Taller 3 - Matemáticas Discretas 2

Sebastián Ortiz González
Universidad Nacional de Colombia
seortizg@unal.edu.co
Bogotá, Colombia

1. **Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuántas acciones hay solamente 1/1000000 de aire inicial?**

$$x_o = 1 \rightarrow 100\,\%\ del\ aire$$
$$x_1 = 1 - 1 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 100\,\% - 33{,}333\,\%\ que\ tenia$$
$$x_2 = (1 - 1 \cdot \frac{1}{3}) - (1 - 1 \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$x_1 = x_0 - x_0\frac{1}{3} \qquad = x_0\frac{2}{3}$$
$$x_2 = x_1 - x_1\frac{1}{3}$$
$$x_2 = x_0 - x_0\frac{1}{3} + x_0\frac{1}{9} = x_0\frac{4}{9}$$
$$x_3 = x_2 - x_2\frac{1}{3} = x_0\frac{4}{9} - x_0\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = x_0\frac{8}{27}$$

Recordemos que $x_0 = 1$, en general tenemos que $x_t = \frac{2}{3}^t$

$$\frac{1}{1000000} = \frac{2}{3}^t$$

Recordando que la función Log es creciente, tenemos:

$$t = (\frac{Ln(1/1000000)}{Ln(2/3)})$$
$$t \approx 34{,}07$$

2. **Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuélvala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Cuánto tardará la población en alcanzar 750 millones?**

$$x_1 = x_0 + x_0 \cdot \frac{25}{1000} \quad \text{Si } \ x_0 = 1000 \ \text{ tendríamos}$$
$$x_1 = 1000 + 25 = 1025 \quad \text{ en general para } x_t$$
$$x_t = x_{t-1} + x_{t-1} \cdot \frac{25}{1000}$$
$$x_{t-1}(1 + \frac{25}{1000})$$
$$x_{t-1} \cdot 1{,}025$$
$$x_t = K(1{,}025)^t$$

$$x_t = x_0(1{,}025)^t$$
$$K = x_0 - \frac{b}{1-a}$$
$$K = x_0$$

Población en 15 años

$$X_{15} = x_0(1{,}025)^{15} \approx x_0(1{,}45)$$

Suponiendo que la población ahora es de 200 millonres, ¿Cuánto tomará que tu población alcance 750 millones?

$$x_0 = 200{,}000{,}000$$
$$750{,}000{,}000 = 200{,}000{,}000(1{,}025)^n$$
$$\frac{15}{4} = (1{,}025)^n$$
$$Ln(\frac{15}{4}) = n \cdot Ln(1{,}025)$$
$$n = \frac{Ln(\frac{15}{4})}{Ln(1{,}025)} \approx 53{,}5$$

3. **Resuelva:**
   $u_n = 4u_n - 1 - 1$, para $n \geq 2$
   $u_n = 3u_n - 1 + 2$, para $n \geq 2$

$$U_n = Ka^n + \frac{b}{1-a}$$
$$U_n = K4^n - \frac{1}{1-4} = K4^n + \frac{1}{3}$$

$$K = u_0 - \frac{b}{1-a}$$
$$K = u_0 - (\frac{-1}{1-4}) = u_0 - \frac{1}{3}$$

$$U_n = (u_0 - \frac{1}{3})4^n + \frac{1}{3} = u_0 4^n + \frac{1}{3}(1 - 4^n)$$
$$U_n = 3U_{n-1} \rightarrow a + 2 \rightarrow b, n \geq 2$$
$$U_n = (U_0 - \frac{b}{1-a} \cdot a^n + \frac{b}{1-a})$$
$$U_n = U_0 - \frac{2}{1-3} \cdot 3^n + \frac{2}{1-3}$$
$$= (U_0 + 1) \cdot 3^n - 1$$

4. **Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:**
   $u_n + 4un - 1 + 3 = 0$**, para** $n \geq 1$
   $u_n + 2un - 1 - 13 = 0$**, para** $n \geq 1$

