

Espacios Pseudo-euclidianos

Luis A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



11 de diciembre de 2020

- 1 Espacios Pseudo-euclidianos
- 2 Espacios Minkowskianos
- 3 Un toque de Relatividad Especial
 - El Cono de Luz
 - Distancias y transformaciones de coordenadas
 - Transformaciones de coordenadas
 - Transformaciones de Lorentz
 - Transformaciones y observadores

- La definición de **producto interno**, $\langle x | x \rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x | x \rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$

- La definición de **producto interno**, $\langle x | x \rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x | x \rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$
- La definición de **norma** $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv ||v_i\rangle||$, no es necesariamente positiva;

- La definición de **producto interno**, $\langle x | x \rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x | x \rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$
- La definición de **norma** $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv ||v_i\rangle||$, no es necesariamente positiva;
- La definición de **distancia**, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv ||x\rangle - |y\rangle||$, tampoco será necesariamente positiva.

- La definición de **producto interno**, $\langle x | x \rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x | x \rangle = 0$ no necesariamente implica $|x\rangle \equiv |0\rangle$
- La definición de **norma** $\mathcal{N}(|v_i\rangle) \equiv ||v_i\rangle||$, no es necesariamente positiva;
- La definición de **distancia**, $d(|x\rangle, |y\rangle) \equiv ||x\rangle - |y\rangle||$, tampoco será necesariamente positiva.
- Resumiendo:

$$\langle x | x \rangle = \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(|x\rangle, |y\rangle) = \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\mathbf{g}[|x_i\rangle, |x_j\rangle] = \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right.$$

- Consideremos una base ortonormal $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Los vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ son la base canónica de \mathbb{R}^3 .

- Consideremos una base ortonormal $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Los vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ son la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- La base del espacio dual de \mathbb{M}^4 será $\{\langle e^0|, \langle e^1|, \langle e^2|, \langle e^3|\}$.

Construida a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \equiv \eta_{\beta\alpha} \langle e^\beta| \otimes \langle e^\alpha| \text{ y } \eta^{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha} |e_\beta\rangle \otimes |e_\alpha\rangle ,$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \text{ y } \eta_{00} = \eta^{00} = 1, \eta_{11} = \eta^{11} = -1, \eta_{22} = \eta^{22} = -1, \\ \eta_{33} = \eta^{33} = -1 \text{ (} \eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta), \eta \text{ con signo } -2.$$

- Consideremos una base ortonormal $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Los vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ son la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- La base del espacio dual de \mathbb{M}^4 será $\{\langle e^0|, \langle e^1|, \langle e^2|, \langle e^3|\}$.
Construida a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \equiv \eta_{\beta\alpha} \langle e^\beta| \otimes \langle e^\alpha| \text{ y } \eta^{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha} |e_\beta\rangle \otimes |e_\alpha\rangle ,$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \text{ y } \eta_{00} = \eta^{00} = 1, \eta_{11} = \eta^{11} = -1, \eta_{22} = \eta^{22} = -1, \eta_{33} = \eta^{33} = -1 \text{ (}\eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta\text{), } \eta \text{ con signo } -2.$$

- Las componentes covariantes y contravariantes serán

$$\begin{aligned} \left(\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \right) |a\rangle &= a^\sigma \left(\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \right) |e_\sigma\rangle = \\ a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \langle e^\beta| e_\sigma\rangle \langle e^\alpha| &= a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \delta_\sigma^\beta \langle e^\alpha| = a^\sigma \eta_{\alpha\sigma} \langle e^\alpha| \equiv a_\alpha \langle e^\alpha| \end{aligned}$$

- Consideremos una base ortonormal $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$. Los vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ son la base canónica de \mathbb{R}^3 .
- La base del espacio dual de \mathbb{M}^4 será $\{\langle e^0|, \langle e^1|, \langle e^2|, \langle e^3|\}$.
Construida a través de una métrica

$$\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \equiv \eta_{\beta\alpha} \langle e^\beta| \otimes \langle e^\alpha| \text{ y } \eta^{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \otimes |e_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha} |e_\beta\rangle \otimes |e_\alpha\rangle ,$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \text{ y } \eta_{00} = \eta^{00} = 1, \eta_{11} = \eta^{11} = -1, \eta_{22} = \eta^{22} = -1, \eta_{33} = \eta^{33} = -1 \text{ (} \eta_{\alpha\beta} = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta), \eta \text{ con signo } -2.$$

