Matrices y Operadores:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

25 de enero de 2021

Agenda de Matrices y Operadores

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

Representación matricial de operadores

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2| \left(\mathbb{A} |v_1\rangle\right) \equiv A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}$,

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2 | (\mathbb{A} | v_1 \rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$,
- Sea $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales para **V** y **W**, respectivamente.
  Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\beta \right| \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^\alpha \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\beta \right. |\tilde{\mathrm{e}}_\alpha\rangle = A_i^\beta$ con $i = 1, 2, .., n$ y $\alpha, \beta = 1, 2, .., m$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2| (\mathbb{A} |v_1\rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}$,
- Sea $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales para **V** y **W**, respectivamente.
  Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\beta \right| \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^\alpha \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^\beta \, |\tilde{\mathrm{e}}_\alpha\right\rangle = A_i^\beta$ con $i = 1, 2, .., n$ y $\alpha, \beta = 1, 2, .., m$.
- Las cantidades A_j^β son la representación del operador $\mathbb{A}$ respecto a las bases $\{|\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ de **V** y **W** respectivamente.

- Definimos como el elemento de matriz del operador $\mathbb{A}$ al producto interno $\langle v_2| (\mathbb{A} |v_1\rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$,
- Sea $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle, \cdots, |\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales para **V** y **W**, respectivamente.
  Entonces $\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^{\beta} \right| \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^{\alpha} \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^{\beta} \right. |\tilde{\mathrm{e}}_{\alpha}\rangle = A_i^{\beta}$ con $i = 1, 2, .., n$ y $\alpha, \beta = 1, 2, .., m$.
- Las cantidades A_j^{β} son la representación del operador $\mathbb{A}$ respecto a las bases $\{|\mathrm{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_m\rangle\}$ de **V** y **W** respectivamente.
- Es importante señalar que cambiando el orden de los vectores dentro de la base cambia la representación matricial del operador. Esto significa que la organización de los número A_j^{β} dependerá del orden que le demos a los vectores en las bases $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$.

Y las matrices son...

definiremos una matriz A^{β}_{j} como un arreglo de números donde el superíndice, β, indica fila y el subíndice, j, columna:

$$A^{\beta}_{j} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ \vdots \\ A^n_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \end{pmatrix}.$$

- Los operadores se suman y su representación matricial también

$$\left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} + \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle + \left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle = A^i_j + B^i_j \, .$$

ojo, hemos supuesto un único espacio vectorial, $\mathbf{V} \equiv \mathbf{W}$ y, por lo tanto nos basta una base ortogonal $\{\left|\mathrm{e}_n\right\rangle\}$. Ahora sabemos por qué las matrices se suman como se suman

- Los operadores se suman y su representación matricial también

$$\left\langle e^i \right| \mathbb{A} + \mathbb{B} \left| e_j \right\rangle = \left\langle e^i \right| \mathbb{A} \left| e_j \right\rangle + \left\langle e^i \right| \mathbb{B} \left| e_j \right\rangle = A^i_j + B^i_j \, .$$

ojo, hemos supuesto un único espacio vectorial, $\mathbf{V} \equiv \mathbf{W}$ y, por lo tanto nos basta una base ortogonal $\{|e_n\rangle\}$. Ahora sabemos por qué las matrices se suman como se suman

- De igual modo, para la representación de composición de operadores tendremos:

$$\left\langle e^i \right| \mathbb{A}\mathbb{B} \left| e_j \right\rangle = \left\langle e^i \right| \mathbb{A} \; \mathbb{I} \; \mathbb{B} \left| e_j \right\rangle =$$

$$\left\langle e^i \right| \mathbb{A} \left(\left| e_k \right\rangle \left\langle e^k \right| \right) \mathbb{B} \left| e_j \right\rangle = \left\langle e^i \right| \mathbb{A} \left| e_k \right\rangle \left\langle e^k \right| \mathbb{B} \left| e_j \right\rangle = A^i_k B^k_j \, ,$$

que se traduce en la tradicional multiplicación de matrices:

