z\rangle\langle z \,| \tag{3.75}$$

Convențional $F_{\hat{\rho}}^{(\tilde{\Omega})}(z, z^*)$ se notează cu $P(z)$. În aceste condiții

$$\mathrm{Tr}\, \hat{\rho}\, \hat{G} = \int d^2z P(z) \langle z \,|\hat{G}\,|\, z\rangle \tag{3.76}$$

$P(z)$ poate fi exprimat astfel:

$$P(z) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha z^* - \alpha^* z} (\hat{D}(\alpha) \,|\, \hat{\rho}) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\alpha z^* + \alpha^* z} \chi_N(\alpha) \tag{3.77}$$

unde

$$\chi_N(\alpha) = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}\, e^{\alpha \hat{a}^+} e^{-\alpha^* \hat{a}}] \tag{378}$$

este funcția caracteristică corespunzătoare regulii normale de asociere.

Există o dificultate legată de faptul că funcția caracteristică poate crește rapid. Astfel, această reprezentare nu este convenabilă pentru toate matricele densitate, dar totuși ea este folositoare în multe cazuri de interes.

Revenind la formalismul general, pentru a putea scrie toate ecuațiile mecanicii cuantice (în reprezentarea Heisenberg) în limbaj de funcții de variabile comutative, avem nevoie de echivalentul Ω al produsului a doi operatori.

Teorema IV: *Echivalentul Ω al produsului* $|\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+)\, \hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+))$ este funcția de doi parametri comutativi $F_{12}^{(\Omega)}(z, z^*)$ definită prin:

$$F_{12}^{(\Omega)}(z, z^*) = \exp \Lambda_{12}\, \mathscr{U}_{12}^{(\Omega)}\, F_1^{(\Omega)}(z_1, z_1^*)\, F_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^*) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z \\ z_1^* = z_2^* = z^*}} \tag{3,79}$$

unde Λ_{12} și $\mathscr{U}_{12}^{(\Omega)}$ sînt operatori diferențiali dați de:

$$\Lambda_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2^*} - \frac{\partial}{\partial z_1^*}\frac{\partial}{\partial z_2}\right) \tag{3,80}$$

$$\mathscr{U}_{12}^{(\Omega)} = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial z_1^*}, -\frac{\partial}{\partial z_1}\right) \Omega\left(\frac{\partial}{\partial z_2^*}, -\frac{\partial}{\partial z_2}\right) \tilde{\Omega}\left(-\frac{\partial}{\partial z_1^*} - \frac{\partial}{\partial z_2^*}, \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \tag{3,81}$$

Demonstrație: Prin definiție

$$F_{12}^{(\Omega)}(z, z^*) = (\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z) \;|\hat{G}_1 \hat{G}_2) \tag{3,82}$$

Deoarece

$$\hat{G}_1(\hat{a}, \hat{a}^+) = \int \frac{d^2z_1}{\pi} F_1^{(\Omega)}(z_1, z_1^*) \,|\hat{\Delta}(z_1)) \tag{3,83}$$

$$\hat{G}_2(\hat{a}, \hat{a}^+) = \int \frac{d^2z_2}{\pi} F_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^+) |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_2)) \tag{3,84}$$

atunci

$$\hat{G}_1\hat{G}_2 = \int \frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi^2} F_1^{(\Omega)}(z_1, z^*) F_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^+) |\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_1)\, \hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_2)). \tag{3,85}$$

Dar

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_1)\, \hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_2)) = \iint \frac{d^2\beta d^2\gamma}{\pi^2} \Omega(\beta, \beta^*)\, \Omega(\gamma, \gamma^*) e^{-\beta z_1^* + \beta^* z_1} e^{-\gamma z_2^* + \gamma^* z_2} |\hat{D}(\beta) \hat{D}(\gamma)) \tag{3,86}$$

sau, avînd în vedere (3.3)

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_1)\, \hat{\Delta}^{(\Omega)}(z_2))$$

$$= \iint \frac{d^2\beta d^2\gamma}{\pi^2} \Omega(\beta, \beta^*)\, \Omega(\gamma, \gamma^*)\, e^{-\beta z_1^* + \beta^* z_1} e^{-\gamma z_2^* + \gamma^* z_2} e^{\frac{1}{2}(\beta\gamma^* - \beta^*\gamma)} |\hat{D}(\beta + \gamma)) \tag{3,87}$$

Prin urmare, din (3.82) şi (3.87)

$$F_{12}^{(\Omega)}(z,\ z^*) = \int \frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi^2} F_1^{(\Omega)}(z_1,\ z_1^*)\, F_2^{(\Omega)}(z_2,\ z_2^*) \times$$

$$\times \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \tilde{\Omega}^*(\alpha,\ \alpha^*)\, e^{\alpha z^* - \alpha^* z} \iint \frac{d^2\beta d^2\gamma}{\pi^2} \Omega(\beta, \beta^*)\, \Omega(\gamma,\ \gamma^*) \times$$

$$\times\ e^{-\beta z_1^* + \beta^* z_1} e^{-\gamma z_2^* + \gamma^* z_2} e^{\frac{1}{2}(\beta\gamma^* - \beta^*\gamma)} (\hat{D}(\alpha) \mid \hat{D}(\beta+\gamma)) \qquad (3.88)$$