- Las componentes covariantes y contravariantes serán

$$\begin{aligned} \left(\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \right) |a\rangle &= a^\sigma \left(\eta_{\alpha\beta} \langle e^\alpha| \otimes \langle e^\beta| \right) |e_\sigma\rangle = \\ a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \langle e^\beta| e_\sigma\rangle \langle e^\alpha| &= a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \delta_\sigma^\beta \langle e^\alpha| = a^\sigma \eta_{\alpha\sigma} \langle e^\alpha| \equiv a_\alpha \langle e^\alpha| \end{aligned}$$

- Entonces

$$a^\sigma \eta_{\sigma\alpha} = a_\alpha \quad \Rightarrow \quad a^0 = a_0, \quad a^1 = -a_1, \quad a^2 = -a_2, \quad a^3 = -a_3.$$

- Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$

- Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$
- el producto interno $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = x^{\alpha} y_{\alpha} = y^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x_{\alpha} y_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$

- Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$
- el producto interno $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = x^{\alpha} y_{\alpha} = y^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x_{\alpha} y_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$
- la norma de un vector, $\| |x\rangle \|^2 = \langle x | x \rangle = x_{\alpha} x^{\beta} \langle e^{\alpha} | e_{\beta} \rangle = x_{\alpha} x^{\alpha} = x_{\alpha} x_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$

- Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores $\eta^{\alpha\beta} P_{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}$
- el producto interno $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = x^{\alpha} y_{\alpha} = y^{\alpha} x_{\alpha} = x^{\alpha} y^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x_{\alpha} y_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$
- la norma de un vector, $\| |x\rangle \|^2 = \langle x | x \rangle = x_{\alpha} x^{\beta} \langle e^{\alpha} | e_{\beta} \rangle = x_{\alpha} x^{\alpha} = x_{\alpha} x_{\beta} \eta^{\alpha\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = x^0 x^0 - x^1 x^1 - x^2 x^2 - x^3 x^3$
- Para una base genérica, $\{ |u_{\beta}\rangle \}$ (no necesariamente ortogonal) de un espacio vectorial con producto interno. El desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$(ds)^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = (d\tilde{x}_{\alpha} \langle \tilde{u}^{\alpha} |) (d\tilde{x}^{\beta} | \tilde{u}_{\beta} \rangle) =$$

$$d\tilde{x}_{\beta} d\tilde{x}^{\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta} d\tilde{x}^{\alpha} d\tilde{x}^{\beta} = dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más. Que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números:

$(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y que, además, hay que suponer:

- 1 *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más. Que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números:

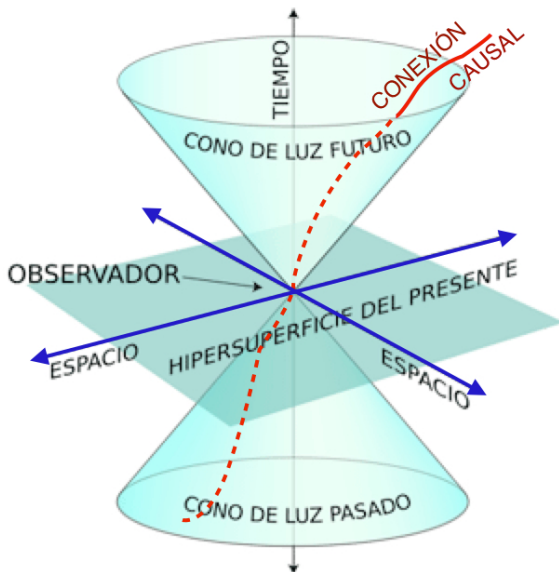
$(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y que, además, hay que suponer:

- 1 *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
- 2 *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío:* La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más. Que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números:

$(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ y que, además, hay que suponer:

- 1 *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
- 2 *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío:* La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.
- 3 Estas dos suposiciones se concretan en una simple propuesta matemática: **el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base.**



Las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a partir de la norma y la norma a partir del producto interno:

$$\| |y - x\rangle \|^2 \equiv \langle y - x | y - x \rangle \begin{cases} < 0 & \text{tipo espacio: desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{tipo luz: posible conexión causal lumínica.} \\ > 0 & \text{tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$

Construyamos ahora el tipo de transformación de coordenadas

$x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\alpha) \Leftrightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\alpha)$, que mantiene estos dos supuestos:

- El producto interno de dos vectores es independiente de la base que expande el espacio vectorial

$$\langle x | y \rangle = (x_\alpha \langle e^\alpha |) (y^\beta | e_\beta \rangle) \equiv (\tilde{x}_\sigma \langle \tilde{e}^\sigma |) (\tilde{y}^\alpha | \tilde{e}_\alpha \rangle) \Leftrightarrow x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta},$$

Las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a partir de la norma y la norma a partir del producto interno:

$$\langle y - x | y - x \rangle \begin{cases} < 0 & \text{tipo espacio: desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{tipo luz: posible conexión causal lumínica.} \\ > 0 & \text{tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$

Construyamos ahora el tipo de transformación de coordenadas

$x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\alpha) \Leftrightarrow \tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\alpha)$, que mantiene estos dos supuestos:

- El producto interno de dos vectores es independiente de la base que expande el espacio vectorial

$$\langle x | y \rangle = (x_\alpha \langle e^\alpha |) (y^\beta | e_\beta \rangle) \equiv (\tilde{x}_\sigma \langle \tilde{e}^\sigma |) (\tilde{y}^\alpha | \tilde{e}_\alpha \rangle) \Leftrightarrow x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta},$$

- Las componentes del tensor métricos son invariantes bajo transformaciones de coordenadas

$$\mathbf{g}[|e_\mu\rangle, |e_\nu\rangle] \equiv \tilde{\mathbf{g}}[|\tilde{e}_\mu\rangle, |\tilde{e}_\nu\rangle] \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta}.$$

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos
$$x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$$

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.
- Derivando respecto a x^γ tendremos que:
$$0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right).$$

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.
- Derivando respecto a x^γ tendremos que:

$$0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right).$$
- al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β intercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo ceros. $0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right).$

- Si el producto interno se preserva bajo transformaciones tendremos $x^\alpha y_\alpha \equiv \tilde{x}^\beta \tilde{y}_\beta \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \tilde{x}^\alpha \tilde{y}^\beta \tilde{\eta}_{\alpha\beta} \Rightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} y^\beta \tilde{\eta}_{\nu\mu}$
- Como la métrica es invariante bajo esta transformación de coordenadas tenemos $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \tilde{\eta}_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu}$.
- Derivando respecto a x^γ tendremos que:

$$0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right).$$
- al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β intercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo ceros. $0 = \eta_{\nu\mu} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right).$
- El último término anula el segundo y el penúltimo el cuarto, entonces $0 = 2\eta_{\nu\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta} \Rightarrow 0 = \frac{\partial^2 \tilde{x}^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \Rightarrow \tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + a^\nu$.

- Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + a^\nu$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré

- Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu + a^\nu$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré
- Si $a^\nu = 0 \Rightarrow \tilde{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_0 x^0 + \Lambda^\alpha_1 x^1 + \Lambda^\alpha_2 x^2 + \Lambda^\alpha_3 x^3$, donde $\Lambda^0_0 = 1$, $\Lambda^i_0 = \Lambda^0_j = 0$, y $\Lambda^i_j = R^i_j$. con: $i, j = 1, 2, 3$, y donde R^i_j es una matriz de rotación.