- **Representación diagonal:** Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ y, adicionalmente $\mathbb{A} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle$, entonces la representación será diagonal $\left\langle \mathrm{e}^j \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = A_i^j = \lambda_i \left\langle \mathrm{e}^j \right. \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \delta_i^j$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- **Representación diagonal:** Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y, adicionalmente $\mathbb{A}\left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \left|\mathrm{e}_i\right\rangle$, entonces la representación será diagonal $\left\langle \mathrm{e}^j \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = A^j_i = \lambda_i \left\langle \mathrm{e}^j \right. \left|\mathrm{e}_i\right\rangle = \lambda_i \delta^j_i$.
- **Representación de operadores adjuntos:** La representación de un operador adjunto, será

$$\left(A^\dagger\right)^i_j = \left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A}^\dagger \left|\mathrm{e}_j\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^j \right| \mathbb{A} \left|\mathrm{e}_i\right\rangle^* = \left(A^j_i\right)^* ,$$

la matriz que representa el operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$, es la traspuesta conjugada de la matriz de la del operador $\mathbb{A}$.

- **Representación diagonal:** Dado $\mathbb{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y, adicionalmente $\mathbb{A}|\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i |\mathrm{e}_i\rangle$, entonces la representación será diagonal $\langle \mathrm{e}^j | \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = A_i^j = \lambda_i \langle \mathrm{e}^j |\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i \delta_i^j$.
- **Representación de operadores adjuntos:**
  La representación de un operador adjunto, será

$$\left(A^\dagger\right)_j^i = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A}^\dagger |\mathrm{e}_j\rangle = \langle \mathrm{e}^j | \mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle^* = \left(A_i^j\right)^* ,$$

  la matriz que representa el operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$, es la traspuesta conjugada de la matriz de la del operador $\mathbb{A}$.
- **Representación de operadores hermíticos:**
  $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A} \ \Rightarrow \ \left(A^\dagger\right)_j^i = A_j^i$. Las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

- Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{V}$ con dos base discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \langle\tilde{\mathrm{e}}^i| \mathbb{A} |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ y $A^i_j = \langle\mathrm{e}^k| \mathbb{A} |\mathrm{e}_m\rangle$, están relacionadas por:
$$\langle\tilde{\mathrm{e}}^i| \mathbb{A} |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \langle\tilde{\mathrm{e}}^i| \left(|\mathrm{e}_k\rangle\langle\mathrm{e}^k|\right) \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_m\rangle\langle\mathrm{e}^m|\right) |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle =$$
$$\underbrace{\langle\tilde{\mathrm{e}}^i\, |\mathrm{e}_k\rangle}_{S^i_k} \langle\mathrm{e}^k| \mathbb{A} |\mathrm{e}_m\rangle \underbrace{\langle\mathrm{e}^m\, |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k\, A^k_m\, \tilde{S}^m_j\,,$$

- Dado $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{V}$ con dos base discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ y $A^i_j = \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} |\mathrm{e}_m\rangle$, están relacionadas por:
$$\langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \left(|\mathrm{e}_k\rangle \langle \mathrm{e}^k|\right) \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_m\rangle \langle \mathrm{e}^m|\right) |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle =$$
$$\underbrace{\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \, |\mathrm{e}_k\rangle}_{S^i_k} \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} |\mathrm{e}_m\rangle \underbrace{\langle \mathrm{e}^m \, |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; \tilde{S}^m_j \,,$$
- Siempre podremos expresar unos vectores base en términos de los otros: $|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{S}^m_j |\mathrm{e}_m\rangle = \tilde{S}^m_j \left(S^n_m |\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\right)$
$$\Rightarrow \langle \tilde{\mathrm{e}}^n \, |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^n_j = \tilde{S}^m_j S^n_m \equiv S^n_m \tilde{S}^m_j \quad \Rightarrow \tilde{S}^i_j = \left(S^i_j\right)^{-1} \,,$$

