

# INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA

Mario Felipe Londoño V.  
Profesor Asociado  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Medellín

## PRÓLOGO

Los alumnos de ciencias y de ingeniería comienzan el estudio de la física por la mecánica newtoniana, clásica. No sólo porque muchos de sus conceptos están en la base de toda la física, sino porque el estudio del movimiento de los cuerpos, objeto de la mecánica, proporciona, por la percepción directa e inmediata de muchos movimientos simples e importantes, una ocasión formativa ejemplar para enseñar a un estudiante cómo en un modelo científico se articulan racionalmente unos conceptos en una teoría, y cómo sus consecuencias se corresponden en mayor o menor grado con los comportamientos reales de los cuerpos del mundo. Además, en ese empeño avanza y se afianza el aprendizaje de diversos saberes: el cálculo, el álgebra, la geometría, el dibujo, aunados en el propósito de estudiar el movimiento de los cuerpos, preparando al estudiante para abordar luego teorías físicas, teorías científicas, más abstractas y más complejas.

Este texto de Introducción a la Mecánica proviene de las clases que he impartido durante años a estudiantes de ingeniería en su primer curso de física, en la Sede de Medellín de la Universidad Nacional de Colombia. He tenido ocasión de pensar, al escribirlo, que el veraz y sabio adagio: “Si quieres aprender, enseña”, puede complementarse diciendo: “Si quieres aprender aún más, escribe”.

El texto tiene como propósito central la presentación teórica de las leyes fundamentales de la mecánica clásica, newtoniana, y de sus aplicaciones. En él se presentan los conceptos y las leyes de manera concisa y directa. Creo que su comprensión se realiza del modo más eficaz en el estudio cuidadoso de sus aplicaciones y por ello los ejemplos son de gran importancia. Presentan lo elemental, con abundancia de detalles, pausadamente, con esmero, ilustrando cómo se estructura la aplicación de los conceptos y de las leyes, con orden, con organización, pero con flexibilidad.

Los movimientos de los cuerpos reales son con frecuencia de gran complejidad. En el estudio de la mecánica, y en general de la física, es necesario aprender a hacer simplificaciones, idealizaciones, aprender a distinguir lo que es relevante para un cierto propósito, de lo que no lo es. Para enseñar ese aspecto, en los ejemplos se busca la precisión y la aserción explícita del modelo físico utilizado para representar tales o cuales cuerpos. Son la claridad y el orden los que permiten al estudiante adquirir confianza en el manejo de los conceptos y teorías. Para que el estudiante aplicado desarrolle paulatinamente su habilidad en la aplicación de las leyes físicas, se le proporcionan ejercicios, que contienen sugerencias y, en muchos casos, soluciones que puede cotejar con las suyas propias.

Este libro está pensado como un texto de trabajo para el primer curso de física, de un semestre de duración, para estudiantes de ciencias e ingenierías. Las matemáticas necesarias para su estudio son relativamente simples: álgebra, geometría, trigonometría y principios elementales de vectores. Desde el punto de vista del cálculo, se requiere un cierto conocimiento de la derivación e integración de funciones sencillas.

En el estudio de la mecánica elemental la realización experimental es invaluable, es imprescindible. Un texto como éste debe acompañarse, en la medida de lo posible, de montajes experimentales. Los ejemplos, los ejercicios, enseñan más cuando se acompañan de

experiencias demostrativas, que en muchos casos pueden ser cualitativas y aproximadas, pero que, con las reflexiones adecuadas, son una ayuda valiosa en la comprensión de los conceptos y de las leyes, y permiten también comprender las limitaciones de los modelos simplificados. Con frecuencia sólo se requieren elementos mínimos: cuerdas, bloques, esferas, resortes, poleas, para plantear e ilustrar numerosos problemas importantes. Las realizaciones cualitativas deben complementarse con los experimentos de laboratorio que busquen la medición y la precisión.

Esta Introducción a la Mecánica procura invitar, en cuestiones que son básicas y elementales, al análisis ordenado, a la aplicación razonada de las leyes de la física, rehuyendo simplicidades engañosas y esquematismos irreflexivos. Como las aplicaciones de la mecánica son muy diversas, es necesario insistir en la unidad de la estructura teórica y por eso en el texto se vuelve con frecuencia a las relaciones y leyes básicas. Ciertos temas y problemas son electivos y pueden omitirse sin alterar el desarrollo posterior de la exposición. Son:

Fricción de cuerdas (3.5.3)

Fuerzas de fricción en fluidos (4.5)

Diagramas de energía (5.7)

Movimiento de una cadena (Ejemplo 8, de 6.6)

Colisión oblicua (Ejemplo 5, de 6.7)

Movimiento de sistemas de masa variable (6.8)

Los ejemplos 8, 9 y 10 del numeral 7.4, Aplicaciones del equilibrio de los cuerpos rígidos

Los ejemplos 1 y 3 del numeral 8.1, Momentum angular de una partícula

Consideraciones elementales sobre el movimiento tridimensional de los cuerpos rígidos (8.6)

La bibliografía de la mecánica es muy vasta. Hay buenos libros desde el nivel más elemental hasta el más avanzado, pero no es este el lugar para una revisión detallada. Quiero, no obstante, mencionar unos cuantos libros por los que siento particular dilección y que, salvo uno, son de un nivel similar al del presente estudio.

Mécanique: Volumen primero del curso de física general de D. Sivoukhine, traducción al francés de la Editorial MIR del original ruso. Libro magnífico. Pleno de análisis y comentarios atinados, de una riqueza conceptual poco común. Infortunadamente es un texto de difícil consecución.

Newtonian Mechanics: Libro de A.P. French, de la editorial W.W. Norton & Company, forma parte de la serie introductoria a la física del M.I.T. Libro pausado, con amplias y valiosas discusiones de muchos temas de la mecánica newtoniana, analizados con especial cuidado. Contiene muy buenos problemas. Hay traducción española de la editorial Reverté.

An Introduction to Mechanics: Libro de Daniel Kleppner y Robert Kolenkow, de la McGraw-Hill Book Company. Texto moderno, claro, conciso y bien organizado. Contiene numerosos ejemplos y una colección bien seleccionada de problemas.

Fundamental University Physics I. Mechanics: Texto de Marcelo Alonso y Edward Finn, de la Addison-Wesley Publishing Company. Notable por la estructura y organización de la presentación teórica. Hay traducción española del Fondo Educativo Interamericano.

Mechanics: Libro de Keith Symon, de la Addison-Wesley Publishing Company. No es un libro elemental, sino de nivel más avanzado. Sus presentaciones son de gran concisión, claras y elegantes, pero requieren un conocimiento previo de mecánica y de matemáticas, del nivel del presente texto.

La concepción de la enseñanza de la física reflejada en las páginas de esta Introducción a la Mecánica, debe mucho al trabajo conjunto de años con profesores amigos. Expreso aquí mi gratitud a los profesores Jairo López, Jairo Marín, Miguel Monsalve, Carlos Ramírez, Alonso Sepúlveda y Jorge Orlando Vélez, con quienes, a lo largo de los años, he departido en tantas ocasiones sobre mecánica, sobre física, disfrutando y aprendiendo de grata e inolvidable manera, y a varios de los cuales debo valiosas sugerencias.

Expreso también mi afectuoso agradecimiento: a Cecilia Vallejo, quien con tan buena disposición y gran habilidad transformó el manuscrito en un texto de computador; a Julio César Rendón, joven profesor de mecánica, quien con gran destreza y dedicación realizó los nítidos y precisos dibujos, tan importantes en la enseñanza de la mecánica; a mi hijo, Andrés Felipe Londoño, por su valiosa colaboración en la organización final y en la impresión del texto.

Medellín, agosto del 2003

Mario Felipe Londoño V.



# ÍNDICE

Capítulo 1. <b>Preliminares</b>	1
1.1 Objeto de la mecánica	1
1.2 Magnitudes, dimensiones, unidades	2
1.3 Vectores	6
1.4 Nota sobre los ejemplos, ejercicios y problemas	12
Capítulo 2. <b>Cinemática</b>	13
2.1 Movimiento rectilíneo	14
Problemas	41
2.2 Movimiento plano	44
2.3 Coordenadas cartesianas	49
Problemas	58
2.4 Movimiento relativo	61
Problemas	73
Capítulo 3. <b>Leyes de Newton y aplicaciones (I)</b>	75
3.1 Las leyes de Newton del movimiento	75
3.2 Interacciones y tipos de fuerzas	79
3.3 Fuerza de atracción gravitacional. El peso	81
3.4 Fuerza: dimensiones y unidades	85
3.5 Aplicación de las leyes de Newton. Problemas de dinámica	88
3.5.1 La tensión en una cuerda	94
3.5.2 Fuerzas de contacto entre superficies de sólidos. La fuerza normal y la fuerza de fricción	105
3.5.3 Fricción en cuerdas	121
Problemas	123
Capítulo 4. <b>Leyes de Newton y aplicaciones (II)</b>	129
4.1 Movimiento circular	129
4.1.1 Cinemática	129
4.1.2 Dinámica	144
4.2 Fuerzas ficticias o fuerzas de inercia	162
4.3 La fuerza elástica hecha por un resorte	165
4.4 Movimiento armónico simple	172
4.5 Fuerzas de fricción en fluidos	179
4.6 Tipos de fuerzas. Resumen	185
Problemas	187
Capítulo 5. <b>Trabajo y energía</b>	191
5.1 El teorema del trabajo y la energía	191
5.2 Trabajo hecho por una fuerza	193
5.3 Cálculo del trabajo efectuado por diversas fuerzas	198
5.3.1 Fuerza perpendicular a la trayectoria	198
5.3.2 Fuerza constante. Trayectoria rectilínea	202

5.3.3 Trabajo de la fricción. Dependencia de la trayectoria	203
5.3.4 Trabajo realizado por el peso de un cuerpo	205
5.3.5 Trabajo realizado por la fuerza elástica de un resorte	208
5.4 Energía potencial	209
5.5 Aplicación del teorema del trabajo y la energía. Conservación de la energía	213
5.6 Trabajo realizado por la fuerza de atracción gravitacional	230
5.7 Relación entre la fuerza y la energía potencial. Movimiento unidimensional. Diagramas de energía	237
Problemas	246
<b>Capítulo 6. Momentum. Sistemas de partículas</b>	<b>253</b>
6.1 Momentum de una partícula	253
6.2 Sistemas de partículas. Masa y centro de masa	262
6.3 Cuerpos continuos. Masa y densidad	266
6.4 Dinámica de un sistema de partículas. Momentum. Movimiento del centro de masa	276
6.5 Dinámica de un sistema de partículas. Energía	281
6.6 Aplicaciones	287
6.7 Colisiones	311
6.8 Movimiento de sistemas de masa variable	335
Problemas	353
<b>Capítulo 7. Equilibrio de los cuerpos rígidos</b>	<b>367</b>
7.1 Concepto de cuerpo rígido	367
7.2 Torque de una fuerza respecto a un punto	368
7.3 Sistemas de fuerzas equivalentes	380
7.4 Condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido. Aplicaciones	388
Problemas	419
<b>Capítulo 8. Momentum angular. Rotación con eje fijo</b>	<b>427</b>
8.1 Momentum angular de una partícula	427
8.2 Momentum angular de un sistema de partículas	435
8.3 Cinemática de los cuerpos rígidos	442
8.3.1 Traslación	442
8.3.2 Rotación respecto a un eje fijo	444
8.3.3 Movimiento plano	451
8.4 Dinámica de la rotación respecto a un eje fijo	459
8.4.1 Momentum angular y energía cinética de un cuerpo rígido	459
8.4.2 El momento de inercia	462
8.4.3 Relaciones fundamentales y aplicaciones	471
8.5 Dinámica del movimiento plano	497
8.6 Consideraciones elementales sobre el movimiento tridimensional de los cuerpos rígidos	519
Problemas	532

# CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

## 1.1 OBJETO DE LA MECÁNICA

Uno de los fenómenos más notables del universo es el movimiento. Millones de estrellas se mueven en la lejanía; la tierra rota y se traslada; la luna y tantos satélites orbitan alrededor de la tierra; los mares se agitan y ondulan; las aguas fluyen por cauces y tubos; los vientos soplan, calmos o tormentosos; vehículos de toda suerte viajan, lentos o raudos; piezas de máquinas, bielas y engranajes, giran y crujen; pequeños sensores buscan su lugar con precisión asombrosa para leer ristas de datos; las cuerdas musicales vibran y un leve y sutil temblor del aire transmite sus sonidos.

El movimiento ha sido siempre objeto de reflexión y análisis. Aquí vamos a ocuparnos de su estudio desde el punto de vista de la ciencia, de la Física, siguiendo básicamente la teoría precisa y potente que desarrolló Isaac Newton, pero expuesta en términos modernos y actuales.

**La Mecánica** es el estudio del movimiento de los cuerpos en relación con las acciones que lo determinan. ¿De cuáles cuerpos? De cuerpos como los mencionados arriba, de cuerpos macroscópicos. Hay una distinción fundamental entre macroscópico y microscópico. Como se sabe, la materia está formada por moléculas, por átomos, y éstos por electrones, protones, neutrones, en fin. El ámbito de esas “partículas elementales”, de los átomos y moléculas, constituye la esfera de la microfísica, de lo microscópico. Los cuerpos o porciones de materia que incluyen números muy grandes de átomos son los cuerpos macroscópicos. Ya en un milímetro cúbico de acero hay un número inmenso de átomos, es un cuerpo macroscópico. El estudio del microcosmos compete a la Mecánica Cuántica.

Hay que distinguir también entre el dominio de los cuerpos lentos y el de los rápidos. En la Física la velocidad máxima es la velocidad de la luz,  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s. Los cuerpos que se mueven a velocidades comparables a ella son estudiados en la Teoría de la Relatividad, en la Mecánica Relativista. Los cuerpos lentos se mueven a velocidades muy inferiores a la de la luz.

El estudio del movimiento de los cuerpos macroscópicos y lentos le corresponde a la **Mecánica Newtoniana**, que se llama también **Mecánica Clásica**, aunque a veces esta última denominación se usa para referirse a formulaciones alternas, matemáticamente más elaboradas.

Para estudiar el movimiento de los cuerpos se han desarrollado en la mecánica modelos físico-matemáticos abstractos como el de **partícula** o punto material, punto geométrico dotado de masa, que ha surgido como idealización de un cuerpo cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con sus desplazamientos o bien cuya estructura y movimientos internos no son relevantes para un cierto estudio. No existen pues en este sentido verdaderas partículas, son modelos, representaciones ideales de los cuerpos reales. El que unos cuerpos sean o no representables como partículas dependerá del problema específico. Así, en su movimiento alrededor del sol, la tierra puede considerarse como una partícula que describe una trayectoria elíptica, pero no podrá ser considerada como partícula si quiere estudiarse su rotación diaria.



Otros modelos esenciales de la Mecánica son los sistemas de partículas y los cuerpos continuos, que pueden ser cuerpos rígidos o deformables.

La **Cinemática** es la descripción matemática del movimiento sin atender a las causas que lo producen. En la **Estática** se estudian los cuerpos en equilibrio. En la **Dinámica** se estudia la relación existente entre el movimiento de un cuerpo y las interacciones de ese cuerpo con los demás que lo rodean. Los postulados básicos de la mecánica son las **Leyes de Newton** del movimiento, cuya idea central es la siguiente: las interacciones se representan mediante las fuerzas hechas sobre un cuerpo, cuya resultante está directamente vinculada con una propiedad esencial de dicho cuerpo, su masa inercial, y con la aceleración de su movimiento.

Las leyes de Newton no son evidentes ni intuitivas y es necesario aprender paulatinamente su uso, pero su aplicación coherente y cuidadosa permite estudiar una gran cantidad de movimientos importantes y útiles. También es necesario saber que la correspondencia entre los modelos idealizados de la mecánica y los movimientos de los cuerpos reales nunca es perfecta. En algunos casos es muy precisa pero en otros la complejidad de los movimientos es muy grande y los modelos sólo son aproximados.

## 1.2 MAGNITUDES, DIMENSIONES, UNIDADES

En la Física, y en la Mecánica en particular, hay un conjunto de cantidades o magnitudes físicas, como la longitud, la masa, el tiempo, la velocidad, la aceleración, la fuerza, en fin, en términos de las cuales se plantean las diversas definiciones y leyes de una teoría, como la Mecánica Newtoniana que nos ocupa. Todas esas magnitudes físicas tienen en común el hecho de ser medibles. Todas ellas se caracterizan por ser cuantificables mediante un número y una unidad de medida. Así, podremos tener una longitud de 20 metros, un tiempo de 4 horas o una fuerza de 80 newtons.

En principio, cada magnitud o cantidad física podría tener sus propias unidades, independientes de las demás. Por ejemplo, si en un movimiento rectilíneo definimos la velocidad como el cociente del desplazamiento  $\Delta x$  sobre el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , y la longitud, el tiempo y la velocidad tienen unidades completamente independientes entre sí, la velocidad se expresaría como,

$$v = C \frac{\Delta x}{\Delta t} ,$$

en donde C es un coeficiente numérico que permite realizar la conversión de unidades. De esta manera, en las ecuaciones de la Física habría numerosos coeficientes numéricos que las complicarían inútilmente. Para evitar esto, las magnitudes físicas y sus unidades de medida, se organizan en sistemas de unidades.

En un **sistema de unidades** se adoptan por convención unas magnitudes físicas como **magnitudes fundamentales**, cuyas unidades de medida son arbitrarias e independientes unas de otras. En la Mecánica, varios sistemas de unidades utilizan como magnitudes fundamentales la longitud, la masa y el tiempo. Las otras cantidades físicas se llaman **magnitudes derivadas** y sus unidades de medida se establecen en términos de las unidades de

las magnitudes fundamentales, fijando los valores numéricos de los coeficientes en las expresiones matemáticas que definen dichas magnitudes derivadas. Por ejemplo, en el caso de la velocidad, hagamos  $C = 1$ , y así

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Pues bien, la unidad de velocidad ya no es independiente. La unidad de velocidad es la velocidad de un cuerpo que recorre una unidad de longitud en una unidad de tiempo, o, como se dice a veces, la unidad de velocidad es la unidad de longitud dividida por la unidad de tiempo. Aquí es donde aparece el concepto de **dimensión** de una magnitud física. Representemos las magnitudes fundamentales mediante un símbolo:  $L$  para la longitud,  $M$  para la masa,  $T$  para el tiempo. Se dice que la velocidad tiene dimensiones (o dimensión) de longitud sobre tiempo, lo que se escribe mediante la llamada fórmula de dimensiones,

$$\text{dimensión de } v = [v] = \frac{L}{T} = LT^{-1},$$

expresión que indica cuál es la relación entre la unidad de velocidad y las unidades de longitud y de tiempo, sean cuales sean estas últimas. Por ejemplo, si la unidad de longitud es el metro (m), y la unidad de tiempo el segundo (s), la unidad de velocidad será el  $\frac{m}{s}$ . O bien, si la unidad de longitud es el kilómetro (km) y la unidad de tiempo la hora (h), la unidad de velocidad será  $\frac{km}{h}$ . La conversión de unidades permite pasar de unas unidades a otras con facilidad. Así, por ejemplo, conociendo las equivalencias

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$

tendremos

$$1 \frac{km}{h} = \frac{1 \text{ km}}{h} \times \left( \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = \frac{1}{3.6} \frac{m}{s}.$$

Si se define la aceleración mediante la expresión

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

se escribirá entonces

$$[a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2},$$

que se lee diciendo: la aceleración tiene dimensiones de velocidad sobre tiempo, o bien, la dimensión de aceleración es longitud sobre tiempo al cuadrado. La segunda ley de Newton establece que  $F = ma$ , y así la fuerza es, en nuestro sistema de unidades LMT, una magnitud derivada cuya unidad se establece según la fórmula dimensional

$$[F] = MLT^{-2}.$$

El sistema de unidades más importante es el **Sistema Internacional de Unidades**, abreviado SI, y establecido por convenios internacionales. En lo que concierne a la mecánica, las magnitudes fundamentales son: longitud (L), masa (M) y tiempo (T). Sus unidades correspondientes son: el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s), cuyas definiciones han cambiado en varias ocasiones, reflejando el refinamiento tecnológico.

Se usan, sin embargo, otros sistemas de unidades, tanto en la práctica como en diversos textos, algunos de los cuales son muy valiosos. Por ejemplo, otro sistema LMT es el c.g.s., abreviaturas de sus unidades, el centímetro (cm), el gramo (g), el segundo (s). Otros sistemas llamados a veces técnicos o gravitatorios, basados en el peso, usan como magnitudes fundamentales la longitud (L), la fuerza (F) y el tiempo (T), siendo en ellas la masa una magnitud derivada, con fórmula dimensional  $[m] = FL^{-1}T^2$ . En todo caso, un manejo cuidadoso y ordenado de las unidades fundamentales y de las fórmulas dimensionales, permite trabajar con sencillez en cualquier sistema o pasar de unas unidades a otras. Aquí trabajaremos en el sistema Internacional, SI, siguiendo una cada vez más extendida costumbre y salvo ocasional mención de otras unidades de alguna importancia práctica.

Las unidades de algunas magnitudes derivadas en SI tienen un nombre y un símbolo propio. Por ejemplo, la unidad de fuerza, que se obtiene de la fórmula dimensional vista más arriba, es  $kg\ m\ s^{-2}$ , que recibe el nombre de newton y cuyo símbolo es N. Otras unidades en cambio, no tienen un nombre o un símbolo propio, como la unidad de velocidad, que es simplemente  $m\ s^{-1}$ . A medida que introduzcamos las diferentes magnitudes o cantidades físicas de la mecánica, daremos sus fórmulas dimensionales y sus unidades SI.

En el Sistema Internacional se usan múltiplos y submúltiplos de unidades, con prefijos y símbolos bien establecidos. Algunos de los más comunes son

Factor	Prefijo	Símbolo
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k

$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n

Y así, por ejemplo, un milisegundo, se escribe 1 ms y es igual a  $10^{-3}$  s .

De gran importancia es la coherencia o corrección dimensional de las diversas expresiones matemáticas de la física. Por ejemplo, la expresión que aparece en el movimiento rectilíneo con aceleración constante,

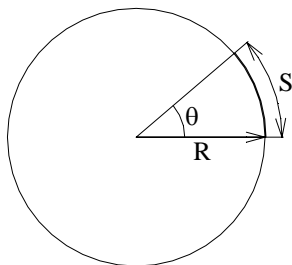
$$x = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 ,$$

es dimensionalmente correcta puesto que el término de la izquierda y ambos sumandos de la derecha tienen todos la dimensión de longitud, L. En efecto

$$[v_o t] = \frac{L}{T} \cdot T = L$$

$$\left[ \frac{1}{2} a t^2 \right] = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L .$$

El ángulo plano, definido como la relación del arco al radio en un círculo,



$$\theta = \frac{s}{R} ,$$

es adimensional,

$$\text{dimensión de } \theta = \frac{[L]}{[L]} = 1 ,$$

es decir, es un puro número. Por ejemplo, un ángulo de 0.5 es un ángulo que comprende un arco igual a la mitad del radio. No obstante, para marcar la diferencia con otras medidas de los ángulos, notablemente los grados y las vueltas, se dice que el ángulo, adimensional, está

expresado en radianes, abreviado rad. En vez de decir simplemente un ángulo de 0.5 se dice un ángulo de 0.5 radianes. Una expresión del movimiento oscilatorio como

$$v = x_0 \omega \cos \omega t,$$

es dimensionalmente correcta si la dimensión de  $\omega$  es  $T^{-1}$ . En efecto, el argumento del coseno es así adimensional,

$$[\omega t] = \frac{1}{T} \times T = 1,$$

y 
$$[x_0 \omega] = L \times \frac{1}{T} = L T^{-1},$$

que son las dimensiones de velocidad, iguales a las del término de la izquierda. En SI las unidades de  $\omega$  serán  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . En cambio, una expresión como

$$x = x_0 \sin t,$$

siendo  $t$  un tiempo, es dimensionalmente incorrecta porque el argumento de la función seno debe ser un ángulo, adimensional, y aquí es un tiempo. Simplemente  $\sin(4 \text{ segundos})$  es algo incorrecto, sin sentido. Una revisión de la coherencia dimensional ayuda a evitar toscos errores.

### 1.3 VECTORES

Muchas cantidades físicas importantes, como la velocidad, la aceleración, la fuerza, son cantidades vectoriales. Es necesario entonces tener claridad en la notación y representación que vamos a usar para los vectores, cuyo concepto y cuyas operaciones elementales supondremos conocidos.

#### Notación y representación geométrica

Geométricamente representamos un vector como un segmento de recta orientado. Tiene una magnitud (o módulo) y una dirección.

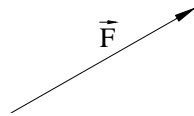
En los manuscritos y en algunos textos impresos, como el presente, se usa una pequeña flecha encima de la letra para distinguir los vectores:  $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \dots$  En ese caso, la magnitud del vector se escribe de dos maneras diferentes, poniendo el vector entre barras o simplemente escribiendo la letra sin la flecha:

$$\text{Magnitud de } \vec{F} = \left| \vec{F} \right| = F.$$

Esta última usanza, muy difundida en mecánica, en física, hace que sea muy importante escribir correctamente el vector con su flecha para distinguirlo de su magnitud. En otros textos de física, los vectores se escriben en negrilla y sus magnitudes se escriben entre barras o bien en letra normal, por ejemplo: vector:  $\mathbf{F}$ ; magnitud :  $F$ .

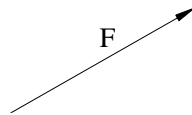
Al graficar un vector hay dos usanzas de denotación que dependen del propósito concreto de cada gráfico o problema:

- a) Denotar el vector pleno, escribiéndolo con su flecha.



o bien,

- b) denotar únicamente la magnitud del vector, ya que su dirección está indicada con el segmento orientado en el gráfico.



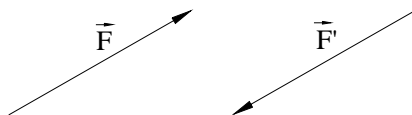
Ambas denotaciones son correctas y útiles.

### Ejemplo

Representar geoméricamente un vector de igual magnitud pero de dirección contraria a un vector  $\vec{F}$ .

Los dos modos de denotarlo y representarlo serían:

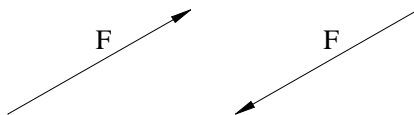
- a)



$$\text{con } \vec{F}' = -\vec{F}$$

o, más sencillo y conveniente en muchos casos,

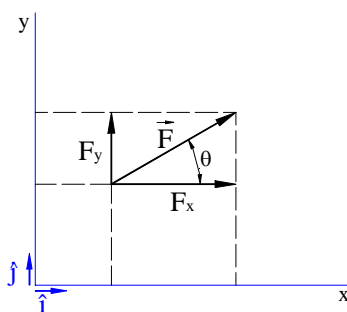
b)



En física, la magnitud de un vector es un número con una unidad de medida. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= F = 3 \text{ N} \\ |\vec{v}| &= v = 5 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

### Vectores unitarios. Componentes



Sean unos ejes cartesianos  $x, y$ . Los vectores unitarios son  $\hat{i}, \hat{j}$ , distinguidos, como se acostumbra en física, con un pequeño ángulo encima en vez de la flecha. Las componentes de un vector  $\vec{F}$  en los ejes  $x, y$  se escriben  $F_x, F_y$ , con

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}.$$

De esta manera  $F_x$  y  $F_y$  no son vectores sino escalares y las componentes vectoriales son  $F_x \hat{i}, F_y \hat{j}$ , que algunos textos escriben como  $\vec{F}_x, \vec{F}_y$ , notación que no emplearemos aquí.

Como puede verse fácilmente

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

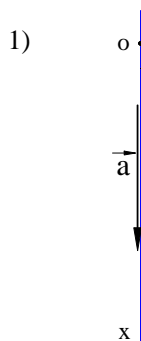
$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x}.$$

Un vector no es positivo ni negativo. Sus componentes en unos ejes determinados sí son positivas o negativas.

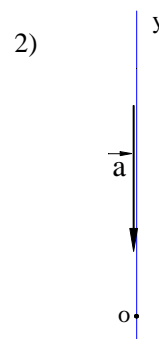
### Ejemplo

En un punto cercano a la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad es un vector  $\vec{a}$ , dirigido verticalmente hacia abajo y cuya magnitud, usualmente escrita  $g$ , vale aproximadamente  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ .

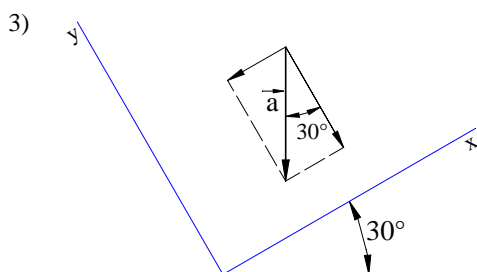
Hallar las componentes de la aceleración de la gravedad en los siguientes sistemas de ejes:



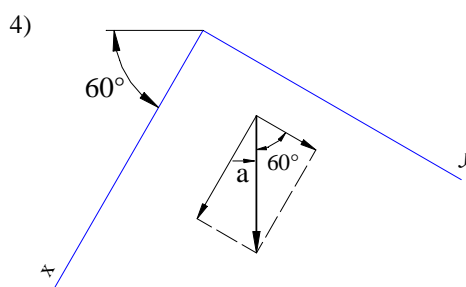
$$a_x = g$$



$$a_y = -g$$



$$\begin{cases} a_x = -g \sin 30^\circ \\ a_y = -g \cos 30^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_x = g \sin 60^\circ \\ a_y = g \cos 60^\circ \end{cases}$$

### Álgebra de vectores

Recordemos brevemente las operaciones elementales con los vectores.

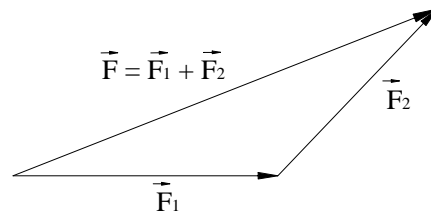


### Producto de vector por escalar

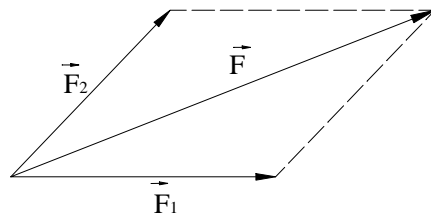
Al multiplicar un vector  $\vec{F}$  por un escalar  $\lambda$  se obtiene un vector de magnitud  $|\lambda|F$ , vector con la misma dirección de  $\vec{F}$  si  $\lambda > 0$  y con dirección contraria a  $\vec{F}$  si  $\lambda < 0$ .

### Suma y diferencia de vectores

Sean los vectores  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ . Su suma  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  se obtiene en el triángulo, dibujando un vector a continuación del otro,



o bien en el paralelogramo, graficándolos con un origen común



En general,  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \neq F_1 + F_2$ , y entonces

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

pero  $F \neq F_1 + F_2$ ,

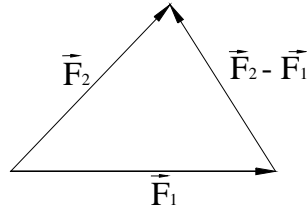
lo que muestra la importancia de la correcta notación.

En componentes en unos ejes  $x, y$  tendremos:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}.$$

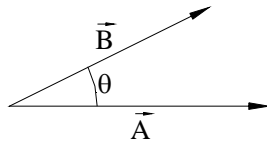
La diferencia de vectores se obtiene fácilmente graficando los vectores con un origen común



### Productos escalar y vectorial

Veamos las definiciones geométricas de los productos escalar y vectorial y su expresión en componentes cartesianas en ejes  $x, y, z$ .

El producto escalar de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es



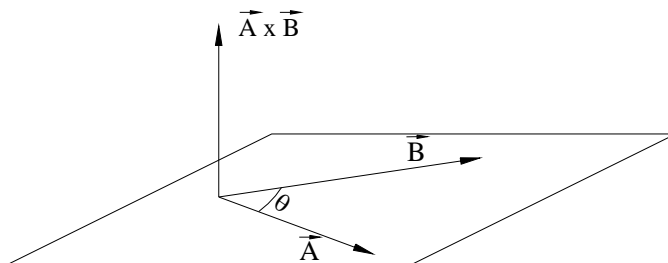
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \theta ,$$

siendo  $\theta$  el ángulo entre los vectores. En componentes su expresión es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z .$$

El producto vectorial de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , escrito  $\vec{A} \times \vec{B}$ , es un vector perpendicular al plano determinado por  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y cuya dirección se establece por la regla de la mano derecha. Su magnitud, siendo  $\theta$  el ángulo entre los vectores, es

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A B \sin \theta$$



En componentes, el producto vectorial se expresa así:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

## 1.4 NOTA SOBRE LOS EJEMPLOS, EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Después de la presentación de cada tema, hay un conjunto de ejemplos, ejercicios y problemas. Los ejemplos ilustran la aplicación básica de los conceptos. Se exponen con detalle, pausadamente, y contienen a menudo sugerencias de organización y de trabajo para abordar los problemas del tema estudiado. Presentan con frecuencia desarrollos teóricos importantes y deben leerse, estudiarse y comprenderse cabalmente.

Hay también, intercalados con los ejemplos, un conjunto de ejercicios propuestos. A diferencia de los ejemplos propiamente dichos, con su amplitud y detalle, los ejercicios son más esquemáticos. En unos casos sólo se da una sugerencia de trabajo y un resultado parcial, en otros se ofrece una solución esbozada pero omitiendo desarrollos intermedios, aún en otros se propone únicamente una variante o aplicación de un ejemplo, dando sólo el resultado. Los ejemplos deben estudiarse. Los ejercicios, en cambio, tienen una función diferente. El estudiante interesado debe proponérselos como problemas e intentar por sí mismo una solución. Debe acudir a la solución propuesta o esbozada sólo para cotejar su propia solución o para orientarse en caso de que encuentre dificultades que no haya podido resolver. Así servirán los ejercicios al propósito de adquirir cierta destreza y confianza en la aplicación de lo estudiado. Evidentemente, nada le impide leerlos sin hacer el valioso esfuerzo previo de resolverlos, y aún así darán sus réditos, tomándolos como otros ejemplos menos detallados, pero el mayor beneficio para el aprendizaje se obtendrá esforzándose por resolverlos antes de leerlos.

El aprendizaje de la Física no puede hacerse pasivamente. Es imprescindible abordar la solución de problemas diversos, pues es allí donde se decantan, afianzan y esclarecen los conceptos y se flexibiliza su aplicación. Por eso hay después un conjunto de problemas, no muy numerosos pero sí cuidadosamente elegidos, de modo que abarquen un abanico razonablemente amplio de situaciones, sin caer, ni en la trivialidad por un lado, ni en la dificultad excesiva y desalentadora por el otro. El método, el orden, la claridad en la aplicación de los modelos físicos, son esenciales en el estudio y solución de los problemas. En muchas ocasiones se dan los resultados finales o bien algunos casos particulares para cotejarlos.

## CAPÍTULO 2. CINEMÁTICA

La cinemática es la descripción matemática del movimiento.

En su acepción más simple, el movimiento es el cambio de posición de un cuerpo con el tiempo. Todo el mundo tiene una cierta idea de ello y a veces uno querría decir, con Newton: “No defino el tiempo, el espacio, el lugar ni el movimiento, por ser palabras bien conocidas de todos”. Y, realmente, no vamos a definir ni a discutir por extenso conceptos tan complejos como espacio y tiempo. Vamos a cuantificar algunas de sus facetas, para proporcionar una descripción precisa y potente del movimiento.

Hay movimientos de muy diverso tipo: el movimiento de un trompo que gira, el movimiento del agua que fluye por un canal, el sutil movimiento de vibración del aire cuando se propaga una onda sonora. Así, hay una cinemática de los cuerpos rígidos, una cinemática de los fluidos, una cinemática del movimiento ondulatorio, descripciones complejas, hermosas, importantes, que vendrán a su tiempo, pero en cuya base está la cinemática más simple, la de un punto móvil, punto geométrico que se desplaza y por cuyo estudio comenzaremos.

Vamos pues a dar los elementos necesarios para estudiar el movimiento de un punto móvil, pero aclaremos primero un poco cuál puede ser ese punto móvil.

El punto móvil puede ser lo que se llama en mecánica newtoniana una partícula o punto material, que, como dijimos, es un modelo físico-matemático abstracto que permite representar en determinadas condiciones un cuerpo como un punto con masa. Por ejemplo, para estudiar el movimiento de traslación de un planeta alrededor del sol, podemos tratarlo como un punto móvil, o, para estudiar el movimiento parabólico de un guijarro irregular, podemos igualmente tratarlo como un punto: una partícula. Pero el punto móvil puede ser también un punto específico de un cuerpo extenso, por ejemplo, un determinado punto en el borde de una rueda o patea.

Los conceptos fundamentales de la cinemática son:

Marco de Referencia

Posición

Velocidad

Aceleración

### Marco de Referencia.

Se dice también sistema de referencia, pero la palabra sistema tiene diversas connotaciones: sistema de unidades, sistema mecánico, sistema de coordenadas, por lo que preferiremos marco de referencia.

Un marco de referencia comprende:

- a) **Un cuerpo rígido** (o conjunto de cuerpos rígidamente unidos entre sí) respecto al cual se puede determinar la posición o el cambio en posición de un objeto cuyo movimiento quiere estudiarse. Por ejemplo, los movimientos de una persona que se desplaza por el

interior de un tren, pueden estudiarse refiriéndolos al propio tren: a sus paredes, techo, piso, y así el tren será un marco de referencia. Pero el tren va moviéndose por los rieles y su movimiento puede referirse a otro marco de referencia, localmente unido a la tierra, y del cual forman parte rieles, postes y estaciones. Y a su vez este marco está moviéndose respecto a otro marco de referencia determinado por el sol y las estrellas lejanas.

En un marco de referencia pueden elegirse diversos sistemas de coordenadas para dar la ubicación de un punto, como luego veremos con detalle.

Decir que el movimiento es esencialmente relativo significa que todo movimiento es movimiento respecto a un determinado marco de referencia. Carece de sentido afirmar que un cuerpo se mueve sin especificar respecto a cuál marco de referencia lo hace.

El movimiento de un cuerpo puede tener una descripción más simple en un marco de referencia que en otro. Así, el movimiento del planeta Marte resulta de gran complejidad referido a la tierra, pero referido al sol es un movimiento elíptico, casi circular, de descripción mucho más sencilla. Tras de un hecho como éste hay milenios de observación y estudio de los hombres.

Veremos después, en la dinámica, que hay unos marcos de referencia especiales de gran importancia: los marcos inerciales.

- b) Un marco de referencia comprende también **relojes** que permiten la ubicación temporal de los sucesos o acontecimientos.

