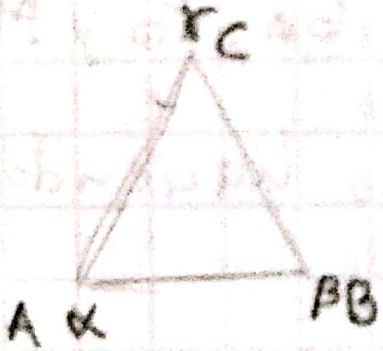
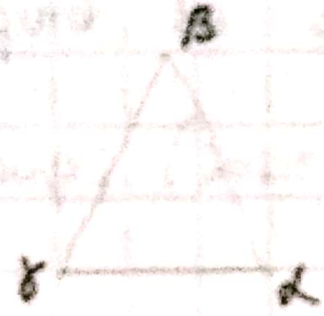
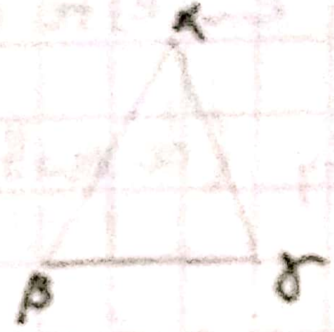
Tabla de multiplicación

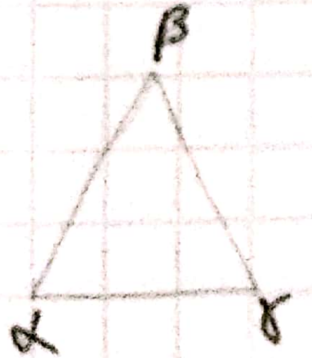


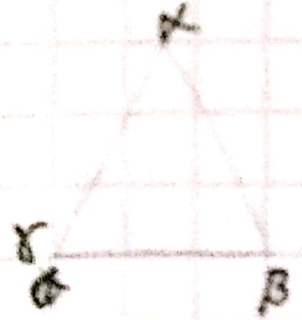


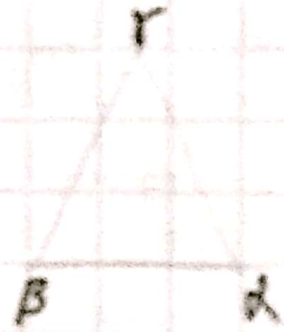


$r_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$ $r_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{Bmatrix}$ $r_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$

Δ	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
r_3	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
s_2	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3
s_3	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1







$s_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$ $s_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$ $s_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$

Observando la tabla obtenemos informacion importante:

- r_1 es el elemento neutro
- Cada elemento tiene su inverso : $\begin{cases} r_1^{-1} = r_1 & r_2^{-1} = r_3 & r_3^{-1} = r_2 \\ S_1^{-1} = S_1 & S_2^{-1} = S_2 & S_3^{-1} = S_3 \end{cases}$
- La ~~suma~~ operación aplicada a dos elementos nos da como resultado un elemento del mismo conjunto : $r_2 \Delta r_2 = r_3$
- La operacion es asociativa: $(r_1 \Delta r_2) \Delta r_3 = r_1 \Delta (r_2 \Delta r_3) = r_1$

Estas propiedades nos permiten afirmar que el conjunto de reflexiones y rotaciones del triangulo tiene <u>estructura</u> de grupo

$G_\Delta = \{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_i\}, \{X_k\}\}$ El orden del grupo es <u>6</u> (numero de elemen.)

El orden de los subgrupos posibles de G_Δ debe ser divisor del orden del grupo original, en este caso 6 es divisible entre 2 y 3 por lo que tenemos:

$S = \{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_i\}\}$

Orden: 3

$G_k = \{I, \{X_k\}\}$

Orden: 2

Para que sea un grupo cíclico debe cumplirque un elemento del grupo sea generador y cumpla $g^n = I$ donde n es el orden del grupo

Gracias a los datos de la tabla de multiplicacion podemos ver que la condicion necesaria del grupo ciclico se cumple

$\varphi(2)=1$ $\varphi(3)=2$ entonces S tiene 2 generadores, G_k tiene 1

$S=\{I, \{R_i\}, \{\bar{R}_j\}\}$, $n=3$, $g^n=I \Rightarrow I=g^3 \Rightarrow \{R_i\}^3=I=R_i \Delta R_i \Delta R_i=I$

$\{\bar{R}_j\}=I=\bar{R}_j \Delta \bar{R}_j \Delta \bar{R}_j=I$

$G_k=\{I,\{X_k\}\}$, $n=2$, $g^n=I \Rightarrow I=g^2=\{X_k\}^2=I$

Por lo tanto S es un subgrupo ciclico de orden 3 y G_k es un subgrupo ciclico de orden 2

d) Considerando las matrices A, B, C, D, E mostradas en el ejercicio y la matriz identidad I, el conjunto $M = \{I, A, B, C, D, E\}$ forma un grupo? con respecto a la multiplicacion matricial, tenemos que cumple

$\cancel{\{\forall\, m_j m_i = m_3 \text{ donde } m_j, m_i, m_3 \in M\}}$

→ $m_i m_j = m_k$ donde m_i, m_j y $m_k \in M$ Cerrado bajo operacion

→ $m_i I = I m_i = m_i$ I es el elemento neutro

→ $m_i (m_j m_k) = (m_i m_j) m_k$ La multiplicación es asociativa, pero no conmutativa

Para que sea un grupo, hace falta encontrar los ~~elementos~~ inversos pero no todas las matrices son invertibles, por lo que tenemos que comprobar que los elementos de M son invertibles, para esto hallamos los determinantes:

$\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$, $\det(C) = -1$, $\det(D) = -1$, $\det(E) = -1$, $\det(I) = 1$

Como todos los elementos de M tienen determinante diferente de cero, entonces estos matrices son invertibles, por lo que existe m_i^{-1} tal que $m_i^{-1} m_i = I$.

Con todos estos requisitos cumplidos, comprobamos que M es un grupo.

e) Es el grupo G_Δ isomorfo al Grupo de permutaciones de tres objetos, $P_\odot$? Es el grupo M isomorfo a G_Δ?

Para que dos grupos sean isomorfos sus tablas de multiplicacion deben tener estructuras iguales, en este caso el Grupo G_Δ, $P_\odot$ y M tienen todos una tabla de Caley (de multiplicación) igual, haciendolos isomorfos entre si.

Tabla de multiplicación

Δ	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
r_3	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
s_2	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3
s_3	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1

$\bullet$	P_0	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
P_0	P_0	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3
P_4	P_4	P_5	P_0	P_2	P_3	P_1
P_5	P_5	P_0	P_4	P_3	P_1	P_2
P_1	P_1	P_3	P_2	P_0	P_5	P_4
P_2	P_2	P_1	P_3	P_4	P_0	P_5
P_3	P_3	P_2	P_1	P_5	P_4	P_0

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

a) P_n es espacio vectorial?

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Requisitos: Suma cerrada: $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1})$

$$= \underbrace{(a_0 + b_0)}_{c_0} + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = P(x) + Q(x) \in P_n$$

Multiplicacion por escalar

$$\sum \lambda a_i x^i = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_{n-1} x^{n-1} = \lambda (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})$$

$\in P_n$

b) los coeficientes son reales, por lo tantos los enteros no afectan la condición de espacio vectorial.

c) 1) Polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$: no es subespacio

2) Polinomio cero y Polinomios de grado par : es subespacio

3) Polinomios con factor x (grado $n>1$) : es sobespacio

4) Polinomios con factor $(x-1)$: no es subespacio