În virtutea proprietăţii de ortogonalitate (3.17)

$$F_{12}^{(\Omega)}(z,\ z^*) = \int \frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi^2} F_1^{(\Omega)}(z_1,\ z_1^*)\, F_2^{(\Omega)}(z_2,\ z_2^*) \times$$

$$\times \iint \frac{d^2\beta d^2\gamma}{\pi^2} \tilde{\Omega}^*(\beta+\gamma,\ \beta^*+\gamma^*)\ \Omega\ (\beta,\ \beta^*)\ \Omega\ (\gamma,\ \gamma^*) \times$$

$$\times\ e^{\beta(z^* - z_1^*) - \beta^*(z - z_1)} e^{\gamma(z^* - z_2^*) - \gamma^*(z - z_2)}\ e^{\frac{1}{2}(\beta\gamma^* - \beta^*\gamma)} \qquad (3.89)$$

Folosind identitatea :

$$\exp(\alpha)\ \exp(\alpha\ z^* - \alpha^* z) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial z^*}\right) \exp(\alpha\ \ z^* - \alpha^* z) \qquad (3.90)$$

obţinem

$$F_{12}^{(\Omega)}(z,\ z^*) = \iint \frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi_2} F_1^{(\Omega)}(z_1,\ z_1^*)\, F_2^{(\Omega)}(z_2,\ z_2^*) \times$$

$$\times\ \tilde{\Omega}\left(-\frac{\partial}{\partial z_1^*} - \frac{\partial}{\partial z_2^*}, \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \Omega\left(-\frac{\partial}{\partial z_1^*},\ \frac{\partial}{\partial z_1}\right) \Omega\left(-\frac{\partial}{\partial z_2^*},\ \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \times$$

$$\times \exp \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial z_1^*}\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_1^*}\ \frac{\partial}{\partial z_2^*}\right) \iint \frac{d^2\beta d^2\gamma}{\pi^2}\ e^{\beta(z^* - z_1^*) - \beta^*(z - z_1)}\ e^{\gamma(z^* - z_2^*) - \gamma^*(z - z_2)}$$

(3.91)

Proprietatea 5) a lui $\Omega(\alpha,\ \alpha^*)$ ne permite să scriem :

$$F_{12}^{(\Omega)}(z,\ z^*) =$$

$$= \iint \frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi^2} \cdot F_1^{(\Omega)}(z_1, z_1^*)\, F_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^*) \times \exp(\Lambda_{12})\, \mathscr{U}_{12}^{(\Omega)} \pi^2(\delta^{(2)}(z - z_1)\delta^{(2)}(z - z_2))$$

(3.92)

[illegible]

$$F_{12}^{(\Omega)}(z,\ z^*) \quad \exp(\Lambda_{12})\, \mathscr{U}_{12}^{(\Omega)}\, F_1^{(\Omega)}(z_1,\ z_1^*) F_2^{(\Omega)}(z_2,\ z_2^*) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z \\ z_1^* = z_2^* = z^*}} \qquad (3.93)$$

În această expresie Λ_{12} este antisimetric, iar $U_{12}^{(\Omega)}$ este simetric în raport cu cei doi indici 1 şi 2 :

$$\Lambda_{12} \qquad \Lambda_{21} \qquad (3.94)$$

$$\mathscr{U}_{12}^{(\Omega)} \quad \mathscr{U}_{21}^{(\Omega)} \qquad (3.95)$$

Rezultatul teoremei anterioare şi cele două proprietăţi de mai sus ne permit să exprimăm echivalentul Ω al comutatorului a doi operatori

$$[\hat{G}_1,\ \hat{G}_2]^{(\Omega)}(z,\ z^*) \quad (\exp \Lambda_{12} - \exp(-\Lambda_{12}))\mathscr{U}_{12}^{(\Omega)} G_1^{(\Omega)}(z_1, z_1^*) G_2^{(\Omega)}(z_2, z_2^*) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z \\ z_1^* = z_2^* = z^*}}$$

Se poate arăta că $[\hat{G}_1, \hat{G}_2]^{(\Omega)}(z, z^*)$ satisface axiomele unei paranteze Lie :

— liniaritatea

$$[\alpha_1\hat{G}_1 + \alpha_2\hat{G}_2, \hat{G}_3]^{(\Omega)}(z, z^*) \quad \alpha_1[\hat{G}_1, \hat{G}_3]^{(\Omega)}(z, z^*) + \alpha_2[\hat{G}_2, \hat{G}_3]^{(\Omega)}(z, z^*) \qquad (3.97)$$

— antisimetria

$$[\hat{G}_1, \hat{G}_2]^{(\Omega)}(z, z^*) = -[\hat{G}_2, \hat{G}_1]^{(\Omega)}(z, z^*) \qquad (3.98)$$

— identitatea lui Jacobi

$$[\hat{G}_1, [\hat{G}_2, \hat{G}_3]]^{(\Omega)}(z,\ z^*) + [\hat{G}_2, [\hat{G}_3,\ \hat{G}_1]]^{(\Omega)}(z,\ z^*) + [\hat{G}_3, [\hat{G}_1\ \hat{G}_2]]^{(\Omega)}(z,\ z^*) \quad 0$$

(3.99)

