Filtros de Kalman

Martín Gutiérrez

August 7, 2022

Introducción

Efe de Pes... 0s0m... Aunque hoy les toca a los Efe de Kas...

Estos tipos ocupan una menor complejidad computacional que los Efe de Pes, aunque tienen limitaciones mayores.

Para qué son?

La idea de los Efe de Kas consiste, al igual que los Efe de Pes, en estimar variables de estado que no están siendo controladas directamente.

También, al igual que con los FdPs, el proceso es controlado por tiempo discreto. Por ese mismo hecho, es de suma importancia reconocer la propiedad Markoviana bajo este escenario (se acuerdan de la propiedad Mark0s0mviana?).

Un pelo más matemático que las FdPs...

Hay dos ecuaciones que gobiernan el modelo:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \tag{1}$$

$$z_k = Hx_k + v_k \tag{2}$$

Recuerdan que la clase pasada hablamos del estado y de las mediciones? Bueno, la ecuación (1) representa la dinámica del estado, mientras que (2) se refiere a las mediciones. Nótese además que ambas ecuaciones son lineales.

Y sobre las variables...

w_{k-1} y v_k son los valores correspondientes al ruido en el modelo.

Cabe destacar que estos errores distribuyen $\mathcal{N}(0, Q)$ y $\mathcal{N}(0, R)$ respectivamente: Los valores de Q y R (covarianzas del error) se pueden medir (en el caso de R) o bien ajustar (en el caso de Q, puesto que es difícil de medir).

Esto se hace normalmente a través de otro proceso distinto. Siempre conviene ajustar los parámetros Q y R puesto que en gran medida definirán el desempeño del Filtro.

Operación de los Filtros de Kalman

Como se indicó en la slide anterior, los FdKs se tratan en dos frentes: Ecuaciones de actualización de estado basadas en tiempo y ecuaciones de actualización de mediciones.

Esto puede verse como redundante, dado que perseguimos estimar únicamente el estado. Sin embargo, esa actualización de estado entrega un estimado *a priori*, que debe ser mejorado por medio del uso de las mediciones, obteniendo un estimado *a posteriori*.

Una buena forma de definir las ecuaciones de tiempo son como *predictoras* y las de mediciones como *correctoras*.

Características de problemas que pueden ser modelados por medio de Filtros de Kalman

1. Distribuciones Gaussianas
2. Sistemas lineales
3. Sistemas de tiempo discreto, pero espacios continuos

Cuando no usar Filtros de Kalman

1. Distribuciones de variables de ruido que no son $\mathcal{N}(X, Y)$
2. Con distribuciones de probabilidad multimodales para el estado estimado
3. Sistemas no-lineales (se usan los EKF en este caso)

Elementos presentes

Entonces bien, qué elementos están presentes en los Filtros de Kalman?

- **Coeficientes**: A, B y H. Relacionan variables del sistema entre sí.
- **Estado a estimar**: x_k (versión *a priori*: $\hat{x}_k^-$, versión *a posteriori*: $\hat{x}_k$, además: $E[x_k] = \hat{x}_k$)
- **Mediciones**: z_k
- **Covarianza del error**: $P_k = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]$

Idea detrás de los Filtros de Kalman

La idea de fondo es de estimar el estado en el tiempo y corregirlo con las mediciones.

Como se mencionó anteriormente, es un proceso que se mantiene en el tiempo y que actualiza su estimación del estado.

El algoritmo

- Se entregan valores iniciales estimados de $\hat{x}_k^-$ y P_{k-1}
- Paso de actualización de estado (Predicción):
  - Se proyecta el estado: $\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$
  - Se proyecta la covarianza del error: $P_k^- = AP_{k-1}^- A^T + Q$
- Paso de actualización de mediciones (Corrección):
  - Se calcula el multiplicador de Kalman: $K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$
  - Se actualiza la estimación con la medida z_k: $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$
  - Se actualiza la covarianza del error: $P_k = (I - K_k H)P_k^-$
- Volver al paso 2.

Videos...

https://www.youtube.com/watch?v=loCEX1OWWw4 y
https://www.youtube.com/watch?v=P-TJwt9K_5Q

La próxima talla...

Seguiremos con otros métodos probabilísticos: Maximum-Likelihood Estimation y Expectation-Maximization.