ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
INGENIERÍA DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y DE COMPUTACIÓN

Nombre: Sebastián Alexander Morales Cedeño

Curso: GR1CC

Fecha: 16/07/2025

[Tarea 11] Ejercicios Unidad 04-D | Gauss-Jacobi y Gauss-Seidel

Repositorio:

https://github.com/SebastianMoralesEpn/Github1.0/tree/b38b54d39de9a319bf1622d78bc0388db4486bd6/Tareas/%5BTarea%2011%5D%20Ejercicios%20Unidad%2004-D%20%20Gauss-Jacobi%20y%20Gauss-Seidel

CONJUNTO DE EJERCICIOS

1. **Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de $x^{(0)} = 0$**

a. $3x_1 - x_2 + x_3 = 1,$
$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0,$
$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4.$

b. $10x_1 - x_2 = 9,$
$-x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7,$
$-2x_2 + 10x_3 = 6.$

c. $10x_1 + 5x_2 = 6,$
$5x_1 + 10x_2 - 4x_3 = 25,$
$-4x_2 + 8x_3 - x_4 = -11,$
$-x_3 + 5x_4 = -11.$

d. $4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6,$
$-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6,$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6,$
$-x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6,$
$2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6,$

<u>**Resultados:**</u>

Resultados para los sistemas con Jacobi:

Sistema a):
Iteración 0: [0. 0. 0.]
Iteración 1: [0.33333333 0.   0.57142857]
Iteración 2: [0.14285714 -0.35714286 0.42857143]

Sistema b):
Iteración 0: [0. 0. 0.]
Iteración 1: [0.9 0.7 0.6]
Iteración 2: [0.97 0.91 0.74]

Sistema c):
Iteración 0: [0. 0. 0. 0.]
Iteración 1: [0.6 2.5 -1.375 -2.2]
Iteración 2: [-0.65 1.65 -0.4 -2.475]

Sistema d):
Iteración 0: [0. 0. 0. 0. 0.]
Iteración 1: [1.5 -2. 1.2 1.5 1.5]
Iteración 2: [1.325 -1.6 1.6 1.675 2.425]

2. **Repita el ejercicio 1 usando el método de Gauss-Siedel.**

<u>**Resultados:**</u>

Resultados para los sistemas con Gauss-Seidel:

Sistema a):
Iteración 0: [0. 0. 0.]
Iteración 1: [0.33333333 -0.16666667 0.5]
Iteración 2: [0.11111111 -0.22222222 0.61904762]

Sistema b):
Iteración 0: [0. 0. 0.]
Iteración 1: [0.9 0.79 0.758]
Iteración 2: [0.979 0.9495 0.7899]

Sistema c):
Iteración 0: [0. 0. 0. 0.]
Iteración 1: [0.6 2.2 -0.275 -2.255]
Iteración 2: [-0.5 2.64 -0.336875 -2.267375]

Sistema d):
Iteración 0: [0. 0. 0. 0. 0.]
Iteración 1: [1.5 -2.5 1.1 1.525 2.64375]
Iteración 2: [1.1890625 -1.52135417 1.86239583 1.88252604 2.25564453]

3. **Utilice el método de Jacobi para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1, con TOL = 10^{-3}.**

Resultados:

Resultados para los sistema con Jacobi con tolerancia 1e-3:

Sistema a):
Solución: [0.03510079 -0.23663751 0.65812732]
Iteraciones: 9

Sistema b):
Solución: [0.995725 0.957775 0.79145]
Iteraciones: 6

Sistema c):
Solución: [-0.79710581 2.79517067 -0.25939578 -2.25179299]
Iteraciones: 21

Sistema d):
Solución: [0.78708833 -1.00303576 1.86604817 1.91244923 1.98957067]
Iteraciones: 12

4. **Utilice el método de Gauss-Siedel para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1, con TOL = 10^{-3}.**

Resultados:

Resultados para los sistema Gauss-Seidel con tolerancia 1e-3:

Sistema a):
Solución: [0.03535107 -0.23678863 0.65775895]
Iteraciones: 6

Sistema b):
Solución: [0.9957475 0.95787375 0.79157475]
Iteraciones: 4

Sistema c):
Solución: [-0.79691476 2.79461827 -0.25918081 -2.25183616]
Iteraciones: 9