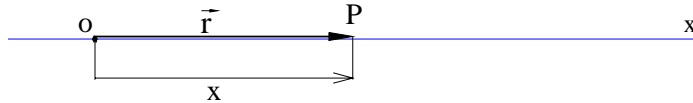
Sin detenernos ahora a pensar qué es el tiempo, diremos simplemente que, de forma cuantitativa, el tiempo de ocurrencia de un suceso lo determina un reloj, dispositivo periódico más o menos refinado. Los giros de los astros y la alternancia de días y noches; los vaivenes de un péndulo; las vibraciones de una red cristalina, son la base de diversos relojes, astronómicos, de péndulo o de cuarzo.

En principio, la determinación del tiempo de ocurrencia de un suceso requiere de un reloj en el lugar de ocurrencia de dicho suceso. Así, para la determinación del tiempo local, un marco de referencia requeriría de toda una red de relojes locales, cuyo problema es la sincronización. En la Teoría de la Relatividad se estudian en detalle la simultaneidad y la sincronización de relojes mediante señales luminosas. En la física newtoniana, como la velocidad de la luz es enorme respecto a las velocidades de los cuerpos involucrados, los relojes se sincronizan con señales “instantáneas”, de modo que basta un solo reloj para todo el marco de referencia y, en rigor, para todos los marcos de referencia. Estamos en el tiempo único, universal, absoluto, newtoniano.

## 2.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En su movimiento respecto a algún marco de referencia, el punto móvil describe una curva llamada la trayectoria. Para presentar los conceptos de posición, velocidad y aceleración, estudiaremos en primer lugar el movimiento de un punto cuya trayectoria es una línea recta, llamado movimiento rectilíneo.

En un marco de referencia en el cual está fija la recta, determinemos un eje  $x$ , es decir, elijamos un origen  $O$  y una dirección positiva, dirección que indicaremos simplemente con una letra  $x$ , aunque a veces se usa también una pequeña flecha.



### Posición

En un instante  $t$ , el punto móvil se encuentra en  $P$  y tiene una posición dada por el vector posición  $\vec{r}$ , vector que va del origen  $O$  al punto  $P$ . Esa posición  $\vec{r}$  es una función vectorial del tiempo,

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

en la cual, a cada instante  $t$ , siendo  $t$  una variable real, se le asigna un único vector  $\vec{r}$ . La componente de  $\vec{r}$  es  $x$ , coordenada del punto  $P$  en el instante  $t$ ,

$$\vec{r} = x \hat{i},$$

siendo  $x$  una función real del tiempo,

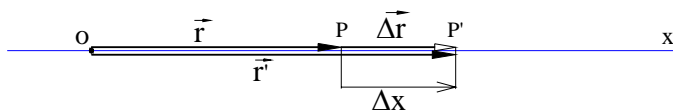
$$x = x(t).$$

En un instante  $t' = t + \Delta t$ , el punto móvil está en  $P'$  y su posición es

$$\vec{r}' = \vec{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t) \hat{i}.$$

Se llama **desplazamiento**  $\Delta \vec{r}$  durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , al cambio de posición

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \Delta x \hat{i}.$$



Se llama velocidad media (o promedio) durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , al vector

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i}.$$

La velocidad media es un vector que tiene la dirección del desplazamiento  $\Delta \vec{r}$ .

### Velocidad

La velocidad del punto móvil en el instante  $t$  se define como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiende a cero, es decir, cuando el punto  $P'$  se aproxima al punto  $P$ ,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Este límite, análogo a la definición de derivada en una función real de variable real, es la derivada de la función vectorial  $\vec{r}(t)$ ,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

en donde hemos introducido también la notación, usual en mecánica, de un punto encima de la función para denotar la derivada respecto al tiempo.

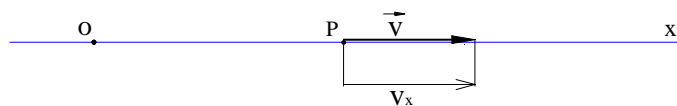
El vector velocidad tiene una dirección que, por ser el límite de las direcciones de  $\Delta \vec{r}$ , apunta en el sentido en el que avanza el móvil en ese instante.

Teniendo en cuenta las componentes y la definición de  $\vec{v}$  tendremos

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} = \frac{dx}{dt} \hat{i} = v_x \hat{i},$$

con lo que la componente del vector velocidad en el eje  $x$  es

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$



A diferencia de la magnitud del vector velocidad, siempre positiva, la componente  $v_x$  es positiva o negativa según que el móvil se desplace en la dirección positiva o negativa del eje  $x$ . La magnitud de  $\vec{v}$  es simplemente el valor absoluto de  $v_x$ .

Como ya dijimos en general para los vectores, la magnitud de  $\vec{v}$  puede escribirse de dos maneras y entonces:

magnitud de  $\vec{v} = |\vec{v}| = v = |v_x| = \text{valor absoluto de } v_x$ .

Se llama a veces rapidez (en inglés speed) a la magnitud del vector velocidad. Las dimensiones de la velocidad son:

$$\text{dimensión de } v = [v] = \frac{L}{T} = LT^{-1},$$

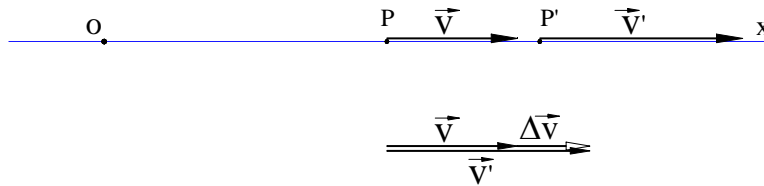
y su unidad en el SI es  $\frac{m}{s} = m s^{-1}$ .

La velocidad es una función vectorial del tiempo  $\vec{v}(t)$  que varía de un instante a otro. En  $t' = t + \Delta t$ , será

$$\vec{v}' = \vec{v}(t + \Delta t) = v_x(t + \Delta t) \hat{i}.$$

El cambio en el vector velocidad,  $\Delta\vec{v}$ , durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  será

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \Delta v_x \hat{i}.$$



Para hacer la diferencia  $\vec{v}' - \vec{v} = \Delta\vec{v}$  hemos trasladado  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$  a un origen común.

Se llama **aceleración media** (o promedio) durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , al vector

$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i},$$

y es un vector que tiene la dirección del cambio de velocidad  $\Delta\vec{v}$ .

### Aceleración

La aceleración del punto móvil en el instante  $t$  se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiende a cero,

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t},$$



que es entonces la derivada temporal de la función vectorial velocidad,

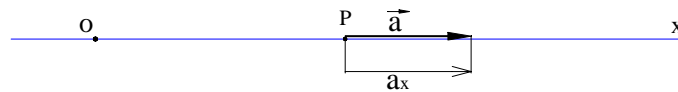
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}.$$

En componentes

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} = a_x \hat{i},$$

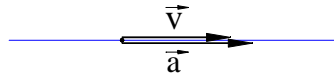
con lo que la componente del vector aceleración en el eje  $x$  es

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x.$$

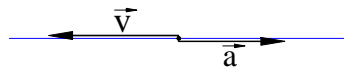


Examinando la dirección de  $\Delta \vec{v}$  puede verse que, si la magnitud de  $\vec{v}$  está aumentando, el vector  $\vec{a}$  tiene la misma dirección de  $\vec{v}$ . Si está disminuyendo, es decir si el móvil está frenando, el vector  $\vec{a}$  tiene dirección contraria a  $\vec{v}$ , independientemente de cuál sea la dirección positiva del eje  $x$ . Por ejemplo,

Móvil hacia la derecha  
"acelerando"



Móvil hacia la izquierda  
"frenando"



Las dimensiones de la aceleración son

$$\text{dimensión de } a = [a] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2} = L T^{-2},$$

y su unidad en el SI es  $\frac{m}{s^2} = m s^{-2}$ .

Si consideramos la componente  $v_x$  como una función de  $x$ , escrita  $v_x(x)$ , y hacemos la función compuesta con  $x(t)$ , tendremos  $v_x(x(t))$ . Aplicando la derivada de la función compuesta o regla de la cadena tendremos

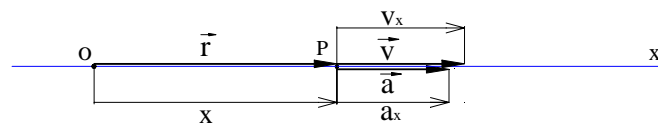
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

que, como  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , queda

$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx},$$

resultado de gran importancia.

Resumamos los conceptos fundamentales y sus definiciones.



#### Vectores

Posición	$\vec{r}$
Velocidad	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Aceleración	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

#### Componentes

$x$
$v_x = \frac{dx}{dt}$
$a_x = \frac{dv_x}{dt}$

La posición, velocidad y aceleración son vectores. Sus componentes a lo largo de un eje  $x$  son  $x$ ,  $v_x$ ,  $a_x$ , pero se acostumbra decir simplemente “la posición  $x$ ”, “la velocidad  $v_x$ ”, “la aceleración  $a_x$ ”. Más aún, en el movimiento rectilíneo, para simplificar la notación, se omiten a menudo los subíndices al escribir las componentes de la velocidad y aceleración, escribiendo simplemente  $v$  y  $a$  para las componentes, que son positivas o negativas. En esta notación simplificada  $v$  y  $a$  son pues componentes y no deben confundirse con las magnitudes o módulos  $|\vec{v}|$  y  $|\vec{a}|$ , siempre positivos, de los correspondientes vectores.

En **notación simplificada** tendremos pues

$x$ $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$
--



general es una función del tiempo,  $\vec{r}(t)$ : en un instante cualquiera  $t$  ( $t$  es una variable real que toma valores en un intervalo de los reales), la función vectorial  $\vec{r}$  (o sus componentes) es la posición general del punto móvil.

Conocer cinemáticamente a fondo un movimiento es conocer en situación general la aceleración, velocidad y posición como funciones del tiempo.

En cualquier  $t$

$$\begin{array}{l} \vec{a} \\ \vec{v} \\ \vec{r} \end{array} \quad \text{como funciones de } t,$$

o bien sus componentes en unos ejes adecuados. Por ejemplo, en un movimiento rectilíneo en el eje  $x$ ,

$$\begin{array}{l} a_x \\ v_x \\ x \end{array} \quad \text{como funciones de } t.$$

Hay algunos movimientos en los cuales es esencial expresar en situación general la aceleración y la velocidad como funciones de la posición.

La aceleración en situación general de un movimiento, proviene del análisis dinámico mediante la segunda ley de Newton y de ese modo, un problema cinemático básico, que es un problema de cálculo, de ecuaciones diferenciales, consiste en hallar por integración las funciones velocidad y posición, teniendo en cuenta las condiciones iniciales.

### Posiciones o situaciones particulares

Conocida la situación general, es decir las funciones aceleración, velocidad y posición, se requiere a menudo particularizar dichas funciones para posiciones o instantes específicos. En muchos casos es recomendable, por claridad, denotar adecuadamente las posiciones particulares, distinguiendo las variables y funciones como  $t$ ,  $x$ ,  $v_x$ , de los valores concretos o particulares que toman. Por ejemplo, en la situación particular A serán:  $t_A$ ,  $x_A$ ,  $v_{Ax}$ .

Estudiar en su descripción cinemática el movimiento de un cuerpo no es aplicar más o menos automáticamente unas fórmulas, sino plasmar de modo reflexivo y bien articulado un modelo matemático, cuya adecuación y cuyas limitaciones para describir movimientos reales hay también que analizar. Los puntos importantes de análisis dados más arriba, que en problemas elementales se tornan muy sencillos, proporcionan a quien los atienda y en ellos se ejercite, un método potente y valioso de trabajo que le permitirá abordar con orden y con confianza problemas más arduos.

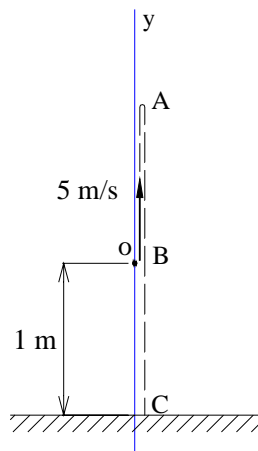
## EJEMPLOS Y EJERCICIOS

### 1. EJEMPLO

Desde un punto situado a 1 m de altura sobre el piso se lanza verticalmente hacia arriba un pequeño cuerpo, con velocidad de  $5 \text{ m s}^{-1}$ . Estudiar su movimiento.

#### Unidades

Sistema internacional (SI) de unidades.



#### Marco de referencia y ejes

Tomemos como marco de referencia el piso, es decir un marco localmente anclado en la tierra. Fijemos en ese marco un eje  $y$  vertical hacia arriba, con origen en el punto de lanzamiento.

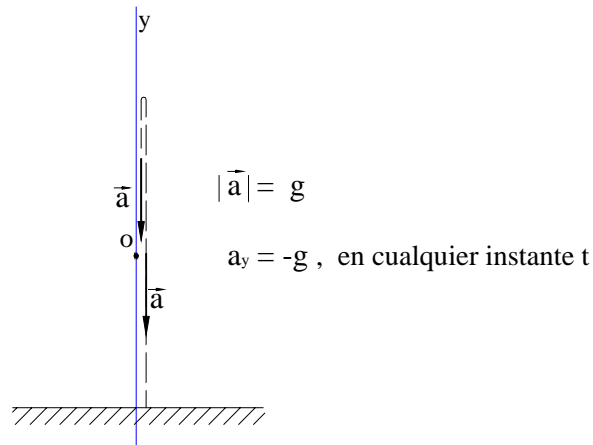
Alternativas: podría tomarse el origen en el piso y el eje hacia arriba o también, el origen en el punto de lanzamiento y el eje hacia abajo. Ensaye.

#### Aceleración

Sometido únicamente a la atracción de la tierra, despreciando por tanto fuerzas como la fricción del aire, un cuerpo se mueve, cerca de la superficie terrestre, con una aceleración constante, igual para todos los cuerpos, independientemente de su forma, tamaño o constitución, llamada **aceleración de la gravedad**, hecho que fue inicialmente establecido por Galileo.

Dicha aceleración de la gravedad es un vector dirigido verticalmente hacia abajo y su magnitud  $g$  tiene un valor aproximado de  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ .

En todo punto de la trayectoria, esté el cuerpo subiendo o bajando, la aceleración es pues la misma.



### Condiciones iniciales

De la infinidad de movimientos posibles con esa misma aceleración, lo que permite individualizar un único movimiento concreto, como el efectivamente realizado por el cuerpo que nos interesa, son las condiciones iniciales: la posición y la velocidad que tiene el cuerpo en un instante determinado.

En un instante  $t_0$  serán:

$$y(t_0) = y_0$$

$$v_y(t_0) = v_{oy}.$$

En nuestro problema concreto, eligiendo en el origen  $O$   $t_0 = 0$ , por sencillez, tendremos

$$\begin{aligned} \text{condiciones iniciales en } O, \quad & y(0) = 0 \\ & v_y(0) = 5, \end{aligned}$$

que escribiremos también, simplemente como

$$\begin{aligned} \text{en } 0, \quad t = 0, \quad & y = 0 \\ & v_y = 5. \end{aligned}$$

### Posición general

Como la aceleración del móvil es la misma desde el lanzamiento (situación  $O$ ) hasta un instante antes de chocar con el piso (situación  $C$ ), podemos estudiar todo el movimiento con el mismo eje, sin necesidad de estudiar separadamente el ascenso y el descenso.

Lo fundamental de la cinemática, conocer un movimiento, es, como dijimos, conocer en un instante cualquiera  $t$ , las funciones aceleración, velocidad y posición. La aceleración ya la conocemos,  $a_y = -g$ , la velocidad se obtiene por integración así:

$$\begin{aligned} a_y &= -g, \\ \int_5^{v_y} dv_y &= -g \int_0^t dt, \\ v_y &= 5 - gt. \end{aligned}$$

Hemos planteado una integración definida, usando como límite inferior la condición inicial  $v_y = 5$  en  $t = 0$  y como límite superior la situación general.

Integremos ahora la función velocidad para obtener la función posición, teniendo en cuenta la condición inicial  $y = 0$  en  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = 5 - gt \\ \int_0^y dy &= \int_0^t (5 - gt) dt \\ y &= 5t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Así, en posición general,

$$\begin{aligned} a_y &= -g \\ v_y &= 5 - gt \\ y &= 5t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

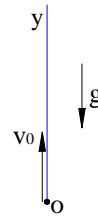
Aprender a obtener por integración las funciones velocidad y posición es muy importante. Sin embargo, hay muchos problemas con la misma aceleración constante y con condiciones iniciales análogas y es innecesario realizar cada vez las integraciones, pudiéndose escribir de una vez las funciones en situación general.

Por ejemplo, con eje  $y$  hacia arriba y condiciones iniciales, en  $t = 0$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ v_y &= v_0, \end{aligned}$$

se obtiene en posición general

$$\begin{aligned}
 a_y &= -g \\
 v_y &= v_o - g t \\
 y &= v_o t - \frac{g t^2}{2}
 \end{aligned}$$

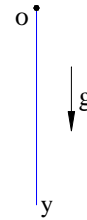


O bien, sin un cuerpo se suelta desde el origen, con eje y hacia abajo, en  $t = 0$

$$\begin{aligned}
 y &= 0 \\
 v_y &= 0,
 \end{aligned}$$

y en posición general

$$\begin{aligned}
 a_y &= g \\
 v_y &= g t \\
 y &= \frac{1}{2} g t^2.
 \end{aligned}$$



Volvamos a nuestro problema inicial para estudiar algunas posiciones particulares interesantes.

### Posiciones particulares

Situación A: punto de máxima altura. Como la  $y$  es máxima, su derivada, es decir la velocidad, es cero y entonces

$$v_{Ay} = 0 = 5 - g t_A,$$

y por tanto,

$$t_A = \frac{5}{g} = 0.51 \text{ s},$$

en donde hemos usado un valor aproximado para  $g$  de  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ .

La altura máxima  $y_A$  será entonces

$$y_A = 5 \times \frac{5}{g} - \frac{g \times 5^2}{2 g^2} = \frac{25}{2 g} = 1.28 \text{ m}.$$



Este valor permite “calibrar” aproximadamente la velocidad inicial al realizar experimentalmente el problema.

Situación B: el móvil pasa por el origen durante el descenso.

$$y_B = 0 = 5 t_B - \frac{g t_B^2}{2} = t_B \left( 5 - \frac{g t_B}{2} \right),$$

con lo que

$$t_B = \frac{10}{g} = 1.02 \text{ s}.$$

El otro valor  $t_B = 0$ , no corresponde a la situación B sino a la situación inicial 0, en la que  $y_0 = 0$ .

$$v_{By} = 5 - g \times \frac{10}{g} = -5 \text{ m s}^{-1},$$

en donde el signo - indica que el móvil va hacia abajo.

Note que la “distancia” recorrida por el móvil hasta B es  $2 \times 1.28 = 2.56 \text{ m}$ , pero la “posición” es  $y_B = 0$ . La distancia recorrida es a veces interesante, pero el concepto cinemático fundamental es el de “posición ocupada” en un cierto instante.

Situación C: Un instante antes de chocar con el piso,

$$y_C = -1 = 5 t_C - \frac{g t_C^2}{2},$$

y así, con  $g = 9.8$

$$4.9 t_C^2 - 5 t_C - 1 = 0,$$

y, resolviendo la cuadrática, obtenemos dos valores,  $t_C = 1.19$  y  $t_C' = -0.17$ . Descartando este último porque correspondería a una situación antes del lanzamiento, tenemos

$$t_C = 1.19 \text{ s},$$

y con ese valor,

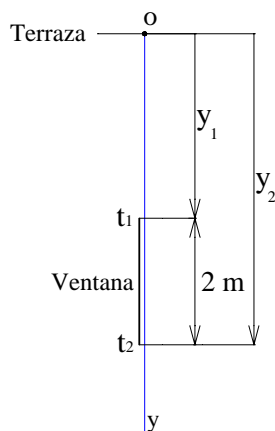
$$v_{Cy} = -6.66 \text{ m s}^{-1}.$$

## 2. EJERCICIO

Un objeto soltado desde la terraza de un edificio, tarda una décima de segundo en recorrer los 2 m de una ventana situada más abajo, ¿A qué altura sobre la parte superior de la ventana se encuentra la terraza?  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$

Unidades: SI

Marco de referencia: el edificio. Eje y hacia abajo con origen en la terraza.



Condiciones iniciales

$$t = 0, \quad y = 0 \\ v_y = 0$$

Situación general

$$a_y = g \\ v_y = gt \\ y = \frac{1}{2}gt^2$$

Situaciones particulares (1) y (2):

$$y_2 - y_1 = 2, \quad \text{y así} \quad \frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 2 \quad (1)$$

$$t_2 - t_1 = 0.1 \quad (2)$$

Estructura algebraica: 2 ecuaciones con 2 incógnitas,  $t_1$  y  $t_2$ . Resolviendo,

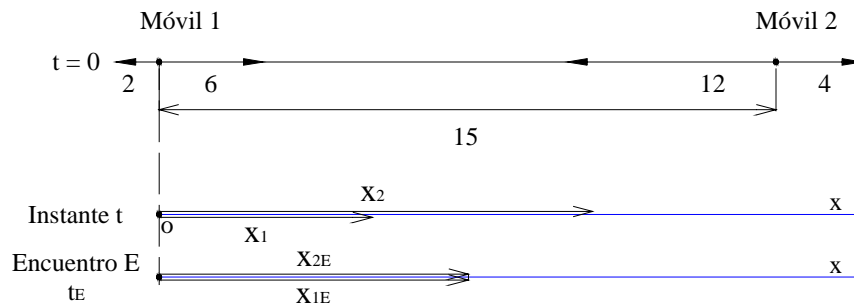
$$t_1 = 1.99 \text{ s} \quad y_1 = 19.40 \text{ m} \\ \text{y así} \\ t_2 = 2.09 \text{ s} \quad y_2 = 21.40 \text{ m}$$

Altura de la terraza sobre la parte superior de la ventana,  $y_1 = 19.40 \text{ m}$ .

## 3. EJERCICIO

Dos móviles van al encuentro por una recta, con velocidades de  $6 \text{ m s}^{-1}$  y  $12 \text{ m s}^{-1}$ . Cuando están separados  $15 \text{ m}$ , aplican simultáneamente los frenos y desaceleran a  $2 \text{ m s}^{-2}$  y  $4 \text{ m s}^{-2}$  respectivamente. Estudiar los movimientos de ambos y su posible encuentro.

Móviles 1 y 2: Marco de referencia fijo a la recta. Notación simplificada ( $v$  en vez de  $v_x$ ,  $a$  en vez de  $a_x$ ). Unidades SI. Un solo eje  $x$ , con origen en el móvil 1 en  $t = 0$ , y un solo reloj para ambos móviles.



	Móvil 1	Móvil 2
Condiciones iniciales	$x_1(0) = 0$ $v_1(0) = 6$	$x_2(0) = 15$ $v_2(0) = -12$
Posición general	$a_1 = -2$ $v_1 = 6 - 2t$ $x_1 = 6t - t^2$	$a_2 = 4$ $v_2 = -12 + 4t$ $x_2 = 15 - 12t + 2t^2$

Situación particular E. Encuentro

$$x_{1E} = x_{2E}, \text{ así, } 6t_E - t_E^2 = 15 - 12t_E + 2t_E^2,$$

$$t_E = 1 \text{ s}$$

$$t_E' = 5 \text{ s.}$$

Con  $t_E = 1$ ,  $v_{1E} = 4 \text{ m/s}$   
 $v_{2E} = -8 \text{ m/s.}$

Si son dos rectas paralelas próximas, hay un segundo encuentro posible, al retorno, con

$$t_E' = 5 \text{ s, } v_{1E}' = -4 \text{ m/s}$$

$$v_{2E}' = 8 \text{ m/s.}$$

Explique este último encuentro.

#### 4. EJEMPLO

Un lanzador de béisbol puede lanzar la bola a unos 140 km/hora. Estimar la aceleración durante el lanzamiento.

Unidades.

Convirtamos al SI de unidades.

$$140 \frac{\text{km}}{\text{hora}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ s}} \approx 40 \text{ m s}^{-1}.$$

Por tratarse de un estimativo, no muy preciso, redondeamos el valor.

##### El móvil

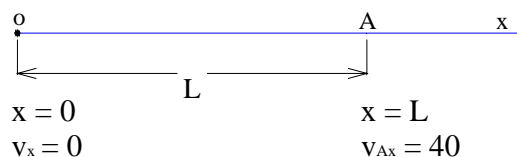
El móvil que estudiaremos es la bola, tratada como si fuese un punto, es decir haciendo caso omiso de su tamaño y de sus rotaciones. La estudiaremos durante el lanzamiento, es decir, desde que el lanzador tiene su brazo estirado hacia atrás y la bola tiene una velocidad inicial cero, hasta cuando, después de impulsarla durante un trayecto, el lanzador abre su mano y cesa el contacto con la bola. En este instante, situación particular A, la bola lleva una velocidad de unos  $40 \text{ m s}^{-1}$ .

Estimar, aún crudamente, el tiempo que dura el movimiento, es difícil. En cambio, su recorrido L puede estimarse en unos 3 m o algo más.

Asumamos que la trayectoria es una recta y que la aceleración es constante.

##### Marco de referencia. Ejes. Condiciones iniciales

Elijamos un marco fijo al piso y un eje  $x$  con origen donde comienza el movimiento y en su dirección.



Las condiciones iniciales son pues, en  $t = 0$ ,  $x = 0$   
 $v_x = 0$ .

##### Posición o situación general

Como no está involucrado el tiempo en el estimativo, usemos la regla de la cadena para hallar la velocidad en función de la posición.

Usando las condiciones iniciales, con  $a_x$  asumido constante, tendremos

$$\int_0^{v_x} v_x \, dv_x = a_x \int_0^x dx ,$$

y por tanto,

$$\frac{v_x^2}{2} = a_x x .$$

Nótese que para obtener la función  $v_x$  es necesario integrar hasta la posición general, es decir, los límites superiores de las integrales son las variables  $x$  y  $v_x$ . También podría integrarse hasta valores particulares, digamos en la situación A, pero entonces no se obtendrían funciones válidas para todo el movimiento, sino relaciones válidas únicamente para el punto A. Lo fundamental son las funciones y así lo conveniente es integrar hasta valores genéricos para luego, si es necesario, particularizar.

En situación general, entonces

$$a_x : \text{constante}$$

$$v_x^2 = 2 a_x x .$$

### Posición o situación particular A

$$\text{Con } x_A = L \approx 3$$

$$v_{Ax} \approx 40 ,$$

$$a_x = \frac{(40)^2}{2 \times 3} \approx 267 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} ,$$

que, expresada, como se hace con frecuencia, en términos de la aceleración de la gravedad  $g$ , es

$$a_x = 267 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \left( \frac{g}{10 \text{ m/s}^2} \right) = 26.7 \, g ,$$

es decir

$$a_x \approx 27 \, g .$$

## 5. EJEMPLO. Movimiento uniforme

Es el movimiento con  $\vec{v}$  constante y por tanto con  $\vec{a} = 0$ . El movimiento es rectilíneo ya que la dirección de  $\vec{v}$  es constante y además  $v_x$  es constante.

Tomando el eje  $x$  en dirección del movimiento y eligiendo el origen de modo que en  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned}x &= 0 \\v_x &= v.\end{aligned}$$

Se tiene, en posición general, integrando,

$$\begin{aligned}a_x &= 0 \\v_x &= v \\x &= v t\end{aligned}$$

Recuperamos así una conocida expresión de la cinemática más elemental: “la distancia recorrida es igual a la velocidad por el tiempo transcurrido”, aseveración correcta en este caso, que, de forma más general leeríamos como: “la posición ocupada por el móvil en el instante  $t$  es....”.

Muchos móviles se mueven con velocidad constante, pero un caso importante es el de la velocidad de propagación de las ondas. Por ejemplo, el sonido se propaga en el aire a unos  $340 \text{ m s}^{-1}$ . Pero, en física, la velocidad más importante de todas es la velocidad de la luz,

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}},$$

enorme en comparación con las velocidades cotidianas de los cuerpos macroscópicos, incluidas las velocidades astronómicas de planetas, satélites y naves espaciales, de unas pocas decenas de km/s.

La cinemática que estamos presentando no es aplicable a objetos que se mueven a velocidades comparables a la de la luz. Para describir el movimiento de esos objetos rápidos es necesario apelar a la Teoría de la Relatividad.

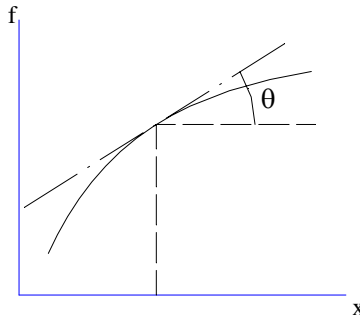
## 6. EJEMPLO. Gráficos $v_x$ versus $t$ . Interpretación geométrica

Recordemos rápidamente las interpretaciones geométricas de la derivada y la integral definida en la gráfica de una función  $f(x)$ .

Sean  $f$  y  $x$  adimensionales, es decir números reales sin unidades:

dimensión de  $f = 1$

dimensión de  $x = 1$ .

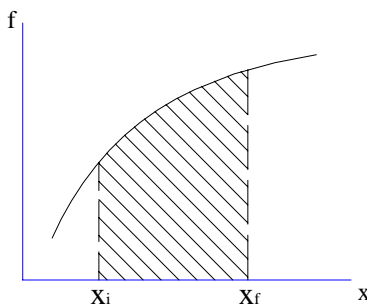


La derivada de la función en un cierto punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Esa derivada es también adimensional.

$\frac{df}{dx}$  : pendiente de la recta tangente.

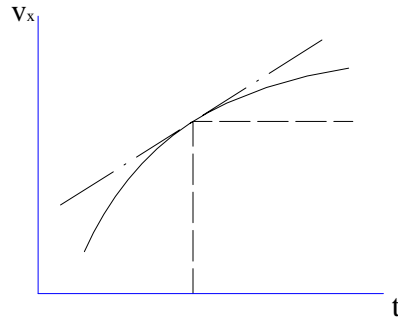
$$\frac{df}{dx} = \tan \theta.$$

Si las escalas de  $f$  y  $x$  en el dibujo son idénticas,  $\theta$  será el ángulo formado por la recta tangente con el eje  $x$ . Así, si  $\frac{df}{dx} = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$ .

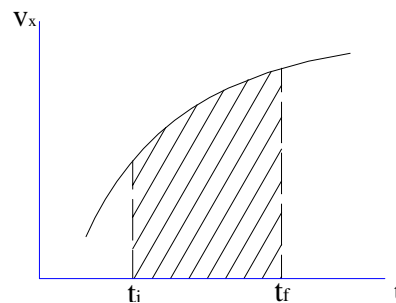


La integral definida,  $\int_{x_i}^{x_f} f \, dx$ , representa el “área” (también adimensional) bajo la curva entre  $x_i$  y  $x_f$ .

Ahora, aunque las gráficas de  $x$  Vs.  $t$  y de  $a_x$  Vs.  $t$  en un movimiento rectilíneo son interesantes, la gráfica más importante por su contenido y su interpretación es la gráfica de  $v_x$  Vs.  $t$ .



La aceleración  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  puede verse como la “pendiente” de la recta tangente a la gráfica en un determinado instante. Pero ahora esa “pendiente” tiene dimensiones  $\frac{L}{T^2}$  y hay que ser cuidadoso con el dibujo, con la interpretación geométrica y con los ángulos, puesto que las escalas de  $v_x$  (con dimensiones  $\frac{L}{T}$ ) y de  $t$  (con dimensión  $T$ ) son independientes y así una “pendiente” de  $1 \text{ m/s}^2$  no necesariamente equivale a un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $t$  en el dibujo.



Veamos la integral definida. Como  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,

$$\int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{t_i}^{t_f} v_x dt ,$$

$$\Delta x = x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} v_x dt ,$$



y el desplazamiento  $\Delta x$  durante el intervalo entre  $t_i$  y  $t_f$  es el “área” bajo la curva. Pero dicha “área” tiene dimensión L.

Así pues, en la gráfica de la velocidad versus tiempo en el movimiento rectilíneo, la aceleración es la “pendiente” y el desplazamiento es el “área” bajo la curva, con sus correspondientes dimensiones.

Esta interpretación agiliza la solución de varios problemas cuyo planteamiento analítico completo sería menos simple. Por ejemplo: un auto va a 20 m/s, frena uniformemente y en 2 s se detiene. ¿Qué distancia recorre?

Analíticamente:

$$\text{O} \quad \text{-----} \quad \text{A} \quad \text{-----} \quad \text{x}$$

$$\begin{array}{ll} t = 0, & x_0 = 0 \\ v_0 = 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} t_A = 2 \\ v_A = 0 \end{array}$$

En posición general, con notación simplificada,

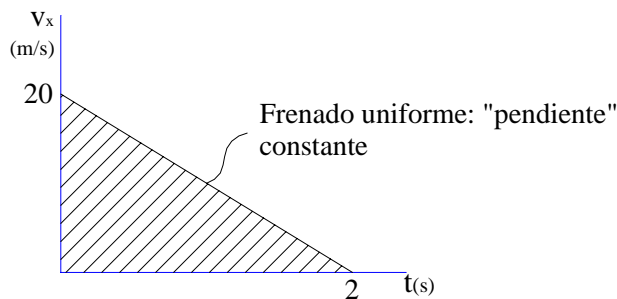
$$\begin{aligned} a & \text{ (constante)} \\ v &= 20 + at \\ x &= 20t + \frac{at^2}{2} \end{aligned}$$

Posición particular A:

$$v_A = 0 = 20 + a \times 2 \quad \Rightarrow \quad a = -10$$

$$x_A = 20 \times 2 - \frac{10 \times 2^2}{2} = 20. \qquad \text{Distancia recorrida: } 20 \text{ m.}$$

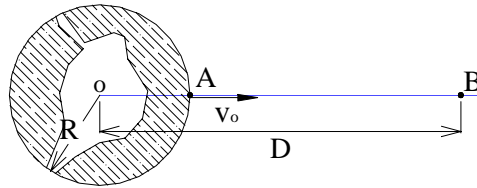
Gráficamente:



$$\text{Desplazamiento} = \text{“área” bajo la curva} = \frac{20 \text{ m/s} \times 2 \text{ s}}{2} = 20 \text{ m}.$$

El problema es más simple gráficamente.

## 7. EJEMPLO. Aceleración variable dependiente de la posición



Desde la superficie de la tierra se lanza un cuerpo en dirección radial con velocidad  $v_o$ . A una distancia  $x$  del centro del planeta la aceleración es  $a_x = -\frac{C}{x^2}$ , siendo  $C$  una constante positiva, que estudiaremos al presentar la interacción gravitacional. ¿Hasta qué distancia  $D$ , desde el centro, llega el cuerpo?

En este problema se trata de velocidades de tipo astronómico: velocidades del orden de unos cuantos km/s. No estamos pues en el caso de la caída libre cerca de la superficie, que involucra velocidades de unos cuantos m/s y en cuyo caso la aceleración es constante de valor  $g$ . Elijamos un marco de referencia con origen en el centro de la tierra y orientado hacia las estrellas y un eje  $x$  en dirección radial.

Condiciones iniciales en A:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x_A &= R \text{ (radio terrestre)} \\ v_{Ax} &= v_o \end{aligned}$$

Posición general:

Integrando la aceleración, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \int_{v_o}^{v_x} v_x \, dv_x &= \int_R^x \left( -\frac{C}{x^2} \right) dx, \\ \frac{v_x^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} &= \frac{C}{x} - \frac{C}{R}, \quad \text{y así,} \quad v_x^2 = v_o^2 - 2C \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Posición particular B:

$$v_{Bx} = 0$$

$$x_B = D,$$

por tanto 
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R} - \frac{v_o^2}{2C} \quad y \quad D = \left( \frac{1}{R} - \frac{v_o^2}{2C} \right)^{-1}.$$

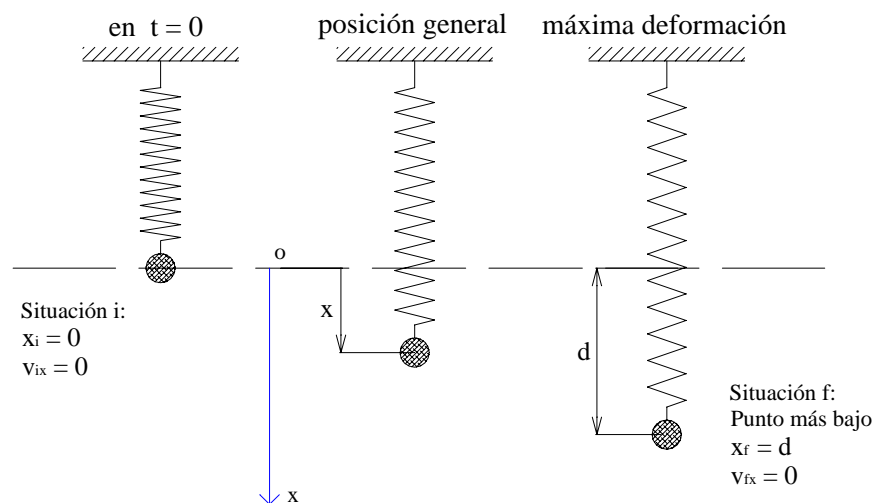
El cuerpo se detiene instantáneamente en B (máximo alejamiento) pero, como hay una aceleración hacia el centro, vuelve hacia la tierra.

Un problema importante que estudiaremos luego con más detalle es el siguiente: ¿cuál es la mínima velocidad  $v_o$  para que el cuerpo no retorne a la tierra? Esa velocidad se llama la velocidad de escape. En ese caso  $D \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{D} \rightarrow 0$ ,

$$y \quad v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2C}{R}}.$$

Para la tierra tiene un valor de unos 11 km/s. Es la velocidad con que una nave interplanetaria debe salir de la tierra, después de un viaje impulsado por cohetes.

## 8. EJERCICIO. Aceleración dependiente de la posición



Una bola se suspende verticalmente de un resorte. Se suelta desde la situación inicial  $i$  en la cual el resorte se encuentra sin deformación.

Con el eje indicado, en la situación genérica, la aceleración es  $a_x = 10 - 20x$  (unidades SI).  
¿Hasta qué punto baja la bola?

**Sugerencia:** Regla de la cadena.

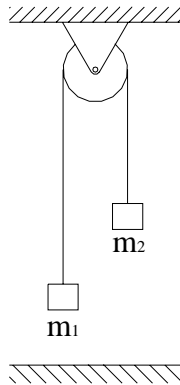
Resultado:  $d = 1 \text{ m}$ .

## 9. EJEMPLO. Movimientos ligados. Aceleración constante

### Máquina de Atwood

(George Atwood (1746–1807). Matemático y físico inglés, diseñó la célebre máquina para estudiar el movimiento con aceleración constante, alrededor de 1780 en la Universidad de Cambridge).

**Descripción:** La máquina de Atwood consta de una polea (de masa pequeña y muy poca fricción en el eje) por la que pasa una cuerda de la que se suspenden verticalmente dos masas  $m_1$  y  $m_2$ . Al variar las masas de  $m_1$  y  $m_2$  se varían las aceleraciones de sus movimientos.