Acum putem transcrie ecuaţia de mişcare a unui operator $\hat{G}(a,\ a^+)$

$$i\hbar \frac{d\hat{G}}{dt} = -[\hat{H}, \hat{G}] + i\hbar \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} \qquad (3.100)$$

aplicînd transformarea Θ în ambii membri :

$$i\hbar \frac{dG^{(\Omega)}(z(t), z^*(t))}{dt}$$

$$(\exp \Lambda_{12} \quad \exp(-\Lambda_{12}))\mathscr{U}_{12}^{(\Omega)} \hat{H}^{(\Omega)}(z_1, z_1^*) G^{(\Omega)}(z_2, z_2^*) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z \\ z_1^* = z_2^* = z^*}} + i\hbar \frac{\partial G^{(\Omega)}(z, z^*)}{\partial t}$$

Pentru cazul particular cînd $\hat{G}$ este matricea densităţii obţinem

$$i\hbar \frac{\partial F_{\rho}^{(\Omega)}(z,\ z^*)}{\partial t} \qquad (\exp \Lambda_{12} \quad \exp(-\Lambda_{12}))\, \mathscr{U}_{12}^{(\Omega)} H^{(\Omega)}(z_1, z_1^*) F_{\rho}^{(\Omega)}(z_2, z_2^*) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z \\ z_1^* = z_2^* = z^*}}$$

În concluzie, fiecare reprezentare a mecanicii cuantice în spaţiul fazelor generalizat corespunde unei alegeri a bazei de operatori $\{|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))\}$ cu $z, z^* \in \mathbb{C}$ în spaţiul $\mathscr{H}_0$. Trecerea de la o reprezentare la alta corespunde schimbării bazei care se face cu ajutorul unui superoperator neunitar [15].

Rezultatele expuse pînă acum ne permit să construim cazul particular de interes pentru noi, formalismul transformării Wigner.

4. TRANSFORMAREA WIGNER

4.1. DEFINIREA TRANSFORMĂRII WIGNER

Cazul cel mai simplu care poate fi discutat apare cînd $\Omega(\alpha, \alpha^*) = 1$. Dacă ne referim la reguli de asociere, aceasta va corespunde regulii Weyl. Deoarece

$$\tilde{\Omega}_W(\alpha, \alpha^+) = [\Omega_W(-\alpha, -\alpha^*)]^{-1} = 1 \tag{4.1}$$

distincţia între bazele $|\hat{\Delta}^{(\Omega)}(z))$ şi $|\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega})}(z))$ va dispare şi în consecinţă şi cea dintre echivalenţii Ω şi respectiv $\tilde{\Omega}$.

Definiţie: Numim transformare Wigner aplicaţia liniară Θ care corespunde bazei $|\hat{\Delta}^{(\Omega_W)}(z))$, cu $\Omega_W(\alpha, \alpha^*) = 1$

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega_W)}(z)) = |\hat{\Delta}^{(\tilde{\Omega}_W)}(z)) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\, e^{-(\alpha z^* - \alpha^* z)}|\hat{D}(\alpha)) \tag{4.2}$$

Ne propunem să determinăm echivalentul Wigner în variabilele q şi p, de asemenea parametrii comutativi, care, pentru a fi consecvenţi cu regula de asociere Weyl, trebuie să fie legaţi de z şi z^* prin relaţiile*) :

$$z = \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}} \qquad z^* = \frac{q - ip}{\sqrt{2\hbar}} \tag{43}$$

În consecinţă, vom avea operatorii canonic conjugaţi $\hat{q}$ şi $\hat{p}$ definiţi prin (2.23), (2.24) plecînd de la $\hat{a}$ şi $\hat{a}^+$. Totuşi, în rezultatul obţinut q şi p şi operatorii $\hat{q}$ şi $\hat{p}$ pot fi priviţi ca mărimi primare, iar z, z^*, $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ definiţi cu ajutorul lor.

Pentru ca în urma schimbării de variabilă $|\hat{D}(\alpha))$ să treacă în $\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\eta\hat{q} + \xi\hat{p})\right)$ este necesar ca

$$\alpha = \frac{-\xi + i\eta}{\sqrt{2\hbar}} \qquad \alpha^* = \frac{-\xi - i\eta}{\sqrt{2\hbar}} \tag{44}$$

Astfel, în variabilele q şi p are loc :

$$|\hat{\Delta}^{(\Omega_W)}(q, p)) = \frac{1}{2\pi\hbar}\iint e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta q + \xi p)}\, e^{\frac{i}{\hbar}(\eta\hat{q} + \xi\hat{p})}\, d\xi\, d\eta \tag{4.5}$$

*) Din considerente de dimensionalitate ar trebui $z = \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} q + i\frac{1}{(2\omega\hbar)^{1/2}}\, p$ dar am luat $\omega = 1$.

şi

$$G^{(W)}(q, p) = (\hat{\Delta}^{(\Omega_W)}(q, p)\,|\,\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\iint e^{\frac{i}{\hbar}(\eta q + \xi p)}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\eta\hat{q} + \xi\hat{p})}\, d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\iint e^{\frac{i}{\hbar}(\eta q + \xi p)}\,\mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}}]\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\eta\xi}{2}}\, d\xi d\eta \tag{4.6.}$$