Sistema d):

Solución: [0.78668253 -1.00271872 1.86628339 1.9125618 1.98978976]
Iteraciones: 7

5. **El sistema lineal**

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5. \end{aligned}$$

tiene la solución (1, 2, -1).

a. **Muestre que el método de Jacobi con $x_{(0)} = 0$ falla al proporcionar una buena aproximación después de 25 iteraciones.**

<u>**Resultado:**</u>

Solución real: [1 2 -1]
Solución Jacobi después de 25 iteraciones: [-20.82787284 2. -22.82787284]
Error absoluto: [21.82787284 0. 21.82787284]

b. **Utilice el método de Gauss-Siedel con $x_{(0)} = 0$: para aproximar la solución para el sistema lineal dentro de 10^{-5}.**

<u>**Resultado:**</u>

Solución Gauss-Seidel: [1.00000226 1.9999975 -1.00000012]
Iteraciones realizadas: 23
Error absoluto: [2.26497650e-06 2.50339508e-06 1.19209290e-07]

6. **El sistema lineal**

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 0.2, \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= -1.425, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

tiene la solución (0.9, -0.8, 0.7).

a. **¿La matriz de coeficientes**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

tiene diagonal estrictamente dominante?

Resultado:

¿Es diagonal estrictamente dominate? False
La matriz NO es diagonal estrictamente dominante.

b. Utilice el método iterativo de Gauss-Siedel para aproximar la solución para el sistema lineal con una tolerancia de 1022 y un máximo de 300 iteraciones.

Resultado:

Convergencia alcanzada en 27 iteraciones.
Solución del sistema lineal método de Gauss-Seidel:
[0.89999655 -0.80000259 0.70000216]

c. ¿Qué pasa en la parte b) cuando el sistema cambia por el siguiente?

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 &= 0.2, \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= -1.425, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Resultado:

No se alcanzó la convergencia en 2 iteraciones.
Solución del sistema lineal método de Gauss-Seidel:
[2.475 0.096875 -0.4265625]

Explicación para c):
El cambio en el coeficiente a13 de -1 a -2 hace que el radio espectral de la matriz de iteración sea mayor que 1 (aproximadamente 1.118), lo que causa que el método diverja. Los valores crecen exponencialmente en cada iteración.

7. Repita el ejercicio 11 usando el método de Jacobi.

Resultados:

a. La matriz NO es diagonal estrictamente dominante (igual que antes).

b. Convergencia alcanzada en 300 iteraciones.
Solución del sistema lineal método de Jacobi:
[0.90025541 -0.80004033 0.70012933]

c. No se alcanzó la convergencia en 2 iteraciones.
Solución del sistema lineal método de Jacobi:
[4.2 -0.825 1.0875]

Explicación para c):
El método de Jacobi también diverge para el sistema modificado porque el radio espectral de su matriz de iteración es mayor que 1. En comparación con Gauss-Seidel, Jacobi suele converger más lentamente o diverger más fácilmente cuando no se cumplen las condiciones de convergencia.

8. Un cable coaxial está formado por un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y un conductor externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe mediante la ecuación de Laplace. Suponga que el conductor interno se mantiene en 0 volts y el conductor externo se mantiene en 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

a. ¿La matriz es estrictamente diagonalmente dominante?

Resultado:

La matriz es diagonalmente dominante: True

b. Resuelva el sistema lineal usando el método de Jacobi con $x_{(0)} = 0$ y TOL $= 10^{-2}$.

Resultado:

Soluciòn de Jacobi en 14 iteraciones:
[88.01915739 65.97189076 65.87817773 87.54880231 66.1128705 64.32695314 66.44224584 59.76669367 89.66409501 64.75004151 72.22435456 89.24100664]

c. Repita la parte b) mediante el método de Gauss-Siedel.

Resultado:

Soluciòn de Gauss-Seidel en 10 iteraciones:
[88.02218102 65.9756672 65.8819638 87.55310939 66.11692937 64.33101815 66.44630697 59.77126844 89.6686741 64.75421992 72.22857134 89.24569781]