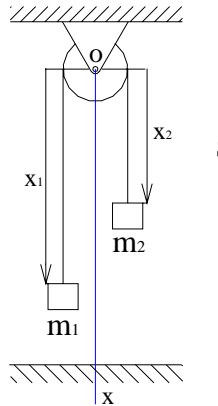


Haremos luego el estudio dinámico: relaciones entre las fuerzas, masas y aceleraciones. Ahora nos interesa el **estudio cinemático**: relación entre los movimientos de  $m_1$  y  $m_2$ .

**Marco de referencia:** El laboratorio, que incluye el piso, el techo, etc. Es un marco localmente unido a tierra.

**Ejes:** En ese marco de referencia hay dos maneras adecuadas pero diferentes de elegir los ejes. Veamos:

- 1) Elegir un mismo origen y una misma dirección, es decir elegir un mismo eje para ambos cuerpos móviles. En situación general,  $x_1$  y  $x_2$  son las posiciones de  $m_1$  y  $m_2$ .



La relación entre los movimientos de las partículas  $m_1$  y  $m_2$  la establece la cuerda inextensible que las une, pasando por la polea, y cuya longitud es

$$\ell = x_1 + \pi R + x_2 ,$$

donde  $R$  es el radio de la polea.

Como  $\ell$  y  $R$  son constantes, tomando incrementos

$$0 = \Delta x_1 + \Delta x_2 ,$$

o bien, derivando respecto al tiempo la primera relación,

$$0 = v_1 + v_2 .$$

Derivando de nuevo,

$$0 = a_1 + a_2 .$$

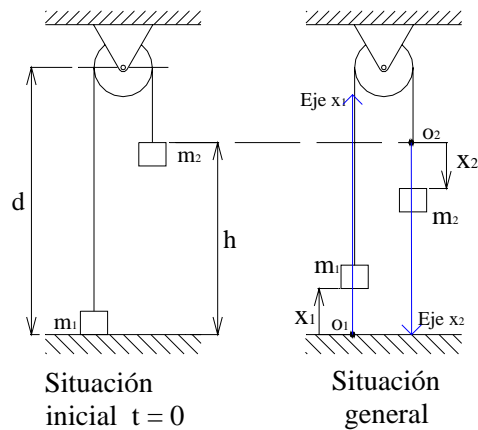
La relación entre los movimientos de  $m_1$  y  $m_2$  es entonces:

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2$$

$$v_1 = -v_2$$

$$a_1 = -a_2 .$$

- 2) La otra elección conveniente de ejes es así: Asumamos una dirección de movimiento de la máquina, por ejemplo supongamos que  $m_1$  sube y  $m_2$  baja. Tomemos entonces un eje hacia arriba para  $m_1$  y otro hacia abajo para  $m_2$ . Unos orígenes adecuados pueden ser en las situaciones iniciales en los cuales se sueltan las masas.



La longitud de la cuerda, en posición general, es ahora

$$\ell = (d - x_1) + \pi R + (d - h) + x_2.$$

Como  $\ell$ ,  $d$ ,  $R$  y  $h$  son constantes, tomando incrementos:

$$0 = -\Delta x_1 + \Delta x_2, \text{ o sea } \Delta x_1 = \Delta x_2,$$

es decir, al ser la cuerda inextensible, el desplazamiento hacia arriba de  $m_1$  es igual al desplazamiento hacia abajo de  $m_2$ .

Derivando respecto al tiempo la primera relación

$$0 = -v_1 + v_2, \text{ o bien } v_1 = v_2.$$

En cada instante la velocidad de ascenso de  $m_1$  es igual a la velocidad de descenso de  $m_2$ .

Derivando de nuevo

$$0 = -a_1 + a_2, \text{ o bien } a_1 = a_2.$$

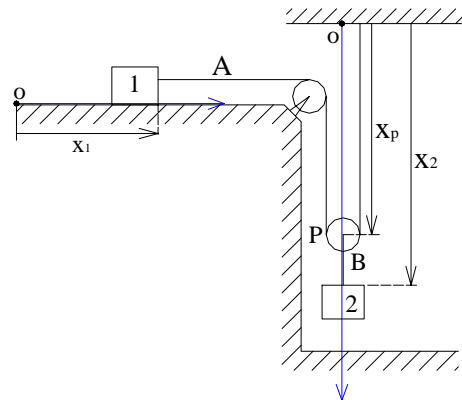
La relación entre los movimientos de  $m_1$  y  $m_2$  en esta elección de ejes es más simple:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$a_1 = a_2.$$

### 10. EJERCICIO. Movimientos ligados.



Estudiar las relaciones cinemáticas entre los movimientos de los bloques 1, 2 y el centro P de la polea móvil.

Plantear las longitudes de las cuerdas A y B, usando los ejes y la situación general mostrados.

Resultados para las velocidades:

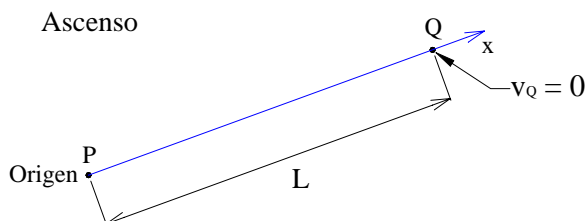
$$v_p = v_2$$

$$v_1 = 2 v_p .$$

### 11. EJERCICIO.

Se lanza un cuerpo deslizando hacia arriba por una rampa inclinada. Sube hasta un cierto punto y retorna al punto inicial. El tiempo total empleado es T. Debido a la fricción, que estudiaremos luego, la magnitud de la aceleración de frenado durante la subida es el doble de la magnitud de la aceleración de descenso. Hallar los tiempos de subida y bajada.

Marco: la Rampa



Situación general

$$a_x = -a_s \quad (\text{con } a_s > 0)$$

$$v_x = v_o - a_s t$$

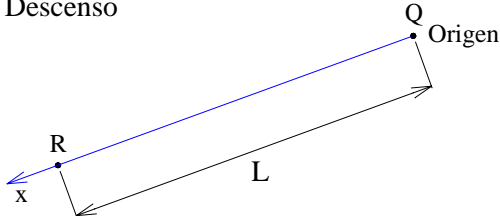
$$x = v_o t - \frac{a_s t^2}{2}$$

Posición particular Q:  $v_Q = 0$ . Muestre que  $L = \frac{a_s t_s^2}{2}$  (1)

$$t_Q = t_s$$

$$x_Q = L$$

Descenso



Situación general (otro reloj)

$$a_x = a_b$$

$$v_x = a_b t$$

$$x = \frac{a_b t^2}{2}$$

Posición particular R: muestre que  $L = \frac{a_b t_b^2}{2}$  (2)

$$(1) = (2), \text{ con } T = t_s + t_b, \text{ queda } t_s = T(\sqrt{2} - 1) = 0.41 T$$

$$t_b = T(2 - \sqrt{2}) = 0.59 T.$$

## PROBLEMAS

- Un tren que se mueve con aceleración constante pasa por una estación con velocidad  $v_o$ . Medio kilómetro mas adelante su velocidad es 30 km/h y 1 km más adelante de la estación su velocidad es 40 km/h. Hallar  $v_o$ .

$$10\sqrt{2} \text{ km/h}$$

- Un globo desciende con velocidad constante de 10 m/s. En cierto momento su tripulante deja caer una piedra sin comunicarle ningún impulso. Halle la distancia entre el globo y la piedra en función del tiempo. Evalúela a los 5 s.

**Sugerencia:** defina bien su marco de referencia y piense cuál es la velocidad inicial de la piedra.

$$122.5 \text{ m}$$

- Se lanza una piedra verticalmente hacia abajo desde el borde de la azotea de un edificio. Mientras transcurre el décimo segundo de caída, la piedra recorre una distancia igual al doble de la que recorrió mientras transcurrió el quinto segundo. ¿Con qué velocidad se lanzó la piedra?

$$4.9 \text{ m/s}$$

- Si un cuerpo recorre la mitad de su trayectoria en el último segundo de caída, encuentre el tiempo total de caída y la altura desde la cual se dejó caer.

$$t_{\text{caída}} = (2 + \sqrt{2}) \text{ s}$$



5. Se suelta una piedra desde la boca de un pozo. El sonido del impacto de la piedra con el fondo se oye 3 s después de haberla dejado caer. Determinar la profundidad del pozo. Velocidad del sonido en el aire = 340 m/s.

Chequeo: el descenso de la piedra es el 96% del tiempo total.

6. En el momento de arrancar con aceleración de  $5 \text{ m s}^{-2}$  hacia un muro a 500 m de distancia, un auto toca el pito. ¿Al cuánto tiempo oye el eco proveniente del muro y qué distancia ha recorrido hasta ese momento?

2.88 s ; 20.74 m

7. Dos autos A y B se mueven en la misma dirección, en carriles paralelos, con velocidades  $v_A$  y  $v_B$  respectivamente. Cuando el auto A está a una distancia  $d$  detrás de B, el auto A aplica los frenos, causando una aceleración de frenado constante de magnitud  $a$ . Demuestre que para que A alcance a B es necesario que  $v_A - v_B \geq (2 a d)^{1/2}$ .

**Sugerencia:** estudie el tiempo de encuentro.

8. Demuestre que, en general, en un lanzamiento vertical, las velocidades en una determinada posición al subir y al bajar tienen igual magnitud y los intervalos de tiempo transcurridos para subir a la altura máxima y para volver a bajar al mismo punto, son iguales.

**Sugerencia:** Origen y condición “inicial” en la altura máxima. Eje hacia abajo. Los tiempos antes de la altura máxima son negativos.

9. Un tren acelera uniformemente partiendo del reposo a razón de  $2 \text{ m s}^{-2}$ , hasta alcanzar una velocidad de  $40 \text{ m s}^{-1}$ . Después de avanzar a esa velocidad durante un cierto tiempo, desacelera a razón de  $1 \text{ m s}^{-2}$  hasta detenerse. Si en total recorrió 4.000 m, halle el tiempo total transcurrido.

**Sugerencia:** Haga un gráfico de  $v$  contra  $t$  y recuerde las interpretaciones geométricas de la aceleración y del desplazamiento.

130 s

10. Un automovilista viaja a 16 m/s cuando observa que la luz de un semáforo 240 m delante de él se pone en rojo. Quiere pasar por el semáforo a la misma velocidad cuando cambia otra vez a verde a los 24 s. Si las ratas de frenado y de aceleración del auto son iguales, hallar su valor.

**Sugerencia:** gráfico de  $v$  contra  $t$ .

$1 \text{ m s}^{-2}$

11. Un malabarista desea tener simultáneamente tres bolas en el aire al mismo tiempo. Si lanza una bola cada 0,4 s, ¿cuánto dura cada bola en el aire?, ¿con qué velocidad inicial debe lanzar cada bola?

1.2 s ; 5.88 m/s

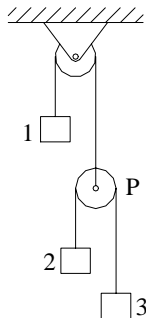
12. Se lanza un balón verticalmente hacia arriba con velocidad  $v_o$ . Un tiempo  $T$  después y desde la misma posición se lanza un segundo balón, también verticalmente hacia arriba y con la misma velocidad  $v_o$ . Calcular al cuánto tiempo, medido a partir del lanzamiento del segundo balón, ocurre la colisión entre ellos.

**Sugerencia:** Cada balón con su propio reloj comenzando en cero.

$$\frac{v_o}{g} - \frac{T}{2}$$

13. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba. El objeto pasa por una cierta altura  $H$ , medida respecto al punto de lanzamiento, en el instante  $t_1$  cuando va subiendo y en el instante  $t_2$  cuando viene bajando. Demuestre que,
- la velocidad de lanzamiento es  $v_o = \frac{1}{2} g (t_1 + t_2)$ ,
  - la altura  $H$  es,  $H = \frac{1}{2} g t_1 t_2$ ,
  - la altura máxima alcanzada por el objeto es  $\frac{g}{8} (t_1 + t_2)^2$ .

14.



Estudie las relaciones cinemáticas entre los movimientos de los bloques 1, 2, 3 y el centro  $P$  de la polea móvil.

**Sugerencia:** Un solo eje hacia abajo para las posiciones de los 4 móviles y recuerde que las dos cuerdas son inextensibles.

$$\text{Chequeo: } 2v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

15. Un móvil se aproxima a su lugar de destino con velocidad  $v$ . En el momento en que se encuentra a una distancia  $d$ , parte del lugar de destino hacia el móvil un emisario, que hace viajes sucesivos entre el móvil y el lugar de destino, con velocidad  $2v$ . Estudie el tiempo de cada viaje del emisario. Suma luego la serie y muestre que el tiempo total es  $\frac{d}{v}$  que es por supuesto el tiempo que tarda el móvil en llegar a su destino.

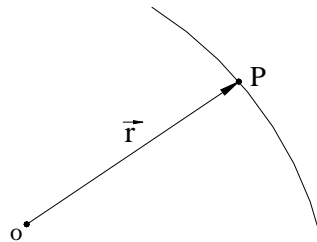
## 2.2 MOVIMIENTO PLANO

Consideremos un punto móvil cuya trayectoria con respecto a un marco de referencia bien determinado es una curva plana, es decir, una curva enteramente contenida en un plano, como un círculo o una parábola, a diferencia de una curva espacial alabeada, como una hélice.

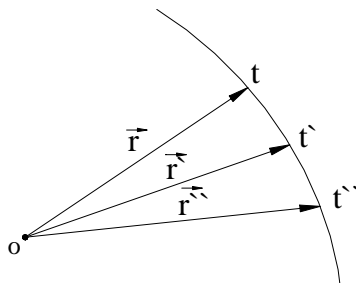
Como ya vimos, los conceptos fundamentales de la cinemática son los de marco de referencia, posición  $\vec{r}$ , velocidad  $\vec{v}$  y aceleración  $\vec{a}$ . En el movimiento rectilíneo los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  tenían la misma dirección de la recta. Ahora, en el movimiento curvilíneo, sus direcciones son distintas y su significación e interpretación geométrica se enriquecen.

### Posición

Fijemos un origen  $O$  en el marco de referencia. En un instante  $t$ , el punto móvil se encuentra en  $P$  y su posición está dada por el vector posición  $\vec{r}$ .



La posición  $\vec{r}$  es una función vectorial del tiempo,  $\vec{r}(t)$ : a cada instante  $t$  le corresponde unívocamente un vector  $\vec{r}$ .



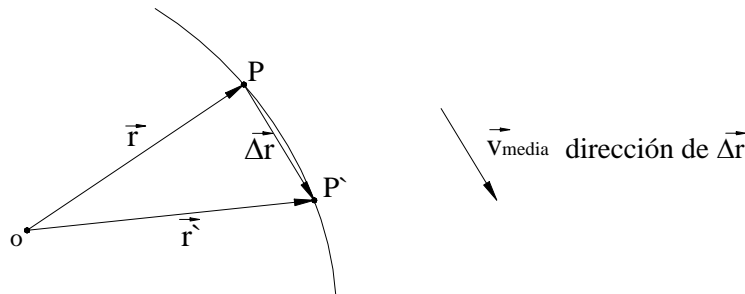
El extremo del vector  $\vec{r}$  describe la trayectoria a medida que  $t$  avanza.

En  $t' = t + \Delta t$  el punto móvil está en  $P'$  y su posición es

$$\vec{r}' = \vec{r}(t + \Delta t).$$

Se llama **desplazamiento**  $\Delta \vec{r}$  durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , al cambio en el vector posición

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} .$$



El desplazamiento tiene la dirección de la cuerda entre los puntos P y P', y se mide por ella y no por el arco de curva.

Se llama **velocidad media** (o promedio) durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , al vector

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} .$$

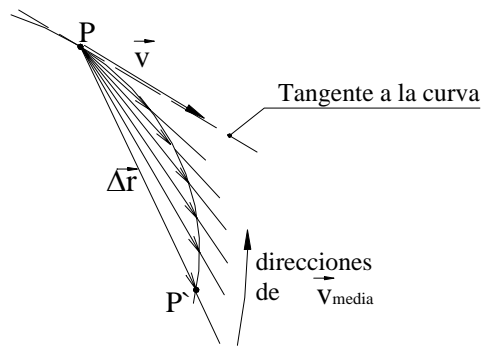
La velocidad media es un vector que tiene la misma dirección que el desplazamiento  $\Delta \vec{r}$ , como se muestra en la figura anterior.

### Velocidad

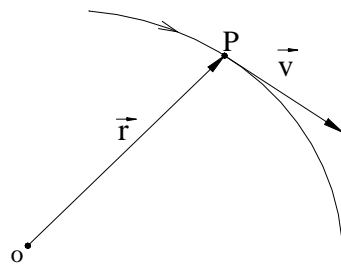
La velocidad del punto móvil en el instante t se define como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiende a cero y es, como ya vimos, la derivada respecto al tiempo de la función vectorial  $\vec{r}$ ,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} .$$

La dirección del vector velocidad tiene una interpretación geométrica fundamental. Como la velocidad media tiene la dirección del desplazamiento  $\Delta \vec{r}$  y éste está en dirección de la cuerda, la dirección de  $\vec{v}$  es el límite de las direcciones de las cuerdas trazadas desde el punto P a un punto P', a medida que el punto P' se aproxima a P. ¡ Pero ésta es la definición de lo que es la tangente a una curva en un punto !



El vector velocidad  $\vec{v}$  en un punto de la trayectoria es un vector tangente a dicha trayectoria y apunta en la dirección en que en ese instante se está recorriendo la curva.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

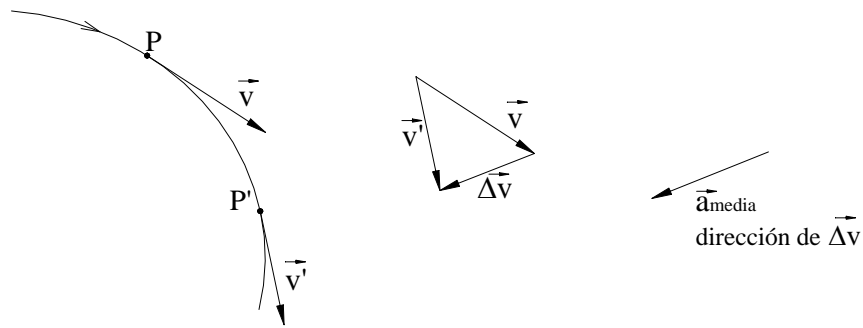
dirección tangente  
y en sentido  
del movimiento

La velocidad es siempre un vector, con magnitud y dirección. Su magnitud, según vimos antes, se escribe  $|\vec{v}| = v$  y se llama a veces rapidez. La velocidad es una función vectorial  $\vec{v}(t)$  que de un instante a otro cambia tanto en magnitud como en dirección. En  $t' = t + \Delta t$ , la velocidad es

$$\vec{v}' = \vec{v}(t + \Delta t)$$

y el cambio en el vector velocidad,  $\Delta\vec{v}$ , durante el intervalo  $\Delta t$  es

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}.$$



Para hacer la diferencia  $\vec{v}' - \vec{v} = \Delta \vec{v}$  hemos trasladado paralelamente los vectores a un origen común.

Como el vector velocidad es tangente a la trayectoria y su dirección va cambiando plegándose a la curva, el cambio  $\Delta \vec{v}$  apunta siempre hacia adentro de la concavidad de la curva.

La **aceleración media** (o promedio) durante el intervalo  $\Delta t$  es

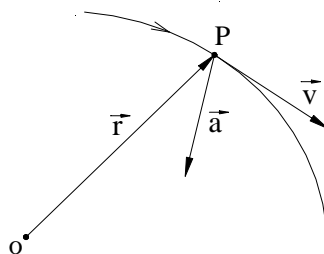
$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

y es un vector con la misma dirección de  $\Delta \vec{v}$ , es decir hacia dentro de la curva.

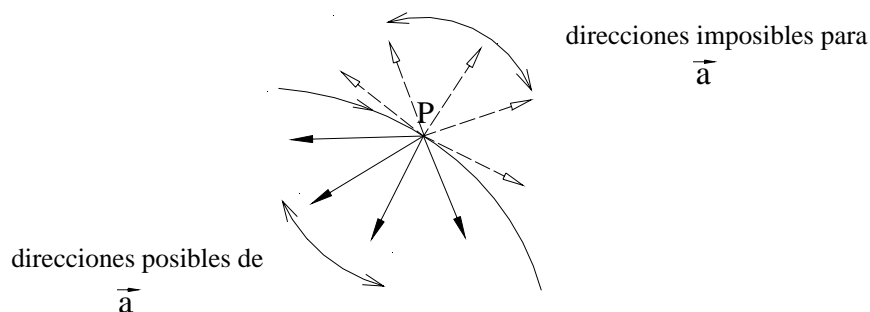
### Aceleración

La aceleración del punto móvil en el instante  $t$  es el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiende a cero. Es entonces la derivada respecto al tiempo de la función vectorial velocidad.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}.$$



Podemos dar una interpretación geométrica cualitativa a la dirección de  $\vec{a}$ . Según lo que vimos de  $\Delta \vec{v}$  y  $\vec{a}_{\text{media}}$ ,  $\vec{a}$  tiene que apuntar hacia adentro de la concavidad de la curva, nunca hacia afuera.



El vector aceleración es la rata temporal de cambio del vector velocidad, que cambia tanto en magnitud como en dirección. Veremos luego que hay una componente del vector aceleración vinculada sólo con el cambio de dirección de  $\vec{v}$  y otra componente asociada únicamente con el cambio en magnitud de  $\vec{v}$ : las componentes normal y tangencial de  $\vec{a}$ .

Como la definición de la derivada de una función vectorial que hemos usado para definir  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  es análoga a la de la derivada de una función escalar real, comparte con ésta algunas propiedades. Por ejemplo, la derivación de una suma es

$$\frac{d(\vec{u} + \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt},$$

y la de un producto de escalar por vector es

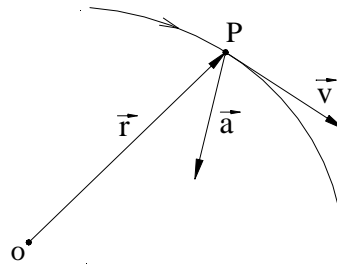
$$\frac{d(f \vec{v})}{dt} = \frac{df}{dt} \vec{v} + f \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

La presentación de conceptos que hemos hecho es válida no sólo para curvas planas sino para curvas espaciales cualquiera. Sin embargo, los movimientos más importantes que vamos a estudiar tienen trayectorias planas y por eso nos limitaremos a ellas.

En el trabajo anterior tenemos un marco de referencia bien determinado, en el que hemos fijado un origen O, pero no hemos elegido ningún sistema de ejes y coordenadas. Por eso, las propiedades geométricas que hemos visto de  $\vec{v}$  y de  $\vec{a}$  sólo dependen de su carácter vectorial y no de un sistema específico de coordenadas. Pero para el análisis concreto de un movimiento, unos ejes y coordenadas específicas se hacen imprescindibles. Presentaremos en primer lugar los ejes y coordenadas cartesianos, ilustrando su manejo con el movimiento parabólico y pospondremos para el estudio del movimiento circular la presentación de las direcciones y componentes normal y tangencial.

Resumamos nuevamente los conceptos y definiciones básicas de la cinemática:

Marco de referencia	
Posición	$\vec{r}$
Velocidad	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Aceleración	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$



## 2.3 COORDENADAS CARTESIANAS

Fijemos en el marco de referencia unos ejes cartesianos rectangulares con origen en O. Los vectores unitarios en las direcciones  $x, y$  se escriben:

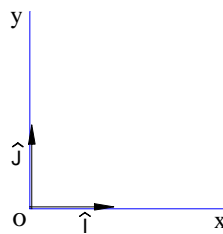
$$\hat{i} = \hat{x} = \hat{u}_x$$

$$\hat{j} = \hat{y} = \hat{u}_y$$

Usaremos aquí la escritura  $\hat{i}, \hat{j}$ .

Una característica muy importante que distingue a las coordenadas cartesianas, es la de que sus vectores unitarios son invariables: su magnitud, obviamente, es siempre 1 y sus direcciones permanecen constantes. Por eso

$$\frac{d\hat{i}}{dx} = \frac{d\hat{i}}{dy} = \frac{d\hat{j}}{dx} = \frac{d\hat{j}}{dy} = 0$$



Por esa razón, si  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ , con  $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  componente de la posición,



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}, \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases}$$

las componentes cartesianas del vector velocidad.

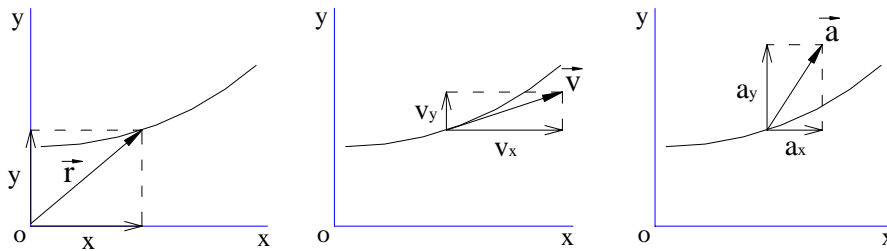
Magnitud de  $\vec{v} = |\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \end{cases}$$

componentes cartesianas del vector aceleración.

$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$  se llaman las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Si se elimina  $t$  de ellas se obtiene la ecuación cartesiana de la trayectoria.

Veamos gráficamente lo que son las componentes de  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  y sus relaciones.



$$\vec{r} \quad \begin{cases} x \\ y \end{cases} \quad \vec{v} \quad \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \end{cases} \quad \vec{a} \quad \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y \end{cases}$$

Los movimientos con aceleración constante se prestan bien para ser descritos en términos de coordenadas cartesianas. El ejemplo más conocido es sin duda el movimiento de proyectiles, llamado movimiento parabólico.

## EJEMPLOS Y EJERCICIOS

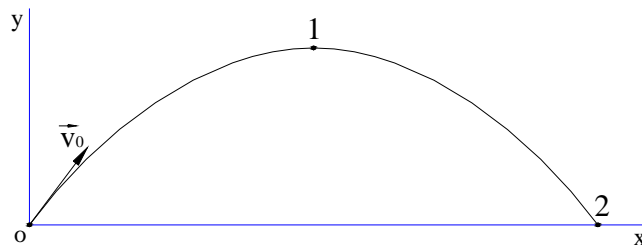
### 1. EJEMPLO. Movimiento parabólico

Se lanza un cuerpo con una cierta velocidad inicial, cerca de la superficie terrestre.

Si la velocidad es pequeña, de modo que pueden despreciarse los efectos de fricción con el aire, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza de atracción terrestre, como luego veremos con detalle, dando como resultado el hecho de que la aceleración del cuerpo es, en todos los puntos de su trayectoria, la aceleración de la gravedad, vector cuya magnitud es  $g$  y cuya dirección es vertical hacia abajo.

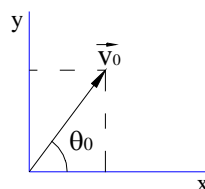
Supongamos que desde un punto 0 en el piso se lanza un cuerpo con velocidad  $\vec{v}_0$ .

Elijamos unos ejes  $x, y$ , con origen en el punto de lanzamiento:  $x$  horizontal;  $y$  vertical hacia arriba.



#### Condiciones iniciales

Recordemos que las condiciones iniciales son la posición y velocidad en un cierto instante. En este caso, en el origen 0, punto de lanzamiento, con  $\vec{v}_0$ :



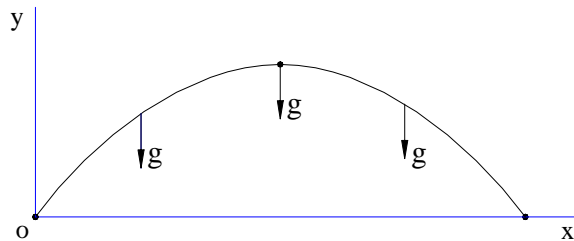
y llamando  $\theta_0$  al ángulo con el eje  $x$ , tendremos:

Condiciones iniciales en 0:

$$\text{en } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{posición } \vec{r}_0 \\ \\ \text{velocidad } \vec{v}_0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ \\ v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \end{array} \right|$$

### Posición o situación general

Como ya dijimos, el vector aceleración es el mismo en todos los puntos,



Por tanto:

$$\vec{a} \quad \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right|$$

$$\vec{v} \quad \left| \begin{array}{l} v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta_o \\ v_y = v_{oy} - gt = v_o \sin \theta_o - gt \end{array} \right|$$

$$\vec{r} \quad \left| \begin{array}{l} x = v_{ox} t = (v_o \cos \theta_o) t \\ y = v_{oy} t - \frac{gt^2}{2} = (v_o \sin \theta_o) t - \frac{gt^2}{2} \end{array} \right|$$

en donde las integraciones para el movimiento en  $x$ , movimiento uniforme, y el movimiento en  $y$ , movimiento uniformemente acelerado, son las mismas que ya vimos en el movimiento rectilíneo. El movimiento resultante es la superposición de dos movimientos rectilíneos independientes como ya Galileo había mostrado.

Para hallar la ecuación cartesiana de la trayectoria, obtengamos  $t$  de la expresión  $x(t)$

$$t = \frac{x}{v_o \cos \theta_o}, \quad \text{y reemplacemos en } y(t):$$

$$y = (\tan \theta_o) x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2 \cos^2 \theta_o} x^2, \quad \text{o bien,}$$

$$y = (\tan \theta_o) x - \frac{1}{2} \frac{g \sec^2 \theta_o}{v_o^2} x^2,$$

que es la ecuación de una parábola, abierta hacia abajo y cuyo vértice no está en el origen.

Es importante notar que, aunque la ecuación cartesiana es interesante, no contiene información de “cómo” se recorre la curva: ¿con qué velocidad, con qué aceleración? La información completa del movimiento está en  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

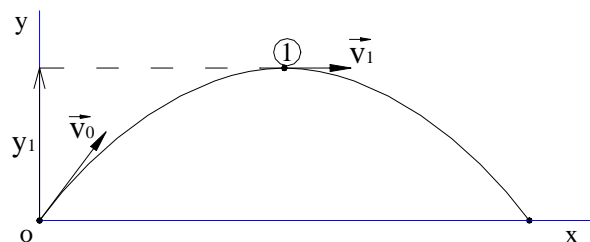
### Posiciones particulares

Hay posiciones particulares interesantes como:

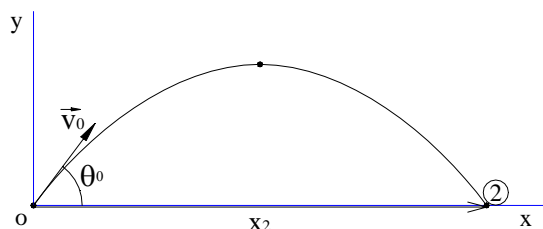
1. Punto de máxima altura. Allí la tangente es horizontal y por tanto  $v_{1y} = 0$ , y así

$$t_1 = \frac{v_o \sin \theta_o}{g}$$

$$y_1 = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta_o}{2g}, \quad \text{máxima altura alcanzada.}$$



2. Punto de alcance horizontal al nivel del lanzamiento: un instante antes de que el cuerpo choque con el piso.



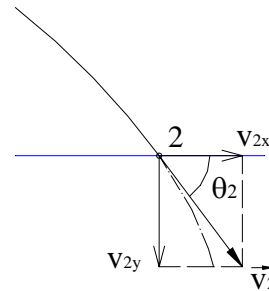
$$y_2 = 0 = t_2 \left( v_o \sin \theta_o - \frac{g t_2}{2} \right) \Rightarrow t_2 = \frac{2 v_o \sin \theta_o}{g} \quad (\text{el doble de } t_1)$$

(el valor  $t_2 = 0$ , corresponde al punto 0, en el cual también  $y = 0$ ).

$$\begin{cases} v_{2x} = v_o \cos \theta_o \\ v_{2y} = -v_o \sin \theta_o \end{cases}, \quad |\vec{v}_2| = v_2 = v_o$$

Por tanto

$$\begin{cases} v_{2x} = v_{ox} \\ v_{2y} = -v_{oy} \end{cases} \quad y \quad \theta_2 = \theta_o$$



$$x_2 = \frac{2 v_o^2 \sin \theta_o \cos \theta_o}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2 \theta_o}{g}$$

Un problema clásico, resuelto por Galileo, es el del máximo alcance horizontal (al nivel del lanzamiento). Si la magnitud de la velocidad inicial,  $v_o$ , es constante, ¿cuál debe ser el ángulo de lanzamiento  $\theta_o$  para que  $x_2$  sea máximo?  $x_2$  es entonces una función de la variable  $\theta_o$  y podemos aplicar los métodos del cálculo para el máximo de una función :

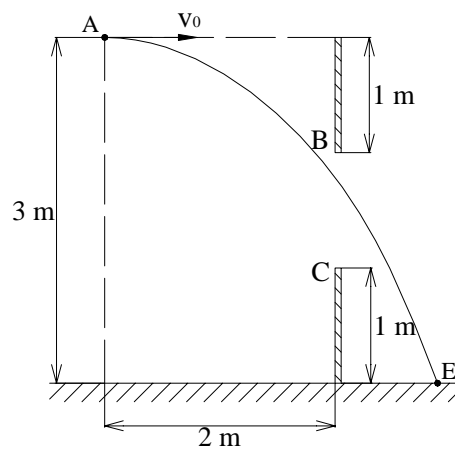
$$\frac{dx_2}{d\theta_o} = \frac{2 v_o^2 \cos 2 \theta_o}{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2 \theta_o = 0, \quad 2 \theta_o = 90^\circ, \quad \theta_o = 45^\circ.$$

Claro que una simple inspección de  $x_2$  nos muestra el mismo resultado: el máximo valor de  $\sin 2 \theta_o$  es 1, valor que se presenta cuando  $2 \theta_o = 90^\circ$ ,  $\theta_o = 45^\circ$ .

## 2. EJERCICIO

Desde el punto A se lanza un cuerpo con velocidad horizontal  $v_o$ .

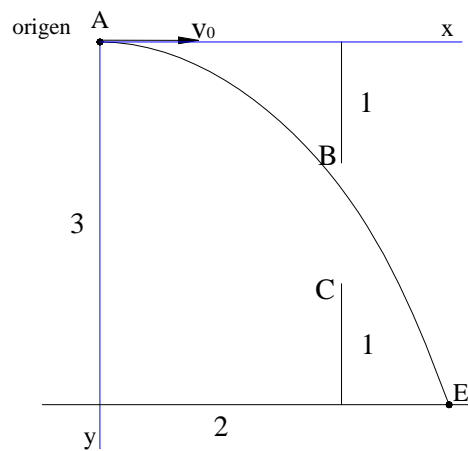
- determinar el rango de valores de  $v_o$  para que el cuerpo pase por el agujero BC.
- determinar el correspondiente rango de posiciones del punto E en las cuales el cuerpo toca el suelo.



Unidades: SI

Marco de referencia: el piso.

Ejes. Origen en A. Eje  $y$  hacia abajo. Eje  $x$  hacia la derecha.



Condiciones iniciales en A:  $t = 0$ ,

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = v_o \\ v_y = 0 \end{array} \right.$$

Situación general

$$\left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = g \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_x = v_o \\ v_y = gt \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x = v_o t \\ y = \frac{g t^2}{2} \end{array} \right|$$

Ecuación cartesiana de la trayectoria

$$t = \frac{x}{v_o} \quad , \quad \text{en } y \text{ queda}$$

$$y = \frac{g x^2}{2 v_o^2} \quad .$$

a) en B y C,  $x_B = x_C = 2$  , y así

$$y = \frac{2g}{v_o^2} \quad ,$$

como  $y_B < y < y_C$  , que con  $y_B = 1$  ,  $y_C = 2$  , queda

$$1 < \frac{2g}{v_o^2} < 2 \quad , \quad \text{se tiene,}$$

$$\sqrt{g} < v_o < \sqrt{2g} \quad \text{o sea, con } g = 9.8 \text{ m s}^{-2} ,$$

$$3.13 \text{ m/s} < v_o < 4.43 \text{ m/s} .$$

b)  $x_E = \left( \frac{2 v_o^2 y_B}{g} \right)^{1/2}$  , con  $y_E = 3$  , conduce a

$$\sqrt{6} < x_E < \sqrt{12} \quad , \quad \text{o bien}$$

$$2.45 \text{ m} < x_E < 3.46 \text{ m} .$$

### 3. EJERCICIO

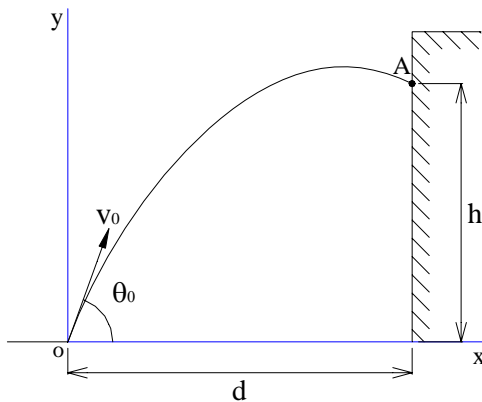
El chorro de agua de una manguera contra incendios sale con una velocidad  $v_o$  . Si la boquilla de la manguera se encuentra a una distancia  $d$  de la base de un edificio, demuestre que la boquilla debe inclinarse un ángulo  $\arctan \left( \frac{v_o^2}{g d} \right)$  para que el chorro golpee el edificio lo más alto posible. En el punto en que golpea, ¿el chorro está subiendo o va bajando?

El móvil:

Tomemos como punto móvil un pequeño trozo de agua. Despreciando los efectos de fricción esa “partícula” seguirá una trayectoria parabólica, lo mismo que todas las otras partes del agua y así el chorro describe una parábola. El móvil es pues esa pequeña porción de agua, esa “partícula” de agua.

Marco de referencia: el piso, el edificio, marco fijo a tierra.

Ejes. Origen en el punto de lanzamiento, como se indica.



Condiciones iniciales en 0,  $t = 0$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} v_x = v_o \cos \theta_o \\ v_y = v_o \sin \theta_o \end{array} \right|$$

Situación general

$$\left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} v_x = v_o \cos \theta_o \\ v_y = v_o \sin \theta_o - g t \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} x = (v_o \cos \theta_o) t \\ y = (v_o \sin \theta_o) t - \frac{g t^2}{2} \end{array} \right|$$

La ecuación de la trayectoria es:

$$y = x \tan \theta_o - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_o^2} \sec^2 \theta_o.$$

Situación particular A: punto donde se golpea el edificio,

$$x_A = d$$

$$y_A = h, \quad \text{y así:}$$

$$h = d \tan \theta_o - \frac{1}{2} \frac{g d^2}{v_o^2} \sec^2 \theta_o,$$



$d$  y  $v_o$  son constantes y esa expresión define a  $h$ , altura a la cual se golpea el edificio, como una función de  $\theta_o$ , ángulo de lanzamiento. El problema es ahora un problema de cálculo, maximizar la función  $h(\theta_o)$ .

