Anhang zu Digitale Signalverarbeitung

Sebastian Semper – FG Elektrische Messtechnik und Signalverarbeitung – EMS

15. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

1.1 B-Splines

2 Anwendungen

2.1 Sinc-Interpolation von Antennenantworten: EADF

2.1.1 Motivation

- Fuer Kommunikation ist das Ausbreitungsverhalten von EM zwischen den beteiligten geraeten wichtig
- abschaetzung von link budget, datenraten, simulation in software, verifizierung von geraeten
- channel sounding vermisst solche kanaele [3]
- hohe bandbreiten, antennen arrays, hohe aufloesung
- extraktion der einzelnen ausbreitungswege zwischen sender und empfaenger
- da eine antenne bei uebertragung selbst ein Linear Time-Invariant (LTI) system ist, praegt sie dem signal ihre impulsantwort auf
- dieser einfluss soll aber aus den messungen entfernt werden
- deshalb muessen die benutzten antennen vorher korrekt charakterisiert werden
- andere anwendung ist die simulation, wo bereits informationen über die ausbreitungsrichtungen vorliegen und jetzt realistische Messdaten simuliert werden sollen
- In any case: Wir muessen wissen wie das richtungs, frequenz und polarisations-abh. verhalten der antenne ist
- wir gehen in die antennenmesskammer und regen die antenne an (winkel, pol, freq)
- koennen nicht älle"winkel messen
- antennen sind im winkel bandlimitiert [1]
- koennen nyquist-sampling theorie anwenden
- muessen nicht alle winkel messen

2.1.2 Messvorgang

- messung in echo-freier messkammer (wir nehmen das an, ist aber nicht so)
- anregung mit bekannter, direktiver und polarisierter referenz-antenne
- zu kalibrierende Antenna Under Test (AUT) wird an roboter geschnallt, der sie beliebig bezueglich referenz-antenne ausrichten kann
- messung des freqeunzganges der AUT fuer endliche menge an winkeln
- bereinigung der messdaten von einfluss des messsystems unter der annahme von LTI system

2.1.3 Fourier-Interpolation

Gegeben sei ein periodisches, analoges Signal $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mit periode $T_p = 1/F_0$. Dieses Signal kann man in seine Fourier-Reihe via

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] \exp(\jmath 2\pi k t F_0) \tag{1}$$

entwickeln. Nun tasten wir dieses Signal uniform mit Samplerate $F_s = N/T_p = 1/T$ (also passend zur Periodendauer) ab und erhalten die Folge

$$x[n] = x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] \exp(\jmath 2\pi k n T F_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c[k] \exp\left(\jmath 2\pi k \frac{n}{N}\right) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

bestehend aus den Samples von x. Mit der Periodizität von $\exp(\jmath 2\pi t)$ und der Abtastung erhalten wir außerdem noch

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c[k - \ell N]\right] \exp\left(\jmath 2\pi k \frac{n}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}[k] \exp\left(\jmath 2\pi k \frac{n}{N}\right), \tag{3}$$

wobei wir

$$\tilde{c}[k] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} c[k - \ell N] \tag{4}$$

als Abkürzung benutzt haben. Ist nun die Funktion x auch bandbegrenzt, d.h. ihre Fourier-Transformierte $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ verschwindet außerhalb eines gewissen Bandes, also

$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-\jmath 2\pi F t) \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{für} \quad |F| > B, \tag{5}$$

dann wissen wir, dass die Fourier-Transformation X und die Folge $c[k]$ verknüpft sind via

$$c[k] = \frac{1}{T_p} X(k F_0), \tag{6}$$

was impliziert, dass die Folge $c[k]$ verschwindet, also gilt

$$c[k] = 0 \quad \text{für} \quad |k| > \frac{B}{F_0}. \tag{7}$$

Das heißt, dass wir nun $F_s = N/T_p$ so groß wählen müssen, dass sich in (4) kein Aliasing ergeben darf, also muss gelten

$$N > \lceil B/F_0 \rceil \quad \text{bzw.} \quad F_s > \lceil B/(F_0 T_p) \rceil. \tag{8}$$

In diesem Falle gilt, dann dass $c[k] = X[k]$, wobei $X[k]$ die Discrete Fourier Transform (DFT) der Folge $x[n]$ darstellt. Das heiß, dass wir die Fourier-Koeffizienten der kontinuierlichen Funktion x durch die DFT der Abtastwerte $x[n]$ bestimmen können. Mit (1) können wir also die Folge $x[n]$ interpolieren, indem wir

$$x(t) = \sum_{k=-\frac{B}{F_0}}^{+\frac{B}{F_0}} X[k] \exp(\jmath 2\pi k t F_0) \tag{9}$$

schreiben. Man beachte hier, dass nun aus der Folge von diskreten Werten $x[n]$ eine analytische Formel in Form einer *endlichen* Summation entstanden ist. Unter der Annahme der Bandlimitierung von x ist diese Interpolation *exakt* und kann effizient implementiert werden, durch die Vorberechnung der Folge $X[k]$ durch die Fast Fourier Transform (FFT) [2] der Folge $x[n]$.