Pentru a calcula urma folosim proprietatea de completitudine a sistemului de vectori proprii ai operatorului $\hat{q}$:

$$\int dq'\,|q'\rangle\langle q'| = \hat{1} \tag{4.7}$$

şi de asemenea pe cea de ortogonalitate :

$$\langle q'|q''\rangle = \delta(q' - q'') \tag{4.8}$$

În consecinţă

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}}] =$$

$$\mathrm{Tr}\left[\int dq'\,|q'\rangle\langle q'|\,\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}\right)\right]$$

$$= \iint dq''dq'\langle q''|q'\rangle\langle q'|\,\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}\right)|\,q''\rangle$$

$$= \int dq'\langle q'|\,\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}\right)|q'\rangle \tag{4.9}$$

Deoarece

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}\right)|q'\rangle = |q' + \xi\rangle \tag{4.10}$$

rezultă că

$$\mathrm{Tr}\,[\hat{G}(\hat{q}, \hat{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{q}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}}] =$$

$$\int dq'\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\eta q'\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\eta\xi\right)\langle q'|\,\hat{G}\,|\,q' + \xi\rangle \tag{4.11}$$

Deci

$$G^{(W)}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\iiint\left(\int\exp\left(\frac{i}{\hbar}\eta\left((q - q' - \frac{\xi}{2})\right)\right)d\eta\right) \times$$

$$\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi p\right)\langle q'|\,\hat{G}\,|q' + \xi\rangle\, dq'd\xi \tag{4.12}$$

şi astfel

$$G^{(W)}(q,p)=\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi p\right)\left\langle q-\frac{\xi}{2}\,\middle|\,\hat{G}(\hat{q},\hat{p})\,\middle|\,q+\frac{\xi}{2}\right\rangle d\xi \qquad (4.13)$$

Dacă un operator $\hat{G}$ depinde numai de $\hat{q}$ sau numai de $\hat{p}$ sau dacă este o sumă de termeni care depind fiecare numai de $\hat{q}$ sau $\hat{p}$, atunci echivalentul Wigner se obţine simplu înlocuind operatorii cu variabilele corespunzătoare :

$$\hat{G}=\hat{G}(\hat{q}) \Rightarrow G^{(W)}(q)=G(q) \qquad (4.14)$$

$$\hat{G}=\hat{G}(\hat{p}) \Rightarrow G^{(W)}(p)=G(p) \qquad (4.15)$$

$$\hat{G}=\hat{G}_1(\hat{q})+\hat{G}_2(\hat{p})=G^{(W)}(q,p)=G_1(q)+G_2(p) \qquad (4.16)$$

De asemenea, în virtutea teoremei II, dacă operatorul $\hat{G}$ este ordonat Weyl echivalentul Wigner va avea aceeaşi expresie matematică ca funcţia clasică de la care s-a obţinut $\hat{G}$.

În cele ce urmează ne vor fi necesare rezultatele teoremei III

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{G}_1(\hat{q},\hat{p})\,\hat{G}_2(\hat{q},\hat{p}))=\frac{1}{2\pi\hbar}\iint dq\,dp\,G_1^{(W)}(q,p)\,G_2^{(W)}(q,p) \qquad (4.17)$$

şi teoremei IV

$$G_{12}^{(W)}(q,p)=\exp\left(\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\right)G_1^{(W)}(q_1,p_1)\,G_2^{(W)}(q_2,p_2)\Big|_{\substack{q_1=q_2=q\\ p_1=p_2=p}} \qquad (4.18)$$

unde

$$\Lambda_{12}=\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2}-\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) \qquad (4.19)$$

Echivalentul Ω al comutatorului

$$[\hat{G},\hat{G}_2]^{(W)}(q,p)=i\sin\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)G_1^{(W)}(q_1,p_1)\,G_2^{(W)}(q_2,p_2)\Big|_{\substack{q_1=q_2=q\\ p_1=p_2=p}} \qquad (4.20)$$

poartă numele de paranteza Moyal [16].

4.2. FUNCŢIA DE DISTRIBUŢIE WIGNER. PROPRIETĂŢI

1) Din (3.66) rezultă că funcţia

$$F_{\hat{\rho}}^{(W)}(q,p)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{ip\xi}{\hbar}}\left\langle q-\frac{\xi}{2}\,\middle|\,\hat{\rho}\,\middle|\,q+\frac{\xi}{2}\right\rangle d\xi \qquad (4.21)$$

va avea rolul unei funcţii de distribuţie în calcularea valorilor medii cu ajutorul echivalenţilor Wigner :

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\hat{G}=\iint dp\,dq\,F_{\hat{\rho}}^{(W)}(q,p)\,G^{(W)}(q,p) \qquad (4.22)$$

Dacă sistemul este într-o stare pură $|\psi\rangle$, $\hat{\rho}=|\psi\rangle\langle\psi|$ şi

$$\rho(q',q'')=\langle q'|\hat{\rho}|q''\rangle=\langle q'|\psi\rangle\langle\psi|q''\rangle=\psi(q')\,\psi(q'') \qquad (4.23)$$

relaţia de mai sus se scrie :

$$F_{\psi}^{(W)}(q,p)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{ip\xi}{\hbar}}\,\psi\left(q-\frac{\xi}{2}\right)\psi^*\left(q+\frac{\xi}{2}\right)d\xi \qquad (4.24)$$

reprezentînd o formă biliniară de funcţia de undă $\psi(q)$. Pentru prescurtare, ca în (4.24), vom folosi pentru a indica funcţia de distribuţie în stare pură $|\psi\rangle$ notaţia $F_{\psi}^{(w)}(q,p)$ şi nu $F_{|\psi\rangle\langle\psi|}^{(w)}(q,p)$