Muestre que, haciendo  $\frac{dh}{d\theta_o} = 0$ , se obtiene

$$\tan \theta_o = \frac{v_o^2}{g d}.$$

Para saber si en A, con el ángulo  $\theta_o$  de lanzamiento que maximiza a  $h$ , el móvil sube o baja, estudiemos  $v_{Ay}$ .

Como  $x_A = d$ ,  $t_A = \frac{d}{v_o \cos \theta_o}$  y así

$$v_{Ay} = v_o \sin \theta_o - \frac{g d}{v_o \cos \theta_o} = v_o \left( \sin \theta_o - \frac{g d}{v_o^2 \cos \theta_o} \right),$$

que, con  $v_o^2 = g d \tan \theta_o$ , queda

$$v_{Ay} = \frac{v_o}{\sin \theta_o} (\sin^2 \theta_o - 1) < 0,$$

y el chorro, cuando golpea en el punto más alto posible, se encuentra siempre bajando, resultado poco intuitivo.

## PROBLEMAS

- Un defensa de un equipo de fútbol hace un saque de puerta comunicándole al balón una velocidad de  $20 \text{ m s}^{-1}$  en una dirección de  $40^\circ$  con la horizontal. Un jugador del equipo contrario, que se encuentra a 60 m del punto de lanzamiento y en el plano de la trayectoria del balón, empieza a correr en el preciso instante en que el defensa hace el saque. El jugador desea hacer un rechazo de cabeza y puede saltar a una altura de 2.1 m.

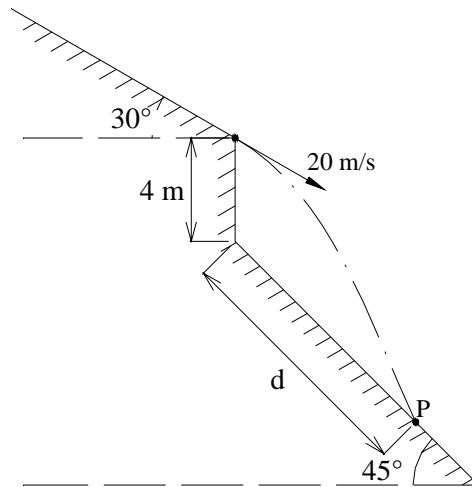
- Calcule el tiempo entre el saque y el rechazo,

2.45 s

- ¿Qué distancia debe recorrer el jugador para hacer el rechazo y cuál debe ser entonces su velocidad media?

22.46 m

2.



Un esquiador salta de una pendiente de  $30^\circ$  a  $20 \text{ m s}^{-1}$  y cae sobre otra pendiente de  $45^\circ$  como se muestra en la figura. Determine:

a) la distancia  $d$  al punto P en que cae,

47 m

b) la magnitud de la velocidad con que cae al punto P y el ángulo que esa velocidad forma con la pendiente de  $45^\circ$ .

$14^\circ$

3. Dos proyectiles se lanzan desde el mismo punto, con velocidades iniciales de igual magnitud e inclinaciones con la horizontal de  $45^\circ + \alpha$  y  $45^\circ - \alpha$ . Demuestre que el alcance horizontal al nivel de lanzamiento es el mismo para ambos.

4. Se lanza desde el piso una bola con velocidad de  $15 \text{ m/s}$  y ángulo  $\phi$  con la horizontal.

a) Calcule el máximo alcance horizontal.

22.96 m

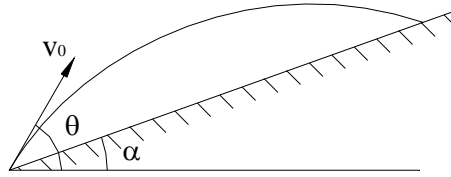
b) Si hay una pared vertical a 18 m del punto de lanzamiento, ¿con qué ángulo debe lanzarse la bola para golpear la pared lo más alto posible y cuánto vale esa altura? En el momento en que la bola golpea la pared, ¿está subiendo o bajando?

$51.90^\circ$  ; 4.42 m; baja

c) Si además de la pared vertical hay un techo horizontal a 4.5 m de altura sobre el piso, ¿cuál es ahora el punto más alto en el que puede golpearse la pared vertical con la bola y con qué ángulo debe ésta lanzarse?

$38.76^\circ$  ; 2.85 m

5.



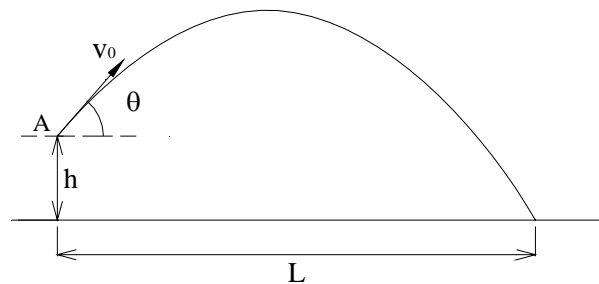
Desde la base de una colina que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, se lanza un proyectil con velocidad  $v_0$  y ángulo  $\theta$ .

a) Muestre que el alcance medido sobre la colina es  $\frac{2 v_0^2 \cos \theta \sin (\theta - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$ .

b) Con  $v_0$  constante, ¿cuál debe ser  $\theta$  para que dicho alcance sea máximo?

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

6.

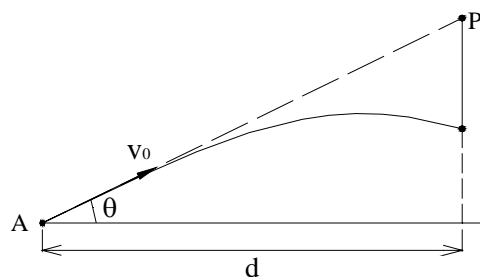


Desde el punto A se lanza un cuerpo con velocidad de magnitud  $v_0$ . ¿Cuál debe ser  $\theta$  para que el alcance  $L$  a un nivel  $h$  por debajo del punto de lanzamiento sea máximo? Coteje su resultado con el caso bien conocido  $h = 0$ .

**Sugerencia:** Use la ecuación de la trayectoria y la derivada de la función implícita  $L(\theta)$ .

$$\sin \theta = \left[ 2 \left( 1 + \frac{gh}{v_0^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

7.



Con un proyectil se apunta directo a un cuerpo P. Si en el instante del disparo del proyectil se deja caer el cuerpo, demuestre que habrá colisión entre ambos.

## 2.4 MOVIMIENTO RELATIVO

El movimiento de un cuerpo se refiere siempre a un **marco de referencia**, marco que comprende tanto un cuerpo rígido respecto al cual se da la posición del cuerpo móvil, como un reloj que permite medir el tiempo, tiempo igual para todos en la mecánica clásica. Estamos estudiando ahora el movimiento de cuerpos puntuales o de puntos móviles y cuando decimos que el movimiento es relativo, queremos decir que todo movimiento es el movimiento de un punto móvil respecto a un determinado marco de referencia. La cinemática es el estudio de la posición  $\vec{r}$ , la velocidad  $\vec{v}$  y la aceleración  $\vec{a}$  del punto móvil respecto a un bien determinado marco de referencia.

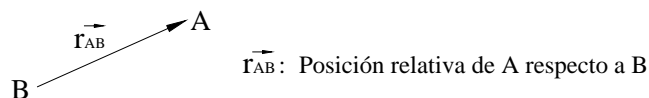
Es muy importante comprender que no se ha definido algo así como el movimiento de un punto respecto a otro punto: no hay en mecánica tal cosa como la velocidad de un punto respecto a otro punto, sólo hemos definido la velocidad de un punto respecto a un marco de referencia, es decir, la velocidad de un punto respecto a un cuerpo rígido, y cuando en un cierto lenguaje informal, impreciso pero ineludible, se dice por ejemplo, “la velocidad de la partícula A respecto a la partícula B” se está hablando siempre de “la velocidad de la partícula A respecto a determinado marco de referencia con origen en la partícula B”.

Aunque todo movimiento es pues relativo, se suele llamar propiamente estudio del movimiento relativo, al estudio del modo como se relacionan entre sí las descripciones cinemáticas de un punto móvil, vistas por varios marcos de referencia que se mueven unos respecto a otros.

Sean ahora tres móviles A, B, C (por ejemplo, A: observador en una estación; B: observador de un tren que pasa; C: observador de un avión que cruza). Cada uno es el origen de un marco de referencia (A: la estación, con su piso, sus paredes; B: el vagón del tren; C: la cabina del avión). Elijamos un solo reloj para todos y unos ejes respectivamente paralelos, es decir los ejes  $x$  de los marcos A, B y C son paralelos entre sí, e igual los ejes  $y$ , de modo que los marcos de referencia se desplazan, **trasladándose** unos respecto a otros, **pero sin rotar**.

Estudiaremos ahora únicamente este movimiento relativo de traslación, sencillo e importante. Cuando un marco de referencia rota respecto a otro, el movimiento relativo es más elaborado y pospondremos su estudio. Introduzcamos en primer lugar la notación que vamos a usar en el movimiento relativo de traslación.

La posición del punto móvil A respecto al marco de referencia con origen en B, que diremos simplemente como posición relativa de A respecto a B, es el vector  $\vec{r}$  que va de B a A, y se escribe  $\vec{r}_{AB}$ .



Algunas veces se escribe también  $\vec{r}_{A/B}$ .

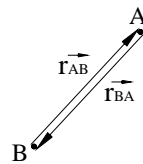
La velocidad de A respecto al marco B, o simplemente velocidad relativa de A respecto a B, es

$$\vec{v}_{AB} = \frac{d \vec{r}_{AB}}{dt} ,$$

y análogamente la aceleración relativa de A respecto a B es

$$\vec{a}_{AB} = \frac{d \vec{v}_{AB}}{dt} .$$

Nótese la importante relación  $\vec{r}_{AB} = - \vec{r}_{BA}$ , y por tanto,

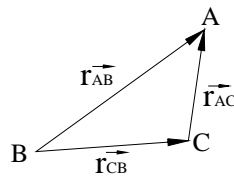


$$\vec{r}_{AB} = - \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{AB} = - \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_{AB} = - \vec{a}_{BA} .$$

Volvamos a los tres móviles A, B y C (y sus marcos en traslación). La relación fundamental del movimiento relativo no es otra que la expresión de la suma de vectores:



que, como se ve en el triángulo, es:  $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{CB} + \vec{r}_{AC}$ ,

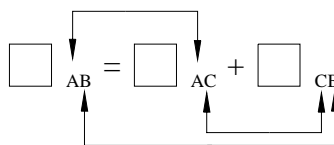
que escribiremos mejor como,  $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CB}$ .

Derivando,

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CB}$$

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{CB} .$$

La estructura de subíndices de esas relaciones es simple y se recuerda fácilmente



Las primeras aplicaciones sencillas tienen que ver sobre todo con las velocidades relativas. En varios casos son incluso movimientos uniformes, con velocidades constantes, de cinemática fácil, y cuyo énfasis está en las relaciones **vectoriales** entre las magnitudes y direcciones de las diversas velocidades relativas.

En el estudio de un movimiento relativo es esencial en primer lugar identificar con claridad los 3 móviles (y los 3 marcos de referencia en traslación) y denotarlos adecuadamente. Hay que escribir entonces la relación vectorial básica del movimiento relativo y luego identificar de manera ordenada las magnitudes y direcciones, o bien las componentes, tanto dadas como incógnitas, antes de proceder a plasmar la relación vectorial básica, bien sea geoméricamente o analíticamente por componentes en algunos ejes.

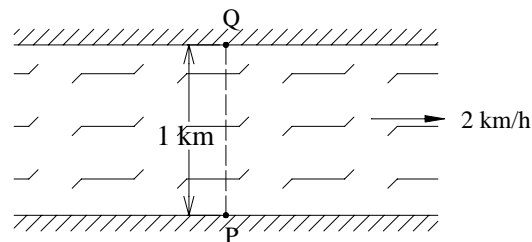
## EJEMPLOS Y EJERCICIOS

### 1. EJEMPLO

Como ejemplo propondremos un problema clásico, con valores numéricos sencillos para facilidad de cálculo e interpretación.

Un río tiene 1 km de ancho y una velocidad de corriente de 2 km/h. Un navegante dispone de un bote capaz de viajar a 4 km/h respecto al agua.

Estudiar como se hace un viaje desde un punto P hasta un punto Q directamente en la orilla opuesta. ¿Cómo hay que poner la proa del bote, con qué velocidad se efectúa realmente el viaje, cuánto tarda éste?



Los tres móviles (y sus correspondientes marcos de referencia en traslación) son

B : Bote

A : Agua

T : Tierra.

Piénsese si se quiere en 3 personas B, A, T, cada una con dos varillas que son sus ejes  $x$ ,  $y$ , una persona en el bote (B), otra en una balsa que se mueve con el agua (A) y la otra en una orilla (T), de modo que sus respectivos ejes se mantienen paralelos, sin rotar.

La relación vectorial fundamental entre las velocidades relativas es

$$\vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AT} .$$

Aquí es necesario aclarar que entre las 6 velocidades relativas involucradas hay diversas relaciones, pero todas son equivalentes. En efecto, supongamos que se comienza con

$$\vec{v}_{AT} = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BT}.$$

Puede ser preferible trabajar con  $\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$  y así

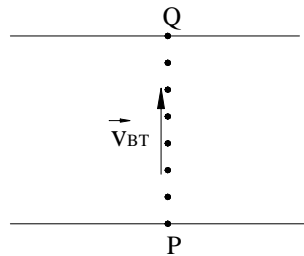
$$\vec{v}_{AT} = -\vec{v}_{BA} + \vec{v}_{BT} \quad \text{o bien} \quad \vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AT} \quad \text{que era la relación original.}$$

Interpretemos ahora los datos del problema. Unidades: longitudes en km, tiempos en horas.

$\vec{v}_{AT}$	magnitud	2
	dirección	$\rightarrow$
$\vec{v}_{BT}$	magnitud	?
	dirección	$\uparrow$
$\vec{v}_{BA}$	magnitud	4
	dirección	?

Hay dos puntos que aclarar:

- La dirección de  $\vec{v}_{BT}$ : mírese la trayectoria del bote (como un punto) vista desde la orilla:



ese es en efecto el viaje que se quiere realizar, visto desde tierra, y por tanto la dirección de  $\vec{v}_{BT}$  es la indicada.

- La magnitud de  $\vec{v}_{BA}$ : la velocidad de 4 km/h es la velocidad del bote respecto al agua. No tiene nada que ver con tierra y para convencerse, puede pensar en estas dos situaciones.
  - a) El bote se mueve en un lago de aguas tranquilas, sin corrientes: la velocidad del bote respecto a tierra es 4 km/h.
  - b) El bote se mueve contra la corriente en un río cuya velocidad es de 4 km/h: la velocidad del bote respecto a tierra es cero.

En ambos casos si usted va en el bote mirando sólo el agua circundante (suponga que una espesa niebla le impide ver las orillas), la sensación es la misma: viaja respecto al agua a 4 km/h.

El problema tiene entonces 2 incógnitas:

- 1) magnitud de  $\vec{v}_{BT}$
- 2) dirección de  $\vec{v}_{BA}$ ,

que pueden hallarse con la relación vectorial fundamental.

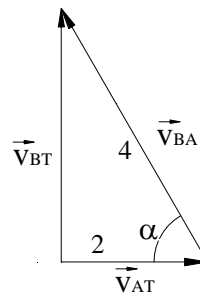
Hay dos maneras básicas de resolver el problema:

- a) un método geométrico, gráfico, trigonométrico, usando el triángulo o paralelogramo de suma de vectores, y,
- b) un método algebraico, analítico, eligiendo unos ejes y usando las componentes de los vectores.

Veamos:

- a) geoméricamente: triángulo. Aquí es importante dibujar los vectores a escala.

$$\vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AT}$$



$$|\vec{v}_{BT}| = v_{BT} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ km/h}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ y entonces } \alpha = 60^\circ.$$

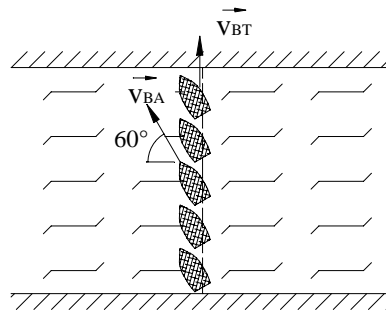
La velocidad del bote respecto a tierra es de sólo 3.46 km/h, aunque la velocidad del bote respecto al agua es de 4 km/h.

El tiempo que tarda el viaje  $P \rightarrow Q$  será

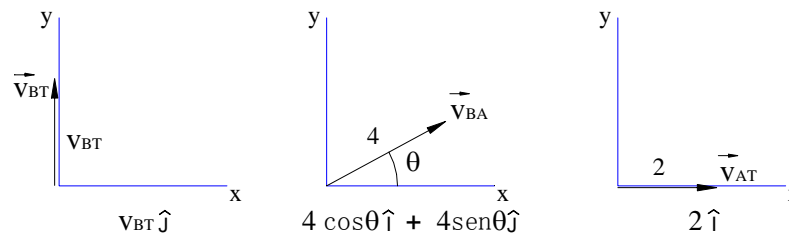
$$\begin{aligned} t_{P \rightarrow Q} &= \frac{\text{desplazamiento del bote (respecto a tierra)}}{\text{Velocidad del bote (respecto a tierra)}} = \frac{\Delta r_{BT}}{v_{BT}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ h} \\ &= 0.289 \text{ horas} = 17.3 \text{ min.} \end{aligned}$$



El ángulo  $\alpha$  de  $60^\circ$ , dirección de  $\vec{v}_{BA}$ , tiene una interpretación simple e importante: indica la dirección que debe dársele a la proa del bote para realizar el viaje, viaje que se efectúa “sesgado”, de modo que cuando una persona va en el bote, siente que está viajando en una dirección respecto al agua, pero respecto a tierra viaja en otra. El movimiento es sorprendente y poco intuitivo. Podemos esquematizarlo así:



- b) Analíticamente: componentes. Elijamos un eje  $x$  en dirección de la corriente y un eje  $y$  ortogonal. En esos ejes los vectores velocidad serán:



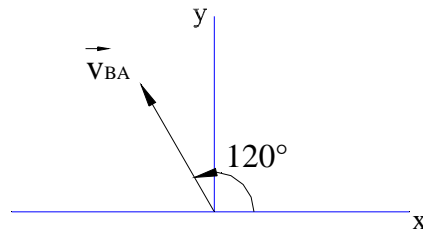
La relación vectorial  $\vec{v}_{BT} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{AT}$ , queda, en componentes:

componente  $x$  :  $0 = 4 \cos \theta + 2$  (1)

componente  $y$  :  $v_{BT} = 4 \sin \theta$  (2)

de (1)  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ , y así,  $\theta = \begin{cases} 180 - 60 = 120^\circ \\ 180 + 60 = 240^\circ \end{cases}$

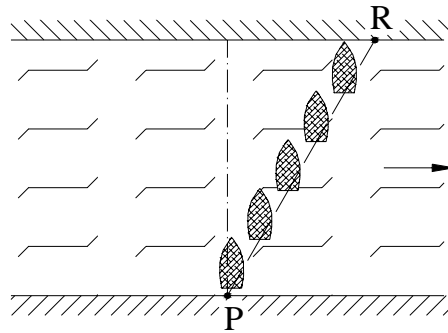
pero como, de (2), siendo  $v_{BT} > 0$  (dirección correcta de  $\vec{v}_{BT}$ ),  $\sin \theta > 0$ ,  $\theta$  debe ser del segundo cuadrante y por tanto  $\theta = 120^\circ$ , y la dirección de  $\vec{v}_{BA}$  es



y  $v_{BT} = 3.46$  km/h, resultados idénticos a los obtenidos en a).

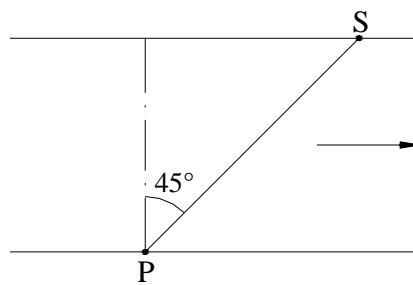
## 2. EJERCICIO

Si se apunta la proa directamente a la orilla opuesta, ¿a qué punto R se llega y cuánto tarda el viaje?



Tiempo de viaje: 1/4 hora.

## 3. EJERCICIO

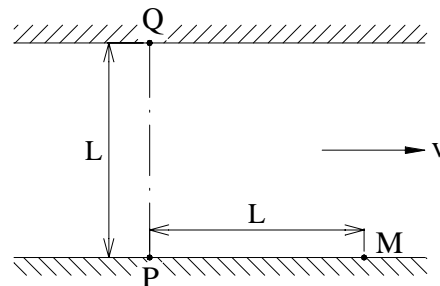


¿En qué dirección debe ponerse la proa para viajar de P a S y cuánto tarda el viaje?

$$\theta = 114.3^\circ$$

#### 4. EJERCICIO

La misma situación de río, bote y tierra la vamos a plantear de modo más general así:



$$|\vec{v}_{AT}| = v$$

$$|\vec{v}_{BA}| = c$$

Muestre que el tiempo para el viaje  $P \rightarrow Q \rightarrow P$  es  $\frac{2L}{c} \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2}$

y para el viaje  $P \rightarrow M \rightarrow P$  es  $\frac{2L}{c} \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1}$

¿Cuál de los 2 tiempos es mayor?

Demos una nueva interpretación a este mismo problema de movimiento relativo:

Si T es el planeta tierra, A es el éter luminífero y B es un rayo de luz, tendremos el movimiento de la luz en direcciones paralela y perpendicular al “viento de éter”, y los tiempos calculados son exactamente los mismos que aparecen al estudiar el célebre experimento de Michelson – Morley en la teoría de la relatividad de Einstein.

#### 5. EJEMPLO

Un tren viaja a 8 m/s. Un pasajero sentado junto a la ventana lanza verticalmente hacia arriba una bolita con velocidad de 5 m/s. Hallar, en magnitud y dirección, la velocidad de la bolita respecto a un observador en tierra, en el instante del lanzamiento.

b : bola

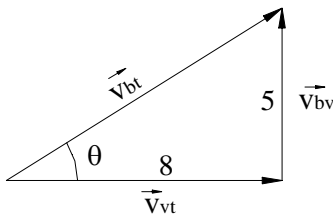
v : vagón del tren

t : tierra

En la situación inicial de lanzamiento,

$$\vec{v}_{bt} = \vec{v}_{bv} + \vec{v}_{vt},$$

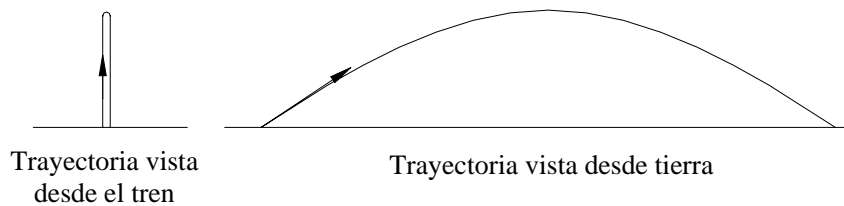
y así,



$$\text{con } |\vec{v}_{bt}| = v_{bt} = 9.43 \text{ m/s}$$

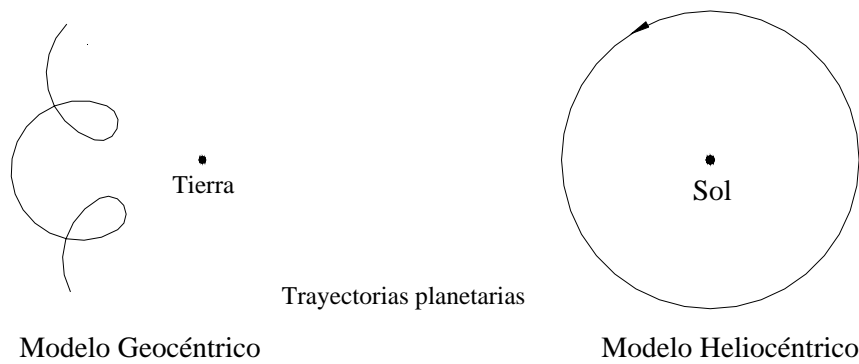
$$\text{y } \theta = \arctan \frac{5}{8} \approx 32^\circ.$$

Para el observador en el tren la bolita sale verticalmente y su trayectoria es rectilínea. Para el observador en tierra la bola no sale verticalmente sino formando un ángulo de  $32^\circ$  con la horizontal y así la trayectoria de la bolita respecto a tierra es una parábola.



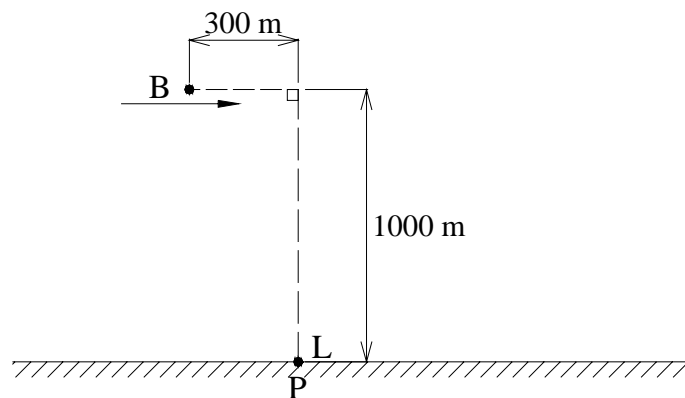
No existe algo así como la “verdadera” trayectoria de la bola. Sólo hay trayectorias respecto a determinados marcos de referencia: las trayectorias son relativas. En cambio el tiempo de vuelo es el mismo para ambos observadores: el tiempo es absoluto.

Sin duda uno de los problemas de movimiento relativo más importantes de la historia humana ha sido el del movimiento de los cuerpos celestes, objeto de cavilaciones, observaciones y registros minuciosos durante milenios. Particularmente notable es el movimiento de los planetas, que puede ser descrito, como es muy natural, desde un marco de referencia terrestre, con trayectorias complejas que dieron lugar a modelos muy elaborados, como en la teoría geocéntrica de Ptolomeo, o bien desde un marco de referencia en el sol, con trayectorias mucho más simples, círculos, como en la teoría heliocéntrica de Copérnico.

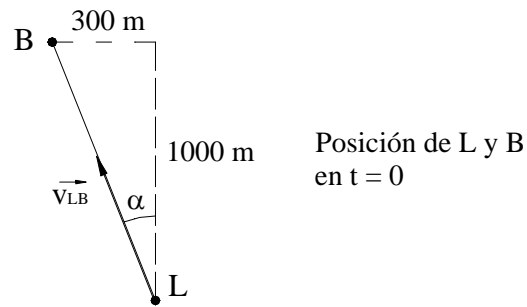


## 6. EJERCICIO

Una aplicación interesante del movimiento relativo está en el estudio del encuentro de dos móviles que se mueven respecto a un cierto marco de referencia. Veamos un caso concreto: un barco B se mueve paralelo a la costa, a una distancia de 1000 m de ella, con velocidad de 4 m/s respecto a tierra. En el instante en que se encuentra en la posición mostrada, una lancha L, cuya velocidad es de 5 m/s, también respecto a tierra, sale a su encuentro desde el puerto P. ¿En qué dirección debe viajar la lancha, cuánto tarda el viaje y en qué punto se encuentran?



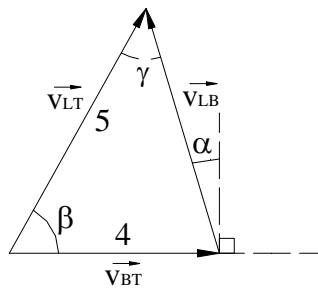
Mirando las cosas desde el punto de vista del barco, es decir, situándonos en un marco de referencia con origen en B, la lancha en  $t = 0$  tiene la siguiente posición



Para que la lancha encuentre al bote, la velocidad relativa  $\vec{v}_{LB}$  debe obviamente tener la dirección indicada, dirigiéndose de L a B. Si T es tierra, la ecuación fundamental de velocidades relativas es

$$\vec{v}_{LT} = \vec{v}_{LB} + \vec{v}_{BT} ,$$

con lo que el triángulo de velocidades es



Con ley de senos se hallan  $\gamma$  ,  $\beta$  y  $v_{LB}$  :

$$\gamma = 50.02^\circ$$

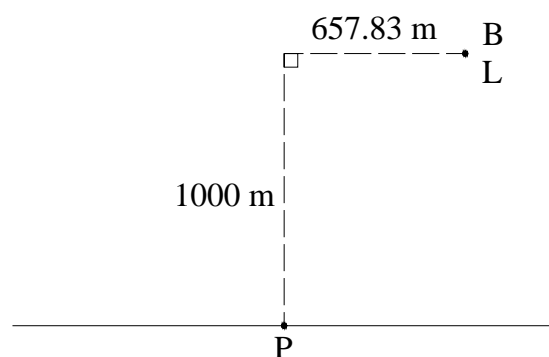
$$\beta = 56.68^\circ$$

$$v_{LB} = 4.36 \text{ m/s}$$

El tiempo del viaje es

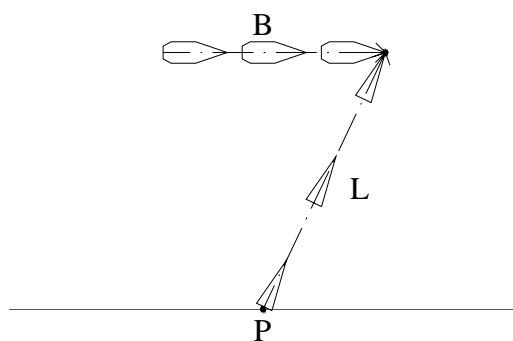
$$t = \frac{(300^2 + 1000^2)^{1/2}}{4.36} = 239.46 \text{ s} ,$$

y el punto de encuentro, ubicado respecto al punto P, es

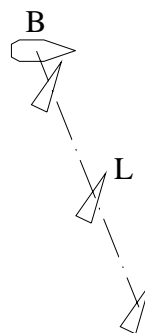


Veamos como se ve el viaje:

desde tierra



desde el barco



Es ilustrativo resolver el problema usando sólo las velocidades respecto a tierra, sin apelar a la velocidad relativa.

**PROBLEMAS**

1. El piloto de un avión desea volar a una ciudad 400 km al noroeste de su origen. Si sopla un viento de 50 km/h en dirección sur  $75^\circ$  este y el avión puede volar a 250 km/h (respecto al aire), ¿en qué dirección debe ponerse el avión para el viaje y cuánto tarda éste?

N  $50.74^\circ$  O ; 1.95 horas

2. Un hombre que viaja en un bus mientras llueve, observa que, cuando el bus está en reposo respecto a tierra, las marcas que dejan las gotas en la ventanilla forman un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical y hacia atrás del bus. Pero cuando el bus se mueve a 10 m/s, las huellas de las gotas forman un ángulo de  $60^\circ$  con la vertical. Calcular la magnitud de la velocidad de las gotas de lluvia respecto a tierra.

10 m/s

3. Un ascensor de 2.5 m de altura, sube con aceleración constante de  $4 \text{ m/s}^2$  y en el momento en que la velocidad es de 3 m/s se desprende un tornillo del techo del ascensor. ¿Al cuánto tiempo cae el tornillo al piso del ascensor?

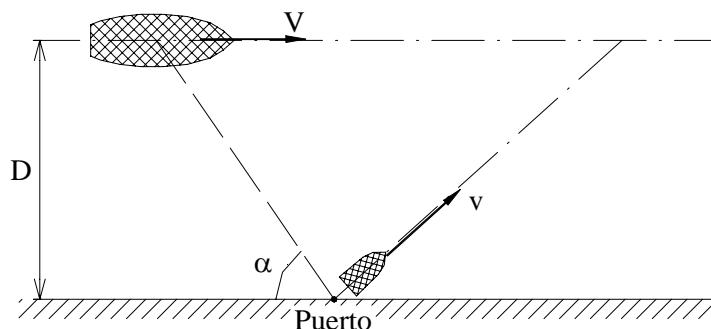
**Sugerencia:** marco de referencia ascensor. Aceleraciones y velocidades relativas.

0.60 s

4. De un mismo lugar, con un intervalo de tiempo  $\tau$ , se lanzan dos cuerpos con la misma velocidad inicial  $v_0$  y bajo el mismo ángulo  $\phi$  respecto a la horizontal. ¿Qué movimiento describirá el primer cuerpo con relación al segundo?

Rectilíneo uniforme vertical con velocidad  $g \tau$

5.





Un buque se mueve paralelo a la costa, a una distancia  $D$ , con velocidad  $V$ . Una lancha, cuya velocidad es  $v (< V)$  parte de un puerto para interceptar el buque. Ambas velocidades son respecto a tierra.

- a) Muestre que la lancha debe partir antes de que el buque esté a una distancia

$$\frac{D(V^2 - v^2)^{1/2}}{v} \text{ medida hacia atrás a lo largo de la costa.}$$

**Sugerencia:** estudie el encuentro desde el punto de vista del buque y analice la velocidad de la lancha respecto al buque. Muestre que para la distancia mínima,  $\alpha$  es máximo y para  $\alpha_{\text{máx}}$ ,  $\vec{v}_{\text{lancha/buque}} \perp \vec{v}_{\text{lancha/tierra}}$ .

- b) Si la lancha parte en el último momento posible, ¿dónde y cuándo encuentra al buque?

## CAPÍTULO 3. LEYES DE NEWTON Y APLICACIONES ( I )

### 3.1 LAS LEYES DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

Isaac Newton formuló y desarrolló una potente teoría acerca del movimiento, según la cual las fuerzas que actúan sobre un cuerpo producen un cambio en el movimiento de dicho cuerpo. Newton basó su teoría en unos principios que conocemos como las tres leyes de Newton del movimiento y mostró cómo su aplicación coherente, asociada a leyes de fuerzas como su propia ley de Gravitación Universal, daba cuenta satisfactoria de muchos movimientos importantes, tanto de cuerpos celestes como planetas, cometas y satélites, como de objetos de toda suerte en la tierra.

La teoría newtoniana del movimiento es, sin duda, uno de los más notables logros del pensamiento humano. Interesa a físicos, a ingenieros que cotidianamente la aplican, a filósofos, a historiadores. La teoría newtoniana ha sido presentada en términos matemáticos que han evolucionado con los tiempos y su aplicación se ha extendido a una inaudita variedad de movimientos. Algunos de sus conceptos, como el espacio, el tiempo, la inercia, la fuerza, plantean interrogantes profundos y complejos acerca de la naturaleza del mundo físico. El estudio de la teoría newtoniana del movimiento se conoce como Mecánica Newtoniana o Mecánica Clásica, aunque este último nombre suele denotar formulaciones matemáticas alternas, muy elaboradas.

El propósito de este texto es presentar las leyes de Newton de manera simple, usando una notación matemática moderna, sin ahondar en los problemas epistemológicos, enfocando la atención hacia la enseñanza de su aplicación coherente y ordenada, comenzando con movimientos sencillos, lo que permitirá al estudiante atento adquirir prontamente destreza y confianza en la aplicación y comprensión de una teoría, de un modelo físico-matemático.

#### Primera ley de Newton. Ley de inercia

“Todo cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en línea recta, excepto si sobre él actúan fuerzas”. De modo muy similar enunció Newton su primera ley. En otros términos, podríamos decir: “Un cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas, se mueve con  $\vec{v}$  constante”. “No actúan fuerzas” quiere decir que la fuerza neta o resultante es nula y así, sobre el cuerpo pueden actuar varias fuerzas pero su suma vectorial es cero. Si el vector velocidad es constante, su dirección es constante y el movimiento es rectilíneo, y su magnitud también y el movimiento es uniforme. El reposo es sólo un caso particular,  $\vec{v} = 0$ . Más aún, al hablar de una única velocidad, se está hablando de un cuerpo puntual, de una partícula. Pero la dificultad, el punto crucial de la primera ley está en esto: ¿respecto a cuál marco de referencia se mide esa velocidad? Y éste es un serio problema, ya que un mismo cuerpo puede estar en reposo respecto a un cierto marco de referencia y moviéndose aceleradamente respecto a otro y entonces, ¿en cuál marco se aplica la primera ley?, pues en uno se cumpliría y en el otro no. Una aguda y jocosa paráfrasis de la primera ley debida a Sir Arthur Eddington y citada por A.P. French en su notable “Mecánica Newtoniana”, muestra el problema: “Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, excepto si no lo hace”. En efecto, mientras no se indique el marco de referencia, ¿qué dice la primera ley?

Suele aceptarse que el contenido real de la primera ley es la aseveración de la existencia de unos marcos de referencia especiales, llamados marcos inerciales de referencia, que son precisamente los marcos de referencia en los cuales se cumple la ley de inercia. Un enunciado de la primera ley podría ser algo así: Existen ciertos marcos de referencia, llamados inerciales, respecto a los cuales un objeto, sobre el cual la fuerza neta es nula, se mueve con  $\vec{v}$  constante.

Del concepto de velocidad relativa puede verse inmediatamente que si un determinado marco de referencia es inercial, cualquier otro marco que se traslade con vector velocidad constante respecto al primero, será también inercial. Consideremos, por ahora, un marco de referencia fijo a la superficie terrestre como inercial y pensemos en el siguiente experimento, realizado en una edificación. Sobre una “mesa de aire” perfectamente nivelada y horizontal, que tiene una serie de perforaciones por las que sale aire comprimido, se coloca un pequeño disco, de modo que queda “flotando” en un colchón de aire, reduciendo prácticamente por completo los efectos de la fricción o rozamiento. La fuerza de atracción terrestre o peso del disco se ve compensada por la fuerza de sustentación del colchón de aire y podemos considerar entonces que la fuerza neta sobre el disco es nula. Si colocamos el disco en reposo, permanecerá en reposo; si lo lanzamos deslizando por la mesa con una cierta velocidad, permanecerá en movimiento rectilíneo con esa velocidad (¡hasta que llega al borde de la mesa, en cuyo caso intervienen fuerzas que cambian su  $\vec{v}$ !). Esa es la ley de inercia, pensada en experimentos locales, como generalización de los cuales la había concebido inicialmente Galileo.

Ahora, traslademos mentalmente esa mesa de experimentos a un tren, a un avión, a un barco, que se mueven respecto al marco, supuesto inercial y fijo a tierra, con movimiento rectilíneo uniforme, sin curvas ni sobresaltos. Pues bien, en esos nuevos marcos de referencia, tren, avión o barco, los experimentos son idénticos. Si el disco se coloca en reposo sobre la mesa lisa, en reposo permanece, la ley de inercia se cumple, esos marcos son también inerciales. Pero no sólo esos experimentos, cualquier movimiento se realiza idénticamente en todos ellos, sea la oscilación de un péndulo, la vibración de una cuerda o la colisión de dos esferas. Los marcos inerciales de referencia son indistinguibles. Las leyes de la mecánica son las mismas en todos ellos. Esta proposición se conoce como el Principio de Relatividad, válido en la mecánica clásica, y que adquirirá mayor amplitud y relieve en la Teoría de la Relatividad.