- Dado $\mathbb{A}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}$ con dos base discretas ortonormales $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathrm{e}}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones de $\mathbb{A}$: $\tilde{A}^i_j = \langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\,\mathbb{A}\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle$ y $A^i_j = \langle\mathrm{e}^k|\,\mathbb{A}\,|\mathrm{e}_m\rangle$, están relacionadas por:
$$\langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\,\mathbb{A}\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \langle\tilde{\mathrm{e}}^i|\left(|\mathrm{e}_k\rangle\langle\mathrm{e}^k|\right)\mathbb{A}\left(|\mathrm{e}_m\rangle\langle\mathrm{e}^m|\right)|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle =$$
$$\underbrace{\langle\tilde{\mathrm{e}}^i\,|\mathrm{e}_k\rangle}_{S^i_k}\langle\mathrm{e}^k|\,\mathbb{A}\,|\mathrm{e}_m\rangle\underbrace{\langle\mathrm{e}^m\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k\;A^k_m\;\tilde{S}^m_j\,,$$
- Siempre podremos expresar unos vectores base en términos de los otros: $|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{S}^m_j\,|\mathrm{e}_m\rangle = \tilde{S}^m_j\left(S^n_m\,|\tilde{\mathrm{e}}_n\rangle\right)$
$$\Rightarrow \langle\tilde{\mathrm{e}}^n\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \delta^n_j = \tilde{S}^m_j S^n_m \equiv S^n_m\tilde{S}^m_j \quad \Rightarrow \tilde{S}^i_j = \left(S^i_j\right)^{-1}\,,$$
- Entonces $\tilde{A}^i_j = S^i_k\;A^k_m\;\left(S^m_j\right)^{-1}$ con lo cual $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^{-1} \quad \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{S}$. Dos representaciones A^i_j y $\tilde{A}^k_m$, de un mismo operador $\mathbb{A}$, son similares.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A^k_k$.

- Entonces $A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^i_i = 15$.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A_k^k$.

- Entonces $A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A_i^i = 15$.
- La traza es lineal: $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A}+\lambda\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle + \lambda \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A^k_k$.

- Entonces $A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^i_i = 15$.
- La traza es lineal: $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A}+\lambda\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle + \lambda \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$.
- La traza conmuta, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$:
  $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A}\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \underbrace{\left| \mathrm{e}_m \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle =$

  $\left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \underbrace{\left| \mathrm{e}_m \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$.

Traza de operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A^k_k$.

- Entonces $A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) = A^i_i = 15$.
- La traza es lineal: $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} + \lambda\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle + \lambda \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\right) + \lambda \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\right)$.
- La traza conmuta, $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$:
  $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A}\mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \underbrace{\left| \mathrm{e}_m \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{B} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle =$

  $\left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{B} \underbrace{\left| \mathrm{e}_m \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)$.
- La traza de una matriz no depende de la base $A^k_k = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle =$
  $\left\langle \mathrm{e}^k \underbrace{\left| \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right|}_{\mathbb{I}} \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right| \mathbb{A} \underbrace{\left| \mathrm{e}_k \right\rangle \left\langle \mathrm{e}^k \right|}_{\mathbb{I}} \left. \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right| \mathbb{A} \left| \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle = \tilde{A}^m_m$.

Determinante de un operador

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i A^2_j A^3_k \cdots \equiv \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{vmatrix}, \text{ con } \varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} =$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ permutación cíclica de } 1,2,3\cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ permutación anticíclica de } 2,1,3\cdots n \end{array} \right.$$

Entonces se puede demostrar que

- $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i A^2_j A^3_k \cdots \equiv \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{vmatrix}, \text{ con } \varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ permutación cíclica de } 1,2,3\cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ permutación anticíclica de } 2,1,3\cdots n \end{cases}$$

Entonces se puede demostrar que

- $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.
- Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

El determinante de un operador, $\mathbb{A}$, se define como

$$\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i A^2_j A^3_k \cdots \equiv \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{vmatrix}, \text{ con } \varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} =$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ permutación cíclica de } 1,2,3\cdots n \\ -1, & \text{si los índices } i,j,k\cdots \text{ permutación anticíclica de } 2,1,3\cdots n \end{array} \right.$$

Entonces se puede demostrar que

- $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es el operador traspuesto de $\mathbb{A}$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.
- Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula
- Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.
- El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{B}|$.

Continuamos con propiedades del determinante

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.
- El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{B}|$.
- El determinante del operador inverso es el inverso del determinante: $\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}$.
  Esta afirmación es fácilmente demostrable
  $\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{I}| = \det|\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}| =$
  $\det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{A}^{-1}| = 1 \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|}$.

- Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.
- El determinante de la composición de operadores es el producto de los determinantes $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{B}|$.
- El determinante del operador inverso es el inverso del determinante: $\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}$.
  Esta afirmación es fácilmente demostrable
  $\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{I}| = \det|\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}| =$
  $\det|\mathbb{A}|\det|\mathbb{A}^{-1}| = 1 \;\Rightarrow\; \det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|}$.
- El determinante no depende de la representación matricial del operador $\det|\mathbb{A}| \equiv \det|\langle \mathrm{e}^i|\mathbb{A}|\mathrm{e}_j\rangle| = \det|\langle \tilde{\mathrm{e}}^i|\mathbb{A}|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle| \equiv \det|\tilde{\mathbb{A}}|$.
  $\det|\tilde{A}^i_j| = \det|S^i_k\ A^k_m\ \left(S^m_j\right)^{-1}| \equiv \det|S^i_k|\det|A^k_m|\ \det|\left(S^m_j\right)^{-1}| =$
  $\det|S^i_k|\det|A^k_m|\frac{1}{\det|S^m_j|} = \det|A^k_m|$.

Recapitulando 1/2

1. Para $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tendremos $\langle v_2 | \left(\mathbb{A} \, | v_1 \rangle \right) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$. Entonces $\left\langle \mathrm{e}^i \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_j \right\rangle = A^i_j$ con $i\, j = 1, 2, .., n$.

Recapitulando 1/2

1. Para $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tendremos $\langle v_2 | (\mathbb{A} | v_1 \rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$. Entonces $\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_j$ con $i\, j = 1, 2, .., n$.
2. Algebra de operadores genera álgebra de matrices
    1. Los operadores se suman y su representación matricial también $\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} + \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle + \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_j + B^i_j$
    2. La composición de operadores tendremos implica la multiplicación de matrices $\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} \left(| \mathrm{e}_k \rangle \langle \mathrm{e}^k | \right) \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_k \rangle \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_k B^k_j$,

Recapitulando 1/2

1. Para $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tendremos $\langle v_2 | \left(\mathbb{A} \, | v_1 \rangle \right) \equiv A_{(|v_1\rangle, |v_2\rangle)}$. Entonces $\langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{A} \, | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_j$ con $i \; j = 1, 2, .., n$.
2. Algebra de operadores genera álgebra de matrices
    1. Los operadores se suman y su representación matricial también $\langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{A} + \mathbb{B} \, | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{A} \, | \mathrm{e}_j \rangle + \langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{B} \, | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_j + B^i_j$
    2. La composición de operadores tendremos implica la multiplicación de matrices $\langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{A} \left(| \mathrm{e}_k \rangle \langle \mathrm{e}^k | \right) \mathbb{B} \, | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{A} \, | \mathrm{e}_k \rangle \langle \mathrm{e}^k | \, \mathbb{B} \, | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_k B^k_j$,
3. Representaciones matriciales de Operadores
    1. Representación Diagonal: Si $\mathbb{A} \, | \mathrm{e}_i \rangle = \lambda_i \, | \mathrm{e}_i \rangle$, entonces $\langle \mathrm{e}^j | \, \mathbb{A} \, | \mathrm{e}_i \rangle = A^j_i = \lambda_i \langle \mathrm{e}^j \, | \mathrm{e}_i \rangle = \lambda_i \delta^j_i$.
    2. Operadores adjuntos: $\left(A^\dagger \right)^i_j = \langle \mathrm{e}^i | \, \mathbb{A}^\dagger \, | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^j | \, \mathbb{A} \, | \mathrm{e}_i \rangle^* = \left(A^j_i \right)^*$.
    3. Operadores hermíticos: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A} \; \Rightarrow \; \left(A^\dagger \right)^i_j = A^i_j$.