   $u_n + 4un - 1 + 3 = 0$**, para** $n \geq 1$

$$a \rightarrow -4U_{n-1} \qquad b \rightarrow -3$$
$$U_n = (U_0 - \frac{b}{1-a}) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$
$$U_n = (U_0 - (\frac{-3}{1+4})) \cdot (-4)^n(\frac{-3}{1+4})$$

$$= (U_0 + \frac{3}{5}) \cdot (-4)^n - \frac{3}{5}$$

$u_n + 2un - 1 - 13 = 0$**, para** $n \geq 1$

$$U_n = a \to -2U_{n-1} \qquad b \to 13$$

$$U_n = (U_0 - \frac{b}{1-a}) \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = (U_0 - \frac{13}{5}) \cdot (-2)^n + \frac{13}{3}$$

5. **Encuentre las soluciones particulares para:**
$u_n = 3u_n - 1 + 5$, para $n \geq 1$ $u_0 = 1$

$$a = 3$$

$$b = 5$$

$$U_n = (U_0 - \frac{b}{1-a)} \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = (1 - \frac{5}{1-3} \cdot 3^n + \frac{5}{1-3}$$

$$= \frac{7}{2} \cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

$u_n = 2u_n - 1 + 6$, para $n \geq 2$ $u_1 = 3$

$$a = -2$$

$$b = 6$$

$$U_3 = -2 \cdot 0 + 6$$

$$U_n = aU_{n-1} + 6$$

$$U_2 = aU_1 + 6$$

$$U_3 = a(aU_1 + b) + b = a^2U_1 + ab + b$$

$$U_4 = a(a^2U_1 + ab + b) + b = a^3U_1 + a^2b + ab + b$$

En general:

$$Un = a^{n-1}U_1 + a^{n-2}b + ... + a^2b + ab + b$$

$$S_a = a^{n-2}b + ... + a^2b + ab + b$$

$$S_a = b$$

$$aS_a = a^{n-1}b$$

$$S_a - aS_a = b - a^(n-1)b$$

$$S_a(1-a) = b - a^{n-1}b$$

$$S_a = \frac{b(1 - a^{n-1}}{a^{n-1}}$$

$$U_n = a^{n-1}U_1 + \frac{b(1 - a^{n-1})}{1-a}$$

$$U_n = (-2)^{n-1} \cdot 3 + \frac{6(1 - (-2)^{n-1})}{3}$$

6. **Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157,...**

$$a_0 = 7, a_1 = 17, a_2 = 37, a_3 = 77, a_4 = 157$$

Notemos que:

$$17 - 7 = 10 \to 7 = 17 - 10$$
$$37 - 17 = 20 \to 17 = 37 - 20$$
$$77 - 37 = 40 \to 37 = 77 - 40$$
$$157 - 77 = 80 \to 77 = 157 - 80$$
$$a_n = kr^n \text{ Homogénea}$$
$$a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0$$
$$r^n - r^n r = 0$$
$$r^n(1-r) = 0 \to r = 1$$
$$a_n = k1^n \to a_n = k$$
$$f(t) = -2^n \cdot 10$$

Se tienen en cuenta los casos particulares vistos en clase:

$$2^n \cdot 10$$

Propuesta:

$$A \cdot 2^n = a_{np}$$
$$a_{n+1p} = A \cdot 2^{n+1}$$

Reemplazamos en $a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0$

$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^{n+1} = -2^n \cdot 10$$
$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^n \cdot 2 = -2^n \cdot 10$$
$$-A2^n = -2^n \cdot 10 \text{ entonces } A = 10$$
$$a_{np} = 10 \cdot 2^n \to Particular$$
$$a_n = k \to \text{Homogénea}$$

Solución general:

$$a_n = k + 10 \cdot 2^n,\ k = -3$$

7. **Encuentre el pago mensual por un préstamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interés del 21 % por año.**

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} \cdot i - M, \quad i = 1{,}75\,\%, \quad P_0 = 400M$$
$$P_n = \left(P_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$$
$$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} \cdot \frac{7}{400} - M$$
$$= P_{n-1} \cdot \frac{407}{400} - M$$

$$P_n = (400M - \frac{-M}{1 - \frac{407}{400}}) \left(\frac{407}{400}\right)^n + \frac{-M}{1 - \frac{407}{400}}$$

$$= (400M - \frac{400M}{7}) \left(\frac{407}{400}\right)^n + \frac{400}{7}M$$

$$P_{36} = (400M - \frac{400}{7}M) \left(\frac{407}{400}\right)^{36} + \frac{400}{7}M = 0$$

$$\left(\frac{407}{400}\right)^{36} \cdot 400M - \left(\frac{407}{400}\right)^{36} \frac{400}{7}M + \frac{400M}{7} = 0$$