Pero si el tren frena, acelera o da una curva, el disco de nuestro experimento pensado no permanecerá en reposo, se moverá hacia delante, hacia atrás o hacia un lado, no porque fuerzas misteriosas de interacción con otros cuerpos lo muevan, sino porque el marco de referencia es no-inercial, en él ya no es válida la ley de inercia.

La hipótesis de que el marco fijo a la superficie terrestre es inercial, es sólo aproximadamente cierta. La tierra rota y ese marco tiene entonces una pequeña aceleración, que podemos despreciar en muchísimos casos, pero que revelarán experimentos de precisión como el célebre péndulo de Foucault. Pero aunque la tierra no rotase, no sería un marco perfectamente inercial debido a su movimiento alrededor del sol. Un marco de referencia ligado al sol y a las estrellas, llamado a veces marco Copernicano, es una mejor aproximación a un marco inercial, pero el sol también se mueve en la galaxia.... y entonces? Hay en los marcos inerciales interrogantes profundos, pero ahora no discutiremos esas materias y usaremos un concepto sencillo, diciendo que un marco de referencia es inercial cuando en él se cumple, con un cierto grado de aproximación experimental, la ley de inercia.

## Segunda ley de Newton

Si estamos en un marco inercial de referencia y sobre un cuerpo puntual o partícula no actúa fuerza neta, el cuerpo se moverá con  $\vec{v}$  constante. Tal es, pues, la ley de inercia. Y entonces, si sobre el cuerpo actúan fuerzas, su velocidad cambiará, habrá una aceleración. La segunda ley de Newton del movimiento establece la relación entre la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y su aceleración, introduciendo el concepto de masa inercial del cuerpo. Enunciemos la ley de una manera que, si bien no es la original del propio Newton, es equivalente a ella.

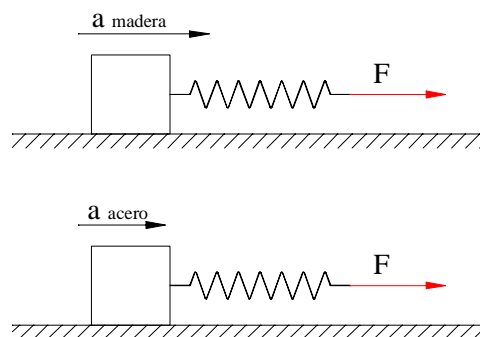
Si escribimos  $\sum \vec{F}$  como la suma vectorial de **todas** las fuerzas **que actúan sobre** el cuerpo y  $m$  como la masa inercial, que llamaremos simplemente masa, la segunda ley se escribe,

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \vec{a}} \quad \text{respecto a un marco inercial de referencia.}$$

Los cuerpos materiales tienen la propiedad de que, para modificarles su  $\vec{v}$ , es necesario ejercer una fuerza sobre ellos. Esa propiedad es la que se conoce como la inercia de los cuerpos. Ahora, para producir el mismo cambio en  $\vec{v}$ , es decir la misma  $\vec{a}$ , en dos cuerpos diferentes, las fuerzas que hay que ejercer sobre ellos son diferentes, debido a que tienen masas inerciales diferentes. Imaginemos la siguiente situación: dos bloques de igual tamaño vienen deslizándose por una superficie lisa con la misma velocidad, uno de madera y el otro de acero. Las fuerzas necesarias para detener en el mismo tiempo los bloques, son muy diferentes, pues el bloque de acero tiene una masa mucho mayor que el de madera. La relación cuantitativa precisa la proporciona la segunda ley. En efecto, si  $|\vec{a}_{\text{acero}}| = |\vec{a}_{\text{madera}}|$ ,

$$\frac{|\vec{F}_{\text{acero}}|}{|\vec{F}_{\text{madera}}|} = \frac{m_{\text{acero}}}{m_{\text{madera}}}.$$

La otra manera de pensar lo que es la masa inercial, de acuerdo a la segunda ley, es ésta: imaginemos los dos mismos bloques sobre la superficie lisa, jalados desde el reposo con la misma fuerza, lo que podría lograrse dándole el mismo estiramiento a un resorte.



En ese caso, la aceleración del bloque de acero será mucho menor. La relación, de acuerdo a la segunda ley, es,

$$\frac{|\vec{a}_{\text{acero}}|}{|\vec{a}_{\text{madera}}|} = \frac{m_{\text{madera}}}{m_{\text{acero}}}.$$

Las fuerzas que figuran en la segunda ley provienen de las interacciones del cuerpo con los demás cuerpos de su entorno. Son cantidades vectoriales y se suman como tales. La aceleración de un cuerpo la determina pues la resultante o suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él, y esas fuerzas son siempre hechas o ejercidas por algún otro cuerpo o trozo de materia. La aplicabilidad y utilidad de la segunda ley se basa en que las fuerzas que figuran en ella son únicamente de unas cuantas clases como veremos luego.

### Tercera ley de Newton. Ley de acción y reacción

Como dijimos, las fuerzas que figuran en la segunda ley provienen de interacciones entre cuerpos. Este hecho fundamental se hace explícito en la tercera ley de Newton. Podemos enunciarla diciendo: si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este último ejerce sobre el primero una fuerza de igual magnitud y dirección contraria. Sean los cuerpos puntuales 1 y 2. Llamemos

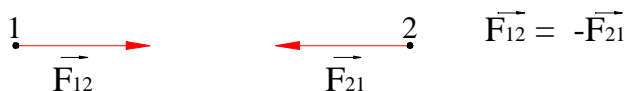
$\vec{F}_{12}$  : fuerza sobre cuerpo 1  
          hecha por cuerpo 2

$\vec{F}_{21}$  : fuerza sobre cuerpo 2  
          hecha por cuerpo 1.

La tercera ley afirma que

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Podemos representarla en un dibujo de la siguiente manera, teniendo en cuenta que se representan siempre en un cuerpo las fuerzas hechas sobre él:



Esta denotación plena de los vectores es útil e importante. Sin embargo, en las representaciones gráficas de muchos problemas concretos es muy conveniente usar una denotación más sencilla, así:



denotando únicamente la magnitud de las fuerzas, dado que sus direcciones ya están señaladas con las flechas.

Las fuerzas de interacción existen siempre en parejas. Son fuerzas entre dos cuerpos, una fuerza sobre uno de ellos y otra, de igual magnitud y dirección contraria, sobre el otro. A veces se dice: a toda acción corresponde una reacción igual en magnitud y de sentido contrario. Cuál sea la acción y cuál la reacción, es indiferente. Lo esencial es la pareja. Pero hay que tener completamente claro que esas dos fuerzas de la pareja acción-reacción actúan siempre sobre dos cuerpos diferentes. Jamás aparecerán juntas en el diagrama de fuerzas de un cuerpo.

Siempre que se va a estudiar el movimiento de un cuerpo con la segunda ley de Newton, válida sólo respecto a un marco inercial de referencia, y se establecen las fuerzas hechas sobre dicho cuerpo, es necesario saber con precisión por cuáles otros cuerpos externos, es decir por cuáles trozos de materia, son hechas o ejercidas tales fuerzas.

Las leyes de Newton describen el movimiento de cuerpos puntuales o partículas. Uno de los modelos físico-matemáticos básicos de la mecánica clásica, como ya lo habíamos dicho, es el de **partícula o punto material**, punto geométrico con masa, modelo que ha surgido como idealización de cuerpos cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con sus desplazamientos, o bien cuya estructura y movimientos internos no son relevantes para un determinado estudio. Un mismo cuerpo puede ser considerado como una partícula para estudiar ciertos movimientos pero no para otros. Por ejemplo, un bloque rectangular que desliza por una superficie horizontal puede ser representado como una partícula, pero ese modelo no es adecuado si quieren estudiarse las condiciones de volcamiento del mismo bloque en un plano inclinado, pues aquí la rotación es esencial y una partícula, un punto, no rota. El planeta tierra puede ser representado como una partícula para estudiar su movimiento de traslación alrededor del sol, pero no para estudiar la rotación diaria alrededor de su propio eje. No se trata pues de saber si un cuerpo es o no una partícula o punto material. No lo es. Las partículas son construcciones de la mente, son modelos abstractos. El problema está en saber si un cuerpo en determinadas condiciones puede ser adecuadamente representado como una partícula.

Luego veremos que, gracias a la tercera ley, es posible extender con facilidad la segunda ley a conjuntos o sistemas de partículas y a cuerpos extensos.

### 3.2 INTERACCIONES Y TIPOS DE FUERZAS

El estudio de la materia hecho por la física ha mostrado que las interacciones pueden reducirse a unas cuantas clases, llamadas interacciones fundamentales: La interacción gravitacional, la electromagnética y las interacciones denominadas fuerte y débil.

La interacción gravitacional se presenta entre todos los cuerpos del universo, que se atraen entre sí con fuerzas gravitacionales. Las fuerzas de atracción gravitacional entre cuerpos pequeños, como aquellos con los que se experimenta en un laboratorio de mecánica, son sumamente pequeñas. Las fuerzas de interacción gravitacional son primordiales en el movimiento de sistemas astronómicos, por la gran masa de algunos cuerpos involucrados y porque otros tipos de fuerzas están prácticamente ausentes. La interacción gravitacional es determinante en el movimiento de satélites, de planetas, de cometas, de estrellas. A nivel inmediato, cotidiano, se manifiesta en la fuerza de atracción gravitacional hecha por el planeta tierra sobre los cuerpos, que no es otra cosa que el peso de esos cuerpos.

La interacción electromagnética se da entre cuerpos o partículas cargadas eléctricamente, y aquí nos referimos, no a las “partículas” como modelo de la mecánica clásica, sino a las partículas elementales de la física moderna como electrones, protones, en fin, constituyentes de los átomos a nivel microfísico. A diferencia de la interacción gravitacional en la que sólo hay una clase de masa y las fuerzas son siempre atractivas, hay dos clases de cargas eléctricas, positiva y negativa, y las fuerzas pueden ser atractivas o repulsivas. Las dos clases de carga permiten que en muchísimos casos los cuerpos estén balanceados eléctricamente y así globalmente no hay interacción electromagnética neta, lo que ocurre tanto en pequeña escala con cuerpos de la vida cotidiana, como a escala astronómica en la que prima la interacción gravitacional. Pero en muchos casos, la interacción electromagnética, comprendida con exactitud y controlada con precisión, es de enorme importancia, como lo demuestra la gran cantidad de equipos, instrumentos y artefactos eléctricos, magnéticos, electrónicos, esenciales en la vida moderna de los hombres. Además, la luz, la decisiva luz, es un fenómeno electromagnético: es una onda electromagnética. A nivel microfísico, intermolecular, la interacción electromagnética es la responsable de los procesos químicos, de la cohesión, resistencia y elasticidad de los cuerpos. Si un bloque reposa o desliza sobre una mesa, lo que llamamos contacto desde un punto de vista macroscópico, no es otra cosa en el microcosmos que una miríada de interacciones intermoleculares electromagnéticas de proximidad, y no de contacto, que a ese nivel no existe. Las interacciones microfísicas que mantienen unidos entre sí los trozos de una cuerda tensa, son intermoleculares, electromagnéticas. En general, pues, las fuerzas comunes, macroscópicas, de la mecánica newtoniana, como las fuerzas de contacto entre sólidos, normal y fricción; las tensiones en las cuerdas; las fuerzas elásticas en resortes o en el interior de cuerpos sólidos o fluidos, son fuerzas cuyo origen microfísico es intermolecular, electromagnético, pero cuya descripción a ese nivel sería enormemente compleja. Por eso esas fuerzas de contacto de la mecánica, que, además de la fuerza de atracción gravitacional, conforman un vasto panorama de aplicaciones, son tratadas de manera global, muchas veces experimental, sin remitirse a su origen microscópico. Daremos luego descripciones cuantitativas precisas de esas fuerzas.

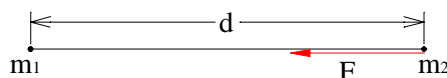
La interacción gravitacional entre objetos distantes, por ejemplo entre la tierra y la luna, ha sido tratada clásicamente como una “fuerza a distancia”, sin preocuparse por los problemas de su “transmisión” de un punto a otro. Innumerables aplicaciones pueden trabajarse así de manera consistente, y eso haremos. Sin embargo, el punto de vista moderno se ha modificado, introduciendo el concepto de **campo**: una masa, como la tierra, produce en el espacio circundante, un campo gravitacional y la fuerza sobre la luna resulta de la acción de ese campo sobre ella. En las aplicaciones de la mecánica newtoniana es posible trabajar sin apelar al concepto de campo gravitacional, pero en la interacción electromagnética eso no es posible. Allí el concepto de campo es totalmente esencial.

Las interacciones nucleares son responsables de los procesos a nivel del núcleo atómico. La interacción fuerte, vinculada con la cohesión de los núcleos atómicos, es una interacción de enorme intensidad y muy corto alcance. Es fundamental en la física moderna al estudiar la materia a nivel de sus constituyentes últimos. Es responsable, por ejemplo, de la gran producción de energía de las estrellas. Otra interacción, llamada débil, está vinculada con ciertos procesos radiactivos. Al nivel macroscópico de la mecánica newtoniana, las interacciones nucleares no tienen incidencia directa en el movimiento de los cuerpos.

Al desarrollar las aplicaciones de las leyes de Newton, en el estudio que se suele llamar dinámica de una partícula, presentaremos las fuerzas de la mecánica: la fuerza gravitacional y las diversas fuerzas de contacto.

### 3.3 FUERZA DE ATRACCIÓN GRAVITACIONAL. EL PESO

Además de las leyes del movimiento, otro hallazgo fundamental de Newton es el de la **Ley de la Gravitación Universal**: dos partículas se atraen mutuamente con una fuerza en la dirección de la línea que las une y cuya magnitud es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.



$$F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$$

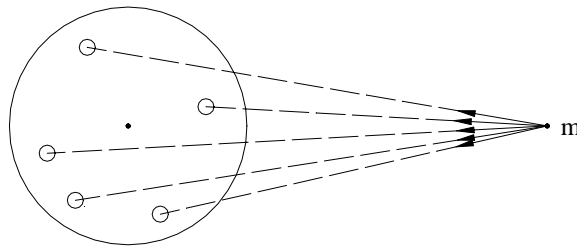
Hemos dibujado la fuerza hecha sobre  $m_2$  por  $m_1$ . De acuerdo a la tercera ley, hay, por supuesto, otra fuerza de igual magnitud y dirección contraria hecha sobre  $m_1$  por  $m_2$ . La constante  $G$ , llamada la Constante Gravitacional, fue determinada la primera vez por Henri Cavendish en 1771 usando una balanza de torsión, y su valor moderno es

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

Con este valor de  $G$  puede verse que la fuerza gravitacional entre objetos pequeños es muy débil. Esa fuerza es notable cuando hay cuerpos muy masivos, como por ejemplo, el planeta Tierra.

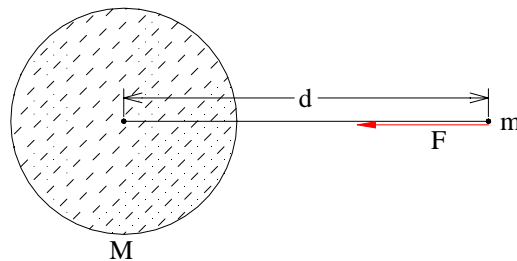
Pero la ley de gravitación según hemos visto, se aplica a partículas. ¿Cómo hacer para calcular la fuerza de atracción gravitacional ejercida por un cuerpo extenso, tal como el planeta tierra? En principio, la manera de hacerlo es la siguiente:





Se divide el cuerpo extenso en pequeños trozos que pueden ser considerados prácticamente como partículas; se calcula con la ley de gravitación la pequeña fuerza hecha por cada trozo sobre una partícula de masa  $m$ ; se suman vectorialmente todas esas pequeñas fuerzas y la resultante, en el límite cuando se cubre todo el cuerpo extenso, será la fuerza gravitacional ejercida sobre la partícula de masa  $m$ . Matemáticamente el procedimiento equivale a hacer una integración sobre todo el cuerpo extenso.

El caso más importante es, sin duda, el de una esfera, pues muchos cuerpos grandes, importantes, son muy aproximadamente esféricos, como el sol, los planetas y muchos satélites naturales. El resultado, debido otra vez a Newton, es de una sencillez asombrosa. No haremos ahora la deducción, pero enunciaremos y usaremos el bello resultado.



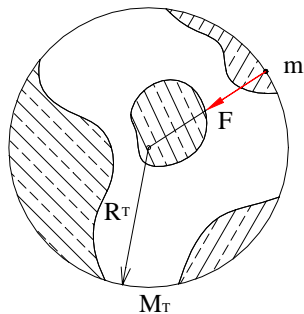
Una esfera tiene masa total  $M$ . Esta masa no tiene que estar uniformemente distribuida en la esfera, basta con que la densidad tenga simetría esférica, es decir sólo dependa del radio. En términos simples, la esfera maciza puede estar formada por capas o caparazones esféricos de diferente material, como en el caso de la tierra.

La fuerza de atracción gravitacional hecha por la esfera sobre una partícula de masa  $m$  que se encuentra a una distancia  $d$  del centro de la esfera, está dirigida hacia dicho centro y su magnitud es

$$F = \frac{G M m}{d^2} ,$$

es decir, es igual a la fuerza de atracción que ejercería una partícula de masa  $M$ , igual a la de la esfera, y localizada en su centro.

Consideremos ahora un cuerpo (partícula) de masa  $m$  situado muy cerca de la superficie terrestre y usemos el resultado anterior para calcular la fuerza de atracción ejercida por la tierra sobre  $m$ .



Sean  $M_T$  y  $R_T$  la masa y radio de la tierra, cuyos valores aproximados son

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 6370 \text{ km}.$$

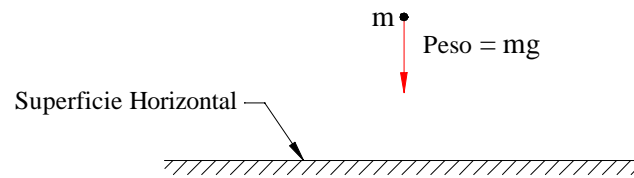
La fuerza de atracción gravitacional hecha por el planeta tierra sobre un cuerpo (puntual) de masa  $m$ , situado cerca de su superficie, que definiremos como el **peso** de dicho cuerpo, es una fuerza dirigida hacia el centro de la tierra y cuya magnitud es

$$F = \frac{G M_T m}{R_T^2} = m g,$$

siendo  $g$  la magnitud de la aceleración de la gravedad. Tendremos entonces

$$g = \frac{G M_T}{R_T^2}.$$

Visto localmente, el peso de un cuerpo puntual es pues una fuerza vertical hacia abajo, de magnitud  $m g$ .



Más adelante, al presentar el concepto de centro de gravedad, estudiaremos el peso de los cuerpos extensos.

La definición de peso que hemos dado es inequívoca. Si un cuerpo está lejos de la superficie terrestre, por ejemplo un satélite, no hablaremos del peso “allá” del satélite, sino de la fuerza de atracción gravitacional hecha por la tierra sobre el satélite en esa posición, lo que es totalmente preciso.

Con esa definición, el peso de un cuerpo no depende de que esté en reposo o moviéndose respecto a tierra. La aceleración de la gravedad  $g$  que establecimos, es la aceleración de caída de un cuerpo, sin fricción con el aire, respecto a un observador que no rote con la tierra. La aceleración de la gravedad medida por un observador anclado en la tierra y rotando con ella, aceleración aparente de la gravedad, tiene un valor levemente diferente y varía con la latitud desde el ecuador terrestre hasta los polos. Hay también variaciones debidas al hecho de que la tierra no es completamente esférica sino que tiene un pequeño achatamiento en los polos, debido precisamente a su rotación. Unos valores aproximados de  $g$  son.

$$g_{\text{ecuador}} = 9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g_{\text{polos}} = 9.83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Hemos llamado **masa inercial** a la masa de un cuerpo que aparece en la segunda ley de Newton y que se manifiesta en la mayor o menor dificultad para imprimirle al cuerpo un determinado cambio a su vector velocidad. La masa de un cuerpo que figura en la ley de gravitación universal es, en principio, una cantidad conceptualmente independiente y diferente, que podemos llamar **masa gravitacional**. Si llamamos  $m_i$  a la masa inercial y  $m_g$  a la masa gravitacional de un cuerpo, la segunda ley de Newton aplicada a un cuerpo en caída libre bajo la atracción gravitacional será

$$\left( \frac{G M_T}{R_T^2} \right) m_g = m_i g ,$$

y entonces la aceleración de la gravedad será

$$g = C \left( \frac{m_g}{m_i} \right)$$

donde  $C$  es una constante que depende del planeta tierra. Ahora bien, la ley de Galileo establece que todos los cuerpos caen con la misma aceleración  $g$  y por tanto la relación entre masa gravitacional y masa inercial tiene que ser la misma para todos los cuerpos, de modo que, eligiendo adecuadamente las unidades,

$$\frac{m_g}{m_i} = 1, \quad \text{o sea,} \quad m_g = m_i$$

para todos los cuerpos. Con inmensa, enorme precisión experimental, se ha comprobado que las masas inercial y gravitacional de un cuerpo son iguales, ¡pero no hay una razón de fondo para ello!, es una coincidencia en la Mecánica Clásica y uno de sus enigmas más acuciantes. Hay que esperar hasta el principio de equivalencia de Einstein para dar una razón de esa igualdad.

Hecha esta aclaración, llamaremos simplemente masa de un cuerpo bien sea a su masa inercial o gravitacional.

La masa es una característica que no depende de la localización del cuerpo. Una determinada piedra tiene una masa única y bien establecida, así se encuentre en el subsuelo, en la superficie terrestre, en una nave espacial o en la luna. El peso, en cambio, es una fuerza local. El peso de esa piedra es la fuerza hecha sobre ella por la tierra cuando está en un punto de su superficie. Cuando la piedra esté en la nave espacial, habrá otra fuerza de atracción hecha por la tierra sobre ella, pero ya no la llamaremos el peso.

### 3.4 FUERZA: DIMENSIONES Y UNIDADES

En un sistema de unidades cuyas cantidades o magnitudes físicas fundamentales son longitud, masa y tiempo, las dimensiones de la fuerza, de acuerdo a la segunda ley de Newton son

$$\text{dimensión de } F = [F] = M[a] = M L T^{-2}.$$

La unidad de fuerza en el Sistema Internacional, SI, es el Newton, abreviado N:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}.$$

Como el peso es una fuerza cotidiana muy importante, hay unidades de fuerza basadas en el peso. Así un **kilogramo-fuerza**, escrito kgf, es una unidad de fuerza que se define como el peso de un cuerpo cuya masa es un kilogramo. Como vimos,

$$\text{Peso} = m g,$$

y por tanto,

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \times \text{aceleración de la gravedad}.$$

El problema es ¿cuál aceleración de la gravedad, en cuál lugar? Por convenio internacional se toma el valor de la llamada aceleración normal de la gravedad,

$$g_{\text{normal}} = 9.80665 \text{ m s}^{-2},$$

con lo que,

$$1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N}.$$

Usualmente trabajamos con valores aproximados,  $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ , y a menudo  $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$ , y entonces

$$1 \text{ kgf} \approx 9.8 \text{ N}.$$

El kilogramo–fuerza es una unidad de fuerza que tiene cierto uso técnico y mucho uso informal y hay que comprenderla bien. Si se pregunta a una persona por su propio peso, probablemente responderá algo como “60 kilos”. Pues bien, son 60 kgf, con lo que su masa son 60 kg y su peso, en SI, en Newtons, es

$$60 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 588 \text{ N}.$$

Ciertos problemas de equilibrio, de estática, pueden tratarse consistentemente en kgf, pero en dinámica, lo actual, lo correcto, lo prudente, es trabajar en unidades SI.

Sin embargo, hay textos valiosos de mecánica que usan diversos sistemas de unidades. Algunos tienen como magnitudes fundamentales longitud, masa y tiempo: L M T, y en ellos la fuerza es una magnitud derivada. Otros, llamados sistemas técnicos o gravitatorios, usan como magnitudes fundamentales longitud, fuerza y tiempo: L F T, y en ellos la masa es una magnitud derivada. Como simple referencia para facilitar la consulta de diversos libros de mecánica daremos las dimensiones y unidades básicas de algunos sistemas.

### Sistema L M T

Fundamentales	SI	c.g.s.	
L	m	cm	Pie ft
M	kg	g	libra masa lbm
T	s	s	s s
Derivada			
F	newton	dina	poundal
$[F] = M L T^{-2}$	$1 \text{ N} = \text{kg m s}^{-2}$	$1 \text{ dina} = 1 \text{ g cm s}^{-2}$	$1 \text{ poundal} = 1 \text{ lbm ft s}^{-2}$

**Sistema L F T**

Fundamentales	Inglés	
L	pie	ft
F	libra	lb
T		s
Derivada		
m	slug	unidad técnica de masa
$[m] = FL^{-1} T^2$	$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb ft}^{-1} \text{ s}^2$	$1 \text{ u.t.m.} = 1 \text{ kgf m}^{-1} \text{ s}^2$

Al kilogramo-fuerza, kgf, se le llama a veces kilopondio.

La relación entre la libra masa, lbm, y la libra, lb, unidad de fuerza, es análoga a la relación entre el kilogramo, kg y el kilogramo fuerza, kgf: una libra es el peso de un cuerpo cuya masa es una libra-masa.

Las equivalencias básicas con el sistema inglés son:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ lbm} = 0.4536 \text{ kg}.$$

Con un manejo claro y ordenado de las relaciones básicas entre las diversas unidades, las conversiones de unas a otras se hacen con facilidad.

Veamos un ejemplo:

1 slug, ¿a cuántos kg equivale?

$$\begin{aligned}
 1 \text{ slug} &= \frac{1 \text{ lb s}^2}{\text{ft}} = \frac{(1 \text{ lbm} \times g) \text{ s}^2}{\text{ft}} \\
 &= \frac{1 \text{ lbm}}{\text{ft}} \times \left( \frac{9.80665 \text{ m}}{\text{s}^2} \right) \times \text{s}^2 \times \left( \frac{0.4536 \text{ kg}}{1 \text{ lbm}} \right) \times \left( \frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} \right)
 \end{aligned}$$

$$1 \text{ slug} = 14.59 \text{ kg}.$$

### 3.5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON. PROBLEMAS DE DINÁMICA

En el estudio del movimiento de una partícula, es decir de un cuerpo (o conjunto de cuerpos) idealizable como un punto material, es de fundamental importancia la consideración de algunos aspectos que vamos a señalar.

#### Definir el sistema mecánico. Diagrama de fuerzas

Definir, o, como se dice a veces, aislar el sistema mecánico, es determinar con claridad cuál es el cuerpo (o conjunto de cuerpos) cuyo movimiento va a estudiarse. Consiste en precisar cuáles porciones de materia, qué objetos, forman parte del sistema elegido, es decir, son su interior, y cuáles no son del sistema, es decir, son externos a él.

Definir el sistema implica precisar con cuáles cuerpos externos tiene interacciones relevantes el sistema objeto de estudio. Con frecuencia una línea punteada trazada en un dibujo, rodeando el sistema o cuerpo elegido, ayuda a determinar con cuáles cuerpos externos hay interacciones. **Todas** las interacciones externas relevantes se representan como **fuerzas hechas sobre** el cuerpo elegido o sistema mecánico, en el **diagrama de fuerzas**, que debe hacerse siempre en una posición o situación general del movimiento del cuerpo.

Definir el sistema mecánico es pues determinar con exactitud cuál cuerpo, cuál trozo de materia, va a estudiarse, para poder decir con precisión cuáles son todas las fuerzas externas que actúan sobre él y determinan su movimiento.

La elección clara y explícita de un cuerpo o sistema mecánico y la consecuente realización de su diagrama de fuerzas, son cuestiones cruciales de la mecánica. A medida que se progresa en su estudio, los cuerpos o sistemas mecánicos posibles serán más variados, más sutiles, más complejos. Por ahora, para que un sistema mecánico elegido pueda ser tratado como una sola partícula o punto material, se requiere que sus movimientos internos no sean relevantes.

#### Marco inercial de referencia. Ejes

Hay que definir con claridad cuál es el cuerpo rígido (o conjunto de cuerpos rígidamente unidos entre sí) que va a servir de marco de referencia. Para poder aplicar la segunda ley de Newton dicho marco de referencia debe ser inercial. Con frecuencia, para el estudio de movimientos de cuerpos en un laboratorio o, en general, cerca de la superficie terrestre, se elige como marco de referencia el propio laboratorio o edificio, es decir, un marco localmente unido a la superficie terrestre, marco que puede considerarse muy aproximadamente inercial, despreciando los pequeños efectos de rotación de la tierra, que para muchísimos movimientos locales no son importantes.

Elegido el marco inercial de referencia es necesario determinar un sistema de coordenadas adecuado. En un comienzo usaremos unas coordenadas cartesianas, lo que conlleva entonces la elección de un origen fijo y unos ejes  $x$ ,  $y$ , igualmente fijos en el marco inercial elegido.

Más adelante, en el movimiento circular, estudiaremos las coordenadas intrínsecas con sus direcciones tangencial y normal.

Con frecuencia el movimiento de un cuerpo se realiza de una manera determinada y específica, debido a restricciones, ligaduras o vínculos especiales, que lo obligan a moverse de tal o cual manera. Por ejemplo, un plano inclinado obliga a moverse un cuerpo en una trayectoria rectilínea. Sobre una pista circular un cuerpo se mueve forzosamente en círculo. Otro cuerpo se encuentra simplemente en reposo, o bien, dos bloques unidos por una cuerda inextensible tienen movimientos ligados uno al otro. La elección de ejes adecuados está muy relacionada con esas condiciones específicas de cada movimiento concreto y es importante plasmar matemáticamente con claridad dichas condiciones específicas, que son de tipo cinemático, antes de la aplicación de la segunda ley de Newton.

### **Plantear la Segunda Ley de Newton**

Elegido el cuerpo o sistema mecánico, hecho el diagrama de fuerzas, determinado el marco inercial de referencia, definidas las coordenadas y ejes, precisadas las condiciones específicas del movimiento si las hay, deben plantearse las componentes de la segunda Ley de Newton en los ejes y direcciones elegidos. Estas componentes de la segunda ley se conocen a menudo como ecuaciones de movimiento del cuerpo y permiten expresar su aceleración en una posición o situación general.

### **Cinemática**

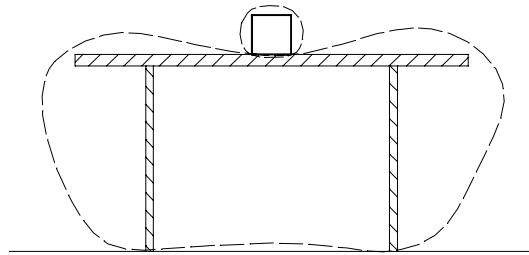
Conocida la aceleración en posición general se puede, si es del caso, hacer el estudio cinemático del movimiento, es decir, la determinación de unas condiciones iniciales, la integración para obtener las funciones velocidad y posición en situación general y, en fin, el análisis de situaciones particulares.

La variedad de movimientos que pueden estudiarse en la dinámica aplicando las leyes de Newton es enorme. Los aspectos indicados antes, señalan puntos fundamentales que deben tenerse en cuenta cuando va a estudiarse un movimiento y hay que usarlos de manera organizada y reflexiva, aunque flexible. Las bases del análisis dinámico del movimiento de un cuerpo, las leyes de Newton, no son evidentes ni intuitivas. Hay que aprender a utilizarlas. Y es preciso recordar también que el objetivo de la mecánica es el estudio de los movimientos de los cuerpos del mundo real, mediante unos modelos físico-matemáticos. Y para aprender a conocer la calidad de la correspondencia entre los movimientos modelados, idealizados, y los movimientos reales, es imprescindible la realización experimental, unas veces precisa y refinada, pero otras veces cualitativa y aproximada; unas veces en el laboratorio de mecánica, pero, muchas otras veces, en la vida cotidiana.



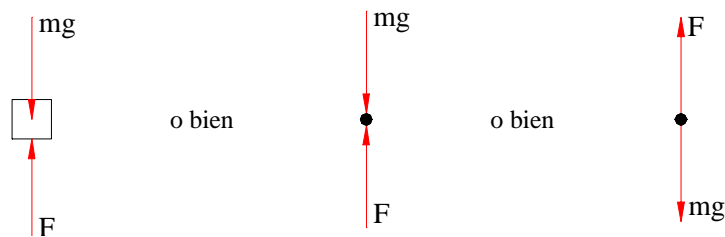
## 1. EJEMPLO

### Bloque en reposo en una mesa horizontal.

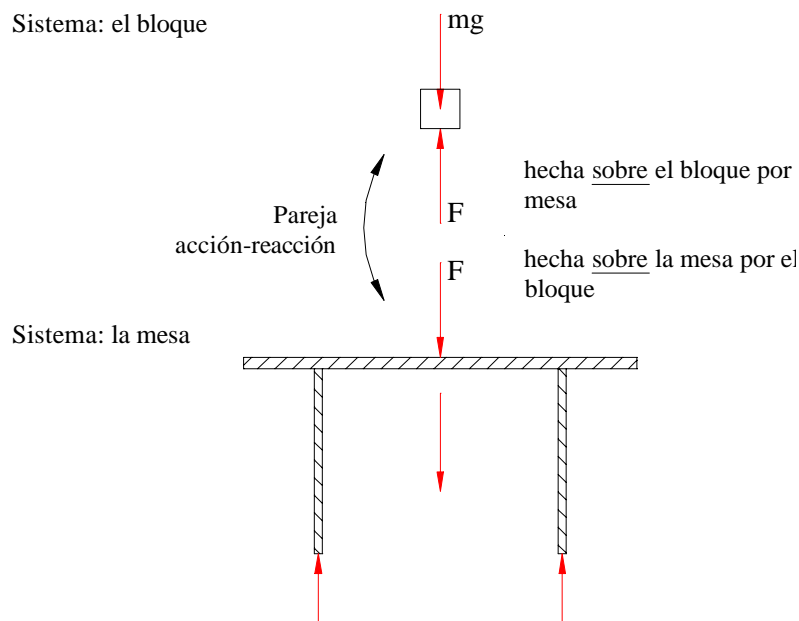


**Sistema mecánico:** el bloque, considerado como una partícula. En primer lugar hay que determinar las fuerzas que actúan sobre el bloque. Para “aislar” el sistema bloque, piense en una superficie que rodea el bloque (representada en el dibujo como una línea punteada). Las fuerzas sobre el bloque pueden ser, o fuerzas gravitacionales “a distancia”, o fuerzas de contacto. La línea punteada muestra con cuáles cuerpos hay contacto. En este caso, llamando  $m$  la masa del bloque, tendremos el peso del bloque, atracción gravitacional hecha por el planeta tierra sobre el bloque, de valor  $mg$ , y la fuerza  $F$  de contacto hecha por la mesa sobre el bloque

El **diagrama de fuerzas** sobre el bloque será:



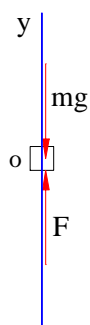
Estamos tratando al bloque como si fuese una partícula, y los dos diagramas de la derecha así lo muestran, en uno las flechas que indican la dirección de los vectores, “entran” a la partícula y en el otro dichas flechas “salen” de ella. Los tres diagramas son equivalentes y se usan, pero en este caso el diagrama de la izquierda muestra con mayor claridad donde se aplica la fuerza de contacto  $F$  hecha por la mesa y por eso lo preferimos. Usualmente en los diagramas sólo indicaremos la magnitud de las fuerzas, pues sus direcciones ya están señaladas.



Veamos por un momento el sistema mecánico “la mesa” para ilustrar el manejo de la tercera ley de Newton. Así como hay una fuerza, de magnitud  $F$ , hecha sobre el bloque por la mesa, que se dibuja en el diagrama de fuerzas del bloque, hay una fuerza, de igual magnitud  $F$  y dirección contraria, hecha sobre la mesa por el bloque, que aparece en el diagrama de fuerzas de la mesa. Esa pareja “acción–reacción”, aparece siempre en diagramas de fuerzas de cuerpos diferentes. Es de gran importancia saber responder con toda claridad, siempre que se dibuja una fuerza, sobre cuál cuerpo material actúa y por cuál cuerpo es hecha.

Las otras fuerzas que actúan sobre la mesa son su propio peso y las fuerzas de contacto hechas por el piso, pero estudiaremos ahora el sistema bloque.

**Sistema mecánico:** el bloque. Diagrama de fuerzas. Situación general.



**Marco inercial. Ejes. Condiciones específicas.**

Un marco de referencia localmente fijo a la tierra es, como ya dijimos, muy aproximadamente inercial. Diremos simplemente marco inercial el edificio, o el piso, o tierra. Elijamos un eje  $y$

hacia arriba y fijemos su origen en la mesa. Como el bloque está en reposo, siempre estará en el origen. Esa es la condición específica de este “movimiento”. Matemáticamente,

$$y = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad a_y = 0 .$$

### Segunda Ley de Newton.

La segunda ley de Newton es vectorial,  $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ . La componente vertical queda,

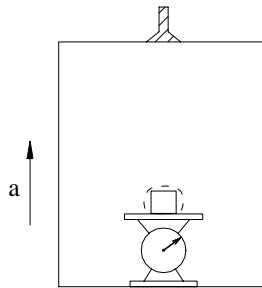
$$\sum F_y = m a_y \quad : \quad F - m g = 0 .$$

La suma de fuerzas sobre el bloque es cero y se dice entonces que el bloque está en equilibrio. En este caso, la fuerza  $F$  hecha por la mesa es entonces

$$F = m g .$$

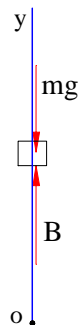
## 2. EJEMPLO

Un bloque de masa  $m$  descansa sobre una báscula de resorte, dentro de un ascensor que sube con aceleración  $a$ . ¿Cuánto marca la báscula?

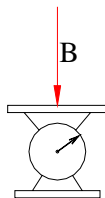


**Sistema mecánico:** el bloque

**Diagrama de fuerzas** en posición general.



B es la fuerza de contacto hecha por la báscula sobre el bloque.



La fuerza que registra la báscula es la fuerza de igual magnitud B y dirección contraria hecha, de acuerdo a la tercera ley de Newton, sobre la báscula por el bloque.

### Marco inercial. Ejes. Condiciones especiales

El marco inercial, ligado a tierra, es el edificio. El ascensor, si bien es un marco de referencia, no es inercial por tener aceleración. Fijemos un eje y positivo hacia arriba en el edificio, con origen en el piso del edificio. Es importante notar que, como el diagrama de fuerzas se hace en una posición genérica cualquiera, el origen no puede estar en el bloque: el origen es un punto fijo del edificio y el bloque se está moviendo. Como el bloque está en reposo respecto a la báscula y al ascensor, su aceleración respecto al edificio es igual a la del ascensor y así el movimiento tiene una condición específica que es:

$$a_y = a.$$

### Segunda ley de Newton

$$\sum F_y = m a_y \quad : \quad B - m g = m a$$

por tanto

$$B = m(g + a).$$

Hemos definido el peso de un cuerpo como la fuerza de atracción gravitacional hecha sobre él y según eso el “peso” del bloque mientras sube aceleradamente es  $mg$ . Pero hay otra noción de lo que es el “peso” que hay que comprender.

