Un ejemplo: Representación Matricial de Operadores

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

26 de enero de 2021

Agenda Un ejemplo: Representación Matricial de Operadores

1. Los Operadores de Pauli
2. Bases y representaciones de operadores
3. Transformaciones de representaciones de operadores
4. Transforman operadores y vectores
5. Ejercicios

Expresión matricial para los operadores lineales de Pauli: $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, definidos como

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\sigma_z \left|+\right\rangle &=& \left|+\right\rangle , && \sigma_z \left|-\right\rangle &=& -\left|-\right\rangle \\
\sigma_x \left|+\right\rangle_x &=& \left|+\right\rangle_x , && \sigma_x \left|-\right\rangle_x &=& -\left|-\right\rangle_x , \\
\sigma_y \left|+\right\rangle_y &=& \left|+\right\rangle_y , && \sigma_y \left|-\right\rangle_y &=& -\left|-\right\rangle_y
\end{array}
$$

con la base canónica representada por: $\left|+\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|-\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Además, tenemos otros dos conjuntos de vectores base

$$
\left|+\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle\right], \quad \left|-\right\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle\right],
$$

$$
\left|+\right\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle + i\left|-\right\rangle\right], \quad \left|-\right\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle - i\left|-\right\rangle\right],
$$

y sus formas asociadas $\left\langle+\right| \leftrightarrows (1, 0) \quad \left\langle+\right| \leftrightarrows (0, 1)$

$$
{}_x\left\langle+\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle+\right| + \left\langle-\right|\right], \quad {}_x\left\langle-\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle+\right| - \left\langle-\right|\right],
$$

$$
{}_y\left\langle+\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle+\right| - i\left\langle-\right|\right], \quad {}_y\left\langle-\right| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left\langle+\right| + i\left\langle-\right|\right],
$$

- Es claro que las bases son ortonormales
$$\langle + \,|+\rangle = 1\,, \quad \langle + \,|-\rangle = \langle - \,|+\rangle = 0\,, \quad \langle - \,|-\rangle = 1\,;$$
$$_x\langle + \,|+\rangle_x = 1\,,\ _x\langle + \,|-\rangle_x = {}_x\langle - \,|+\rangle_x = 0\,,\ _x\langle - \,|-\rangle_x = 1\,,$$
$$_y\langle + \,|+\rangle_y = 1\,,\ _y\langle + \,|-\rangle_y = {}_y\langle - \,|+\rangle_y = 0\,,\ _y\langle - \,|-\rangle_y = 1,$$
- Los vectores $\{|+\rangle\,, |-\rangle\}$ en esas bases son:
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right]\,, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right]\,,$$
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right]\,, \quad |-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right]\,.$$
- La representación matricial para $\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)^i_j =$ será:
$$\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\, \sigma_z\, |+\rangle & \langle +|\, \sigma_z\, |-\rangle \\ \langle -|\, \sigma_z\, |+\rangle & \langle -|\, \sigma_z\, |-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La representación matricial de $(\sigma_x)^i_j$ en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ será:

- $\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\,\sigma_x\,|+\rangle & \langle +|\,\sigma_x\,|-\rangle \\ \langle -|\,\sigma_x\,|+\rangle & \langle -|\,\sigma_x\,|-\rangle \end{pmatrix}$, es decir
- $\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} [_x\langle +| +_x \langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] & [_x\langle +| +_x \langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] \\ [_x\langle +| -_x \langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] & [_x\langle +| -_x \langle -|]\,\sigma_x\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] \end{pmatrix}$,
- entonces
  $\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} [_x\langle +| +_x \langle -|]\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] & [_x\langle +| +_x \langle -|]\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] \\ [_x\langle +| -_x \langle -|]\,[|+\rangle_x - |-\rangle_x] & [_x\langle +| -_x \langle -|]\,[|+\rangle_x + |-\rangle_x] \end{pmatrix}$
- Finalmente, $\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- La representación matricial de $(\sigma_x)^i_j$ en la base $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ será:
  $\left(\sigma_x^{(+x)(-x)}\right)^i_j = \begin{pmatrix} {}_x\langle +|\,\sigma_x\,|+\rangle_x & {}_x\langle +|\,\sigma_x\,|-\rangle_x \\ {}_x\langle -|\,\sigma_x\,|+\rangle_x & {}_x\langle -|\,\sigma_x\,|-\rangle_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Note que la traza es independiente de la representación
  $\mathrm{Tr}\left(\sigma_x^{(+)(-)}\right)^i_j \equiv \mathrm{Tr}\left(\sigma_x^{(+x)(-x)}\right)^i_j = 0$; igual el determinante, además es autoadjunta o hermítica.