$$\frac{400M}{7}\left(1 - \left(\frac{407}{400}\right)^{36}\right) = -\left(\frac{407}{400}\right)^{36} M$$

$$M = -\left(\frac{407}{400}\right)^{36} \cdot \frac{7}{400} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{407}{400})^{36}}$$

$$M = 15070026{,}23$$

$$M \text{ A. K. A. pago mensual}$$

8. **Una plantación de café incrementa su producción un 1 % por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las órdenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?**

$$U_1 = 200t + 200t \cdot 1\,\% - 1600t$$

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-1} \cdot 1\,\% - 1600t$$

$$P_0 = 200t$$

$$U_{n-1} \cdot \frac{101}{100} - 1600t$$

$$P_n = (P_o - \frac{b}{1-a}a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = (200t - \frac{-1600t}{1 - \frac{101}{100}}) \cdot (\frac{101}{100})^n + (\frac{-1600t}{1 - \frac{101}{100}})$$

$$(-159800t) \cdot (\frac{101}{100})^n + 160000t$$

$$200t + 200t \cdot 1\,\% - 1600t = -1398$$

Con 1600 de demanda es difícil realizar la cobertura con 200 de producción y un incremento de 1 %, si la demanda es mayor que el incremento nunca se acumulará el café.
Para que se acumule el cafe: Demanda $< P_{n-1} \cdot m\,\%$

9. **La productividad en una plantación de 2000 árboles se incrementa 5 % cada año por la implementación de mejores técnicas de agricultura. El granjero también planta además 100 árboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.**

$$U_0 = 2000$$

$$U_1 = 2000 + 2000 \cdot 5\,\% + 100$$

$$U_n = U_{n-1}\frac{21}{20} + 100$$

$$U_n = (2000 - \frac{100}{1 - 21/20} \cdot (\frac{21}{20})^n + \frac{100}{1 - 21/20}$$

$$U_n = (4000) \cdot (\frac{21}{20})^n - 2000$$

$$U_10 = 4515,58$$

$$\delta\,\% = \frac{4515,58 - 2000}{2000} \approx 126\,\%$$

10. **Resuelva** $u_n = 3u_{n-1} + n$**, para** $u_1 = 5$

$$U_n - 3U_{n-1} = h \sim U_n - 3U_{n-1} = 0$$

$$r^n - \frac{3r^n}{r} = 0$$

$$r^n r - 3r^n = 0$$

$$r^n(r-3) = 0$$

$$r = 3$$

Homogénea

$$U_n = kr^n \to k \cdot 3^n$$

Particular

$$U_n = An + B$$

$$U_{n-1} = A(n-1) + B$$

$$U_n - 3U_{n-1} = h \to An + B - 3(A(n-1) + B) = n$$

$$An + B - 3An + 3A - 3B = n$$

$$-2An + 3A - 2B = n$$

$$\begin{cases} -2A = 1 \sim A = -1/2 \\ 3A - 2B = 0 \sim B = -3/4 \end{cases}$$

$$U_n = -\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$$

$$U_n = k3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} \to U_n = \frac{25}{12}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$$

$$U_1 = k3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 5$$

$$k3 - \frac{5}{4} = 5$$

$$k3 = \frac{25}{4} \to k = \frac{25}{12}$$

11. **Encuentre la solución general para** $u_n = un - 1 + 2^n$ **y** $u_n = 2un - 1 + n$

$$a)u_n = un - 1 + 2^n$$

$$U_n - U_{n-1} = 0$$

$$r^n - \frac{r^n}{r} = 0$$

$$r^n \cdot r - r^n = 0 \to r^n(r-1) = 0$$

$$r = 1$$

Homogénea

$$U_n = K \cdot r^n \to K \cdot 1^n = k$$

Particular

$$U_n = a2^n$$

$$U_{n-1} = a2^{n-1}$$

Reemplazamos en la original

$$a \cdot 2^n - a \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$a \cdot 2^n - a \cdot 2^n \cdot \frac{1}{2} = 2^n$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^n \cdot 2^n = 2^n$$

$$a = 2 \rightarrow U_n = 2 \cdot 2^n$$

$$U_n = K - 2^{n+1}\text{Solución particular.}$$

$$b) u_n = 2un - 1 + n \ U_n - 2U_{n-1} = 0$$

$$r^n - \frac{2r^n}{r} = 0 \rightarrow r^n \cdot r - 2r^n = 0 \ r = 2$$

Homogénea Particular

$$U_n = K \cdot 2^n \qquad U_n = A_n + B, U_{n-1} = A(n-1) + B$$

Reemplazamos en la ecuación original.