- Estas transformaciones lineales $\tilde{x}^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu + a^\nu$, son las transformaciones de inhomogeneas de Lorentz o de Poincaré
- Si $a^\nu = 0 \Rightarrow \tilde{x}^\alpha = \Lambda_0^\alpha x^0 + \Lambda_1^\alpha x^1 + \Lambda_2^\alpha x^2 + \Lambda_3^\alpha x^3$, donde $\Lambda_0^0 = 1$, $\Lambda_0^i = \Lambda_i^0 = 0$, y $\Lambda_j^i = R_j^i$. con: $i, j = 1, 2, 3$, y donde R_j^i es una matriz de rotación.
- Es inmediato demostrar que este tipo de transformaciones deja invariante el intervalo. Primero, notemos que:
$$\tilde{\eta}^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta} \Rightarrow \eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\gamma} = \delta_\gamma^\mu = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta} \eta_{\nu\gamma} \Rightarrow \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\mu$$

Como $d\tilde{x}^\mu = \Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha$, entonces:
$$d\tilde{s}^2 = \tilde{\eta}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu dx^\alpha \Lambda_\beta^\nu dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = ds^2.$$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $dx^i = 0$:

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{t} = \Lambda^0_0 dt \\ d\tilde{x}^i = \Lambda^i_\alpha dx^\alpha = \Lambda^i_0 dt \end{cases} \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $dx^i = 0$:

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{t} = \Lambda^0_0 dt \\ d\tilde{x}^i = \Lambda^i_\alpha dx^\alpha = \Lambda^i_0 dt \end{cases} \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:

$$\mathbf{v} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} \Rightarrow v^i = \frac{d\tilde{x}^i}{d\tilde{t}} \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i \Lambda^0_0.$$

- Con

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \Rightarrow 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2,$$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $dx^i = 0$:

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{t} = \Lambda^0_0 dt \\ d\tilde{x}^i = \Lambda^i_\alpha dx^\alpha = \Lambda^i_0 dt \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:

$$\mathbf{v} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} \Rightarrow v^i = \frac{d\tilde{x}^i}{d\tilde{t}} \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i \Lambda^0_0.$$

- Con

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \Rightarrow 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2,$$

- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma$, $\Lambda^i_0 = \gamma v^i$, con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2]}} ,$$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $dx^i = 0$:

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{t} = \Lambda^0_0 dt \\ d\tilde{x}^i = \Lambda^i_\alpha dx^\alpha = \Lambda^i_0 dt \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:

$$\mathbf{v} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} \Rightarrow v^i = \frac{d\tilde{x}^i}{d\tilde{t}} \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i \Lambda^0_0.$$

- Con

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \Rightarrow 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2,$$

- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma$, $\Lambda^i_0 = \gamma v^i$, con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2]}} ,$$

- Finalmente $\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^k v_k}.$

- La separación temporal $ds^2 = dt^2 - (dx^i)^2 = (\Delta t)^2 \Rightarrow dt = \Delta t,$

- El observador que registra la partícula en reposo resulta que $dx^i = 0$:

$$d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \begin{cases} d\tilde{t} = \Lambda^0_0 dt \\ d\tilde{x}^i = \Lambda^i_\alpha dx^\alpha = \Lambda^i_0 dt \quad \text{con } i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

- Las ecuaciones anteriores nos imponen:

$$\mathbf{v} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} \Rightarrow v^i = \frac{d\tilde{x}^i}{d\tilde{t}} \Rightarrow \Lambda^i_0 = v^i \Lambda^0_0.$$

- Con

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta_{\mu\nu} \Rightarrow 1 = \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2,$$

- Donde $\Lambda^0_0 = \gamma$, $\Lambda^i_0 = \gamma v^i$, con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v})^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2]}},$$

- Finalmente $\Lambda^i_j = \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{(\mathbf{v})^2} \equiv \delta^i_j + v^i v_j \frac{\gamma-1}{v^k v_k}.$

- La separación temporal $ds^2 = dt^2 - (dx^i)^2 = (\Delta t)^2 \Rightarrow dt = \Delta t,$

- Un segundo observador tendrá el mismo elemento de línea:

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - (d\tilde{x}^i)^2 = (1 - \mathbf{v}^2) d\tilde{t} \Rightarrow d\tilde{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}},$$