- Tenemos un único espacio vectorial, **V**, con dos bases discretas ortonormales $\{\left|+\right\rangle, \left|-\right\rangle\}$ y $\{\left|+\right\rangle_x, \left|-\right\rangle_x\}$ con dos representaciones matriciales para un mismo operador $\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)^i_j$ y $\left(\sigma_x^{(+x)(-x)}\right)^i_j$, respectivamente.
- En general las representaciones de un operador $\tilde{A}^i_j = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle$ y $A^i_j = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_m\right\rangle$, están relacionadas por:
$$\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right| \mathbb{A} \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \underbrace{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \middle| \mathrm{e}_k\right\rangle}_{S^i_k} \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_m\right\rangle \underbrace{\left\langle \mathrm{e}^m \middle| \tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k \, A^k_m \, \tilde{S}^m_j \, .$$
- Entonces, en nuestro caso, la matriz de transformación
$\tilde{S}^m_j = \left\langle \mathrm{e}^m \middle| \tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \begin{pmatrix} \langle +| +\rangle_x & \langle +| -\rangle_x \\ \langle -| +\rangle_x & \langle -| -\rangle_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y
$S^m_j = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \middle| \mathrm{e}_j\right\rangle = \begin{pmatrix} {}_x\langle +| +\rangle & {}_x\langle +| -\rangle \\ {}_x\langle -| +\rangle & {}_x\langle -| -\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,
- Con lo cual los operadores transformarán
$$\left(\sigma_z^{(+)(-)}\right)^l_m = S^l_i \left(\sigma_z^{(+x)(-x)}\right)^i_j \tilde{S}^j_m \, , \qquad \text{con } \tilde{S}^j_m = \left(S^j_m\right)^{-1}$$

Transforman operadores y vectores

- Como existen dos bases de vectores ortogonales $\{|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ y $\{|\mathrm{e}_j\rangle\}$, cualquier vector $|a\rangle$ se puede expresar en ambas bases como $|a\rangle = a^i\,|\mathrm{e}_i\rangle = \tilde{a}^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$
- En particular los vectores base se pueden expresar en términos de la otra base $|\mathrm{e}_i\rangle = C_i^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{e}^k\,|\mathrm{e}_i\rangle = C_i^j\,\langle \mathrm{e}^k\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ con lo cual $\delta_i^k = C_i^j \underbrace{\left\langle \mathrm{e}^k\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle}_{\tilde{S}_j^k} \Rightarrow C_i^j \equiv \underbrace{\langle \tilde{\mathrm{e}}^j\,|\mathrm{e}_i\rangle}_{S_i^j}$. Es decir $\delta_i^k = S_i^j\tilde{S}_j^k$
- Un vector cualquiera $|a\rangle = a^j\,|\mathrm{e}_j\rangle \equiv \tilde{a}^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$, entonces $|a\rangle = a^i\left(S_i^n\,|\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\right) \equiv \tilde{a}^j\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ Las componentes transforman como $S_i^j a^i = \tilde{a}^j$
- Entonces si $|a\rangle = 5\,|\mathrm{e}_1\rangle + 4\,|\mathrm{e}_2\rangle$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ por lo tanto

$$|a\rangle = 5\,|\mathrm{e}_1\rangle + 4\,|\mathrm{e}_2\rangle = \frac{9}{\sqrt{2}}\,|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle$$

- Encuentre la representación matricial $\left(\sigma_z^{(+x)(-x)}\right)^i_j$ y $\left(\sigma_z^{(+y)(-y)}\right)^i_j$. Es decir, la representación matricial σ_z en las bases $\{|\pm\rangle_x\}$ y $\{|\pm\rangle_y\}$, *respectivamente*
- Encuentre la representación matricial $(\sigma_y)^i_j$ en las bases $\{|\pm\rangle\}$ $\{|\pm\rangle_x\}$, y $\{|\pm\rangle_y\}$
- Encuentre la representación matricial $(\sigma_x)^i_j$ en las bases $\{|\pm\rangle\}$ $\{|\pm\rangle_x\}$, y $\{|\pm\rangle_y\}$
- Encuentre la expresión para el siguiente vector $|a\rangle = 5|+\rangle + 4|-\rangle$ en las bases $\{|\pm\rangle_x\}$, y $\{|\pm\rangle_y\}$, respectivamente