Recapitulando 1/2

1. Para $\mathbb{A} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tendremos $\langle v_2 | (\mathbb{A} | v_1\rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}$. Entonces $\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_j$ con $i\, j = 1, 2, .., n$.
2. Algebra de operadores genera álgebra de matrices
   1. Los operadores se suman y su representación matricial también $\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} + \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle + \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_j + B^i_j$
   2. La composición de operadores tendremos implica la multiplicación de matrices $\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_k\rangle \langle \mathrm{e}^k | \right) \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_k \rangle \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{B} | \mathrm{e}_j \rangle = A^i_k B^k_j$,
3. Representaciones matriciales de Operadores
   1. Representación Diagonal: Si $\mathbb{A} |\mathrm{e}_i\rangle = \lambda_i |\mathrm{e}_i\rangle$, entonces $\langle \mathrm{e}^j | \mathbb{A} | \mathrm{e}_i \rangle = A^j_i = \lambda_i \langle \mathrm{e}^j \, | \mathrm{e}_i \rangle = \lambda_i \delta^j_i$.
   2. Operadores adjuntos: $\left(A^\dagger\right)^i_j = \langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A}^\dagger | \mathrm{e}_j \rangle = \langle \mathrm{e}^j | \mathbb{A} | \mathrm{e}_i \rangle^* = \left(A^j_i\right)^*$.
   3. Operadores hermíticos: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A} \;\Rightarrow\; \left(A^\dagger\right)^i_j = A^i_j$.
4. Si tenemos $\tilde{A}^i_j = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle$ y $A^i_j = \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_m \rangle$, están relacionadas por: $\langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle = \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \left(|\mathrm{e}_k\rangle \langle \mathrm{e}^k | \right) \mathbb{A} \left(|\mathrm{e}_m\rangle \langle \mathrm{e}^m | \right) | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle =$ $\underbrace{\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \, | \mathrm{e}_k \rangle}_{S^i_k} \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_m \rangle \underbrace{\langle \mathrm{e}^m \, | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle}_{\tilde{S}^m_j} \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = S^i_k \; A^k_m \; \tilde{S}^m_j$,

Recapitulando 2/2

1. Traza, $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = A^k_k$. Suma de la diagonal.
   1. La traza es lineal: $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda \mathrm{Tr}(\mathbb{B})$
   2. La traza conmuta, $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$
   3. La traza de una matriz no depende de la base $A^k_k = \left\langle \mathrm{e}^k \right| \mathbb{A} \left| \mathrm{e}_k \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathrm{e}}^m \right| \mathbb{A} \left| \tilde{\mathrm{e}}_m \right\rangle = \tilde{A}^m_m$

1. Traza, $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) = \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_k \rangle = A^k_k$. Suma de la diagonal.
   1. La traza es lineal: $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda \mathrm{Tr}(\mathbb{B})$
   2. La traza conmuta, $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$
   3. La traza de una matriz no depende de la base $A^k_k = \langle \mathrm{e}^k | \mathbb{A} | \mathrm{e}_k \rangle = \langle \tilde{\mathrm{e}}^m | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_m \rangle = \tilde{A}^m_m$
2. $\det|\mathbb{A}| = \varepsilon^{ij\cdots} A^1_i A^2_j \cdots \equiv \begin{vmatrix} A^1_1 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & & A^2_n \\ \vdots & \ddots & \\ A^n_1 & & A^n_n \end{vmatrix}, \varepsilon^{ij\cdots} = \varepsilon_{ij\cdots} = \begin{cases} 0, \text{ dos índices iguales} \\ 1, \text{ permutación cíclica de } 1, 2\cdots n \\ -1, \text{ permutación anticíclica de } 2, 1\cdots n \end{cases}$
   1. $\det|\mathbb{A}| = \det|\mathbb{A}^T|$, donde $\mathbb{A}^T$ es
   2. $\det|\mathbb{A}\mathbb{B}| = \det|\mathbb{A}| \det|\mathbb{B}|$.
   3. $\det|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det|\mathbb{A}|} = \det|\mathbb{A}|^{-1}$.
   4. El determinante no depende de la representación matricial del operador $\det|\mathbb{A}| \equiv \det|\langle \mathrm{e}^i | \mathbb{A} | \mathrm{e}_j \rangle| = \det|\langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathbb{A} | \tilde{\mathrm{e}}_j \rangle| \equiv \det|\tilde{\mathbb{A}}|$.

Ejercicio