2) Pe lîngă faptul că este corect normată

$$\iint F_{\hat{\rho}}^{(w)}(q,p)\,dq\,dp=1 \qquad (4.25)$$

avem relaţia :

3)

$$\int F_{\hat{\rho}}^{(w)}(q,p)\,dq=\langle p|\hat{\rho}|p\rangle \qquad (4.26)$$

$$\int F_{\psi}^{(w)}(q,p)\,dq=|\Phi(p)|^2 \qquad (4.27)$$

adică integrînd după toate poziţiile posibile obţinem probabilitatea de a găsi sistemul cu impulsul p, întocmai ca la o funcţie de distribuţie adevărată. Aici $\Phi(p)$ este starea sistemului în reprezentarea impulsului :

$$\Phi(p)=\frac{1}{2\pi}\int \psi(q)\,e^{-\frac{ipq}{\hbar}}dq \qquad (4.28)$$

Demonstraţia relaţiei (4.26) rezultă uşor din proprietăţile matricii densităţii şi făcînd schimbarea de variabile :

$$x=q-\frac{\xi}{2} \qquad y=q+\frac{\xi}{2} \qquad (4.29)$$

4) Similar

$$\int F_{\hat{\rho}}^{(w)}(q,p)\,dp=\langle q|\rho|q\rangle \qquad (4.30)$$

$$\int F_{\psi}^{(w)}(q,p)\,dp=|\psi(q)|^2 \qquad (4.31)$$

deci probabilitatea ca sistemul să se afle în punctul q se obţine integrînd funcţia de distribuţie după toate impulsurile.

5) $F_{\psi}^{(w)}(q, p)$ este Galilei invariantă, adică dacă

$$\psi(q, t) \to \exp\left(-\frac{ip_1 q}{\hbar}\right) \psi\left(q + \frac{p_1}{m} t + q_1 t\right) \tag{4.32}$$

atunci

$$F_{\psi}^{(w)}(q, p) = F_{\psi}^{(w)}\left(q + \frac{p_1}{m} t + q_1, p + p_1\right) \tag{4.33}$$

6) $F_{\psi}^{(w)}(q, p)$ este invariantă în raport cu reflexia spaţială

$$\psi(q) \to \psi(-q) \Rightarrow F_{\psi}^{(w)}(q, p) = F_{\psi}^{(w)}(-q, -p) \tag{4.34}$$

şi reflexia temporală :

$$\psi(q) \to \psi^*(q) \Rightarrow F_{\psi}^{(w)}(q, p) = F_{\psi}^{(w)}(q, -p) \tag{4.35}$$

7) Probabilitatea de tranziţie între două stări $|\psi\rangle$ şi $|\Phi\rangle$ este dată prin

$$\left|\int \psi^*(q)\, \Phi(p)\, dq\right|^2 = 2\pi\hbar \iint F_{\psi}^{(w)}(q, p)\, F_{\Phi}^{(w)}(q, p)\, dq\, dp \tag{4.36}$$

Din (4.36) rezultă că dacă $|\psi\rangle$ şi $|\Phi\rangle$ sînt ortogonale, $\langle\Phi|\psi\rangle = 0$, avem :

$$\int F_{\psi}^{(w)}(q, p)\, F_{\Phi}^{(w)}(q, p)\, dq\, dp = 0 \tag{4.37}$$

deci în general funcţia de distribuţie Wigner nu poate fi peste tot pozitivă. În plus, pentru $|\psi\rangle = |\Phi\rangle$, $\langle\psi|\Phi\rangle = 1$

$$\int dq\, dp\, [F_{\psi}^{(w)}(q, p)]^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \tag{4.38}$$

şi, în concluzie, $F_{\psi}^{(w)}(q, p)$ trebuie să fie mărginită.

Proprietăţile 4)—7) pot fi direct generalizate la starea mixtă.

Se poate arăta [17] că împreună cu condiţia de a fi o formă biliniară de funcţia de undă $\psi(q)$ şi reală pentru orice $\psi(q)$, 2)—7) determină în mod unic expresia (4.24) a funcţiei de distribuţie.

8) Dacă $\Phi(p)$ este starea sistemului în reprezentarea impulsului, iar $\psi(q)$ în reprezentarea coordonatelor, atunci

$$F_{\psi}^{(w)}(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\xi\, e^{\frac{ip\xi}{\hbar}}\, \psi\left(q - \frac{\xi}{2}\right) \psi^*\left(q + \frac{\xi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\eta\, e^{-\frac{iq\eta}{\hbar}}\, \Phi\left(p - \frac{\eta}{2}\right) \Phi^*\left(p + \frac{\eta}{2}\right) \tag{4.39}$$

subliniind că variabilele q şi p au în esenţă acelaşi rol în definirea funcţiei de distribuţie, ca în teoria clasică.

Totuşi, faptul că poate lua valori negative nu împiedică să o interpretăm ca o funcţie de distribuţie adevărată. În plus, o problemă de bază nerezolvată este următoarea : dîndu-se o funcţie $f(q, p)$, care sînt condiţiile care trebuie să le satisfacă pentru a reprezenta o funcţie de distribuţie Wigner, adică o stare fizică realizabilă? În fizica clasică, aceasta trebuia să nu fie negativă, iar în mecanica cuantică este necesar ca matricea densităţii să fie pozitiv definită, dar pentru formalismul nostru nu se cunosc condiţiile suficiente în care funcţia $f(q, p)$ are matricea densităţii corespunzătoare cu valori proprii nenegative. Totuşi se pot impune anumite condiţii necesare [18], cum ar fi verificarea principiului de incertitudine al lui Heisenberg.