$$A_n + B - 2(A(n-1) - B) = n$$

$$\checkmark{\text{A}}_n + \checkmark{\text{B}} - 2\checkmark{\text{A}}_n + 2A + 2\checkmark{\text{B}} = n$$

$$-A_n + 3B + 2A = n$$

$$\begin{cases} -A = -1, & \sim \quad A = 1 \\ 3B + 2A = 0, & \sim \quad B = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\textbf{Particular:} \quad U_n = n - \frac{2}{3}$$

$$\textbf{General:} \quad U_n = K \cdot 2^n + n - \frac{2}{3}$$

12. **Si** $u_n = ku_{n-1} + 5$ **y** $u_1 = 4$ **y** $u_2 = 17$ **encuentre los valores de** k **y** u_6**.**
Primera opción: recursión.

$$a = k, \ b = 5$$

$$U_2 = k \cdot U_1 + 5 = 17 \rightarrow 4k = 12, k = 3$$

$$U_1 = 4 = 3U_0 + 5 \sim$$

$$U_0 = -\frac{1}{3}$$

$$U_n = 3U_{n-1} + 5$$

$$U_3 = 3 \cdot 17 + 5 = 56$$

$$U_4 = 3 \cdot 56 + 5 = 173$$

$$U_5 = 3 \cdot 173 + 5 = 524$$

$$U_6 = 3 \cdot 524 + 5 = 1577$$

Segunda opción: ecuación de recurrencia geométrica.

$$P_n = (P_0 - \frac{b}{1-a})a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = (-\frac{1}{3} - \frac{5}{1-3}) \cdot 3^n + \frac{5}{1-3}$$

$$(\frac{13}{6}) \cdot 3^n - \frac{5}{2}$$

$$U_6 = \frac{13}{6} \cdot 3^6 - \frac{5}{2} = 1577$$

13. **Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $u_n = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, para $n \geq 2$, sujeto a la condición inicial $u_1 = \frac{1}{6}$.**

$$U_2 = \frac{U_1}{U_0} = \frac{1}{6U_0}$$
$$U_3 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{6U_0} = \frac{1}{U_0}$$
$$U_4 = \frac{U_3}{U_2} = \frac{6U_0}{U_0} = 6$$
$$U_5 = 6 \cdot U_0$$
$$U_6 = \frac{U_5}{U_4} = \frac{6 \cdot U_0}{6} = U_0$$
$$U_7 = \frac{U_6}{U_5} = \frac{U_0}{6U_0} = \frac{1}{6}$$
$$U_8 = \frac{U_7}{U_6} = \frac{1}{6} \cdot U_0$$
$$U_9 = \frac{U_8}{U_7} = \frac{6}{6} \cdot U_0 = U_0$$

14. **Investigue el límite de $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ si $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$**
Entonces:

$$U_{n+1} = U_n + 2U_{n-1}$$
$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} \exists$ (converge a L), entonces $\lim_{n\to\infty} U_{n\pm i}$ también $\exists$ y es L

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$
$$L = \frac{L + 2L}{L + 2L} \sim L = 1$$

Por lo tanto, el límite $\frac{U_n}{U_{n+1}} = 1$

15. **Encuentre el n-ésimo término de la siguiente secuencia: -3,21,3,129,147,...**
Para $n > 1$:

$$U_1 = -2 = (-1)(-3) - 5$$
$$U_2 = 21 = (-1)^2(-3)^2 + 12$$
$$U_3 = 3 = (-1)^3(-3)^3 - 24$$
$$U_4 = 129 = (-1)^4(-3)^4 + 48$$
$$U_5 = 147 = (-1)^5(-3)^5 - 96$$
$$f(n) = (-1)^n(-3)^n - (-1)^n \cdot 6 \cdot 2^{n-1}$$