Según esta acepción, el “peso” de un cuerpo es la fuerza que éste ejerce sobre la báscula en la cual se encuentra en “reposo” dicho cuerpo. En este sentido del término, el “peso”, medido por la báscula, sería  $m(g + a)$ . Si el ascensor se encuentra bajando con aceleración de magnitud  $a$ , es fácil ver que, como  $a_y = -a$ ,  $B = m(g - a)$ . Si el ascensor está cayendo libremente, de modo que  $a = g$ , tendremos  $B = 0$ . En el segundo sentido del término “peso”, el bloque simplemente no pesa, se encuentra “flotando” en el ascensor, en el estado llamado de ingravidez.

Ambos conceptos de lo que es el “peso” se usan ampliamente y son correctos y útiles. Sin embargo preferiremos la primera acepción del peso como fuerza de atracción gravitacional, por el énfasis que queremos hacer en las fuerzas “de interacción” y por el propósito de

estudiar el movimiento respecto a marcos inerciales hasta muy avanzada la mecánica. Incluso en el caso en que la báscula se encuentre en reposo en un punto de la superficie terrestre, hay una pequeña discrepancia en magnitud y dirección entre la fuerza de atracción gravitacional y la fuerza sobre la báscula, debido a la pequeña aceleración que proviene del movimiento de la tierra. Sin embargo, como ya hemos dicho, trataremos un marco de referencia fijo a la superficie terrestre como inercial, haciendo caso omiso de esa pequeña aceleración, en el estudio de muchos movimientos.

### 3.5.1 La tensión en una cuerda

Vamos a introducir uno de los sistemas mecánicos más notables e importantes: una cuerda flexible. El hilo delgado y tenso del albañil y del constructor, verdadera materialización de lo que es una recta geométrica; los cables de una línea de transmisión o de un puente colgante; las cuerdas vibrantes de un violín o de un piano, sugieren el amplio papel que ocuparán las cuerdas en la mecánica.

Consideremos en primer lugar una cuerda tensa, fija en sus extremos a dos soportes al mismo nivel. Si la cuerda es masiva, si su peso es apreciable, si es un grueso cable o una cadena, colgará en un plano vertical siguiendo una curva célebre, una catenaria (que viene de catena: cadena),

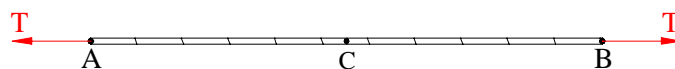


pero si la cuerda es un hilo delgado muy tenso, su peso influye poco, podemos despreciarlo, y la cuerda tomará la forma de una recta horizontal.

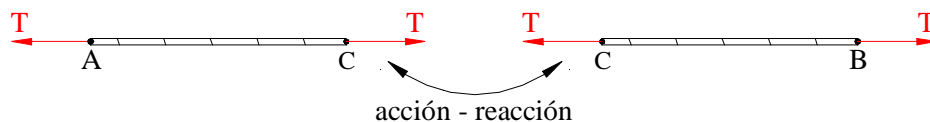


Tomemos como sistema mecánico la cuerda entera AB.

Como la cuerda está en equilibrio y estamos despreciando su peso, las fuerzas hechas por los soportes A y B sobre la cuerda serán iguales en magnitud, que llamaremos  $T$ , y de dirección contraria.

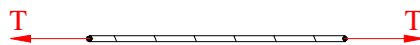


Tomemos ahora como sistemas mecánicos los trozos de cuerda AC y CB.



Como el trozo AC se encuentra en equilibrio, las fuerzas sobre él en A y en C son de igual magnitud,  $T$ , y dirección contraria. La fuerza en C, fuerza de contacto entre dos trozos de cuerda, es hecha por el tramo de la derecha sobre el de la izquierda. Sobre el otro tramo CB estará en C la fuerza de contacto hecha esta vez por el trozo izquierdo sobre el derecho.

Así, cualquier trozo de la cuerda que “aislemos” o separemos con la mente para estudiarlo, estará sometido siempre en sus extremos a dos fuerzas de igual magnitud  $T$  y dirección contraria,



y cualquiera de esas fuerzas se llama simplemente la tensión en la cuerda.

La flexibilidad de la cuerda significa que ésta se puede doblar o flexionar y comprimir sin ningún tipo de resistencia, a diferencia de una barra o varilla sólida que se resiste a ser doblada o flexionada, y que puede estar sometida tanto a fuerzas de **tracción**:



como de **compresión**:



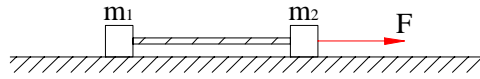
Esta última situación, posible pues en una varilla, es imposible en una cuerda en la que la tensión es siempre una fuerza de tracción.

Las cuerdas reales tienen masa. Es más, al someterse a tensión sufren deformaciones de estiramiento. Pero en muchas situaciones su masa es pequeña en comparación con otras masas involucradas y sus estiramientos son irrelevantes y por tanto, en muchos casos, trabajaremos con un modelo, **cuerda ideal**, no cuerpo real sino ente de razón, inextensible y sin masa, y cuya función es transmitir una tensión de un punto a otro.

Para comprender bien esta función de la cuerda, examinemos ahora la siguiente situación:

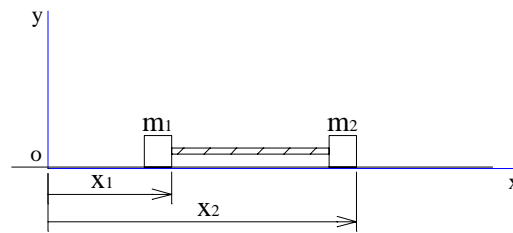
### 3. EJEMPLO

Dos bloques unidos por una cuerda se mueven sobre una superficie horizontal lisa. El bloque  $m_2$  se jala mediante una fuerza  $F$ . Hallar la aceleración y la tensión en la cuerda.



Como la superficie es lisa, no hay fricción y las fuerzas de contacto hechas sobre los bloques son perpendiculares o normales a la superficie y por eso las llamaremos  $N_1$  y  $N_2$ .

**Marco inercial. Ejes. Restricciones o condiciones especiales del movimiento**



Marco inercial: el piso. Fijemos en el piso un origen 0 y unos ejes  $x, y$ . En posición general, la longitud  $\ell$  de la cuerda, constante, es

$$\ell = x_2 - x_1,$$

que, derivando, queda

$$0 = v_{2x} - v_{1x}$$

$$0 = a_{2x} - a_{1x},$$

o sea que, lo que en este caso es bastante evidente, los dos bloques se mueven con la misma velocidad,  $v = v_{1x} = v_{2x}$ , y la misma aceleración,  $a = a_{1x} = a_{2x}$ . Esto es lo que posibilita el tratar al sistema mecánico conjunto de los dos bloques como una sola partícula con velocidad  $v$  y aceleración  $a$ .

En el eje  $y$  no hay movimiento y así

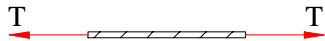
$$y_1 = y_2 = 0$$

$$v_{1y} = v_{2y} = 0$$

$$a_{1y} = a_{2y} = 0.$$

### Sistemas mecánicos

Consideremos en primer lugar la cuerda que une los bloques.

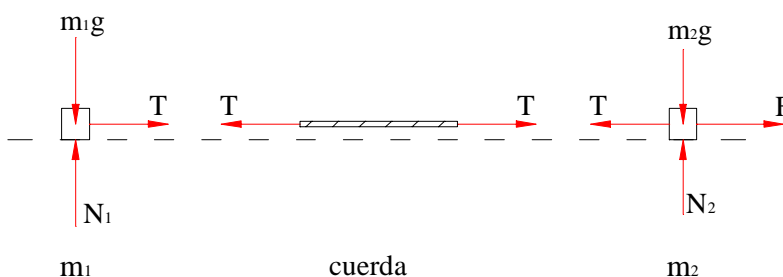


Con los ejes que ya señalamos, la cuerda está moviéndose en  $x$  con aceleración  $a$  y entonces la segunda ley aplicada a la cuerda sería

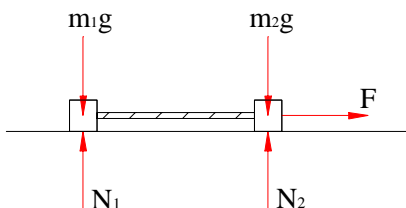
$$\sum F_x = (\text{masa de la cuerda}) \times a.$$

Si despreciamos la masa de la cuerda,  $\sum F_x = 0$  y por eso las tensiones tienen igual magnitud  $T$  a ambos lados, aunque haya aceleración. Si tuviésemos en cuenta la masa de la cuerda, la tensión variaría a lo largo de su longitud.

Las fuerzas sobre los tres sistemas mecánicos  $m_1$ , cuerda y  $m_2$ , están concatenadas por la ley de acción-reacción, como se ve en los tres diagramas de fuerzas.



Pero aquí hay además otro sistema mecánico importante: el conjunto de los bloques y la cuerda que, como tienen el mismo movimiento, pueden ser tratados como una sola partícula. En este caso las fuerzas entre los bloques y la cuerda son fuerzas internas que no aparecen en el diagrama de fuerzas, en el cual sólo figuran las fuerzas externas sobre el sistema.





## Segunda Ley de Newton

Las expresiones de las componentes en  $x$  de la segunda ley para  $m_1$ ,  $m_2$  y el sistema conjunto, no son independientes. En efecto, si se suman las de  $m_1$  y  $m_2$  se obtiene la del sistema conjunto, como se comprueba fácilmente.

Usaremos ahora el sistema conjunto,

componente  $x$  : 
$$F = (m_1 + m_2) a ,$$

con lo que 
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} ,$$

y el sistema  $m_1$  ,

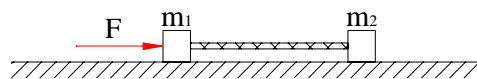
en  $x$  : 
$$T = m_1 a ,$$

con lo que, 
$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F .$$

Una vez comprendido cabalmente el sistema cuerda, suele omitirse su diagrama, pasando directamente de  $m_1$  a  $m_2$  .

## 4. EJERCICIO

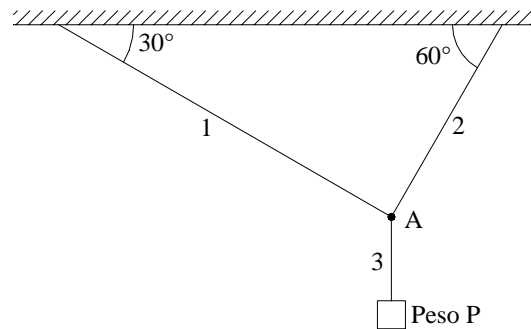
Superficie lisa



Calcule la fuerza en la varilla (de masa despreciable) y muestre que está a compresión. Haga los diagramas de  $m_1$ , la varilla,  $m_2$  y el sistema conjunto.

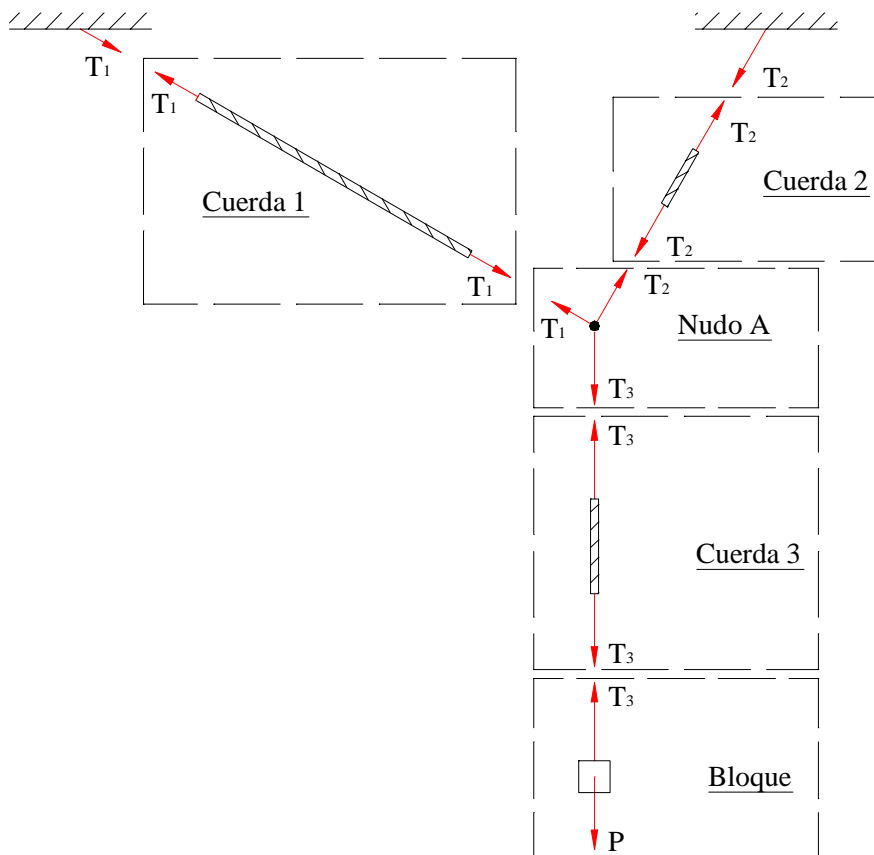
Hay dos alternativas: suponer la varilla a tracción; ser consecuente con ello y el resultado negativo indica que es al contrario. O bien, intuir que está a compresión y asumirlo así, consistentemente, desde el comienzo, para obtener un resultado positivo.

## 5. EJERCICIO



Tres cuerdas anudadas en A. Hallar sus tensiones.

Tercera Ley. Conexión entre los sistemas: bloque, cuerda 1, cuerda 2, cuerda 3 y nudo A. Para aislar este último sistema, piense en una superficie alrededor del nudo, que corta las tres cuerdas que lo forman.



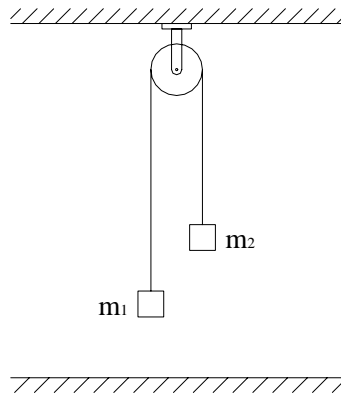
De análoga manera la tercera ley permite concatenar las fuerzas en estructuras o máquinas complejas, en reposo o en movimiento.

Por el equilibrio del bloque,  $T_3 = P$ . El sistema mecánico esencial es el nudo A. Como está en equilibrio, sumatoria de fuerzas, componentes horizontal y vertical, se anulan y quedan dos ecuaciones para las dos incógnitas  $T_1$  y  $T_2$ .

$$T_1 = \frac{P}{2}$$

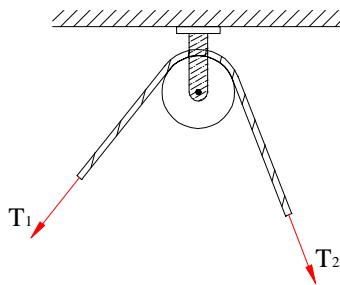
$$T_2 = \frac{P\sqrt{3}}{2}$$

## 6. EJEMPLO. Máquina de Atwood



De una cuerda que pasa por una polea se suspenden verticalmente dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$ . Hallar las aceleraciones de los bloques y la tensión en la cuerda.

Presentemos en primer lugar algunos aspectos de una máquina notable, **la polea**, sistema mecánico de gran utilidad e importancia. Una polea es un disco o rueda, usualmente con un borde ranurado, que puede rotar alrededor de un eje, y que se usa para cambiar la dirección de una cuerda o de un cable.



En una polea real, masiva, que se encuentra en rotación debido a la fricción con la cuerda que está en contacto con ella, las tensiones a ambos lados de la cuerda son en general diferentes. La polea, debido a su rotación, es un sistema mecánico que no puede ser tratado como una partícula y no podemos por tanto ahora estudiarlo completamente. Pero el funcionamiento de una polea idealizada, cuyas características se cumplen bien en muchas situaciones, es muy simple. Veamos.

Una **polea ideal** tiene dos características:

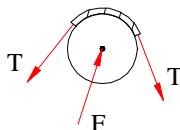
- masa despreciable
- no hay fricción con el eje

La fricción con el eje de muchas poleas, montadas en rodamientos y balineras de calidad, es realmente muy baja, y es la fricción que podemos despreciar en una polea, no así la fricción entre la cuerda y el disco rotante propiamente dicho, fricción que garantiza la rotación del disco y que nunca es despreciable.

Pues bien, en una polea ideal, esté en reposo o en movimiento, las tensiones de la cuerda a ambos lados son iguales:

$$T_1 = T_2 = T .$$

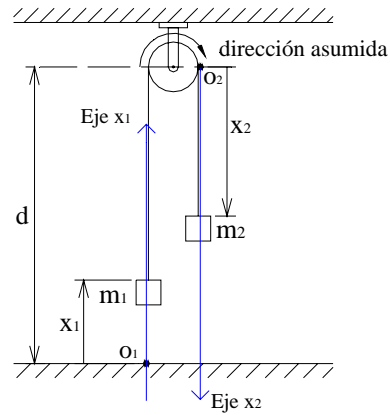
El sistema mecánico polea ideal, que comprende el disco y el trozo de cuerda en contacto con él, tendrá pues el siguiente diagrama de fuerzas,



en el que  $F$  es la fuerza hecha sobre la polea por el eje que la sostiene. Como la masa de la polea ideal es nula, esté el centro de la polea fijo o trasladándose, se cumplirá siempre que  $\sum \vec{F}$  (sobre la polea) = 0.

Volvamos a la máquina de Atwood. Ya habíamos presentado las posibles elecciones de ejes para vincular los movimientos de  $m_1$  y  $m_2$ . La más simple aquí es asumir una dirección de movimiento y elegir los ejes en consecuencia.

### Marco inercial. Ejes. Movimientos ligados



La longitud de la cuerda, constante, es

$$\ell = (d - x_1) + \pi R + x_2 ,$$

y derivando,

$$0 = -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -v_1 + v_2$$

$$0 = -\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -a_1 + a_2 ,$$

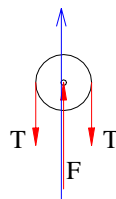
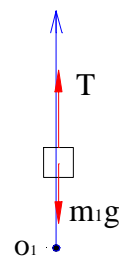
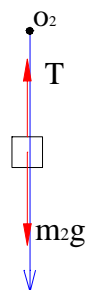
y así,

$$a_1 = a_2 . \quad (1)$$

### Sistemas mecánicos

Omitiendo los trozos de cuerda ideal que ya hemos estudiado antes, los tres sistemas importantes son: el bloque  $m_1$  (como una partícula); el bloque  $m_2$  (partícula) y la polea ideal (que no es una partícula, pero cuyo funcionamiento ya conocemos). Sus diagramas de fuerzas en una situación general cualquiera son,

## Polea

Bloque  $m_1$ Bloque  $m_2$ 

Hemos vuelto a dibujar los ejes ya elegidos para  $m_1$  y  $m_2$  para facilitar las componentes de la segunda ley. Para la polea elegimos un eje como se indica.

**Segunda ley de Newton**

La componente de la segunda ley para cada sistema, según el eje indicado, es

Polea  $F - 2T = 0$

$m_1$   $T - m_1 g = m_1 a_1$  (2)

$m_2$   $m_2 g - T = m_2 a_2$  (3)

La ecuación para la polea permite hallar la fuerza hecha por el eje,  $F$ , una vez se conozca  $T$  y no la vamos a numerar, para darle sencillez a la estructura algebraica de tres ecuaciones, la ligadura y las leyes de Newton para  $m_1$  y  $m_2$ , para las 3 incógnitas  $a_1$ ,  $a_2$  y  $T$ . Resolviendo,

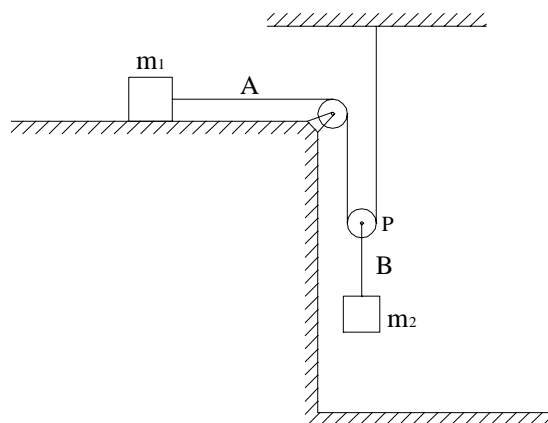
$$a_1 = a_2 = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Si  $m_2 < m_1$ , las aceleraciones son negativas y los movimientos de los bloques, si se sueltan desde el reposo, serán al contrario de lo asumido.

Graduando los valores de  $m_1$  y  $m_2$ , se pueden obtener en la máquina de Atwood movimientos con aceleración constante muy baja, determinables experimentalmente por métodos cinemáticos, y así se puede obtener el valor de  $g$ . Sin embargo, si el trabajo requiere gran precisión o si la polea tiene una masa apreciable, la representación como polea ideal no es suficiente. En el estudio de los cuerpos rígidos volveremos a visitar esta máquina para tener en cuenta la masa de la polea.

## 7. EJERCICIO



Superficies lisas. Poleas y cuerdas ideales. Hallar las aceleraciones de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $P$  (centro de la polea móvil) y las tensiones en las cuerdas  $A$  y  $B$ .

**Sugerencia:** Ejes del ejercicio 10 de movimiento rectilíneo.

Ecuaciones:

- 1) longitud de A,
- 2) longitud de B,
- 3) componente horizontal de la ley de Newton para  $m_1$ ,
- 4) ley de Newton para  $m_2$ ,
- 5)  $\sum \text{Fuerzas} = 0$  para polea ideal móvil.

Sistema (¡ de ecuaciones muy sencillas !) de 5 ecuaciones para las 5 incógnitas  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_p$ ,  $T_A$  y  $T_B$ .

$$\text{Con } a' = \frac{m_2 g}{4 m_1 + m_2},$$

$$a_1 = 2 a'$$

$$a_2 = a_p = a'$$

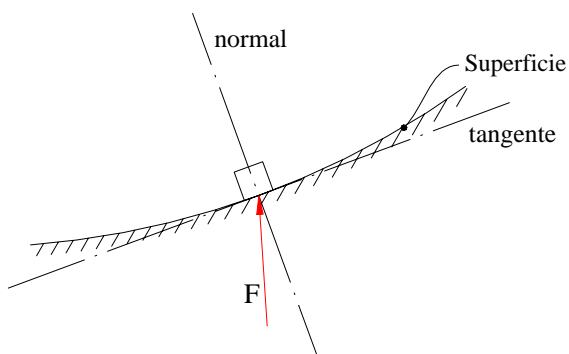
$$T_A = 2 m_1 a'$$

$$T_B = 4 m_1 a'$$

### 3.5.2 Fuerzas de contacto entre superficies de sólidos. La fuerza normal y la fuerza de fricción

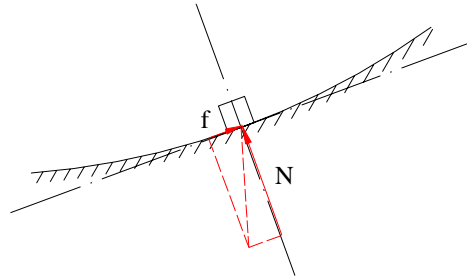
Cuando un cuerpo sólido, rígido, intenta deslizar o efectivamente desliza sobre la superficie de otro sólido, se presenta en dicha superficie una fuerza de contacto hecha por un cuerpo sobre el otro.

Consideremos la superficie representada en la figura, y centremos la atención en la fuerza de contacto  $F$  hecha sobre un bloque que intenta deslizar hacia abajo por la superficie, o que realmente se está deslizando hacia abajo por ella.



Tracemos una perpendicular o normal y una tangente a la superficie de deslizamiento y consideremos las componentes de la fuerza de contacto  $F$  sobre el bloque en esas direcciones.





La componente de la fuerza de contacto sobre el bloque, perpendicular o normal a la superficie de deslizamiento, se llama **fuerza normal** y la designaremos como  $N$ , y la componente tangencial es **la fuerza de fricción**, que denotaremos como  $f$ . Hay, por supuesto, de acuerdo a la tercera ley, fuerzas de igual magnitud y dirección contraria hechas sobre el piso por el bloque.

Tanto la fuerza normal como la fuerza de fricción provienen de incontables interacciones de tipo electromagnético entre los átomos y moléculas de las capas superficiales de los dos sólidos. Macroscópicamente hablamos de “contacto” entre ellos, pero a nivel microscópico ese concepto pierde validez y lo que hay es una gran proximidad de átomos y moléculas. La descripción microfísica de ese “contacto” sería enormemente compleja y por ello en mecánica clásica se trabaja con las fuerzas macroscópicas de contacto,  $N$  y  $f$ , que engloban de manera útil y simple aquella complejidad.

La fuerza normal  $N$ , perpendicular o normal a la superficie de contacto, es una fuerza con un comportamiento muy diferente a una fuerza como el peso o atracción gravitacional. Para verlo piense en la siguiente situación: si una persona de peso  $P$  está quieta de pie en un piso horizontal, el piso ejerce sobre ella, hacia arriba, una fuerza normal  $N = P$ . Pero si la persona salta hacia arriba, pone en acción movimientos musculares y ejerce sobre el piso una fuerza  $N$  mayor que  $P$ . El piso entonces “responde” con una fuerza normal de reacción  $N > P$ . La normal  $N$  es una fuerza que asume cualquier valor que sea necesario y no tiene un límite claramente determinado, salvo la ruptura o colapso del material. La persona puede estar quieta encima de una delgada tabla, pero si intenta saltar hacia arriba la tabla se quiebra indicando que la normal  $N$  copó su límite.

La fricción o rozamiento que estudiaremos ahora, es la fuerza tangencial a la superficie de contacto entre cuerpos sólidos secos y se llama a veces fricción seca, para distinguirla de la fricción en fluidos que se presenta, bien cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido, bien cuando hay lubricantes entre las superficies. Coulomb estudió experimentalmente la fricción seca y a él se deben las leyes que vamos a presentar, por lo que dicha fricción se llama también fricción de Coulomb.

Si el bloque que habíamos mostrado está efectivamente deslizándose por la superficie de contacto, es decir si hay una velocidad relativa del bloque respecto al piso, la fuerza de fricción se llama fuerza de fricción dinámica,  $f_d$ , y sus características son:

**Fuerza de fricción dinámica** sobre el bloque.

Presente cuando **hay velocidad relativa** del bloque respecto al piso.

**Dirección:** opuesta a la velocidad relativa del bloque respecto al piso

**Magnitud:**  $f_d = \mu_d N$

La fuerza de fricción dinámica o cinética es proporcional a la normal  $N$  y la constante de proporcionalidad se llama el **coeficiente dinámico o cinético de fricción**,  $\mu_d$ . La fricción no depende del área de las superficies en contacto y varía muy poco con la velocidad relativa, de modo que el coeficiente  $\mu_d$  depende básicamente de los materiales y del estado de las superficies en contacto. El coeficiente  $\mu_d$  es adimensional y su valor se determina experimentalmente.

Una característica de la fricción seca, que la distingue drásticamente de la fricción en fluidos, es la existencia de una fricción estática. El bloque que dibujamos antes, perfectamente puede encontrarse en reposo respecto a la superficie inclinada del piso, gracias a la presencia de una fuerza de fricción estática,  $f_e$ , cuyas características son:

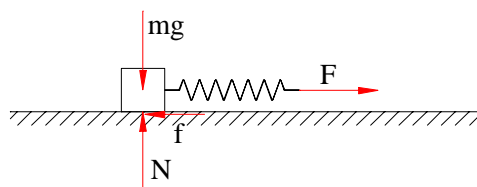
**Fuerza de fricción estática** sobre el bloque.

Actúa cuando **no hay velocidad relativa** del bloque respecto al piso.

**Dirección:** opuesta a la velocidad relativa que tendría el bloque respecto al piso si no hubiese fricción.

**Magnitud:**  $f_e \leq \mu_e N$

El coeficiente adimensional  $\mu_e$  es el **coeficiente estático de fricción**. El hecho notable de que la fuerza de fricción estática, a diferencia de la fuerza de fricción dinámica, puede variar su valor desde cero hasta un valor máximo  $\mu_e N$ , y por eso está caracterizada por una desigualdad, puede verse bien en el siguiente montaje experimental.



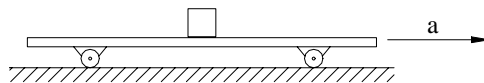
Un bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal, y se jala, mediante un resorte blando, con una fuerza también horizontal  $F$ , ejercida por la mano, de modo que pueda variarse a voluntad. Cuando la fuerza  $F$  vale cero, el resorte no tiene ningún estiramiento y no hay fuerza de fricción,  $f = 0$ . Si se aumenta un poco la fuerza  $F$ , el resorte se estira proporcionalmente, mostrando visualmente la presencia de dicha fuerza, pero el bloque permanece en reposo, indicando con esto que está actuando una fuerza de fricción estática  $f$ ,

de igual magnitud y dirección contraria a  $F$ . Esta fuerza  $F$  puede seguir aumentando gradualmente, lo que se observa en una mayor deformación del resorte, sin que el bloque se mueva, y por tanto la fuerza de fricción estática va también aumentando gradualmente para equilibrar a  $F$ . Llega un momento, sin embargo, al continuar aumentando  $F$ , en el que el bloque comienza a moverse, indicando así que la fuerza de fricción estática llegó a su valor máximo posible. Ese valor máximo es proporcional a la normal mediante el coeficiente estático  $\mu_e$ , que, de nuevo, sólo depende de la naturaleza y estado de las superficies en contacto:

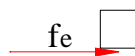
$$f_e \text{ máxima} = \mu_e N.$$

Esa situación límite, idealizada, en la que la fuerza de fricción estática toma un valor máximo y el bloque se encuentra a punto de moverse, se suele llamar situación de movimiento inminente. Cuando el bloque comienza a moverse respecto al piso, la fuerza de fricción es entonces dinámica y lo que se comprueba experimentalmente es que dicha fuerza, como ya dijimos, tiene un valor aproximadamente constante para un amplio rango de velocidades relativas y, además, en ciertos casos, es un poco menor que la fuerza estática máxima, y así el coeficiente dinámico  $\mu_d$ , puede ser levemente inferior al coeficiente estático  $\mu_e$ .

La fuerza de fricción es estática cuando no hay movimiento **relativo** entre las superficies de los cuerpos en contacto, aunque estos cuerpos estén moviéndose respecto a un cierto marco inercial de referencia. Por ejemplo, si un bloque está en reposo respecto a una plataforma que se mueve con aceleración a hacia la derecha, la fuerza de fricción hecha por la plataforma sobre el bloque es estática, aunque el bloque mismo se esté moviendo aceleradamente respecto a un marco inercial fijo a tierra.



Si no hubiere fricción, el bloque se movería respecto a la plataforma hacia la izquierda y por eso la fuerza de fricción estática sobre el bloque es hacia la derecha. En efecto, esa es la fuerza que le produce al bloque su aceleración hacia la derecha respecto al marco inercial de referencia, de acuerdo a la segunda ley de Newton.

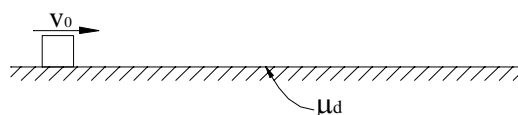


Las fuerzas de fricción desempeñan un importante papel en el movimiento de los cuerpos macroscópicos. En algunos casos sus efectos son indeseables, como, en un automóvil, entre los pistones y los cilindros en el motor, o en piezas móviles como engranajes, ejes y rodamientos, y se busca minimizarlos con pulimiento y lubricantes. En otros casos, en cambio, los efectos de la fricción seca son deseables, fundamentales, como entre las pastas y los discos de frenos, como entre las correas y las poleas, como entre las llantas y el piso, bien sea al acelerar, frenar o dar curvas, y se busca acrecentarlos con materiales y rugosidades adecuados.

Los elementos del rozamiento o fricción seca que hemos presentado, provienen pues de estudios experimentales y se aplican razonablemente bien al contacto de superficies secas de cuerpos sólidos relativamente rígidos. En cuerpos tan deformables como las llantas o neumáticos de un automóvil la fricción es más compleja. Es importante notar que las leyes del rozamiento, útiles y valiosas, son, no obstante, aproximaciones, con un carácter muy diferente al de leyes fundamentales de interacción como la atracción gravitacional.

## 8. EJEMPLO

Se lanza un bloque con velocidad  $v_0$  y desliza por una superficie horizontal rugosa hasta detenerse. Si el coeficiente dinámico de fricción es  $\mu_d$ , hallar la distancia recorrida.

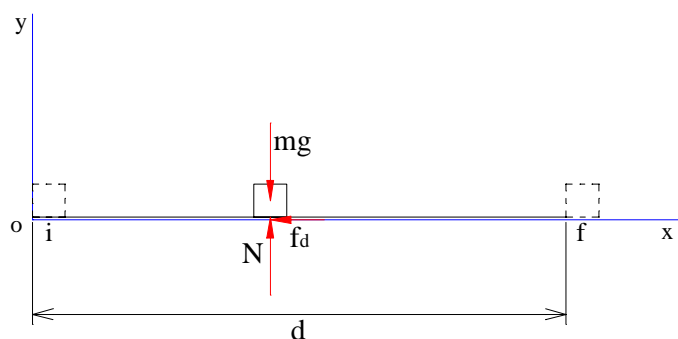


**Sistema mecánico:** El bloque

**Marco Inercial. Ejes. Condiciones específicas**

Marco inercial: El piso horizontal fijo en tierra. Eje horizontal  $x$ , vertical  $y$ , con origen en la situación inicial de lanzamiento. En posición general,  $y = 0$ ,  $v_y = 0$ ,  $a_y = 0$ .

**Diagrama de fuerzas** en posición general:



Sea  $m$  la masa del bloque. La fuerza de fricción dinámica, opuesta a la velocidad es  $f_d$ .

**Segunda Ley de Newton**

Componente  $x$  :  $-f_d = m a_x$

Componente  $y$ :  $N - mg = 0$ .

Con  $f_d$ , fuerza de fricción dinámica

$$f_d = \mu_d N.$$

De la componente  $y$ ,

$$N = mg.$$

Por tanto

$$a_x = -\mu_d g.$$

### Cinemática

Las condiciones iniciales son, en la situación  $i$ , lanzamiento en el origen,

$$\begin{aligned} \text{en } t = 0 \quad x &= 0 \\ v_x &= v_o. \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena e integrando, tendremos, en situación general,

$$v_x^2 = v_o^2 - 2\mu_d g x.$$

En la situación final  $f$ , cuando el bloque se detiene a una distancia  $d$ ,

$$x_f = d$$

$$v_{fx} = 0,$$

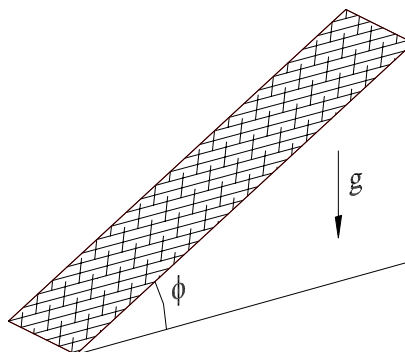
y así, particularizando, obtenemos

$$d = \frac{v_o^2}{2\mu_d g}.$$

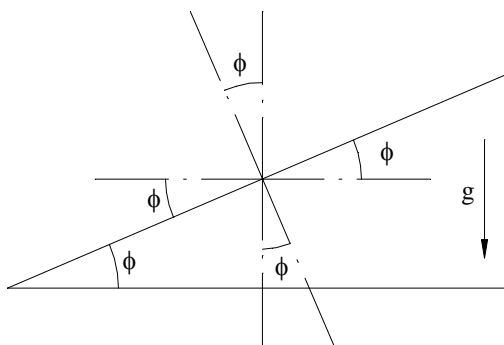
El ejemplo anterior es, obviamente, muy fácil de realizar cualitativamente con cualquier objeto que se tenga a mano y pueda deslizar sobre una superficie horizontal. Pero se trata de un cuerpo deslizando y que puede ser tratado como una partícula, porque si el cuerpo es una rueda, un objeto rodante, no puede ser tratado como una partícula sino como un cuerpo rígido que rota y habrá que estudiar con más detalle la fricción en el punto de contacto y el movimiento de rotación.

### 9. EJEMPLO. Bloque en reposo en un plano inclinado rugoso

Un plano inclinado, máquina importante de la mecánica, es la superficie plana de un cuerpo, superficie que forma un ángulo  $\phi$  con el plano horizontal.



El plano inclinado suele representarse como una línea recta en un corte vertical, como se indica en la siguiente figura.

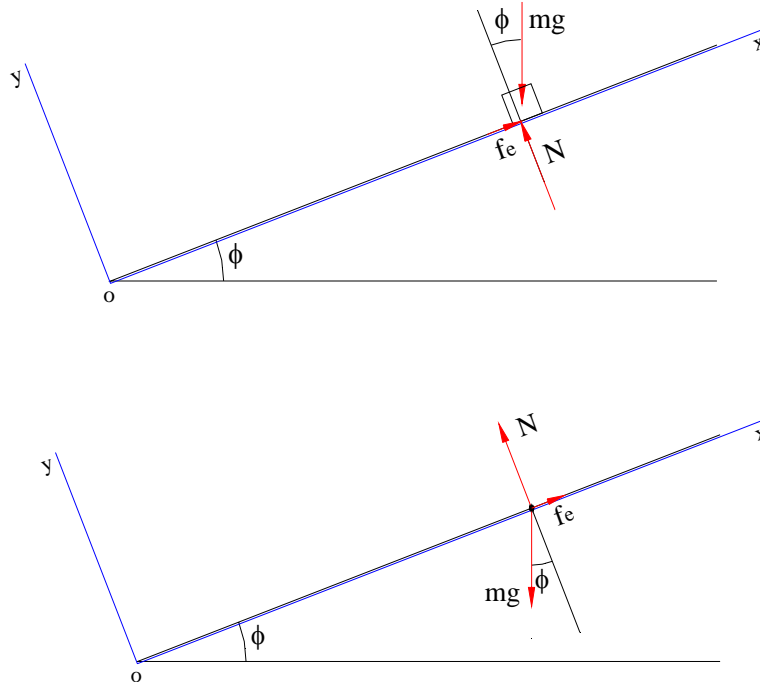


Tracemos por un punto del plano inclinado, tres rectas: una horizontal, una vertical y una normal o perpendicular al plano inclinado. Es fácil mostrar que el ángulo entre la normal y la vertical es igual a  $\phi$ , ángulo entre la horizontal y el plano inclinado, pues ambos ángulos tienen sus lados mutuamente perpendiculares. O, si se prefiere, puede estudiarse el complemento de  $\phi$ . En fin, resultados sencillos de la igualdad de ángulos (allí hay paralelas, ángulos rectos, ángulos opuestos por el vértice), permiten ver que hay cuatro ángulos en el punto del plano iguales a  $\phi$ , que serán importantes en el estudio de los movimientos sobre un plano inclinado.