De asemenea, tot ca o slăbiciune, conform proprietăţii 5), poate fi văzut şi faptul că nu este invariantă relativist, adică presupune interacţiuni dintre particule instantanee [19].

Pentru oscilatorul armonic aflat într-o stare pură funcţia de distribuţie este dată de [20] :

$$F_{\psi_n}^{(w)}(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar}(-1)^n e^{-\frac{2H}{\hbar\omega}} L_n(4H/\hbar\omega) \tag{4.40}$$

iar pentru un ansamblu de oscilatori la temperatura T :

$$F^{(w)}(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \operatorname{tgh}\frac{\hbar\omega}{2kT} \exp\left[-\left(\frac{2}{\hbar\omega}\right) \operatorname{tgh}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) H(q, p)\right] \tag{4.41}$$

În relaţia (4.40), $L_n(x)$ este polinomul Laguerre de grad n. Deoarece $L_0(x) = 1$, observăm că pentru starea fundamentală ea este pozitivă, dar poate lua valori negative pentru stările excitate. Pentru ansamblul canonic funcţia de distribuţie este pozitivă totdeauna, făcîndu-se simţit efectul temperaturii finite.

4.3. FUNCŢIA DE DISTRIBUŢIE WIGNER. DINAMICA

Pentru a studia evoluţia în timp a funcţiei de distribuţie Wigner vom pleca de la ecuaţia (3.101) particularizată pentru $\Omega_W(\alpha, \alpha^*) = 1$

$$i\hbar \frac{\partial F_{\hat\rho}^{(w)}}{\partial t} = 2i \sin\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) \times$$

$$\times H^{(w)}(q_1, p_1)\, F_{\rho}^{(w)}(q_2, p_2)\Big|_{q_1 = q_2 = q,\; p_1 = p_2 = p} \tag{4.42}$$

Presupunem că hamiltonianul sistemului are expresia :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad [illegible] \tag{4.43}$$

deci avînd în vedere (4.16) rezultă :

$$H^{(w)}(q_1, p_1) = \frac{p_1^2}{2m} + V(q_1) \tag{4.44}$$

Putem exprima funcţia sin într-o serie de puteri

$$2\,\mathrm{i}\sin\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) =$$

$$= 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\right)^{2j+1}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)^{2j+1} \tag{4.45}$$

şi deoarece $H^{(w)}$ nu conţine decît puterea a doua a lui p, iar V este funcţie numai de q, formula (4.32) se scrie :

$$\frac{\partial F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial p} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\frac{\partial^3 F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial p^3} + \ldots \tag{4.46}$$

$$= -\{H^{(w)}, F^{(w)}_{\hat\rho}\} + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\frac{\partial^3 F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial p^3} + \ldots \tag{4.47}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}F^{(w)}_{\hat\rho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial p} =$$

$$= \sum_{j=1}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^j\frac{\partial^{2j+1}V}{\partial q^{2j+1}}\frac{\partial^{2j+1}F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial p^{2j+1}} \tag{4.48}$$

Termenii suplimentari faţă de paranteza Poisson avînd coeficienţi puteri pare nenule ale constantei lui Planck, deci de natură pur cuantică, determină ca derivata totală a funcţiei de distribuţie să fie diferită de zero şi deci elementul de volum nu se mai conservă pe o traiectorie în spaţiul fazelor generalizat, el tinzînd să se împrăştie ca într-un proces de difuzie. Totuşi apare o diferenţă de esenţă deoarece difuzia este descrisă de derivatele pare ale funcţiei de distribuţie în timp ce acum sînt implicate derivatele impare, care fac acest proces reversibil.

Un alt mod de a exprima ecuaţia (4.36) se bazează pe identitatea

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\right)^{2j+1}\frac{1}{(2j+1)!}\frac{\partial^{2j+1}V}{\partial q^{2j+1}}\frac{\partial^{2j+1}F^{(w)}_{\hat\rho}}{\partial p^{2j+1}} =$$

$$= \int\left[V\left(q+\frac{\xi}{2}\right) - V\left(q-\frac{\xi}{2}\right)\right]\rho\left(q-\frac{\xi}{2}, q+\frac{\xi}{2}\right)e^{\frac{ip\xi}{\hbar}}\,\mathrm{d}\xi \tag{4.49}$$

evidentă dacă folosim dezvoltarea în serie Taylor

$$V\left(q \pm \frac{\xi}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\pm\frac{\xi}{2}\right)^j\frac{\partial^j V}{\partial q^j} \tag{4.50}$$

Astfel :

$$i\hbar\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial t} = -i\hbar\frac{p}{m}\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial q} - \int\left(V\left(q+\frac{\xi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - V\left(q-\frac{\xi}{2}\right)\right)\rho\left(q-\frac{\xi}{2}, q+\frac{\xi}{2}\right)e^{\frac{ip\xi}{\hbar}} \tag{4.51}$$

