Tarea Kernel, Img y Demostración - Matemáticas Discretas 2

Sebastián Ortiz González
Universidad Nacional de Colombia
seortizg@unal.edu.co
Bogotá, Colombia

1. Si $\theta : G \to H$ es un homomorfismo, Kernel(θ) $= \{x \in G : \theta x = 1\}$ y Img(θ) $= \{y \in H : \theta x = y \vee x \in G\}$, probar que Kernel($\theta$) y Img($\theta$) son subgrupos.
   Para demostrar que Kernel(θ) y Img(θ) son subgrupos, verificamos las tres propiedades de un subgrupo:
   Cerradura: si a,b están en Kernel(θ) y en Img(θ), entonces $a{\cdot}b$ también está en Kernel(θ) y en Img(θ).
   Inversos: si a está en Kernel(θ) y en Img(θ), entonces su inverso a^{-1} también está en Kernel(θ) y en Img(θ).
   Elemento neutro: la identidad de G está en Kernel(θ) y en Img(θ).

   - Kernel(θ):
     Sea a,b en Kernel(θ), es decir
     $\theta(a) = \theta(b) = 1$. Entonces, $\theta(ab) = \theta(a)\ \theta(b) = 1{\cdot}1 = 1$, por lo que $ab \in$ Kernel(θ).
     $\therefore$ Kernel(θ) es cerrado bajo la operación del grupo G.
     a $\in$ Kernel(θ) $\to \theta(a)$=1
     $\to \theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$=$1^{-1}$=1
     $\therefore a^{-1} \in$ G $\iff$ Kernel(θ) es cerrado bajo inversos.
     id_G: elemento neutro del grupo G.
     $id_G \in$ Kernel(θ) $\leftarrow \theta(id_G) = 1H$ ya que es un homomorfismo.
     $\therefore$ Kernel(θ) contiene el elemento neutro.
     Kernel(θ) es un subgrupo de G.
   - Img(θ):
     Sea c,d en Img(θ), es decir,
     $\exists$ a,b tales que $\theta(a) = c \wedge \theta(b) = d \to$
     $\theta(ab^{-1}) = \theta(a)\theta(b^{-1})$=c$\theta(b)^{-1}$=$cd^{-1}$
     $\therefore ab^{-1} \in$G $\wedge\ \theta(ab^{-1}) \in$ Img(θ)
     Img(θ) es cerrado bajo la operación del grupo H.
     $C \in$ Img(θ) $\to \exists\ a \in G$ tal que $\theta(a) = c$.
     Como θ es un homomorfismo, $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$=c^{-1}
     $\therefore c^{-1} \in$ Img(θ) es cerrado bajo inversos.
     $id_H \in$ Img(θ) $\leftarrow \theta(id_G) = id_H$ ya que es un homomorfismo.
     Para mostrar que Img(θ) contiene el elemento neutro de H, id_H, debemos encontrar un elemento $a{\in}G$ tal que $\theta(a)$=id_H.
     Como θ es un homomorfismo, sabemos que $\theta(id_G)$=id_H. Por lo tanto, id_H está en la imagen de θ. $id_H \in$ Img(θ), ya que id_G es el elemento neutro de G, y el homomorfismo θ preserva el elemento neutro.

2. Demostrar el siguiente teorema:

   Sea X un subconjunto del grupo G, entonces hay un subgrupo más pequeño S de G que contiene a X. Es decir, si T es cualquier otro subgrupo que contiene X, $S \subseteq T$.

   Para demostrar el teorema, construimos un subgrupo S de G a partir de X usando la siguiente definición.
   S: el conjunto de todos los elementos de G que se pueden escribir como una combinación finita de elementos de X y sus inversos.
   $S = \{g_1^{e_1}{\cdot}g_2^{e_2}{\cdot}...{\cdot}g_n^{e_n}{:}n \in N, g_1, g_2, ..., g_n \in X \cup X^{-1}, e_1, e_2, ..., e_n \in \{-1, 1\}\}$
   X^{-1}: conjunto de inversos de los elementos de X.
   Ahora demostrar que S es un grupo de G que contiene a X y es más pequeño que cualquier otro subgrupo T de G que contenga a X.

S es cerrado bajo la operación del grupo G:
Sea a y b en S, entonces existen elementos finitos de X y sus inversos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_m)$ tales que

$a = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n} \wedge b = b_1^{f_1} \cdot b_2^{f_2} \cdot ... \cdot b_m^{f_m}$
pertenecen a S porque son una combinación finita de elemento de X y sus inversos.
S contiene el elemento neutro de G:
Como X es un subconjunto de G, entonces el elemento neutro de G pertenece a X y, por lo tanto, pertenece a S.
S es cerrado bajo la operación inversa del grupo G:
Sea a en S, entonces existe una combinación finita de elementos de X y sus inversos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tales que $a = a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n}$. Entonces,
$a^{-1} = ({a_1}^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n})^{-1} = a_n^{-e_n} \cdot ... \cdot a_2^{-e_2} \cdot a_1^{-e_1}$
pertenece a S porque es una combinación finita de elementos X y sus inversos.
pertenece a S porque es una combinación finita de elementos de X y sus inversos.
S es un subconjunto de cualquier subgrupo G que contiene a X:
Sea T un subgrupo de G que contiene a X, debemos demostrar que S es un subconjunto de T.
Sea a en S, entonces existe una combinación finita de elementos de X y sus inversos
$(a_1, a_2, ..., a_n)$ tal que
$a = {a_1}^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n}$
Como T es un subgrupo que contiene a X, entonces todos los elementos de X y sus inversos pertenecen a T. Entonces,
$a_1, a_2, ..., a_n \in T$.
Como T es cerrado bajo la operación G, entonces
$a_1^{e_1} \cdot a_2^{e_2} \cdot ... \cdot a_n^{e_n} \in T$. Por lo tanto, $a \in T$, lo que demuestra que S es un subconjunto de T.

S es un subgrupo de G que contiene a X.
S es más pequeño que cualquier otro subgrupo T de G que contenga a X.