Tarea 1 - Matemáticas Discretas 2

Sebastián Ortiz González
Universidad Nacional de Colombia
seortizg@unal.edu.co
Bogotá, Colombia

Si G es un conjunto finito de elementos n elementos, entonces μ se puede escribir como una tabla:

$$G = a, b, c, d$$

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

1. Afirmación: La operación binaria multiplicación es asociativa en G

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

$$d = d$$

Probando otros casos se llego a un contraejemplo con el cual se demuestra que la operación no es asociativa:

$$b \cdot (c \cdot d) = (b \cdot c) \cdot d$$

$$b \cdot c = d \cdot d$$

$$d \neq b$$

Por lo tanto, queda demostrado que la operación binaria multiplicación NO es asociativa en G.

2. Afirmación: La multiplicación de matrices es asociativa en Z.

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

Propiedad asociativa:

$$M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3) = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

Lado izquierdo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}) =$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \cdot k + i \cdot e & f \cdot l + j \cdot e \\ i \cdot g + h \cdot k & g \cdot j + h \cdot l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} i \cdot b \cdot g + a \cdot f \cdot k + b \cdot h \cdot k + i \cdot a \cdot e & b \cdot g \cdot j + a \cdot f \cdot l + b \cdot h \cdot l + a \cdot j \cdot e \\ i \cdot d \cdot g + c \cdot f \cdot k + d \cdot h \cdot k + i \cdot c \cdot e & d \cdot g \cdot j + c \cdot f \cdot l + d \cdot h \cdot l + c \cdot j \cdot e \end{pmatrix}$$

Lado derecho:

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} b \cdot g + a \cdot e & a \cdot f + b \cdot h \\ d \cdot g + c \cdot e & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} i \cdot b \cdot g + a \cdot f \cdot k + b \cdot h \cdot k + i \cdot a \cdot e & b \cdot g \cdot j + a \cdot f \cdot l + b \cdot h \cdot l + a \cdot j \cdot e \\ i \cdot d \cdot g + c \cdot f \cdot k + d \cdot h \cdot k + i \cdot c \cdot e & d \cdot g \cdot j + c \cdot f \cdot l + d \cdot h \cdot l + c \cdot j \cdot e \end{pmatrix}$$

Como el lado derecho y el lado izquierdo son iguales, se puede decir que la multiplicación de matrices cuadradas en Z SI es asociativa.

3. Afirmación: La multiplicación de complejos definida como $(a+bi) \cdot (c+di) = ac + (bc+ad)i - bd$ es asociativa.

$$a + bi \cdot (c + di \cdot e + fi) = (a + bi \cdot c + di) \cdot e + fi$$

$$a + bi \cdot (c + di \cdot e + fi) = (a + bi \cdot c + di) \cdot e + fi$$

$$a + bi \cdot (ce + (de + cf)i - df) = (ac + (bc + ad)i - bd) \cdot e + fi$$

$$a + bi \cdot ((ce - df) + (de + cf)i) = ((ac - bd) + (bc + ad)i) \cdot e + fi$$

Lado izquierdo:

$$a(ce - df) + (b(ce - df) + a(de + cf))i - b(de + cf) =$$

$$ace - adf - bde - bcf + (bce - bdf + ade + acf)i$$

Lado derecho:

$$e(ac - bd) + (e(bc + ad) + f(ac - bd))i - f(bc + ad)$$

$$ace - bde - bcf - adf + (bce + ade + acf - bdf)i$$

Por lo tanto, como el lado derecho y el lado izquierdo son iguales, se puede decir que la multiplicación de complejos es asociativa.