ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS
INGENIERÍA DE SISTEMAS INFORMÁTICOS Y DE COMPUTACIÓN

Nombre: Sebastián Alexander Morales Cedeño

Curso: GR1CC

Fecha: 05/05/2025

[Tarea 02] Ejercicios Unidad 01- A

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1

Resuelva los siguientes ejercicios, tome en cuenta que debe mostrar el desarrollo completo del ejercicio.

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.

a. $p = \pi$, $p^* = 22/7$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= \left|\pi - \frac{22}{7}\right|$$

$$= 0.0012644892673496777$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\, p \,|}$$

$$= \frac{\left|\pi - \frac{22}{7}\right|}{|\, \pi \,|}$$

$$= 0.0004024994347707008$$

$$= 4.025 * 10^{-4}$$

b. $p = \pi$, $p^* = 3.1416$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= |\pi - 3.1416|$$

$$= 7.346410206832132 * 10^{-6}$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\, p \,|}$$

$$= \frac{|\pi - 3.1416|}{|\ \pi\ |}$$

$$= 2.3384349967961744 * 10^{-6}$$

c. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{p*} = \mathbf{2.718}$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= |e - 2.718|$$

$$= 0.000281828459045119$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\ p\ |}$$

$$= \frac{|e - 2.718|}{|\ e\ |}$$

$$= 0.00010367889601972718$$

d. $\boldsymbol{p} = \sqrt{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{p*} = \mathbf{1.414}$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= \left|\sqrt{2} - 1.414\right|$$

$$= 0.00021356237309522186$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\ p\ |}$$

$$= \frac{\left|\sqrt{2} - 1.414\right|}{|\ \sqrt{2}\ |}$$

$$= 0.00015101140222192286$$

2. <u>Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.</u>

a. $\boldsymbol{p = e^{10}, p^* = 22000}$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= |e^{10} - 22000\ |$$

$$= 26.465794806717895$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\, p \,|}$$

$$= \frac{|e^{10} - 22000\,|}{|\, e^{10}\,|}$$

$$= 0.0012015452253333286$$

b. $\boldsymbol{p = 10^{\pi}\,,\; p^* = 1400}$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= |10^{\pi} - 1400\,|$$

$$= 14.544268632989315$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\, p \,|}$$

$$= \frac{|10^{\pi} - 1400\,|}{|\, 10^{\pi}\,|}$$

$$= 0.010497822704619136$$

c. $\boldsymbol{p = 8!\,,\; p^* = 39900}$

$$\text{Error absoluto} = |p - p^*|$$

$$= |8! - 39900\,|$$

$$= 420$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|p - p^*|}{|\, p \,|}$$

$$= \frac{|8! - 39900|}{|\, 8!\,|}$$

$$= 0.010416666666666666$$

d. $\boldsymbol{p = 9!\,,\; p^* = \sqrt{18\pi}\left(\frac{9}{e}\right)^{9}}$

$$\text{Error absoluto} = |\mathrm{p} - \mathrm{p}^*|$$

$$= \left|9! - \sqrt{18\pi}\left(\frac{9}{e}\right)^9\right|$$

$$= 3343.1271580516477$$

$$\text{Error Relativo} = \frac{|\mathrm{p} - \mathrm{p}^*|}{|\ \mathrm{p}\ |}$$

$$= \frac{\left|9! - \sqrt{18\pi}\left(\frac{9}{e}\right)^9\right|}{|\ 9!\ |}$$

$$= 0.009212762230080598$$

3. <u>Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.</u>

a. $\boldsymbol{\pi}$

$$10^{-4} \geq \left|\frac{\mathrm{p} - \mathrm{p}^*}{\mathrm{p}}\right|$$

Despejando p^*, obtenemos

$$\mathrm{p}^* = \mathrm{p} + 10^{-4} * \mathrm{p}$$

$$\mathrm{p}^* = \pi + 10^{-4} * \pi$$

Para aproximar el valor de π debe estar entre:

$$\mathrm{p}^* = 3.141305032192064$$

b. $\boldsymbol{e}$

$$10^{-4} \geq \left|\frac{\mathrm{p} - \mathrm{p}^*}{\mathrm{p}}\right|$$

Despejando p^*, obtenemos

$$\mathrm{p}^* = e + 10^{-4} * e$$

Para aproximar el valor de Euler debe estar entre:

$$\mathrm{p}^* = 2.718032962324848$$

c. $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$$10^{-4} \geq \left|\frac{p-p^*}{p}\right|$$

