Operadores Lineales:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

19 de enero de 2021

Agenda: Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \,/ \mathbb{T}\left[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\,|v_1\rangle + \beta\,\mathbb{T}\,|v_2\rangle \ \forall \ |v_1\rangle \ \text{ y } \ |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\,|v\rangle = |v'\rangle = \lambda\,|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\,|v\rangle + \beta\,|w\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\,|v\rangle + \beta\mathbb{T}\,|w\rangle = \alpha\lambda\,|v\rangle + \beta\lambda\,|w\rangle$.

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha \ \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta \ \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle \ \text{ y } \ \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}\left|v\right\rangle = \left|v'\right\rangle = \lambda\left|v\right\rangle \Rightarrow \mathbb{T}\left[\alpha\left|v\right\rangle + \beta\left|w\right\rangle\right] = \alpha\mathbb{T}\left|v\right\rangle + \beta\mathbb{T}\left|w\right\rangle = \alpha\lambda\left|v\right\rangle + \beta\lambda\left|w\right\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}\left|v\right\rangle = \lambda \rightleftharpoons \left\langle u \,|v\right\rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}\left[\alpha\left|v\right\rangle + \beta\left|w\right\rangle\right] = \left\langle u\right|\left[\alpha\left|v\right\rangle + \beta\left|w\right\rangle\right] = \alpha\left\langle u \,|v\right\rangle + \beta\left\langle u \,|w\right\rangle$,

Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformación lineal) a una operación, $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, que asocia un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad:

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha\ \left|v_1\right\rangle + \beta\ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\,\mathbb{T}\left|v_2\right\rangle\ \forall\ \left|v_1\right\rangle\ \text{ y }\ \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1\,.$$

Algunos ejemplos triviales de transformaciones lineales son:

- Multiplicar por un número: $\mathbb{T}|v\rangle = |v'\rangle = \lambda|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \alpha\mathbb{T}|v\rangle + \beta\mathbb{T}|w\rangle = \alpha\lambda|v\rangle + \beta\lambda|w\rangle$.
- El producto interno: $\mathbb{T}|v\rangle = \lambda \rightleftharpoons \langle u\,|v\rangle \equiv \lambda$, con lo cual $\mathbb{T}[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \langle u|\,[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \alpha\langle u\,|v\rangle + \beta\langle u\,|w\rangle$,
- Un proyector $[|s\rangle\langle s|]\ |v\rangle = \langle s\,|v\rangle\,|s\rangle = |v_s\rangle$. $|s\rangle\langle s|\,[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \alpha\langle s\,|v\rangle\,|s\rangle + \beta\langle s\,|w\rangle\,|s\rangle$ por lo tanto para $\mathbb{T} : \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{S}_n$ tendremos $\mathbb{P}_m|v\rangle \equiv \left(|u_i\rangle\left\langle u^i\right|_m\right)|v\rangle = \left\langle u^i\,|v\right\rangle_m |u_i\rangle = |v_m\rangle$,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_m$. Esto es $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$, entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
$|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
$|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)\,,$

Ejemplos transformaciones lineales

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
$|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
$|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)\,,$
- Las ecuaciones diferenciales también lo son
$y'' - 3\; y' + 2\; y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales $\mathbb{T}:\mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Esto es
  $|y\rangle = \mathbb{T}\,|x\rangle \Rightarrow \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbb{T}\left[\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right]$,
  entonces $y^i = a^i_j\, x^j$ donde $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right.$, con a^i_j, $n \times m$ números,
- La derivada es un operador lineal
  $|v'\rangle = \mathbb{T}\,|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}\,|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}\,[y(x)] \equiv \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv y'(x)\,,$
- Las ecuaciones diferenciales también lo son
  $y'' - 3\,y' + 2\,y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
- La integral también : $g(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leftrightarrows \mathbb{T}\,[f(t)]$.
- y las transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\; f(t)\mathrm{d}t \leftrightarrows \mathbb{T}\,[f(t)]\,,$$

  donde $\mathcal{K}(s,t)$ es una función conocida de s y t, denominada el *núcleo* de la transformación.