şi dezvoltînd în serie Fourier pe $V\left(q+\frac{\xi}{2}\right)$

$$V\left(q+\frac{\xi}{2}\right) = \int\tilde V(p')e^{\frac{ip'\left(q+\frac{\xi}{2}\right)}{\hbar}}\,\mathrm{d}p' \tag{4.52}$$

obţinem :

$$\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial q} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\iint\tilde V(p')e^{\frac{ip'q}{\hbar}}\times$$

$$\left(e^{i\left(\frac{p'}{2}+p\right)\frac{\xi}{\hbar}} - e^{i\left(p-\frac{p'}{2}\right)\frac{\xi}{\hbar}}\right)\rho\left(q-\frac{\xi}{2}, q+\frac{\xi}{2}\right)\times\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}p' \tag{4.53}$$

deci

$$\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial q} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int\tilde V(p')e^{\frac{ip'q}{\hbar}}\times$$

$$\times\left[F^{(W)}_{\hat\rho}\left(q, p+\frac{p'}{2}\right) - F^{(W)}_{\hat\rho}\left(q, p-\frac{p'}{2}\right)\right]\mathrm{d}p' \tag{4.54}$$

Această relaţie reflectă influenţa asupra variaţiei funcţiei $F^{(W)}_{\hat\rho}(q, p)$ a valorilor funcţiei de distribuţie din celelalte puncte ale spaţiului fazelor generalizat, influenţă al cărei caracter cuantic este evident.

Folosind (4.54) putem ajunge la o altă formă a ecuaţiei de evoluţie :

$$\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F^{(W)}_{\hat\rho}}{\partial q} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int\left(\tilde V(p')e^{\frac{ip'q}{\hbar}} - \tilde V(-p')e^{-\frac{ip'q}{\hbar}}\right)\times$$

$$\times F^{(W)}_{\hat\rho}\left(q, p+\frac{p'}{2}\right)\mathrm{d}p' \tag{4.55}$$

și utilizînd relațiile (4.52) pentru exprimarea parantezei din fața funcției $F_{\hat\rho}^{(W)}\left(q,\ p+\dfrac{p'}{2}\right)$

$$\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}}{\partial q} + \frac{1}{2}\int F_{\hat\rho}^{(W)}\left(q,\ p+\frac{p'}{2}\right) J\left(q,\frac{p'}{2}\right)\mathrm{d}p' \qquad (4.56)$$

unde

$$J\left(q,\frac{p'}{2}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}\xi\left[V\left(q+\frac{\xi}{2}\right) - V\left(q-\frac{\xi}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}p'\xi}{2\hbar}} \qquad (4.57)$$

este interpretat ca fiind probabilitatea de salt a impulsului cu valoarea $\dfrac{p'}{2}$ cînd coordonata este q [5].

Pentru cazul mișcării libere ecuația de mișcare este una de tip clasic:

$$\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}(q,p)}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}}{\partial q} \qquad (4.58)$$

caracterul cuantic intervenind în condițiile inițiale. Soluția ecuației diferențiale este:

$$F_{\hat\rho}^{(W)}(q,\ p,\ t) = F_{\hat\rho}^{(W)}\left(q-\frac{p}{m}t, p, 0\right) \qquad (4.59)$$

Tot o ecuație de tip clasic se obține și în cazul oscilatorului armonic, precizarea de mai sus rămînînd valabilă și în acest caz.

$$\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}}{\partial q} + kq\frac{\partial F_{\hat\rho}^{(W)}}{\partial p} \qquad (4.60)$$

unde k este constanta potențialului de oscilator armonic:

$$V(q) = \frac{kq^2}{2} \qquad (4.61)$$

4.4. LIMITA CLASICĂ $\hbar \to 0$

În acest capitol vom prezenta principalele rezultate care fac din transformarea Wigner o metodă semiclasică. Nu vom fi deloc riguroși matematic, discutarea acestor aspecte necesitînd foarte multe precizări suplimentare (de multe ori trebuie lucrat cu funcții generalizate) [20—22] prezentînd o tratare mai amănunțită a acestor probleme.

După cum s-a observat în secțiunile anterioare, transformarea Wigner introduce o funcție de două variabile comutative q și p, dar care acum este dependentă și de $\hbar$ în general.

Un operator $|\hat G(\hat q,\hat p))$ este numit admisibil dacă echivalentul său Wigner $G^{(w)}(q, p; \hbar)$ este o funcție de clasă C^∞ în raport cu q și p și $\hbar \in [0, \hbar_0)$ (cu $\hbar_0$ strict pozitiv arbitrar), cu o dezvoltare

$$G^{(w)}(q, p, \hbar) \sim \sum_{n=0}^{\infty} G_n(q, p)\,\hbar^n \qquad (4.62)$$

Prin definiție, termenul dominant este numit limita clasică a operatorului $\hat G(\hat q, \hat p)$.

În aceste condiții are loc:

$$(\hat G_1|\hat G_2) = \mathrm{Tr}\hat G_1^\dagger \hat G_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\iint G_n^*(q,p)G_m(q,p)\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p\right)\hbar^{n+m} \qquad (4.63)$$

Particularizînd acest rezultat în limita $\hbar \to 0$ pentru valoarea medie a operatorului $|\hat G)$ obținem:

$$\lim_{\hbar\to 0}\mathrm{Tr}\,\hat\rho\hat G = \int \rho_0(q,p)\,G_0(q,p)\,\mathrm{d}p\mathrm{d}q$$

unde $\rho_0(q, p)$ este limita clasică a matricei densității. Pentru ca $\hat\rho$ să fie pozitiv definitivă, ρ_0 trebuie să fie pozitivă și deoarece este și corect normată, ea îndeplinește condițiile unei densități clasice.