16. **Resuelva $u_n - 6u_{n-1} + 8u_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $u_1 = 10$ y $u_2 = 28$. Evalúe u_6.**

$$U_{n+2} - 3U_{n+1} + 8U_n = 0$$
$$r^n \cdot r^2 - 6r^n r + 8r^n = 0$$
$$r^t(r^2 - 6r + 8) = 0 \sim r_1 = 2;\ r_2 = 4$$

General

$$U_n = k_1(2)^n + k_4(4)^n$$
$$U_1 = k_1 \cdot 2 + k_2 \cdot 4 = 10$$
$$U_2 = k_1 \cdot 4 + k_2 \cdot 16 = 28$$
$$\sim k_1 = 3,\ k_2 = 1$$
$$U_n = 3 \cdot (2)^n + (4)^n$$
$$U_6 = 4288$$

17. **Encuentre la solución particular para $u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=0$, para $n\geq 1$, cuando $u_1=-1$, $u_2=-2$.**

$$r^n r^2+2r^n r+r^n=0$$

$$r^n(r^2+2r+1)=0\sim r_{1,2}=-1$$

General

$$U_n=k_1(-1)^n+k_2n(-1)^n$$
$$U_1=-k_1-k_2=-1$$
$$U_2=k_1+2k_2=-2$$
$$\sim k_1=4,\ -3(-1)^n$$

18. **Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $u_n-5u_{n-1}+6u_{n-2}=f(n)$, cuando $f(n)=2$, $f(n)=n$, $f(n)=5^n$ y $f(n)=1+n^2$.**
Para $f(n)=2$

$$U_n-5U_{n-1}+6Un_{n-2}=2$$

Solución homogénea (válida para todo $f(n)$)

$$U_n-5U_{n-1}+6Un_{n-2}=0$$
$$r^n r^2-5r^n r+6r^n=0$$
$$r^n(r^2-5r+6)=0\sim r1=2,r2=3$$
$$U_n=k_1(2)^n+k_3(3)\ \textit{sin condiciones iniciales}$$

Solución particular $U_n=a=U_{n-1}=U_{n-2}$

$$U_n-5U_{n-1}+6U_{n-2}=2$$

$$a-5a+6a=2\rightarrow 2a=2\sim a=1$$
$$U_n=k_1(2)^n+k_3(3)^n+1$$

Para $f(n)=n$
Solución particular:

$$U_n=a+bn$$
$$U_{n-1}=a+b(n-1)$$
$$U_{n-2}=a+b(n-2)$$
$$Un-5U_{n-1}+6U_{n-2}=n$$
$$a+bn-5a-5b(n-1)+6a+6b(n-2)=n$$
$$a+bn-sa-5bn+5b+6a+6bn-12b=n$$
$$2a-7b+2bn=n\sim\begin{cases}2a-7b=0\\ 2b=1\end{cases}$$

$$a=\frac{7}{4},b=\frac{1}{2}\text{ entonces,}$$

$$U_n=k_1\cdot(2)^n+k_3\cdot(3)^n+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}n$$

Para $f(n)=5^n$
Solución particular

$$U_n=a5^n,\ U_{n-1}=a5^{n-1},\ U_{n-2}=a5^{n-2}$$
$$a5^n-5a5^{n-1}+6a5^{n-2}=5^n$$
$$6a5^{n-2}=5^n$$

$$\frac{6a5^n}{25} = 5^n \sim a = \frac{25}{6}$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3(3)^n + \frac{25}{6}5^n$$

$$k_1 \cdot (2)^n + k_3(3)^n + \frac{5^{n+2}}{6}$$

Para $f(n) = 1 + n^2$

$$U_n = a + bn + cn^2$$

$$U_{n-1} = a + b(n-1) + c(n-1)^2$$

$$U_{n-2} = a + b(n-2) + c(n-2)^2$$

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 1 + n^2$$

$$a + bn + cn^2 - 5a - 5b(n-1) - 5c(n-1)^2 + 6a + 6b(n-2) + 6c(n-2)^2 = 1 + n^2$$

$$\sim$$

$$(2a - 7b + 19c) + n(2b - 14c) + n^2(2c) = 1 + n^2$$

$$\sim$$

$$a = 8,\ b = frac72,\ c = frac12$$

$$U_n = k_1 \cdot (2)^n + k_3 \cdot (3)^n + 8 + \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