Consideremos ahora un bloque que se encuentra en reposo en un plano inclinado rugoso, es decir, con fricción.

### Sistema mecánico. Diagrama de fuerzas

El sistema es el bloque, considerado como una partícula de masa  $m$ . Las fuerzas sobre el bloque son: el peso, atracción gravitacional hecha por la tierra, y las fuerzas de contacto hechas por el plano inclinado, normal  $N$  y fricción  $f_e$ , estática puesto que el bloque está en reposo respecto al plano inclinado.



Los dos diagramas que hemos hecho son completamente equivalentes. Ambos son útiles y se usan con frecuencia. En el primero se dibuja el bloque con un cierto tamaño y las fuerzas llegando a él. Tiene la ventaja de que se ve bien cuál es la superficie sobre la que actúan las fuerzas de contacto. Tiene el inconveniente de que, por tener un cierto tamaño, no está claro cuál es exactamente el punto de aplicación de las fuerzas al dibujarlas. Pero, tratándolo como una partícula, este punto de aplicación no es relevante. En el segundo diagrama, el cuerpo se representa como un punto y las fuerzas saliendo de él. No tiene el inconveniente del punto de aplicación, pero no se ve sobre cuál superficie actúan las fuerzas de contacto. Los diagramas son complementarios, y cuál se use dependerá de la claridad o del énfasis buscado.

### Marco Inercial de referencia. Coordenadas. Condiciones particulares

El marco inercial es el propio plano inclinado, fijo a tierra. Elegimos unos ejes en dirección del plano y normal a él con origen en la base del plano inclinado. En este caso, como el

bloque está en reposo, podría elegirse el origen en el bloque, ya que su situación general es fija y no variable. Como está en reposo,

$$x = \text{constante} \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad a_x = 0$$

$$y = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad a_y = 0$$

### Segunda Ley de Newton

Como no hay aceleración, las componentes de la ley de Newton se vuelven

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0.$$

Se dice que la partícula está en equilibrio y esas son las condiciones de equilibrio, que quedan entonces,

$$\text{en } x : \quad f_e - m g \sin \phi = 0$$

$$\text{en } y : \quad N - m g \cos \phi = 0 .$$

Con lo que se obtienen los valores de la fuerza de fricción estática  $f_e$  y de la normal  $N$ , necesarios para el equilibrio,

$$f_e = m g \sin \phi$$

$$N = m g \cos \phi .$$

Si  $\phi = 0$ , es decir, si el plano no es inclinado sino horizontal,  $f_e = 0$  y  $N = m g$ . Ahora, al aumentar gradualmente el ángulo  $\phi$ , la normal va disminuyendo y la fuerza de fricción necesaria para el equilibrio va aumentando. Pero la fricción estática tiene un tope máximo y así habrá un ángulo máximo,  $\phi_{\text{máx}}$ , para el cual es posible el equilibrio, y en el cual el bloque se encuentra en movimiento inminente. Si se aumenta más el ángulo, el bloque deslizará por el plano y la fricción será cinética o dinámica. Veámoslo matemáticamente:

Como la fricción es estática

$$f_e \leq \mu_e N ,$$

reemplazando los valores de  $f_e$  y  $N$ ,

$$m g \sin \phi \leq \mu_e m g \cos \phi ,$$

y por tanto

$$\tan \phi \leq \mu_e .$$



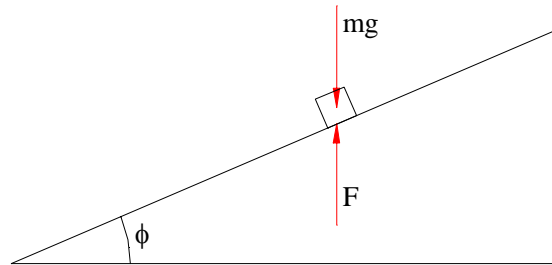
Esta es la condición para que el bloque pueda estar en equilibrio. En movimiento inminente, el máximo ángulo para el equilibrio será

$$\tan \phi_{\text{máx}} = \mu_e.$$

Esta elegante interpretación del coeficiente estático de fricción proporciona a la vez una manera experimental simple para calcularlo, midiendo el ángulo en el cual comienza a deslizarse el bloque sobre el plano. Es posible que un bloque real, que tiene un cierto tamaño, se vuelque, rotando alrededor de un extremo, antes de deslizarse. Para estudiar ese volcamiento, esa rotación, debemos usar otro modelo de la mecánica: el cuerpo rígido.

El equilibrio del bloque como partícula en el problema simple e importante que estamos discutiendo, puede mirarse también de manera vectorial,

$$\sum \vec{F} = 0,$$



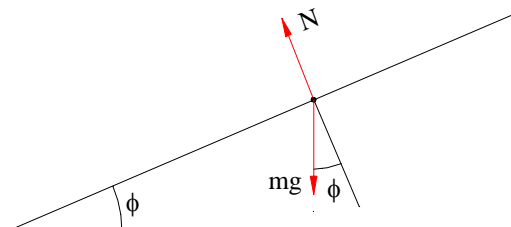
mostrando que la fuerza de contacto resultante de la normal y la fricción es una fuerza contraria al peso y de igual magnitud.

## 10. EJEMPLO. Plano inclinado liso

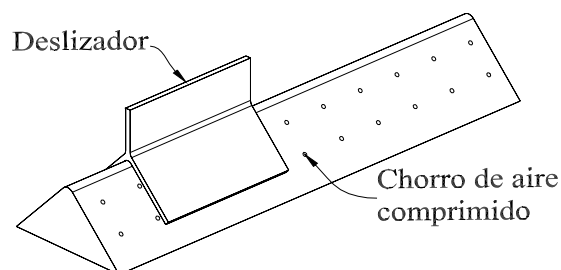
Un bloque desliza por un plano inclinado sin fricción. Hallar la aceleración de su movimiento.

**Sistema mecánico:** el bloque.

**Diagrama de fuerzas en posición general**

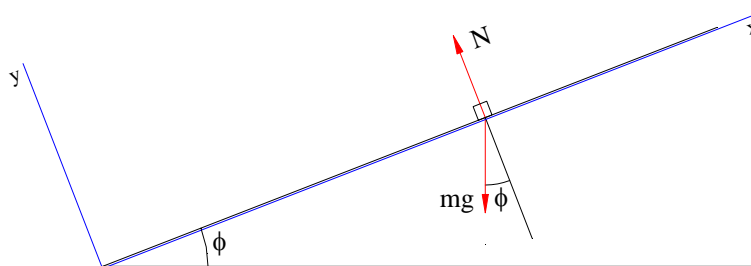


El diagrama de fuerzas es el mismo, sea que el bloque está subiendo o bajando. Por eso la aceleración es igual al subir o al bajar deslizándose por el plano liso. El bloque cuyo movimiento estamos estudiando puede estar moviéndose hacia arriba por el plano inclinado, porque fue lanzado con una cierta velocidad inicial pero no hay ninguna fuerza hacia arriba hecha sobre el bloque. Experimentalmente puede obtenerse un plano con muy poca fricción mediante un riel de aire en un laboratorio de mecánica, perfil metálico con perforaciones por las que sale aire comprimido, de modo que un deslizador puesto sobre el riel queda “flotando” en un colchón de aire.

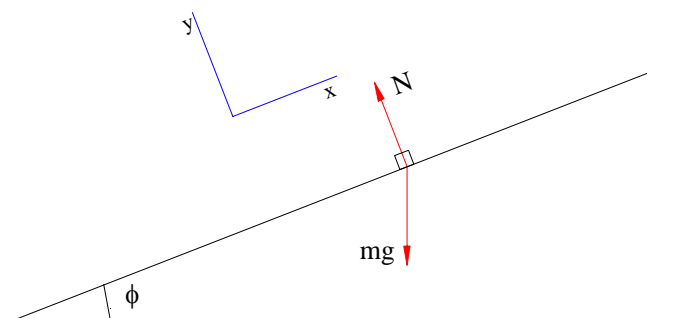


### Marco Inercial. Ejes. Condiciones.

El marco inercial es el propio plano inclinado, fijo respecto a tierra. Fijemos un origen en la base del plano, con ejes hacia arriba por el plano y normal a él.

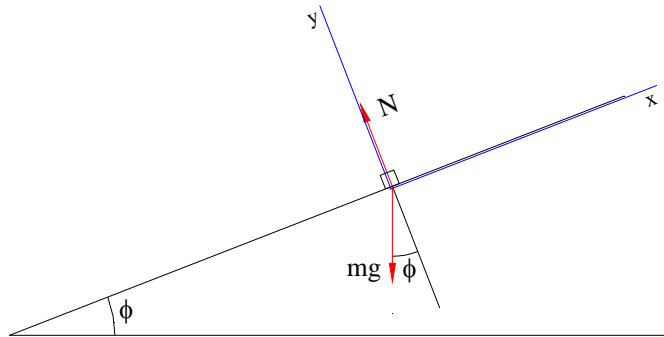


En ocasiones se indican únicamente las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$ , sin señalar explícitamente el origen, en gráficos del siguiente estilo:



Pero marcar las direcciones de los ejes directamente en el bloque en posición general, no es correcto, pues el bloque aparece como si estuviese en el origen de las coordenadas  $x, y$ , lo cual no es cierto en una posición general: El origen está fijo en el plano y el bloque está moviéndose.

Elección inadecuada del origen de los ejes  $x, y$ .



Volviendo a la primera elección de los ejes, clara y precisa, vemos que en  $y$  no hay movimiento, es decir,

$$y = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad a_y = 0.$$

Esta es la que llamamos restricción o condición específica del movimiento.

### Segunda ley de Newton

Componente  $x$  :  $-mg \sin \phi = m a_x$

Componente  $y$  :  $N - mg \cos \phi = 0.$

La aceleración del bloque que desliza sobre el plano inclinado sin fricción es por tanto

$$a_x = -g \sin \phi.$$

La aceleración de un cuerpo rodante, como una esfera o un cilindro, que rueda por un plano inclinado, es diferente. Esos cuerpos ya no pueden ser modelados como partículas.

## 11. EJERCICIO

Hallar las aceleraciones durante la subida y la bajada, de un bloque que desliza por un plano inclinado rugoso, de ángulo con la horizontal  $\phi$  y coeficiente dinámico de fricción  $\mu$ .

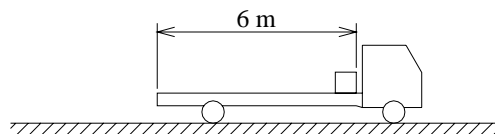
La fricción tiene dirección diferente según que el cuerpo esté subiendo o bajando. Lo mejor es elegir un eje hacia arriba en la subida y hacia abajo en el descenso. Mostrar que

$$a_{\text{subida}} = -g (\sin \phi + \mu \cos \phi)$$

$$a_{\text{bajada}} = g (\sin \phi - \mu \cos \phi).$$

## 12. EJERCICIO

Un bloque se coloca sobre la plataforma de un camión que se encuentra en reposo en una carretera horizontal.



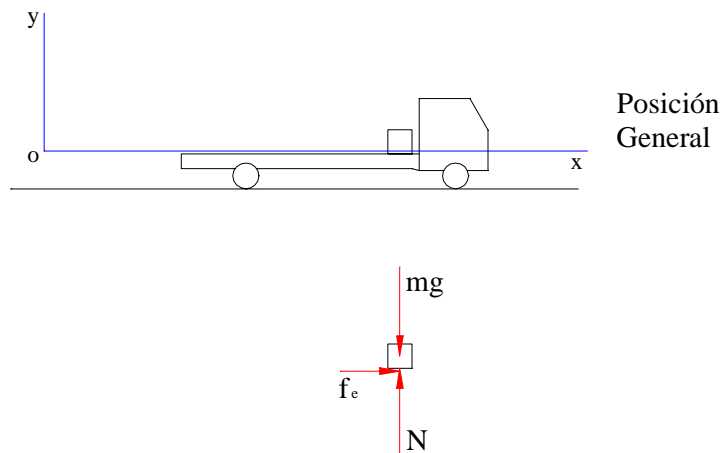
Los coeficientes de fricción entre el bloque y la plataforma son:  $\mu_e = 0.25$ ,  $\mu_d = 0.20$ .

- ¿Cuál es la máxima aceleración con la que puede arrancar el camión para que el bloque no se deslice respecto a la plataforma?
- Si el camión arranca con una aceleración de  $3 \text{ m s}^{-2}$ , ¿al cabo de cuánto tiempo caerá el bloque por la parte trasera de la plataforma si ésta mide 6 m?

Marco Inercial: la carretera. Ejes fijos a ella con origen en la situación inicial cuando el camión arranca.

Sistema mecánico: el bloque como partícula de masa  $m$ .

- Diagrama de fuerzas en situación general



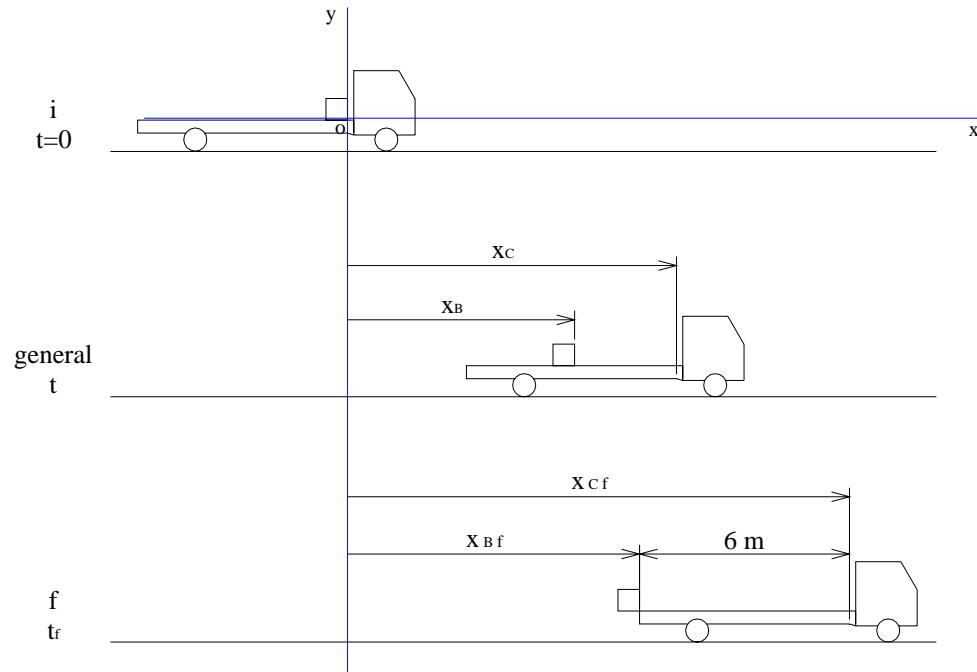
Aplicando la segunda ley, como la fricción es estática, se llega a

$$a \leq \mu_e g \quad , \quad a \leq 2.45 \text{ m s}^{-2} ,$$

componente  $x$  de la aceleración, común a bloque y camión. Entonces, para que el bloque no deslice,

$$a_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = 2.45 \text{ m s}^{-2}.$$

- b) Es importante dibujar con claridad las situaciones inicial: camión C y bloque B arrancan; general (como  $a_C = 3 > a_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$ , hay deslizamiento del bloque y la fricción es dinámica); y final: el bloque cae de la plataforma.

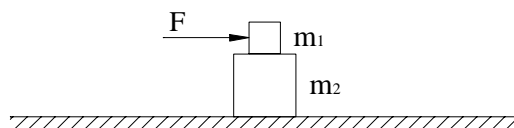


El diagrama de fuerzas en posición general, la fricción dinámica y la segunda ley, permiten hallar

$$a_B = 1.96 \text{ m s}^{-2}.$$

La cinemática de B y de C, particularizando para la situación f, lleva a

$$t_f = 3.40 \text{ s}.$$

**13. EJERCICIO**

Un bloque de masa  $m_1$  descansa sobre otro de masa  $m_2$ , que está a su vez sobre una superficie horizontal lisa. El coeficiente estático de fricción entre los bloques es  $\mu$ . ¿Cuál es la máxima fuerza horizontal  $F$  que puede aplicarse,

- a) al bloque  $m_1$ ,
- b) al bloque  $m_2$ ,

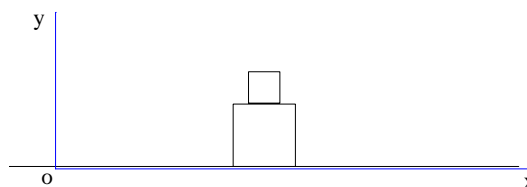
para que los bloques no deslicen entre sí?

El marco inercial es el piso. Ejes fijos al piso.

$m_1$  en reposo relativo respecto a  $m_2$ : aceleración  $a_x = a$  para ambos sistemas mecánicos.

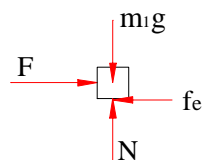
Tres sistemas:  $m_1$ ,  $m_2$  y el sistema conjunto de  $m_1$  y  $m_2$  como una sola partícula de masa  $m_1 + m_2$ .

Ejes

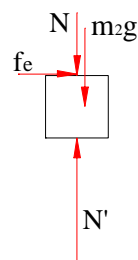


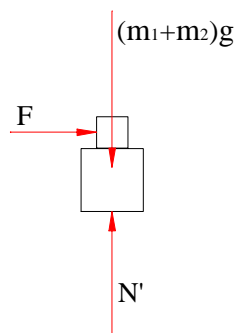
posición general

$m_1$



$m_2$

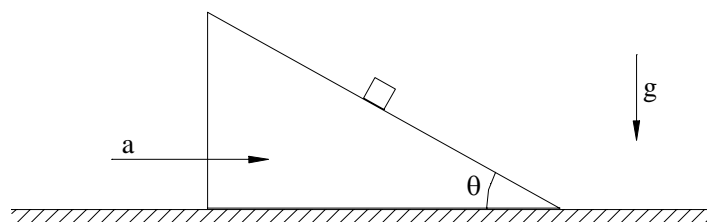


**Sistema conjunto**

**Sugerencia:** Segunda ley para  $m_1$  y para el sistema conjunto. Como  $f_e \leq \mu N$ ,

$$F \leq \mu \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) g.$$

b)  $F \leq \mu (m_1 + m_2) g.$

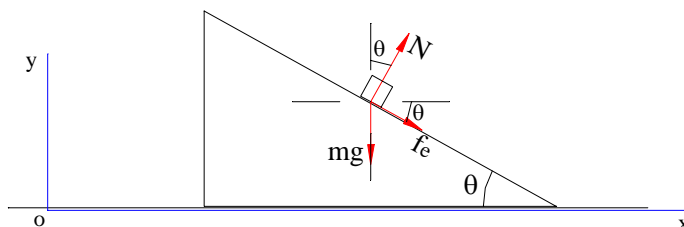
**14. EJERCICIO**

Una cuña se mueve sobre una superficie horizontal con aceleración  $a$ . El coeficiente estático de fricción entre el pequeño bloque y la cuña es  $\mu$ . Calcule la máxima aceleración que puede dársele a la cuña para que el bloque no deslice respecto a ella.

Marco inercial: el piso. La cuña no es inercial. Ejes  $x, y$ , fijos al piso.

**Sistema mecánico:** el bloque.

Si la aceleración  $a$  es grande, el bloque tiende a deslizar hacia arriba por la cuña y por tanto la fricción es hacia abajo. La máxima aceleración para que haya reposo relativo se obtendrá cuando la fricción estática sobre el bloque sea la máxima posible hacia abajo.



La aceleración del bloque respecto al marco inercial en el piso es

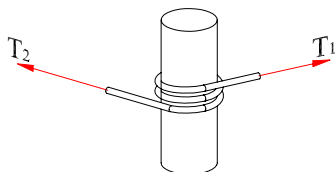
$$a_x = a$$

$$a_y = 0.$$

Muestre que

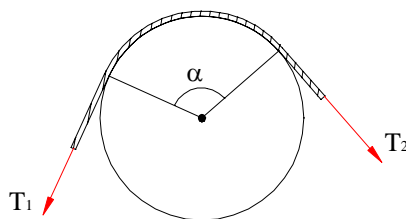
$$a_{\text{máx}} = \frac{g (\tan \theta + \mu)}{1 - \mu \tan \theta}.$$

### 3.5.3 Fricción en cuerdas



Es bien sabido que si se enrolla una cuerda en un poste es posible soportar una gran tensión  $T_2$  con una pequeña tensión  $T_1$  en el otro extremo. El fenómeno ha sido usado desde tiempos inmemoriales por los marineros para amarrar sus botes. Esta interacción entre una cuerda rugosa o una correa y una superficie circular es la que se presenta en todas las poleas en máquinas y motores.

Consideremos una cuerda enrollada un ángulo  $\alpha$  alrededor de un cilindro fijo.



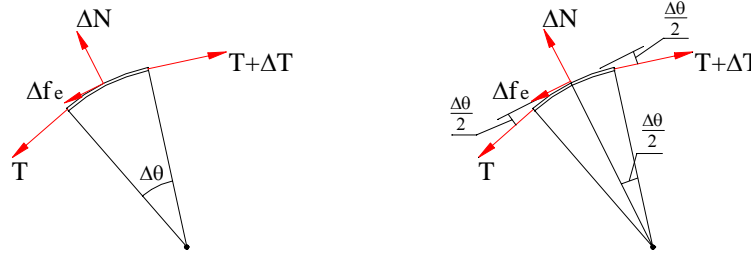


Dada la tensión  $T_1$ , queremos hallar cuál es la máxima tensión  $T_2$  que puede ejercerse para que la cuerda no deslice respecto al cilindro.

Tomemos como sistema mecánico un pequeño trozo de cuerda de ángulo  $\Delta\theta$ , trozo que está en equilibrio y a punto de deslizar, es decir, la fuerza de fricción estática hecha por el cilindro sobre la cuerda tiene su valor máximo

$$\Delta f = \mu_e \Delta N,$$

con  $\mu_e$  coeficiente estático de fricción entre la cuerda y el cilindro. La tensión es una función del ángulo  $\theta$ , de modo que las tensiones en los extremos son  $T$  y  $T + \Delta T$ .



Tomando, en el punto central de la cuerda, una dirección  $n$ , normal al círculo y hacia el centro, y una dirección  $t$ , tangente al círculo, y planteando las condiciones de equilibrio del trozo de cuerda, tendremos:

$$\text{Dirección } t: \quad (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e \Delta N = 0$$

$$\text{Dirección } n: \quad T \sin \frac{\Delta\theta}{2} + (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} - \Delta N = 0$$

Despejando  $\Delta N$ , reemplazando y organizando, tenemos

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \left( \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right) = \mu_e T \left( \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right)$$

En el límite, cuando  $\Delta\theta \rightarrow 0$ ,  $\cos \frac{\Delta\theta}{2} \rightarrow 1$ ,  $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \rightarrow 1, \quad \frac{\Delta T}{\Delta\theta} \rightarrow \frac{dT}{d\theta}, \quad \text{y así}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \mu_e T.$$

Separando las variables  $T$  y  $\theta$  para integrar y con los límites  $T(0) = T_1$ ,  $T(\alpha) = T_2$ , tendremos

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu_e \int_0^\alpha d\theta ,$$

o sea,

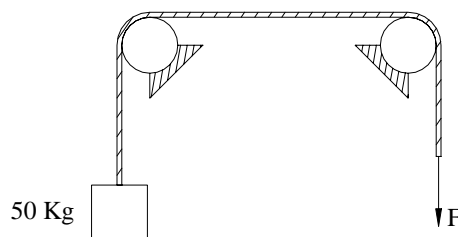
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_e \alpha ,$$

y por tanto

$$T_2 = T_1 e^{\mu_e \alpha} .$$

El ángulo  $\alpha$  debe estar expresado en radianes. Si la cuerda da, por ejemplo, dos vueltas completas,  $\alpha = 4\pi$  radianes, con un coeficiente  $\mu_e = 0.3$ ,  $T_2 = 43 T_1$ , lo que explica el hecho al que aludíamos al comienzo.

## 15. EJERCICIO

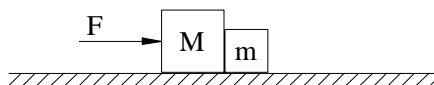


Una cuerda pasa por dos cilindros fijos como se muestra. Si el coeficiente estático de fricción con el cilindro de la izquierda es 0.4 y con el otro 0.3, ¿cuál es la mínima fuerza  $F$  necesaria para sostener la caja de 50 kg? Exprese su resultado tanto en N como en kgf.

16.7 kgf

## PROBLEMAS.

1.

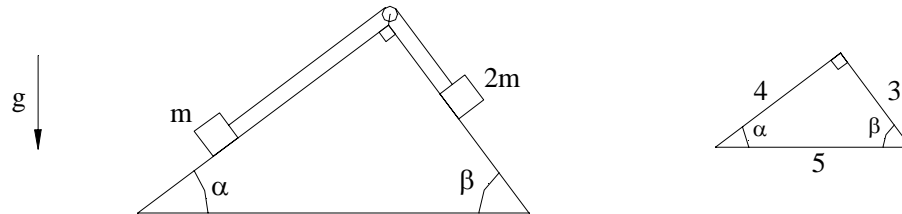


Dos bloques de masas  $M$  y  $m$  ( $M > m$ ) reposan sobre una mesa horizontal lisa. Si se empuja con una fuerza horizontal  $F$ , hallar la aceleración y la fuerza de contacto entre los

bloques. Si ahora la fuerza  $F$  se aplica sobre el bloque  $m$  y hacia la izquierda, ¿la fuerza de contacto entre los bloques será mayor o menor?

Mayor

2.



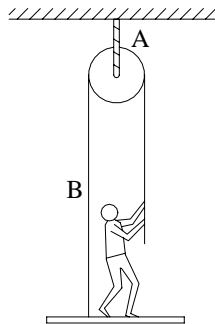
Bloques de masas  $m$  y  $2m$ . Polea ideal. Planos inclinados lisos. Hallar las aceleraciones de los bloques y la tensión de la cuerda.

$$g/3, (14/15)mg$$

3. Desde la base de un plano inclinado  $45^\circ$ , se lanza hacia arriba un bloque con una cierta velocidad inicial. Sube hasta un punto y regresa al punto inicial. Si el tiempo de bajada es el doble del tiempo de subida, hallar el coeficiente dinámico de fricción entre el bloque y el plano.

$$\mu = \frac{3}{5}$$

4.



Un hombre de  $70 \text{ kg}$  se eleva a sí mismo, junto con la plataforma de  $10 \text{ kg}$  en la que está parado, mediante el arreglo de cuerda y polea ideales mostrado, con una aceleración de  $1 \text{ m s}^{-2}$ .

Realice los diagramas de fuerzas de los siguientes sistemas: la polea, la plataforma (no tenga en cuenta los efectos de rotación que pueda tener), el hombre y el sistema conjunto hombre-plataforma.

Halle las tensiones en las cuerdas A y B y la fuerza de contacto entre el hombre y la plataforma.

$$T_B = 432 \text{ N}$$

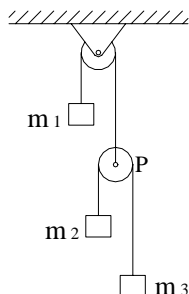
5. Una cuerda de 10 kg de masa está suspendida verticalmente de un gancho que resiste hasta 600 N sin romperse. ¿Cuál es la mínima aceleración con la que debe deslizarse un hombre de 60 kg por la cuerda para que el gancho no se rompa?

$$a_{\text{mín}} = 1.43 \text{ ms}^{-2}$$

6. A un pequeño bloque se le da una velocidad inicial  $v_0$  medida a lo largo del suelo de un ascensor que se mueve con una aceleración  $a$  hacia abajo. Debido al rozamiento, el bloque se mueve una distancia  $s_1$ , medida a lo largo del suelo del ascensor, y se detiene. Se repite el experimento con la misma velocidad inicial relativa al suelo, cuando el ascensor tiene una aceleración hacia arriba de igual valor  $a$ , y el bloque se desliza una distancia más corta  $s_2$ . Muestre que el valor de las aceleraciones del ascensor es

$$a = g \frac{(s_1 - s_2)}{s_1 + s_2}.$$

7.



Poleas ideales.

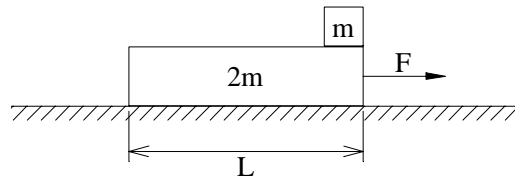
- a) Plantear las condiciones de ligadura y las ecuaciones de movimiento para  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  y  $P$ . ¿Es un problema con cuántas y cuáles incógnitas?
- b) Si  $m_1 = 4$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 2$  (unidades SI), calcular las aceleraciones respecto al marco inercial de esas tres masas en términos de  $g$ . Calcular además las aceleraciones relativas de  $m_2$  y  $m_3$  respecto a  $P$  (centro de la polea móvil). Chequeo: tienen que ser iguales en magnitud y de sentido contrario.

$$a_1 = g/5$$

$$a_2 = -3g/5$$

$$a_3 = g/5$$

8. Un bloque de masa  $m$  está colocado encima de una plataforma de masa  $2m$ , la cual puede deslizar sin fricción sobre un piso horizontal. El coeficiente de fricción, tanto estático como dinámico, entre el bloque y la plataforma es  $\frac{1}{3}$ .

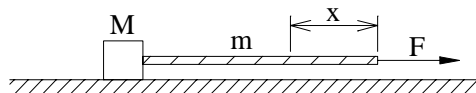


- Hallar la máxima fuerza  $F$  que puede actuar sobre la plataforma para que el bloque no deslice respecto a ella.
- Si la fuerza sobre la plataforma es ahora el doble de esa máxima, hallar las aceleraciones del bloque y la plataforma respecto al marco inercial.
- Si parten del reposo y la plataforma mide  $L$ , ¿al cuánto tiempo se caerá el bloque de la plataforma?

b)  $g/3, 5g/6$

c)  $2\sqrt{\frac{L}{g}}$

9. Una cuerda uniforme de masa  $m$  y longitud  $\ell$  se ata a un bloque de masa  $M$  que se encuentra sobre un piso horizontal liso, y se jala del otro extremo con una fuerza  $F$ .

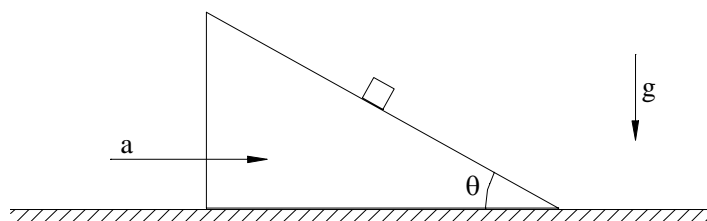


Halle la tensión a una distancia  $x$  del extremo de la cuerda. No tenga en cuenta el efecto del peso de la cuerda.

**Sugerencia:** sistema conjunto y luego trozo de cuerda.

$$T = F \left( 1 - \frac{m}{(M + m)} \frac{x}{\ell} \right)$$

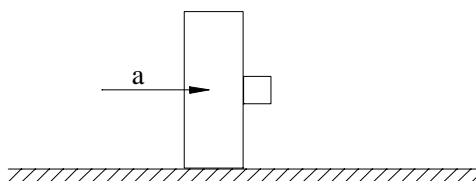
10.



La cuña se mueve con aceleración  $a$  por un piso horizontal. El coeficiente estático de fricción entre el bloque y la cuña es  $\mu$ . Suponga que  $\tan \theta > \mu$ , de modo que si la cuña estuviese en reposo, el bloque deslizaría por ella. Encuentre la mínima aceleración que debe dársele a la cuña para que el bloque no se deslice.

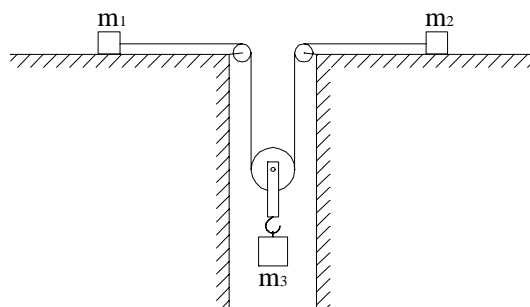
$$a_{\min} = \frac{g(\tan \theta - \mu)}{1 + \mu \tan \theta}$$

Estudie de manera independiente la aceleración mínima que debe dársele al bloque grande para que el bloque pequeño no se deslice, en la siguiente situación:



y compruebe que corresponde al caso límite de la cuña cuando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

11.



Asuma que  $m_1$  y  $m_2$  están deslizando con coeficiente dinámico de fricción  $\mu$  y que cuerda y poleas son ideales.

- a) Elija con claridad orígenes y ejes para los movimientos de  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . ( $m_3$  desciende solidariamente con el eje de la polea móvil, de modo que pueden ser tratados como un solo cuerpo de masa  $m_3$ ). Plantee la condición de ligadura y las ecuaciones de movimiento.
- b) Halle la tensión  $T$  en la cuerda.

$$T = \frac{g(1+\mu)}{\frac{2}{m_3} + \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}}$$

12. En un experimento fácil de realizar y probablemente bien conocido, se coloca un bloque sobre una hoja de papel que a su vez se encuentra sobre una mesa horizontal. Si se jala con gran rapidez toda la hoja, el bloque se mueve un poco pero alcanza a quedar sobre la mesa sin caerse de ella. Si los coeficientes dinámicos de fricción entre el bloque y el papel y entre el bloque y la mesa son iguales a  $\mu$  y el bloque se encuentra al inicio a una distancia  $d$  del borde de la mesa, ¿cuál es el máximo tiempo de que se dispone para sacar la hoja de papel sin que el bloque se caiga de la mesa? Aplique para  $\mu = 0.5$  y  $d = 0.10$  m.

**Sugerencia:** El movimiento del bloque tiene dos partes. Mientras está en contacto con el papel la fricción dinámica con éste lo acelera. Cuando pasa todo el papel, la fricción dinámica con la mesa frena el bloque.

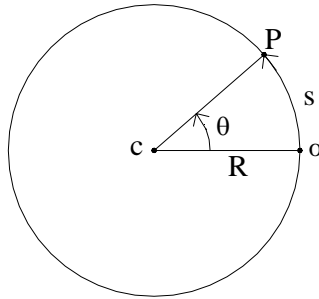
$$\text{tiempo} \leq 2 \sqrt{\frac{d}{\mu g}}.$$

## CAPÍTULO 4. LEYES DE NEWTON Y APLICACIONES ( II )

### 4.1 MOVIMIENTO CIRCULAR

#### 4.1.1 Cinemática

##### Vectores unitarios tangencial y normal



Sea un círculo de radio  $R$ , fijo en un marco de referencia. Elijamos un origen  $O$  sobre el círculo y un punto  $P$  también sobre él. Podemos ubicar el punto  $P$  mediante la longitud de arco  $s$  medida por el círculo desde  $O$  hasta  $P$ . El punto  $P$  puede también identificarse mediante la posición angular  $\theta$ .

La relación existente entre  $s$  y  $\theta$  es

$$s = R \theta,$$

en la que el ángulo  $\theta$  está expresado en radianes.

Como dimensión de  $s = [s] = L$  y

dimensión de  $R = [R] = L$ , se tiene

dimensión de  $\theta = [\theta] = 1$ , es decir  $\theta$  es adimensional: es un puro número.

Los ángulos se expresan también a menudo en grados y en vueltas (ciclos o revoluciones), y la equivalencia fundamental es

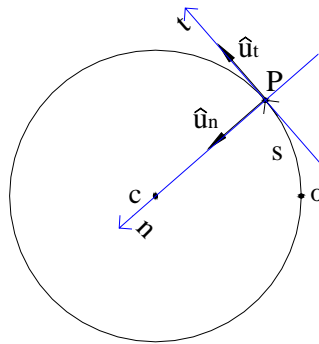
$$1 \text{ vuelta} = 360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes}.$$

En el punto  $P$  definimos los vectores unitarios tangencial y normal así:

$\hat{u}_t$ : vector unitario tangencial: tangente a la curva y en la dirección en que  $s$  aumenta.

$\hat{u}_n$ : vector unitario normal: perpendicular o normal a la tangente y dirigido hacia el centro.

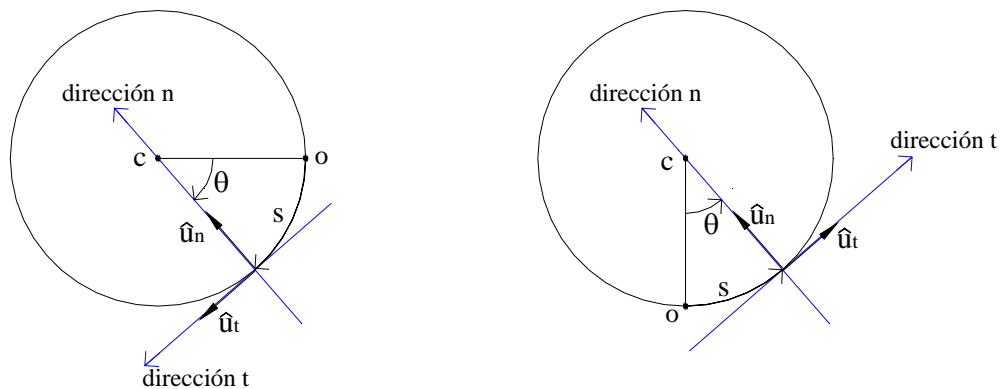




En el punto P llamaremos dirección tangencial a la tangente en la dirección de  $\hat{u}_t$  y dirección normal a la perpendicular en dirección de  $\hat{u}_n$ .  $s$  se llama a veces la coordenada intrínseca del círculo.

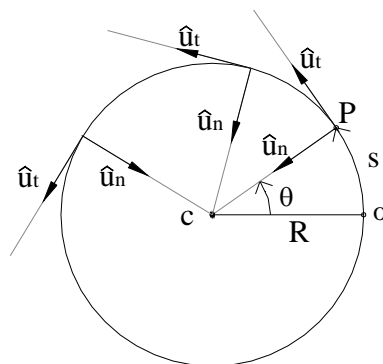
Es muy importante comprender que, dado un círculo y un punto cualquiera sobre él, la dirección normal se establece inmediatamente: es hacia el centro, pero la dirección tangencial no es tan inmediata: la recta tangente tiene 2 sentidos posibles, ¿a cuál de ellos corresponde la dirección tangencial, la dirección de  $\hat{u}_t$ ? Pues bien, para saberlo es imprescindible elegir un origen O sobre el círculo y elegir en qué dirección se va a medir el arco  $s$ , o el correspondiente ángulo  $\theta$  hasta el punto P.