Pentru ecuația de evoluție a funcției de distribuție, observînd că în limita $\hbar \to 0$ paranteza Moyal se reduce la paranteza Poisson, rezultă:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial\rho_0}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial\rho_0}{\partial p} = 0 \qquad (4.64)$$

adică exact ecuația Liouville clasică.

În general, pentru un operator oarecare $|\hat G)$ ecuația de evoluție în limita clasică este

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + \{H_0, G_0\} = 0 \qquad (4.65)$$

Dacă în ecuațiile generale păstrăm primele contribuții în $\hbar$, putem calcula corecții cuantice ale sistemului studiat.

În concluzie, această metodă oferă o trecere continuă cînd $\hbar \to 0$ de la algebra operatorilor cuantici prin algebra echivalenților Wigner la algebra funcțiilor clasice. Totuși, această limită nu ne permite să aflăm informații despre spectrul și stările proprii ale operatorilor.

5. CONCLUZII

Folosind proprietățile stărilor coerente și mai precis ale operatorului deplasare care le generează, am construit aplicații Ω din spațiul funcțiilor clasice în spațiul Hilbert al operatorilor și aplicații Θ din spațiul Hilbert al operatorilor într-un spațiu al funcțiilor de doi parametri comutativi. Acestea pot fi privite, cu anumite precizări, una inversa alteia. Putem regăsi, referindu-ne la aplicația Ω, diferitele reguli de asociere cunoscute. De asemenea, reprezentările mecanicii cuantice în spațiul fazelor generalizat (ale cărui coordonate locale sînt parametrii comutativi p și q) sînt legate de aplicația Θ. În ambele cazuri, Ω și Θ sînt determinate de alegerea bazei de operatori în spațiul Hilbert al operatorilor de clasă Hilbert-Schmidt, schimbarea regulii de asociere sau a reprezentării mecanicii cuantice în spațiul fazelor reflectînd schimbarea bazei de operatori din acest spațiu.

În acest context, transformarea Wigner constituie o reprezentare a mecanicii cuantice în spațiul fazelor generalizat și este inversa regulii Weyl de asociere.

Funcția de doi parametri comutativi obținută prin transformarea Wigner de la matricea densității are unele proprietăți care o apropie de o funcție de distribuție în spațiul fazelor generalizat, dar ea poate lua și valori negative.

Ecuația de mișcare ne sugerează că elementul de volum din spațiul fazelor nu se mai conservă pe o traiectorie din spațiul fazelor și numai în limita clasică regăsim ecuația Liouville cunoscută.

Această transformare s-a dovedit utilă în fizica atomică, nucleară, optica cuantică, o bibliografie vastă care cuprinde și alte domenii găsindu-se în [24].

Aduc cele mai sincere mulțumiri dr. A.A. Răduță pentru competența și căldura cu care m-a îndrumat pe tot parcursul scrierii acestei lucrări.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. ARNOLD, *Metodele matematice ale mecanicii clasice*, Edit. Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
2. T. D. LEE, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, World Scientific 1981.
3. F. A. BEREZIN, *General Concept of Quantization*, Preprint ITP-74-20E, Kiev, 1974.
4. J. R. SHEWELL, American Journal of Physics, **27**, 16 (1959).
5. E. WIGNER, Phys. Rev., **40**, 749 (1932).
6. K. IMRE, J. Math. Phys., **8**, 1097 (1977).
7. L. COHEN, J. Math. Phys., **7**, 781 (1966).
8. U. FANO, Rev. of Modern Phys., **29**, 74 (1957).
9. G. S. AGARWAL, E. WOLF, a) Phys. Rev. **D, 2**, 2161 (1970),
   b) Phys. Rev. **D, 2**, 2182 (1970).
   c) Phys. Rev. **D, 2**, 2206 (1970).
10. M. D. SRINIVAS, E. WOLF, Phys. Rev. **D, 11**, 1477 (1975).
11. D. BOHM, B. J. HILEY, Foundations of Physics. **11**, 3/7 (1981)
12. J. R. KLAUDER, E. S. SKAGERSTAM, *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1985
13. R. J. GLAUBER, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).

14. N. L. BALASZ, Proceedings of the First International Conference on the Physics of Phase Space, edited by Y. S. Kim and W. W. Zachary, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.
15. M. SCHMUTZ, Nuovo Cimento, **25 B**, *1*, 337 (1975).
16. J. E. MOYAL, Proc. Camb. Phil. Soc., **45**, 99 (1949).
17. O'CONNELL, R. F and E. P. WIGNER, Phys. Lett., **83A**, 145, 1981.
18. N. L. BALASZ, B. K. JENNINGS, Physics Reports, **104**, *6*(1984).
19. E. P. WIGNER Idem [14].
20. M. HILLERY, R. F. O. CONNELL, M. O SCULLY, E. P. WIGNER, Physics Reports, **106**, 3(1984).
21. A. VOROS, Ann. Inst. Henri Poincaré, **XXVI**, *1*, (1977).
22. A. VOROS, Ann. Inst. Henri Poincaré, **XXIV**, *1*, (1976).
23. A. M. PERELOMOV, Commun. Math. Phys., **26**, 222 236)1972).
24. Y. S. KIM, E. P. WIGNER, Phys. Rev., **A 36**, 1293 (1987).