19. **Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatriz** $u_n - 3u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$**, dado** $u_0 = 0$**, y** $u_1 = 20$**,** $n \geq 2$**.**

$$G(x) = 0 + 20x + U_2x^2 + ...$$

$$U_2 = 3U_1 - 4U_0$$

$$U_3 = 3U_2 - 4U_1$$

$$U_4 = 3U_3 - 4U_2$$

$$G(x) = 0 + 20x + (3U_1 - 4U_0)x^2 + (3U_2 - 4U_1)x^3 + (3U_3 - 4U_2)x^4 ...$$

$$G(x) = 0 + 20x + (3U_1x^2 + 3U_2x^3 + 3U_3x^4) - (4U_0x^2 + 4U_1x^3 + 4U_2x^4)$$

$$G(x) = 0 + 20x + 3x(U_1x + U_2x^2 + U_3x^3) - 4x^2(U_0x + U_1x^2 + U_2x^3)$$

$$G(x) = 0 + 20x + 3x(G(x) - U_0) - 4x^2(G(x))$$

$$\frac{G(x)}{x} = 20 + 3G(x) + 4xG(x)$$

$$G(x) - 3xG(x) + 4x^2G(x) = 20x$$

$$G(x) = \frac{20x}{1 - 3x + 4x^2} = \frac{20x}{1} = \frac{1}{1 - x(-3 + 4x)}$$

$$G(x)(\frac{1}{x} - 3 + 4x)$$

$$\frac{1}{1 - x(4x - 3)} = 1 + x(4x - 3) + (x(4x - 3))^2 + (x(4x - 3)))^3 ...$$

$$1 + 4x^2 - 3x + 16x^4 - 24x^3 + 9x^2 + 64x^6 - 144x^5 + 108x^4 - 27x^3 + 258x^8 - 768x^7 + 864x^6 - 432x^5 + 81x^4$$

$$1 - 3x + x^2(4 + a) - x^3(24 + 27) + x^4(16 + 108 + 81)$$

$$-3, 13, 51, 205$$

Al dar un polinomio irreducible asumimos que para $n \geq 2$:

$$U_n = -3U_{n-1} + 4U_{n-2} = 0 :\ U_0 = 0, U_1 = 20$$

$$U_2 = -3U_1 + 4U_0$$
$$U_3 = -3U_2 + 4U_1$$
$$U_4 = -3U_3 + 4U_2$$
$$G(x) = 0 + 20x + (-3U_1 + 4U_0)x^2 + (-3U_2 + 4U_1)x^3 + (-3U_3 + 4U_2)x^4 + ...U_n \cdot x^n$$
$$= 0 + 20x + (-3U_1x^2 - 3U_2x^3 - 3U_3x^4 + ...) + (4U_0x^2 + 4U_1x^3 + 4U_2x^4$$
$$= 0 + 20x - 3x(U_1x + U_2x^2 + U_3x^3 + ...) + 4x^2(U_0 + U_1x + U_2x^2$$
$$G(x) = 0 + 20x - 3x(G(x) - U_0) + 4x^2(G(x))$$
$$G(x) + 3x(G(x)) - 4x^2G(x) = 20x$$
$$G(x) = \frac{20x}{1 + 3x - 4x^2} = \frac{20x}{-(4x+1)(x-1)}$$

Por fracciones parciales tenemos:

$$G(x) = \frac{-4}{4x+1} - \frac{4}{x-1} = \frac{-4}{4x+1} - \frac{4}{1-x}$$
$$4x = u$$
$$(1+U)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + ... + (-1)^n u^n$$
$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^n$$
$$G(x) = 4(1 + x + x^2 + ... + x^n - (1 - 4x + (4x)^2 - (4x)^3 ...)$$
$$= 4((1-1) + (x + 4x) + (x^2 - (4x)^2) + (x^3 + (4x)^3)...)$$
$$= 4((1-4) + x(1+4) + x^2(1-4^2) + x^3(1+4^3)...)$$
$$4(x^n(1 + 4^n \cdot (-1)^{n+1})) \sim U_n = 4(1 + 4^n \cdot (-1)^{n+1})$$
$$U_0 = 4(1 + 4^0 \cdot (-1)^1) = 0;\ U_1 = 4(1 + 4^1 \cdot (-1)^2) = 20$$

No obstante, si trabajamos con la ecuación propuesta inicial y con la transformada Z.