2.1.4 Ableitung der EADF

Wir wollen nun (9) aus zwei Dimensionen erweitern und folgen damit effektiv [4]. Außerdem ändern wir das Argument der Funktion x und deren Namen zu der üblicheren Schreibweise $a : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit Werten $a(\varphi, \vartheta)$. Wir nehmen nun hier an, dass a in *beiden* Argumenten 2π-periodisch ist und schneiden somit die Funktion bereits auf unsere Anwendung zu.

Die Bandlimitierung von a lässt sich nun so formulieren, dass die Bedingungen

$$A_\varphi(F_\varphi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\varphi, \vartheta) \exp(\jmath 2\pi F_\varphi \varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0 \quad \text{für} \quad F_\varphi > B_\varphi \quad \text{und alle} \quad \vartheta \in [0, 2\pi] \quad \text{und} \tag{10}$$

$$A_\vartheta(\varphi, F_\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\varphi, \vartheta) \exp(\jmath 2\pi F_\vartheta \vartheta)\,\mathrm{d}\varphi = 0 \quad \text{für} \quad F_\vartheta > B_\vartheta \quad \text{und alle} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{11}$$

erfüllt sein müssen. Nun lassen sich alle obigen Argumente “schnittweise” auf eine abgetastete Version von a in der Form $a[n_\varphi, n_\vartheta]$ anwenden. Das heißt, wir landen schlussendlich bei einer Interpolations-Formel

$$a(\varphi, \vartheta) = \sum_{k_\varphi = -\frac{B_\varphi}{F_\varphi}}^{+\frac{B_\varphi}{F_\varphi}} \sum_{k_\vartheta = -\frac{B_\vartheta}{F_\vartheta}}^{+\frac{B_\vartheta}{F_\vartheta}} A[k_\varphi, k_\vartheta] \cdot \exp(\jmath 2\pi k_\varphi \varphi F_\varphi) \cdot \exp(\jmath 2\pi k_\vartheta \vartheta F_\vartheta), \tag{12}$$

welche absolut analoge $2D$-Version zu (9) darstellt. Auch in diesem Fall, können wir das $2D$-Array $A[k_\varphi, k_\vartheta]$ durch eine $2D$-DFT, bzw. der FFT, von uniformen Samples der Funktion a effizient vorberechnen.

Um einen möglichst effizienten Algorithmus für die Auswertung der Interpolante zu erhalten, sollte man (12) geeignet umschreiben. Moderne Rechenarchitekturen und Scientific-Computing-Libraries sind auf schnelle Matrix-Vektor-Produkte optimiert. Nehmen wir an, wir wollen (12) für mehrere Winkelpaare $(\varphi_1, \vartheta_1), \dots, (\varphi_L, \vartheta_L)$ auswerten. Dann berechnen wir zunächst zwei $2D$ arrays

$$D_\varphi = [\exp(\jmath 2\pi k_\varphi \varphi F_\varphi)]_{\ell=1, k_\varphi = -\frac{B_\varphi}{F_\varphi}} \in \mathbb{C}^{L \times 2\frac{B_\varphi}{F_\varphi}+1} \quad \text{und} \tag{13}$$

$$D_\vartheta = [\exp(\jmath 2\pi k_\vartheta \vartheta F_\vartheta)]_{\ell=1, k_\vartheta = -\frac{B_\vartheta}{F_\vartheta}} \in \mathbb{C}^{L \times 2\frac{B_\vartheta}{F_\vartheta}+1}, \tag{14}$$

was uns erlaubt (12) das folgende Vektor-Matrix-Vektor-Produkt

$$a(\varphi_\ell, \vartheta_\ell) = D_\varphi[\ell, :] \cdot A \cdot D_\vartheta[\ell, :]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

umzuschreiben. Damit besteht der Interpolations-Algorithmus zunächst aus der Vorberechnung des Arrays A, sowie bei Ausführung dann aus der Berechnung von D_φ und D_ϑ, sowie der Auswertung von (15).

Man sieht hier der schön, dass die Laufzeitkomplexität von (15) maßgeblich von der räumlichen Bandbegrenzung der Antennen-Richtcharakteristik beeinflusst wird. Je höher die Bandbreite, desto höher ist nicht nur der Aufwand bei der Messung, sondern auch bei der Interpolation.

Akronyme

AUT Antenna Under Test. 2

DFT Discrete Fourier Transform. 3, 4

FFT Fast Fourier Transform. 4

LTI Linear Time-Invariant. 2

Literatur

[1] Giovanni Del Galdo Prof. Dr.-Ing. „Geometry-Based Channel Modeling for Multi-User MIMO Systems and Applications“. en. Diss. 2007 (siehe S. 2).

[2] M. Frigo und S.G. Johnson. „The Design and Implementation of FFTW3“. In: *Proc. IEEE* 2 (2005). Special issue on “Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation” (siehe S. 4).

[3] Martin Haardt, Reiner S. Thomä und Andreas Richter. „Multidimensional High-Resolution Parameter Estimation with Applications to Channel Sounding“. English. In: *High-Resolution and Robust Signal Processing*. Hrsg. von Yingbo Hua. 2003 (siehe S. 2).

[4] M. Landmann und G. Del Galdo. „Efficient antenna description for MIMO channel modelling and estimation“. In: *7th European Conference on Wireless Technology, 2004.* 2004 (siehe S. 4).