Autovalores y Autovectores

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

29 de enero de 2021

Agenda de Autovalores y Autovectores

Definiciones y consecuencias

$|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbb{A}$ si se cumple que

$$\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \ ,$$

λ (en general será un número complejo) es el autovalor del autovector $|\psi\rangle$

- Autovalores, autovectores e independencia lineal
  $\{|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ autovectores de $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \rightarrow \mathbf{V}^n$. Si existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$, **distintos** correspondientes a cada autovector $|\psi_j\rangle$, entonces los $\{|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ **son linealmente independientes** y por lo tanto $\{|\psi_i\rangle\}$ es base

Definiciones y consecuencias

$|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbb{A}$ si se cumple que

$$\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \ ,$$

λ (en general será un número complejo) es el autovalor del autovector $|\psi\rangle$

- Autovalores, autovectores e independencia lineal $\{|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ autovectores de $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \to \mathbf{V}^n$. Si existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$, **distintos** correspondientes a cada autovector $|\psi_j\rangle$, entonces los $\{|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ **son linealmente independientes** y por lo tanto $\{|\psi_i\rangle\}$ es base
- La representación matricial del operador $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^n$ en la base de autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ es diagonal:

$$\left\langle \psi^i \right| \mathbb{A} \left| \psi_j \right\rangle = A^i_j = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) \ .$$

(continuará...)

El polinomio característico 1/3

- La representación matricial de la ecuación de autovalores es diagonal si existe una base ortogonal:

$$\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \Rightarrow \{|e_i\rangle\}\,\langle e^i|\,\mathbb{A}\,|e_j\rangle\,\langle e^j\,|\psi\rangle = \lambda\,\langle e^i\,|\psi\rangle \Rightarrow A^i_j\,c^j = \lambda c^i\,,$$

la base ortonormal, $\{|e_i\rangle\}$, genera una representación diagonal de $\mathbb{A}$, y entonces $A^i_j \propto \delta^i_j$.

El polinomio característico 1/3

- La representación matricial de la ecuación de autovalores es diagonal si existe una base ortogonal:

$$\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \Rightarrow \{|\mathrm{e}_i\rangle\}\,\langle \mathrm{e}^i|\,\mathbb{A}\,|\mathrm{e}_j\rangle\,\langle \mathrm{e}^j\,|\psi\rangle = \lambda\,\langle \mathrm{e}^i\,|\psi\rangle \Rightarrow A^i_j\,c^j = \lambda c^i\,,$$

la base ortonormal, $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$, genera una representación diagonal de $\mathbb{A}$, y entonces $A^i_j \propto \delta^i_j$.

- Entonces $A^i_j\,c^j = \lambda c^i \Rightarrow \left(A^i_j - \lambda\delta^i_j\right) c^j = 0 \Rightarrow \det|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}| = 0$ Es la ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen los autovalores del operador $\mathbb{A}$:

$$\det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = \begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det\left|\left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_j\right\rangle\right| = \det\left|\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^l \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_m\right\rangle\right|$.

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det \left| \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle \right| = \det \left| \langle \tilde{\mathrm{e}}^l | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_m \rangle \right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det\left|\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_j\rangle\right| = \det\left|\langle \tilde{\mathrm{e}}^l \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.
- Las raíces podrán ser: n reales y distintas, m reales, distintas y k iguales, con $m = n - k$ o algunas imaginarias

El polinomio característico 2/3

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det \left| \langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_j \rangle \right| = \det \left| \langle \tilde{\mathrm{e}}^l \right| \mathbb{A} \left| \tilde{\mathrm{e}}_m \rangle \right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.
- Las raíces podrán ser: n reales y distintas, m reales, distintas y k iguales, con $m = n - k$ o algunas imaginarias
- Para el caso de n raíces reales y distintas. Los n autovalores distintos, estarán asociados a n autovectores también distintos.

$$P(\lambda) = \det \left| A^i_j - \lambda \delta^i_j \right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

- El polinomio característico será independiente de la base de la representación matricial $\det\left|\left\langle \mathrm{e}^i\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{e}_j\right\rangle\right| = \det\left|\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^l\right| \mathbb{A}\left|\tilde{\mathrm{e}}_m\right\rangle\right|$.
- El polinomio característico será un polinomio de grado n. Las raíces de este polinomio serán los autovalores.
- Las raíces podrán ser: n reales y distintas, m reales, distintas y k iguales, con $m = n - k$ o algunas imaginarias
- Para el caso de n raíces reales y distintas. Los n autovalores distintos, estarán asociados a n autovectores también distintos.

$$P(\lambda) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

- Un operador $\mathbb{A}$ con una representación matricial $n \times n$, con n autovalores distintos, asociados a n autovectores linealmente independientes generán una representación matricial diagonal. $\left\langle \psi^i\right| \mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.

El polinomio característico 3/3

- Si las raíces del polinomio característico presentan algún grado de multiplicidad, el polinomio característico podrá factorizarse como:

$$P(\lambda) = \det \left| A^i_j - \lambda \delta^i_j \right| = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m).$$

Existirán $m = n - k$ raíces simples asociadas con $m = n - k$ autovectores linealmente independientes

El polinomio característico 3/3

- Si las raíces del polinomio característico presentan algún grado de multiplicidad, el polinomio característico podrá factorizarse como:

$$P(\lambda) = \det \left| A^i_j - \lambda \delta^i_j \right| = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m).$$

  Existirán $m = n - k$ raíces simples asociadas con $m = n - k$ autovectores linealmente independientes
- El autovalor λ_1, con multiplicidad k podrá ser asociado con $1, 2, \cdots$ hasta k autovectores linealmente independientes.