$$U_n - 3U_n - 1 + 4U_{n-2} = 0;\ U_0 = 0, U_1 = 20$$

$$ZU_n - 3ZU_{n-1} + 4ZU_{n-2}$$
$$U(Z) - 3(ZU(Z) - U_0Z) + 4(Z^2U(Z) - U_0Z^2 - U_1Z) = 0$$
$$U(Z) - 3ZU(Z) + 4(Z^2U(Z) - 20Z) = 0$$
$$U(Z) - 3ZU(Z) + 4Z^2U(Z) = 80Z$$
$$U(Z)(1 - 3Z + 4Z^2) = 80Z$$
$$U(Z) = \frac{80Z}{1 - 3Z + 4Z^2} \to U(Z) = \frac{2Z - (3/4) + 78Z + 3/4}{(2Z - 3/4)^2 + 7/16}$$
$$4Z^2 - 3Z + 1 = (2Z)^2 - 2(2Z)\frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + 1$$
$$(2Z - \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{16}$$
$$U(Z) = \frac{2Z - 3/4}{(2Z - 3/4)^+ 7/16} + \frac{78Z - 3/4}{(2Z - 3/4)^+ 7/16}$$

Por metodo de transformada inversa se tiene:

$$U_n = \frac{5 \cdot i \cdot 2^{4-3n}((3 - i\sqrt{7})^n - (3 - i\sqrt{7})^n)}{\sqrt{7}}$$

20. **Encuentre la función generatriz de la secuencia de Fibonacci.**
$n \geq 2$
$U_0 = 0,\ U_1 = 1$

$$U_n = U_{n-2} + U_{n-1} = 0$$
$$U_2 = U_0 + U_1 = 1 \checkmark$$
$$U_3 = U_1 + U_2 = 2 \checkmark$$
$$U_4 = U_2 + U_3 = 3 \checkmark$$
$$G(x) = U_0 + U_1x + U_2x^2 + U_3x^3 + ...$$
$$G(x) = 0 + x + (U_0 + U_1)x^2 + (U_1 + U_2)x^3 + (U_2 + U_3)x^4 + ...$$
$$G(x) = 0 + x + (U_0x^2 + U_1x^3 + U_2x^4 + ...) + (U_1x + U_2x^2 + U_3x^3) + ...$$
$$G(x) = 0 + x + x^2(U_0 + U_1x + U_2x^2 + ...) + x(U_1x + U_2x^2 + U_3x^3 + ...)$$
$$G(x) = 0 + x + x^2 \cdot G(x) + x(G(x) - U_0)$$
$$(-x^2 - x + 1) \cdot G(x) = x$$
$$G(x) = \frac{x}{1 - x^2 - x}$$

En general, si resolvemos mediante cualquier método, particularmente aquí usando L_z^{-1} tenemos:

$$U_n = -(-1)^n \cdot \frac{(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n - (\frac{-\sqrt{5}-1}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

para el enésimo término de la sucesión de Fibonacci.

21. **Utilice el método de la función generatriz para resolver $u_n - 2u_{n-1} = 3^n$, para $n \geq 1$ dado $u_0 = 1$**
Planteamos la homogénea:

$$U_n - 2U_{n-1} = 0$$
$$U_1 = 2U_0 = 2$$
$$U_2 = 2U_1 = 4$$
$$U_3 = 2U_2 = 8$$
$$U_4 = 2U_3 = 16$$
$$G(x) = 1 + (2U_0)x + (2U_1)x^2 + (2U_2)x^3 + (2U_3)x^4 + ...+$$
$$G(x) = 1 + 2x + (2 \cdot 2)x^2 + (2 \cdot 4)x^3 + (2 \cdot 8)x^4 + ...+$$

En general, tenemos que el n-término de $G(x) = 2(2^n)x^n \sim U_n = 2^n \cdot 2$
Resolvemos la homogénea de $f(n)$ particular:

$$3^n = 0 :$$
$$U_n = \alpha 3^n$$
$$U_{n-1} = \alpha 3^{n-1}$$
$$\alpha 3^n - 2\alpha 3^{n-1} = 3^n$$
$$\alpha 3^0 - 2\alpha 3^{-1} = 3^0 = 1$$
$$\alpha - \frac{2}{3} = 1$$
$$\frac{1}{3}\alpha = 1$$
$$\alpha = 3 \sim U_n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$
$$U_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$U_0 = 3^1 - 2^1 = 1$$