Nombre	$F(s) = \mathbb{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^\infty \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} \; f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty \begin{matrix}\mathrm{sen}(st)\\ \cos(st)\end{matrix} \; F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ist} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel	$F(s) = \int_0^\infty t J_n(st) f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty s J_n(ts) F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \, f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} \, F(s)\mathrm{d}s$

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$

$$\lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \; / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\cdots\}$: $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\,|v\rangle \equiv \lambda\mathbb{A}\,|v\rangle + \mathbb{B}\,|v\rangle \; / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}\left[\alpha\;|v_1\rangle + \beta\;|v_2\rangle\right] = \alpha\;\mathbb{A}\,|v_1\rangle + \beta\;\mathbb{A}\,|v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B}\left[\alpha\;|v_1\rangle + \beta\;|v_2\rangle\right] = \alpha\;\mathbb{B}\,|v_1\rangle + \beta\;\mathbb{B}\,|v_2\rangle \end{array} \right.$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\left[\alpha\;|v_1\rangle + \beta\;|v_2\rangle\right] = \lambda\mathbb{A}\left[\alpha\;|v_1\rangle + \beta\;|v_2\rangle\right] + \mathbb{B}\left[\alpha\;|v_1\rangle + \beta\;|v_2\rangle\right]$

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\,|v\rangle \equiv$
$$\lambda\mathbb{A}\,|v\rangle + \mathbb{B}\,|v\rangle \;/\; \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}\left[\alpha \;\; |v_1\rangle + \beta \;\; |v_2\rangle\right] = \alpha\;\mathbb{A}\,|v_1\rangle + \beta\;\mathbb{A}\,|v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B}\left[\alpha \;\; |v_1\rangle + \beta \;\; |v_2\rangle\right] = \alpha\;\mathbb{B}\,|v_1\rangle + \beta\;\mathbb{B}\,|v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B})\left[\alpha \;\; |v_1\rangle + \beta \;\; |v_2\rangle\right] = \lambda\mathbb{A}\left[\alpha \;\; |v_1\rangle + \beta \;\; |v_2\rangle\right] + \mathbb{B}\left[\alpha \;\; |v_1\rangle + \beta \;\; |v_2\rangle\right]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\mathbf{V}$,

Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal mediante la operación suma y la multiplicación por un número. Entonces dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\}$, es claro que

- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv$
$$\lambda\mathbb{A} |v\rangle + \mathbb{B} |v\rangle \; / \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{A} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{A} |v_2\rangle \\ \\ \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] = \alpha \; \mathbb{B} |v_1\rangle + \beta \; \mathbb{B} |v_2\rangle \end{array} \right.$$
- $(\lambda\mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] =$ $\lambda\mathbb{A} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle] + \mathbb{B} [\alpha \; |v_1\rangle + \beta \; |v_2\rangle]$
- Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$ lineales en $\mathbf{V}$,
- La transformación cero de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2 : \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle \;\; \forall \;\; |v\rangle \in \mathbf{V}_1$,
- El elemento simétrico $(-\mathbb{A}) |v\rangle = -\mathbb{A} |v\rangle \;\; \Rightarrow \;\; (\mathbb{A} - \mathbb{A}) |v\rangle = \mathbb{O} |v\rangle = |0\rangle$.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)\mathbb{C} = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\mathbb{C}\right); \qquad \alpha\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left(\alpha\mathbb{A}\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}\left(\alpha\mathbb{B}\right);$$
$$\left(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; \qquad \mathbb{A}\left(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2\right) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2 .$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)\mathbb{C} = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\mathbb{C}\right); \qquad \alpha\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left(\alpha\mathbb{A}\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}\left(\alpha\mathbb{B}\right);$$
$$\left(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2\right)\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; \qquad \mathbb{A}\left(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2\right) = \mathbb{A}\mathbb{B}_1 + \mathbb{A}\mathbb{B}_2 .$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

- En general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:
  $\left[\mathbb{A}, \mathbb{B}\right] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow \left[\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}\right]\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}\left|v\right\rangle$.

Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se denotará $\mathbb{AB}$ tal que $\mathbb{AB}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$. Entonces

- cumple con las siguientes propiedades:

$$(\mathbb{AB})\,\mathbb{C} = \mathbb{A}\,(\mathbb{BC})\,; \qquad \alpha\,(\mathbb{AB}) = (\alpha\mathbb{A})\,\mathbb{B} = \mathbb{A}\,(\alpha\mathbb{B})\,;$$
$$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\,\mathbb{B} = \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}\,; \qquad \mathbb{A}\,(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) = \mathbb{AB}_1 + \mathbb{AB}_2\,.$$

  Es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por números.

- En general $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$, por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como:
  $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{AB} - \mathbb{BA} \Rightarrow [\mathbb{AB} - \mathbb{BA}]\left|v\right\rangle = \mathbb{AB}\left|v\right\rangle - \mathbb{BA}\left|v\right\rangle$.
- Entonces

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = -\,[\mathbb{B}, \mathbb{A}]$$
$$[\mathbb{A}, (\mathbb{B} + \mathbb{C})] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}]$$
$$[\mathbb{A}, \mathbb{BC}] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]\,\mathbb{C} + \mathbb{B}\,[\mathbb{A}, \mathbb{C}]$$
$$[\mathbb{A}, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]] = -\,[\mathbb{B}, [\mathbb{C}, \mathbb{A}]] - [\mathbb{C}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]]\,.$$

Las potencias de los operadores, provienen de la aplicación consecutiva de un mismo operador,
$\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}\,; \qquad \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}\,; \qquad \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}\,; \qquad \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A} \ \cdots$ las potencias de operadores son similares a las potencias de números
$\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m; \qquad (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}\,.$
Para ilustrar el álgebra de operadores consideremos tres operadores $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathbb{C}$, tales que: $\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$ y $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}\,.$ Entonces $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$. $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = 2i\mathbb{C} \ \Rightarrow \ 2\mathbb{A}\mathbb{B} = 2i\mathbb{C} \Rightarrow \ \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{C}^2$

$$\Rightarrow \ -\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B} = -\mathbb{C}^2 \Rightarrow \ \mathbb{I} = \mathbb{C}^2$$

y además se cumple que $[\mathbb{B},\mathbb{C}] = 2i\mathbb{A}$
$[\mathbb{B},\mathbb{C}] = -i\,(\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}) = 2i\mathbb{A} \ \Rightarrow \ -i\,(\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{A}) = 2i\mathbb{A} \ \Rightarrow$
$-i\,(-\mathbb{B}\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}) = 2i\mathbb{A}$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \, .$$

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha\ \left|v_1\right\rangle + \beta\ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle\ \forall\ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
    - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)$,
    - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows\ \mathbb{T}\left[f(t)\right]$,

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\,\mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\,\mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\,\mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots \} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$.

Recapitulando

- Definimos un operador lineal

$$\left|v'\right\rangle = \mathbb{T}\left|v\right\rangle / \mathbb{T}\left[\alpha \ \left|v_1\right\rangle + \beta \ \left|v_2\right\rangle\right] = \alpha\, \mathbb{T}\left|v_1\right\rangle + \beta\, \mathbb{T}\left|v_2\right\rangle \ \forall \ \left|v_1\right\rangle, \left|v_2\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \,.$$

- Consideramos varios ejemplos de transformaciones lineales, entre la cuales destacan
  - Las ecuaciones diferenciales $y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2\right) y(x)\,,$
  - y las transformaciones integrales $F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ f(t)\mathrm{d}t \ \leftrightarrows \ \mathbb{T}\left[f(t)\right]\,,$
- A partir de $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y construimos un espacio vectorial lineal de operadores lineales mediante la operación suma y la multiplicación por un número.
- Definimos el producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, como $\mathbb{A}\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\left|v\right\rangle\right) = \mathbb{A}\left|\tilde{v}\right\rangle = \left|\tilde{v}'\right\rangle$.
- Como, en general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, construimos el conmutador de estos operadores como: $\left[\mathbb{A}, \mathbb{B}\right] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} \Rightarrow \left[\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}\right]\left|v\right\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}\left|v\right\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}\left|v\right\rangle\,.$