El polinomio característico 3/3

- Si las raíces del polinomio característico presentan algún grado de multiplicidad, el polinomio característico podrá factorizarse como:

$$P(\lambda) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)^k(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m).$$

  Existirán $m = n - k$ raíces simples asociadas con $m = n - k$ autovectores linealmente independientes
- El autovalor λ_1, con multiplicidad k podrá ser asociado con $1, 2, \cdots$ hasta k autovectores linealmente independientes.
- El autovalor λ_1, estará asociado a un subespacio vectorial, denominado autoespacio $\mathbf{S}_{\lambda_1}$ tal que $\dim(\mathbf{S}_{\lambda_1}) \leq$ grado de multiplicidad del autovalor λ_1

Autovalores y autovectores de matrices importantes

Siempre se cumple que

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left|\mathrm{u}_i\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left\langle \mathrm{u}^j \middle| \mathrm{u}_i\right\rangle \\ \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j\right| & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j \middle| \mathrm{u}_i\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \left\langle \mathrm{u}^j \middle| \mathrm{u}_i\right\rangle .$$

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces los autovectores serán ortogonales, $\left\langle \mathrm{u}^j \middle| \mathrm{u}_i\right\rangle \propto \delta_i^j$.

Siempre se cumple que

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|\mathrm{u}_i\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left\langle \mathrm{u}^j \right|\left.\mathrm{u}_i\right\rangle \\ \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j\right| & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j \right|\left.\mathrm{u}_i\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \left\langle \mathrm{u}^j \right|\left.\mathrm{u}_i\right\rangle \ .$$

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces los autovectores serán ortogonales, $\left\langle \mathrm{u}^j \right|\left.\mathrm{u}_i\right\rangle \propto \delta_i^j$.
- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son los mismos, $(i = j)$ entonces los autovalores son reales: $\lambda_i = \lambda_i^*$.

Siempre se cumple que

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \ \left|\mathrm{u}_i\right\rangle & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_i \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \\ \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j\right| & \Rightarrow & \left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A}^\dagger\left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \lambda_j^* \left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\langle \mathrm{u}^j\right| \mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{u}_i\right\rangle = \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right)\left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \ .$$

- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, $(i \neq j)$ entonces los autovectores serán ortogonales, $\left\langle \mathrm{u}^j \left|\mathrm{u}_i\right.\right\rangle \propto \delta_i^j$.
- Si $\mathbb{A}$ es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son los mismos, $(i = j)$ entonces los autovalores son reales: $\lambda_i = \lambda_i^*$.
- Si $\mathbb{A}$ es unitario, $\mathbb{A} \equiv \mathbb{U}$, se cumple que $\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^{-1}$ entonces

$$\mathbb{U}\left|\psi_j\right\rangle = \lambda_j \left|\psi_j\right\rangle \Rightarrow \left\langle \psi^j\right| \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}\left|\psi_j\right\rangle = 1 = \lambda_j^*\lambda_j \ \Rightarrow \ \lambda_j = e^{i\varphi_j} \ ,$$

con φ_u una función real.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $|\psi\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $|\psi\rangle$.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $|\psi\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $|\psi\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $|\psi\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $|\psi\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \langle\psi^i|\mathbb{A}|\psi_j\rangle$ en la base de autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\langle\psi^i|\mathbb{A}|\psi_j\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $\left|\psi\right\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $\left|\psi\right\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle$ en la base de autovectores $\{\left|\psi_i\right\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.
4. Los autovalores (y después los autovectores) se calculan a mediante el polinomio característico $P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$.

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $|\psi\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $|\psi\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \langle\psi^i|\,\mathbb{A}\,|\psi_j\rangle$ en la base de autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\langle\psi^i|\,\mathbb{A}\,|\psi_j\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.
4. Los autovalores (y después los autovectores) se calculan a mediante el polinomio característico $P(\lambda) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$.
5. Los autovalores pueden ser n simples o individuales $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$

Recapitulando

1. La ecuación de autovalores $\mathbb{A}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$, es una ecuación con dos incógnitas: λ y $\left|\psi\right\rangle$, o una ecuación un UNA incógnita doble: λ y $\left|\psi\right\rangle$.
2. Los autovectores para autovalores distintos forman base
3. La representación matricial del operador $A^i_j = \left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle$ en la base de autovectores $\{\left|\psi_i\right\rangle\}$ es diagonal con los autovalores: $\left\langle\psi^i\right|\mathbb{A}\left|\psi_j\right\rangle = A^i_j = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)$.
4. Los autovalores (y después los autovectores) se calculan a mediante el polinomio característico $P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$.
5. Los autovalores pueden ser n simples o individuales $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$
6. Los autovalores pueden ser $m = n - k$ con al menos k-degeneraciones $P\left(\lambda\right) = \det\left|A^i_j - \lambda\delta^i_j\right| = (\lambda - \lambda_1)^k(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m)$.

1. Si $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ son autovectores del operador lineal $\mathbb{A}$ con distintos autovalores λ_1 y λ_2, respectivamente. Muestre que $\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle$ $(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$ no es un autovector de $\mathbb{A}$.
2. Considere las siguientes representaciones matriciales de operadores
$$\langle \mathrm{e}^i \big| \mathbb{A} \,|\mathrm{e}_j\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \quad \langle \mathrm{e}^i \big| \mathbb{B} \,|\mathrm{e}_j\rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ y}$$
encuentre sus autovalores y autovectores
3. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Muestre que
    1. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$, los autovectores de $\mathbb{A}$ también lo son de $\mathbb{B}$.
    2. Si $\mathbb{U}\,|v_i\rangle = \mu_i\,|v_i\rangle$, entonces $|\mu_i| = 1$.