Despejando p^*, obtenemos

$$p^* = \sqrt{2} + 10^{-4} * \sqrt{2}$$

Para aproximar el valor de $\sqrt{2}$ debe estar entre:

$$p^* = 1.4140840872544698$$

d. $\sqrt[3]{7}$

$$10^{-4} \geq \left|\frac{p-p^*}{p}\right|$$

Despejando p^*, obtenemos

$$p^* = \sqrt[3]{7} + 10^{-4} * \sqrt[3]{7}$$

Para aproximar el valor de $\sqrt[3]{7}$ debe estar entre:

$$p^* = 1.9127560486919348$$

4. **Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.**

a. $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$$p = \frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4},\ p^* = 5.860$$

$$\text{Error Absoluto} = \left|\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4} - 5.860\right|$$

$$= 3.796 * 10^{-4}$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4} - 5.860}{\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}}\right|$$

$$= 0.647 * 10^{-4}$$

b. $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$$p = -10\pi + 6e - \frac{3}{61}\ ,\ p^* = 5.860$$

$$\text{Error Absoluto} = \left|10\pi + 6e - \frac{3}{61} - 5.860\right|$$

$$= 4.159 * 10^{-4}$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{10\pi + 6e - \frac{3}{61} - 5.860}{10\pi + 6e - \frac{3}{61}}\right|$$

$$= 0.274 * 10^{-4}$$

c. $\left(\frac{2}{9}\right) * \left(\frac{9}{11}\right)$

$$p = \left(\frac{2}{9}\right) * \left(\frac{9}{11}\right)\ ,\ p^* = 0.\overline{18}$$

$$\text{Error Absoluto} = \left|\left(\frac{2}{9}\right) * \left(\frac{9}{11}\right) - 0.\overline{18}\right|$$

$$= 1.8182 * 10^{-11}$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{\left(\frac{2}{9}\right) * \left(\frac{9}{11}\right) - 0.\overline{18}}{\left(\frac{2}{9}\right) * \left(\frac{9}{11}\right)}\right|$$

$$= 10^{-10}$$

d. $\frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$

$$p = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}\ ,\ p^* = 23.958$$

$$\text{Error Absoluto} = \left|\frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}} - 23.958\right|$$

$$= 2.607 * 10^{-4}$$

$$\text{Error Relativo} = \left| \frac{\frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}} - 23.958}{\frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}} \right|$$

$$= 0.109 * 10^{-4}$$

5. **<u>Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:</u>** $\mathbf{x - \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5}\right)x^5}$ **<u>Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:</u>**

a. $\mathbf{4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]}$

$$p^* = 4\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]$$

$$= 3.1455761316872426$$

$$\text{Error Absoluto} = |\pi - 3.1455761316872426\,|$$

$$= 0.003983478097449478$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{\pi - 3.1455761316872426}{\pi}\right|$$

$$= 0.0012679804598147663$$

b. $\mathbf{16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)}$

$$p^* = 16\ \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3 - 4\ \frac{1}{239}\ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{239}\right)^3$$

$$= 3.1750936373416323$$

$$\text{Error Absoluto} = |\pi - 3.1750936373416323\,|$$

$$= 0.03350098375$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{\pi - 3.1750936373416323}{\pi}\right|$$

$$= 0.01066369432$$

6. **El número e se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$, donde $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ para $n \neq 0$ y $0! = 1$ Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e :**

a. $\sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{n!}\right)$

$$p^* = \sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$= 2.7166666666666663$$

$$\text{Error Absoluto} = |e - 2.7166666666666663|$$

$$= 0.0016151617923787498$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{e - 2.7166666666666663}{e}\right|$$

$$= 0.0005941848175817597$$

b. $\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{n!}\right)$

$$p^* = \sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{n!}\right)$$

$$= 2.7182818011463845$$

$$\text{Error Absoluto} = |e - 2.7182818011463845|$$

$$= 2.7312660577649694\, e^{-8}$$

$$\text{Error Relativo} = \left|\frac{e - 2.7182818011463845}{e}\right|$$

$$= 1.0047766310211053\, e^{-8}$$

7. **Suponga que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$ Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:**

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad y \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$$

a. **<u>Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$ la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?</u>**

$$\text{primera fórmula } x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$$

$$= \frac{1.31 * 5.76 - 1.93 * 3.24}{5.76 - 3.24}$$

$$= 0.513$$

$$\text{segunda fórmula } x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}$$

$$= 1.31 - \frac{(1.93 - 1.31) * 3.24}{5.76 - 3.24}$$

$$= 0.513$$

Respuesta: Ambos métodos son igualmente buenos porque producen el mismo resultado correcto. Pero, la segunda fórmula podría considerarse ligeramente más intuitiva si ya conoces uno de los puntos (x_0, y_0), a demás realiza menos multiplicaciones y por este motivo se la puede considerar mas exacta.