Por ejemplo, dos elecciones correctas en el mismo punto de un círculo, serían:



Cuál sea la elección más adecuada dependerá del movimiento concreto que vaya a estudiarse.

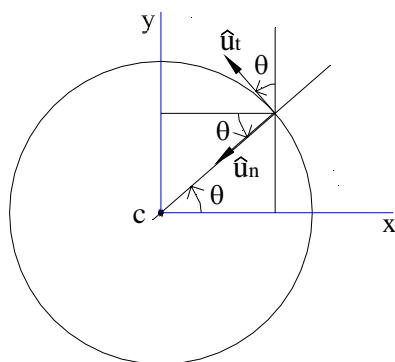
Las direcciones de los vectores unitarios tangencial y normal, direcciones  $t$  y  $n$ , varían de un punto a otro del círculo.



Por esa razón, a diferencia de los vectores unitarios  $\hat{i}, \hat{j}$  de las coordenadas cartesianas, las derivadas  $\frac{d\hat{u}_t}{d\theta}$  y  $\frac{d\hat{u}_n}{d\theta}$  son diferentes de cero.

Pero, antes de proceder a calcular estas derivadas, hagamos una observación: el círculo que estamos estudiando está fijo en un determinado marco de referencia, y debemos considerar sus vectores unitarios como fijos en cada punto, así sus direcciones varíen de un punto a otro. En nuestro círculo va a aparecer, por supuesto, un punto móvil que lo recorre. Pues bien, los vectores unitarios tangencial y normal están fijos en cada punto del círculo y no son vectores unitarios de un marco de referencia móvil que viaja con el punto.

Para calcular las derivadas de los vectores unitarios, valgámonos de las componentes en unos ejes cartesianos con origen en el centro del círculo.



$$\hat{u}_t = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\hat{u}_n = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}$$

y así

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d\hat{u}_t}{d\theta} = \hat{u}_n \\ \frac{d\hat{u}_n}{d\theta} = -\hat{u}_t \end{array} \right.$$

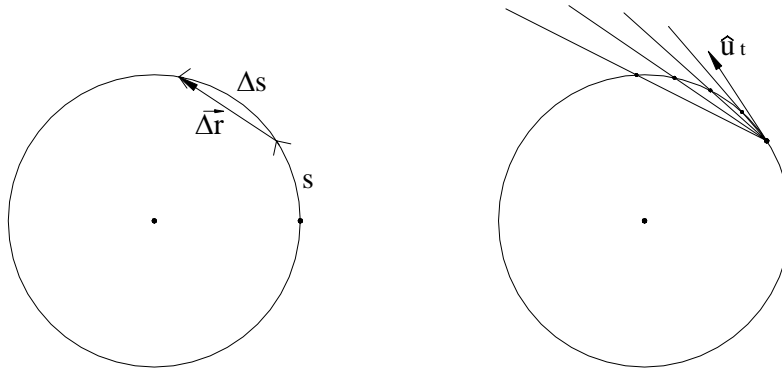
### Componentes tangencial y normal de la velocidad y la aceleración

Consideremos ahora un punto móvil que se desplaza por el círculo. Como ya vimos, el vector velocidad en un punto es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Ahora, ese límite podemos escribirlo así

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$



en donde  $\Delta \vec{r}$  es el vector desplazamiento, medido por la cuerda y  $\Delta s$  es medido por el arco. Como  $\Delta s \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , pusimos  $\Delta s \rightarrow 0$  en el primer límite.

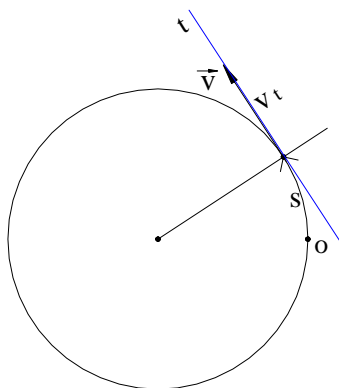
Ahora, a medida que nos aproximamos al punto inicial, la diferencia entre la magnitud de la cuerda y el arco correspondiente es cada vez menor y la dirección de  $\Delta \vec{r}$ , como ya vimos, tiende a la tangente. Por eso, el primer límite es un vector de magnitud unitaria y dirección tangente: es el vector unitario tangencial y por lo tanto

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_t \quad \text{y como} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s},$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t = v_t \hat{u}_t.$$

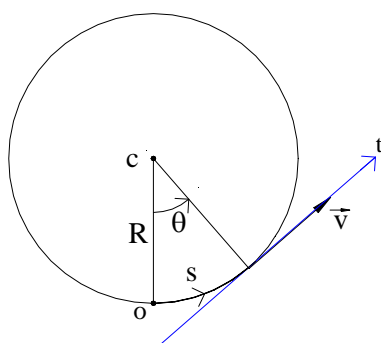
$v_t$ , componente del vector  $\vec{v}$  en la dirección  $t$ , es entonces

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

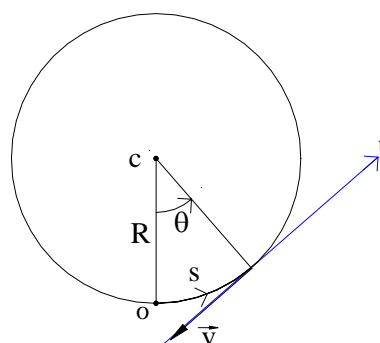


A diferencia de la magnitud del vector velocidad, escrita  $|\vec{v}| = v$ , que es siempre positiva, la componente  $v_t$  puede ser positiva o negativa según que  $\frac{ds}{dt}$  sea  $>0$  ó  $<0$ .

Por ejemplo, en el movimiento de un péndulo simple: partícula que oscila en un plano vertical suspendida de una cuerda, una vez elegido un origen y una dirección tangencial,  $v_t$  tiene un signo al subir y otro al bajar:



El cuerpo sube  $v_t > 0$



El cuerpo baja  $v_t < 0$

En todo caso,  $v$  = magnitud de  $\vec{v} = |v_t|$ : valor absoluto de  $v_t$ , y así  $v_t^2 = v^2$ .

Para obtener la aceleración  $\vec{a}$ , derivemos como un producto,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v_t \hat{u}_t)}{dt} = \frac{dv_t}{dt} \hat{u}_t + v_t \frac{d\hat{u}_t}{dt}.$$

Para obtener  $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$  usemos la regla de la cadena

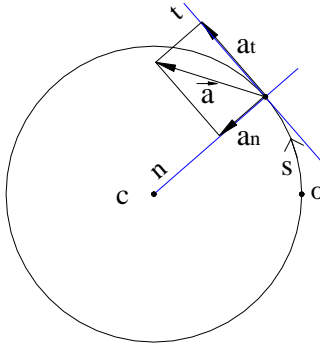
$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Como ya vimos,  $\frac{d\hat{u}_t}{d\theta} = \hat{u}_n$ . Como  $s = R\theta$ ,  $ds = R d\theta$  y así  $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R}$ . Además,

$\frac{ds}{dt} = v_t$  y teniendo en cuenta que  $v_t^2 = v^2$ , la aceleración queda

$$\vec{a} = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n = \frac{dv_t}{dt} \hat{u}_t + \frac{v^2}{R} \hat{u}_n$$

y las componentes tangencial y normal de la aceleración son



$$\left| \begin{aligned} a_t &= \frac{dv_t}{dt} = \dot{v}_t = \ddot{s} \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{(\dot{s})^2}{R} \end{aligned} \right|$$

Como el vector  $a_n \hat{u}_n$  está dirigido siempre hacia el centro, nunca hacia afuera, a dicha componente de la aceleración se le dice **aceleración centrípeta**.

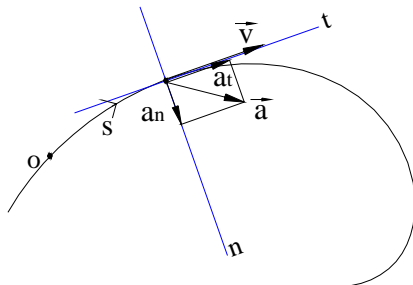
Una de las razones para estudiar las componentes tangencial y normal de la aceleración, está en su importante interpretación. Supongamos que el movimiento se realiza con velocidad constante en magnitud, en cuyo caso se dice que el movimiento es uniforme. En ese caso,  $a_t = 0$  y sólo existe aceleración normal o centrípeta, que se debe entonces íntegramente al cambio en dirección del vector velocidad.

La interpretación de las componentes de la aceleración es pues muy simple:

El vector aceleración es la rata de cambio temporal del vector velocidad, que puede cambiar tanto en magnitud como en dirección. Ahora bien, la aceleración tangencial es debida

exclusivamente al cambio en magnitud del vector velocidad, mientras que la aceleración normal o centrípeta se debe exclusivamente al cambio en dirección del vector velocidad. Por tanto, es imposible moverse en una curva sin aceleración: existe al menos la aceleración normal o centrípeta.

El estudio que hemos hecho del movimiento de un punto sobre un círculo puede extenderse al movimiento de un punto sobre una curva plana cualquiera. En ese caso, tenemos

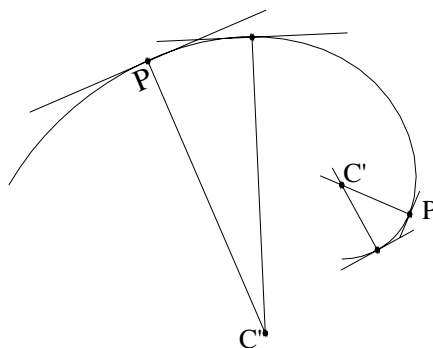


$$v_t = \dot{s}$$

$$a_t = \dot{v}_t$$

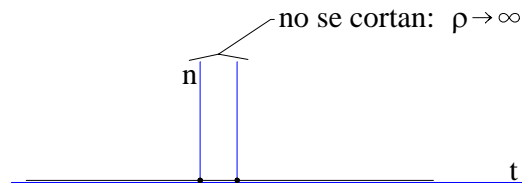
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$s$  es ahora la longitud de arco de la curva, llamada coordenada intrínseca y  $\rho$  el radio de curvatura. La curva, a diferencia del círculo, no tiene un centro ó un radio únicos: en cada punto hay un centro de curvatura y un radio de curvatura, que podemos ver así:



Se toman dos puntos vecinos de la curva, se trazan unas tangentes y unas normales. Estas últimas se cortan en  $C'$ . El límite de los puntos  $C'$  cuando un punto de la curva tiende al otro, define el centro de curvatura y su correspondiente radio de curvatura  $\rho$  asociados con un punto  $P$  de la curva. Obsérvese que una curva muy abierta tiene  $\rho$  grande y una curva muy cerrada tiene  $\rho$  pequeño.

El límite  $\rho \rightarrow \infty$  corresponde a una línea recta.



En ese caso,  $a_n = 0$ . En efecto, no hay cambio en dirección de la velocidad.

Limitaremos la mención de una curva cualquiera a estas consideraciones elementales, sin ahondar ahora en su estudio geométrico y cinemático.

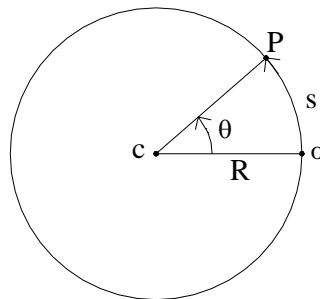
Con mucha frecuencia se usa una notación simplificada: en vez de escribir  $v_t$ , componente de  $\vec{v}$  en la dirección  $t$ , se escribe simplemente  $v$ . Hay que ser cuidadoso y no confundir en este caso dicha componente  $v$ , con la magnitud  $|\vec{v}|$  del vector velocidad.

En dicha notación simplificada tendremos pues para un movimiento circular

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v \hat{u}_t \\ \vec{a} &= a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\ \left| \begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = \ddot{s} \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{(\dot{s})^2}{R} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

### Variables angulares

La posición general de una partícula que se mueve en una trayectoria circular, puede darse mediante la **posición angular**  $\theta$ , ángulo medido respecto a una línea de referencia CO.



$\theta$  es una función del tiempo,  $\theta(t)$ .

La **velocidad angular**  $\omega$  y la **aceleración angular**  $\alpha$  se definen como

velocidad angular:  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

aceleración angular:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$

Como el ángulo es adimensional, las dimensiones de  $\omega$  y  $\alpha$  son

$$[\omega] = T^{-1}$$

$$[\alpha] = T^{-2},$$

y sus unidades en el Sistema Internacional, SI, son  $\text{rad s}^{-1}$  y  $\text{rad s}^{-2}$ . Como las expresiones para  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  son análogas a las de  $x$ ,  $v$  y  $a$  (notación simplificada) en el movimiento rectilíneo, muchos problemas de movimiento angular se tratan de manera análoga a los de movimiento rectilíneo:

Condiciones iniciales: en  $t = t_0$   $\left| \begin{array}{l} \theta = \theta_0 \\ \omega = \omega_0 \end{array} \right.$

En posición general  $\left| \begin{array}{l} \alpha \\ \omega \\ \theta \end{array} \right.$  son las funciones en un  $t$  cualquiera.

Las posiciones particulares se tratan de modo similar. La importante regla de la cadena queda

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}.$$

Si medimos el arco  $s$  a partir del punto  $O$ , la relación entre arco y ángulo es:  $s = R\theta$  y podemos expresar las componentes tangencial y normal de la velocidad y la aceleración de un punto que se mueve en la trayectoria circular, así:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

En todas estas relaciones es imprescindible la expresión del ángulo en radianes, pues todas dependen de  $s = R\theta$ , que define precisamente dicho ángulo en radianes.



### Rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo

En el estudio de la cinemática que hemos hecho hasta ahora, hemos hablado siempre del movimiento de un punto, de un cuerpo puntual. Incluso cuando hablamos de la traslación de un bloque con un cierto tamaño, como todos los puntos del bloque tienen exactamente la misma velocidad y la misma aceleración, basta tomar un punto representativo del bloque para estudiar su movimiento: lo estamos idealizando como uno de los modelos básicos de la mecánica: como una partícula.

Pero las variables angulares nos permiten estudiar el movimiento de un cuerpo extenso que no puede ser tratado como una partícula: el movimiento de rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo. Haremos ahora unas consideraciones elementales de la cinemática de esa rotación, postergando su análisis más detallado para el estudio de los movimientos de un cuerpo rígido.

Pensemos en un disco que rota alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro O.

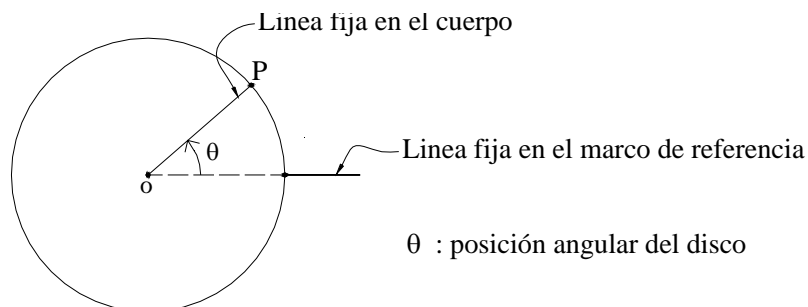


Todos los puntos del disco, por ejemplo los puntos P, M y Q, describen trayectorias que son círculos concéntricos. Es más, por ser rígido el disco, durante un intervalo  $\Delta t$  el desplazamiento angular  $\Delta \theta$  de todos los puntos es el mismo. Por esa razón la velocidad

angular,  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$ , es la misma para todos los puntos del cuerpo. La aceleración

angular  $\alpha$  también es la misma para todos los puntos. Por eso,  $\omega$  y  $\alpha$  son la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo como un todo. Obsérvese, sin embargo, que no hay dos puntos del cuerpo que tengan el mismo vector velocidad.

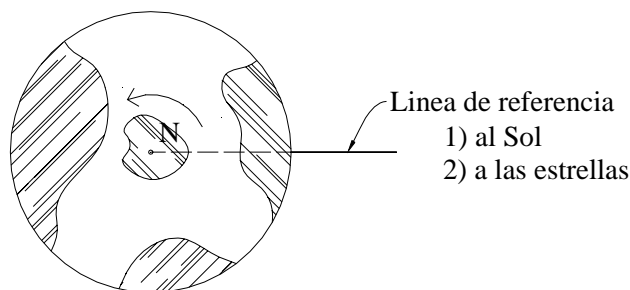
Ahora ¿cómo definir la posición angular de ese disco, formado por una infinidad de puntos móviles?



Llamando posición angular  $\theta$ , al ángulo, en una situación general, entre una línea por O, fija en el marco de referencia, y una línea OP fija en el disco rotante.

El análisis anterior no sólo es válido para el disco, sino para cualquier cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo.

Un ejemplo muy importante es el de la rotación de la tierra respecto a su eje. Pensemos en la tierra como una esfera rígida, vista desde el polo norte.



Un primer asunto es: ¿cuál es el marco de referencia para estudiar el movimiento de rotación de la tierra, cómo se elige la línea de referencia?

Hay dos posibilidades.

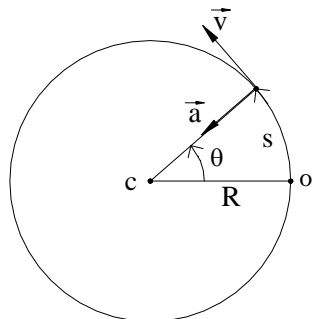
- 1) Elegir una línea de referencia orientada al sol.  
En este caso, el tiempo necesario para dar una vuelta completa (por ejemplo el tiempo entre dos mediodías sucesivos), se llama un **día solar**.
- 2) Elegir una línea de referencia orientada a las estrellas.  
En este caso, el tiempo requerido para dar una vuelta completa (por ejemplo el tiempo entre dos apariciones sucesivas de la misma estrella por el oriente), se llama un **día sidereal**.

Debido al movimiento anual de la tierra alrededor del sol, esos dos tiempos no son iguales. El día solar medio es de 86 400 s y el día sidereal es de 86 160 s. Tomando como referencia las estrellas, la velocidad angular de la tierra es

$$\omega = \frac{1 \text{ vuelta}}{\text{día sidereal}} = \frac{2 \pi \text{ rad}}{86160 \text{ s}} = 7.29 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Movimiento circular uniforme

Cuando la magnitud de la velocidad es constante en la trayectoria circular, tenemos un movimiento circular uniforme.



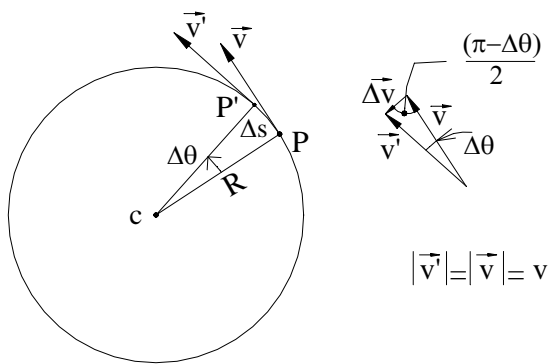
En este caso, como  $v$  es constante,  $\omega$  también es constante. Si tomamos  $t = 0$  en el punto  $O$ , se obtiene  $\omega = \frac{\theta}{t}$ . El movimiento es periódico: se repite exactamente cada **período**  $P$ , que es el tiempo necesario para dar una vuelta o ciclo. De ese modo

$$\omega = \frac{2\pi}{P}, \quad v = \frac{2\pi R}{P}.$$

El inverso de  $P$  se llama la **frecuencia**:  $\nu = \frac{1}{P}$ , y es el número de vueltas o ciclos recorridos por el móvil en la unidad de tiempo. La unidad de frecuencia en el Sistema Internacional es el Hertz, abreviado  $1 \text{ Hz} = \frac{1 \text{ ciclo}}{\text{s}}$ .

El vector aceleración de un punto móvil que se mueve con movimiento circular uniforme puede obtenerse estudiando de una manera geométrica el cambio en el vector velocidad. Este punto de vista ayuda a comprender el origen de la aceleración centrípeta y complementa el desarrollo analítico presentado antes. Veamos.

Sea un movimiento circular uniforme. En un instante  $t$ , el móvil se encuentra en un punto  $P$ . Un pequeño tiempo  $\Delta t$  después, está en  $P'$ .



Para hacer la diferencia  $\Delta \vec{v}$ , hemos trasladado los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{v}'$  a un origen común. El ángulo entre estos es  $\Delta \theta$ , pues son respectivamente perpendiculares a  $CP$  y  $CP'$ . El triángulo de velocidades y el triángulo  $CPP'$ , ambos isósceles, son semejantes y entonces

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{\overline{PP'}}{R}.$$

Como los puntos  $P$  y  $P'$  están próximos,  $\overline{PP'} \approx \Delta s$  y así, organizando y dividiendo por  $\Delta t$

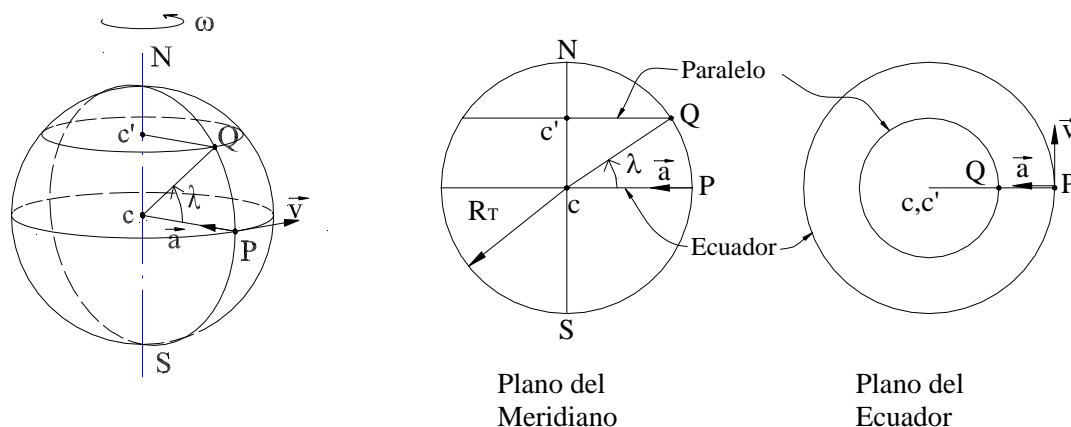
$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

que, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , es decir  $P' \rightarrow P$ , queda

$$a = \frac{v^2}{R},$$

El ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\Delta \vec{v}$ ,  $\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta \theta}{2}$ , tiende a  $\frac{\pi}{2}$  y por tanto, en el límite, la aceleración en  $P$  es hacia el centro del círculo, es la aceleración centrípeta.

## 1. EJEMPLO



Hallar la velocidad y la aceleración de un punto en la superficie terrestre, debidas a la rotación diaria de la tierra.

- en un punto del ecuador terrestre
- en un punto de latitud  $\lambda$ .

Los tres dibujos: al sesgo, proyección en el plano del meridiano y en el plano ecuatorial visto desde el polo norte, son importantes y se complementan.

Respecto a un marco de referencia orientado hacia las estrellas, como ya vimos,  $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , y, con el radio de la tierra  $R_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ , se obtiene

$$v_p = \omega R_T = 464 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_Q = \omega R_T \cos \lambda = 464 \cos \lambda, \text{ unidades SI.}$$

Como la velocidad angular de la tierra es muy aproximadamente constante, el movimiento es uniforme y sólo hay aceleración normal o centrípeta.

$$a_p = \omega^2 R_T = 3.39 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \approx 3.5 \times 10^{-3} g$$

$$a_Q = \omega^2 R_T \cos \lambda = 3.39 \times 10^{-2} \cos \lambda, \text{ unidades SI.}$$

La aceleración normal o centrípeta de un punto en el ecuador debida a la rotación de la tierra es pues relativamente baja, de sólo 3 milésimas de  $g$ , y por esta razón un marco de referencia fijo a la superficie terrestre funciona bien como marco inercial para muchos propósitos. Como ya vimos, según el principio de relatividad, el movimiento uniforme no afecta el comportamiento de los sistemas mecánicos. Sólo pueden percibirse las velocidades relativas al marco de referencia, pero no la propia velocidad del marco de referencia. Por esa razón no percibimos esa velocidad, alta en comparación de muchas velocidades cotidianas, de unos 500 m/s en el ecuador terrestre.

## 2. EJERCICIO

Calcule la velocidad y aceleración de la tierra, tratada como una partícula, en su movimiento de traslación anual alrededor del sol.

La órbita de la tierra es realmente una elipse, pero su excentricidad es muy pequeña, de modo que puede tratarse con buena aproximación como un círculo, cuyo radio es de unos 148 millones de kilómetros. La velocidad angular es simplemente 1 vuelta por año.

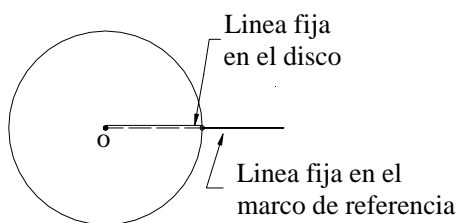
$$v \approx 30 \text{ km/s}$$

$$a \approx 5.9 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$$

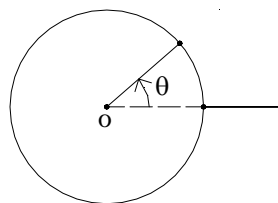
## 3. EJERCICIO

Un disco que rota alrededor de un eje fijo perpendicular a él y por su centro, frena uniformemente de modo que en los últimos 20 s antes de detenerse da cuatro vueltas y media. Hallar la aceleración angular y la velocidad angular inicial del disco.

Situación inicial



Situación general



Condiciones iniciales

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \omega = \omega_o \end{array} \right.$$

en situación general

$$t \quad \left| \begin{array}{l} \alpha \text{ (constante)} \\ \omega = \omega_o + \alpha t \\ \theta = \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2} \end{array} \right.$$

Situación particular 1: el disco se detiene

$$t_1 \quad \left| \begin{array}{l} \theta_1 \\ \omega_1 = 0 \end{array} \right. .$$

Particularizando se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas:  $\alpha$  y  $\omega_o$ . Resolviendo

$$\alpha = -\frac{2\theta_1}{t_1^2}$$

$$\omega_o = \frac{2\theta_1}{t_1} .$$

Con  $\theta_1 = 4.5 \text{ vueltas} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{vuelta}} = 28.27 \text{ rad}$ ,

y  $t_1 = 20 \text{ s}$ , se obtiene

$$\alpha = -0.14 \text{ rad s}^{-2}$$

$$\omega_o = 2.8 \text{ rad s}^{-1} .$$

#### 4. EJERCICIO

Las componentes de la posición de un móvil son

$$x = R \cos \frac{2\pi}{P} t$$

$$y = R \sin \frac{2\pi}{P} t$$

- a) Muestre que la trayectoria del movimiento es un círculo.

En una posición general:

- b) Estudie el vector velocidad, dibújelo y muestre que su magnitud es constante y así el movimiento es circular uniforme de período P.
- c) Estudie el vector aceleración, dibújelo, muestre que se dirige hacia el centro y que su magnitud es  $\frac{v^2}{R}$ .

##### 4.1.2 Dinámica

La segunda ley de Newton es

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} ,$$

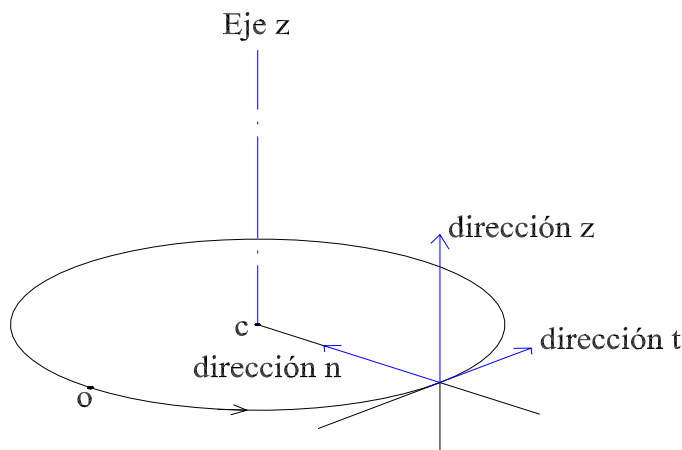
válida respecto a un marco inercial de referencia . En el movimiento circular consideraremos la trayectoria circular fija de un marco inercial de referencia, usualmente un marco localmente unido a tierra. En un punto del círculo elegiremos unas direcciones tangencial y normal al círculo. Las componentes de la segunda ley en esas direcciones son:

componente t :  $\sum F_t = m a_t ,$

componente n :  $\sum F_n = m a_n ,$

La componente resultante en dirección normal de las diversas fuerzas de interacción,  $\sum F_n$  , es la llamada fuerza centrípeta, igual a la masa por la aceleración normal o centrípeta,  $m a_n$  .

En algunos casos es necesario también trabajar con la componente de la segunda ley en una dirección perpendicular al plano del círculo, especialmente si el círculo está en un plano horizontal.



Dicha dirección es fija, a diferencia de las direcciones normal y tangencial, que varían de punto a punto. Si elegimos un eje  $z$ , fijo, con origen en el centro del círculo, tendremos como componente de la segunda ley,

$$\text{componente } z : \sum F_z = m a_z .$$

Como sabemos que la partícula se mueve en un círculo, las que hemos llamado condiciones específicas del movimiento serán

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_z = 0,$$

esta última ya que en todo el movimiento  $z = 0$ ,  $v_z = 0$ .

Dibujaremos en la posición general las direcciones tangencial (en dirección de  $s$  creciente), normal (hacia el centro) y vertical (usualmente hacia arriba), indicándolas simplemente como  $t$ ,  $n$ ,  $z$ , pero hay que recordar que esas son unas direcciones y no unos ejes de un marco de referencia móvil que viaje con la partícula.

## EJEMPLOS Y EJERCICIOS

### 1. EJEMPLO

#### Vehículo en una curva circular horizontal, sin peralte

La superficie de la pista o de la calle es plana, sin el ángulo de inclinación que tiene el pavimento en las curvas de las carreteras, que estudiaremos en el ejemplo siguiente. La



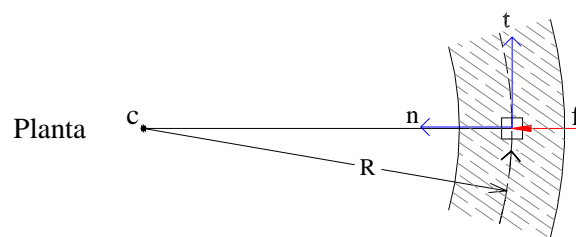
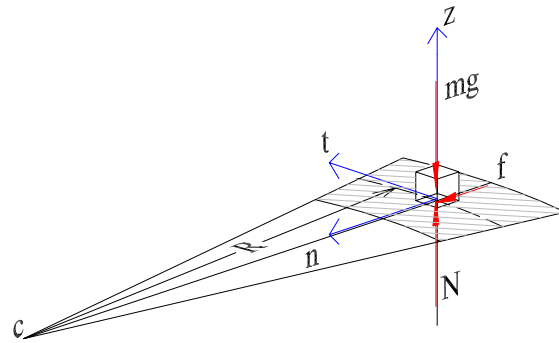
situación que analizamos aquí es la que se presenta en una glorieta pequeña o simplemente al girar en una esquina de calles en una ciudad.

El sistema mecánico es el vehículo, tratado como una partícula de masa  $m$ , ignorando entonces los problemas de volcamiento transversal.

La trayectoria circular, de la cual es posible que se recorra sólo un cierto arco, está fija en un marco inercial en el piso. Asumimos que el movimiento es circular uniforme, es decir, la magnitud de la velocidad es constante. Por lo tanto la componente tangencial de la aceleración es nula,  $a_t = 0$ , y no hay ninguna fuerza tangencial, con lo que la componente tangencial de la segunda ley se vuelve trivial,

$$\sum F_t = m a_t, \quad 0 = 0.$$

Sin embargo, ilustraremos en las figuras la dirección tangencial, eligiendo un origen cualquiera sobre el círculo y orientando el arco  $s$  en dirección del movimiento, aunque, como dijimos, la dirección tangencial no es aquí importante. Elegimos un eje  $z$  vertical hacia arriba, con origen en el centro del círculo, y así, en situación general  $z = 0$ ,  $v_z = 0$ ,  $a_z = 0$ .





El diagrama de fuerzas está hecho en posición general cualquiera. Los tres dibujos son interesantes y complementarios. El más útil para las componentes de la segunda ley puede ser el corte vertical, pero en él no se ve el círculo. Hemos dibujado en el diagrama las direcciones horizontal  $t$ , normal  $n$  y vertical  $z$ , pero recuérdese que esos no son ejes móviles. La fuerza de fricción  $f$  es hecha por el pavimento sobre las llantas del vehículo, transversal o lateralmente a dichas llantas. En ese sentido transversal no hay deslizamiento entre las llantas y el pavimento y por ende esa fricción es estática.

Las componentes de la segunda ley en las direcciones relevantes  $n$  y  $z$  quedan, siendo  $R$  el radio del círculo,

$$\text{dirección } n : \quad f = \frac{m v^2}{R}$$

$$\text{dirección } z : \quad N - m g = 0.$$

Si  $\mu$  es el coeficiente de fricción estática, como  $f \leq \mu N$ ,

$$v \leq \sqrt{\mu g R},$$

de modo que la velocidad máxima para no derrapar o deslizar lateralmente en la curva es

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu g R}.$$

Cuando un cuerpo se mueve con movimiento circular uniforme, sabemos de la cinemática que tiene una aceleración centrípeta  $\frac{v^2}{R}$ . La segunda ley de Newton dice entonces que debe existir una fuerza de interacción actuante sobre el cuerpo y hacia el centro del círculo capaz de proporcionarle dicha aceleración centrípeta. Esa es la fuerza centrípeta. En este caso la proporciona completamente la fuerza de fricción estática. ¿Qué sucede si el vehículo dando la curva entra en una zona completamente lisa? Que no hay fricción, que no hay fuerza hacia el centro, que no hay aceleración centrípeta y por tanto no hay trayectoria circular. Estamos en la ley de inercia y el cuerpo, con la velocidad que traía tangente al círculo, continúa con movimiento uniforme rectilíneo.

Depender de la fricción lateral para dar una curva es riesgoso. La arenilla, el piso mojado, disminuyen la fricción disponible y además están los importantes efectos de volcamiento

lateral. Para evitar estos inconvenientes, a la superficie del pavimento en las curvas de las carreteras (o a los rieles en los ferrocarriles), se les da una inclinación lateral llamada peralte o banqueo.

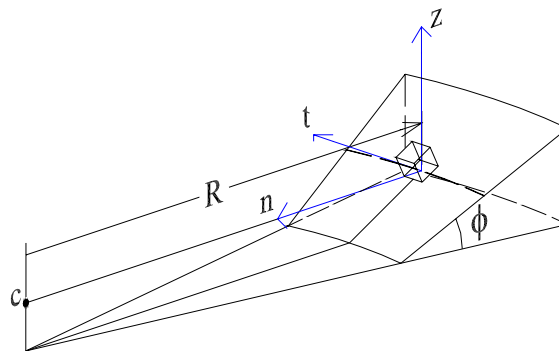
## 2. EJEMPLO

### El ángulo de peralte en una curva

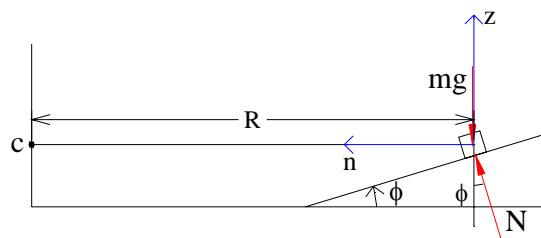
La idea básica del peralte es la siguiente: al piso de las carreteras se le da una inclinación lateral en las curvas, para que sea una componente de la reacción normal del piso la que proporcione la fuerza centrípeta necesaria para dar la curva, sin necesidad de depender de la fricción lateral.

Sea una carretera horizontal y una curva circular de radio  $R$ . La velocidad de diseño de la carretera, determinada por los ingenieros según los propósitos, topografía, costos, es  $v_d$ . Se llama ángulo de peralte o banqueo,  $\phi$ , al ángulo de inclinación lateral respecto a la horizontal, que es necesario darle al piso para que un vehículo que recorre la curva a la velocidad de diseño, no experimente fuerzas de fricción laterales.

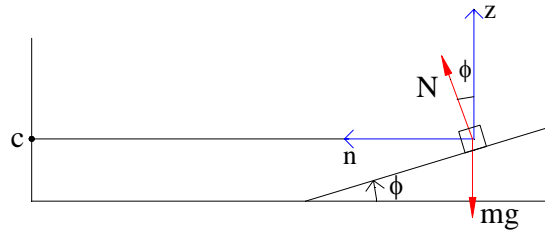
El sistema mecánico es el vehículo, tratado como una partícula, sin tener ahora en cuenta entonces los efectos laterales de volcamiento. El círculo está fijo en un marco inercial en el piso. Como  $v_o$  es constante en magnitud,  $a_t = 0$  y la dirección tangencial, en la que no hay fuerzas, no es relevante. El diagrama de fuerzas en posición general se ve bien en un corte vertical, pero una vista al sesgo aclara la situación.



Corte vertical



que también suele dibujarse, con las fuerzas saliendo de la partícula, así:



Las componentes de la segunda ley, con  $a_n = \frac{v_d^2}{R}$ ,  $a_z = 0$ , son

Dirección  $n$ :  $N \sin \phi = \frac{m v_d^2}{R}$

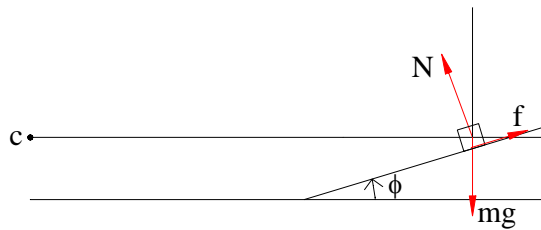
Dirección  $z$ :  $N \cos \phi - mg = 0$ ,

Con lo que

$$\tan \phi = \frac{v_d^2}{g R}.$$

Una vez que el peralte, de acuerdo a este análisis, esté construido, un vehículo puede, obviamente, recorrer la curva con una velocidad menor que la velocidad de diseño  $v_d$ , en cuyo caso tiende a deslizarse hacia abajo por el peralte, entrando entonces en juego una fricción estática lateral  $f$  hacia arriba por el peralte.

$$v < v_d$$



Razonamiento análogo puede hacerse si  $v > v_d$ .

### 3. EJERCICIO

Si el coeficiente estático de fricción lateral entre el piso y las ruedas de un vehículo es  $\mu$ , encuentre las velocidades máxima y mínima a las que puede tomarse una curva circular horizontal de radio  $R$  y ángulo de peralte  $\phi$ .

$$v_{\text{mín}}^{\text{máx}} = \left( g R \frac{\tan \phi \pm \mu}{1 \mp \mu \tan \phi} \right)^{1/2}.$$

Si llamamos  $\theta$  al ángulo de deslizamiento inminente del bloque por un plano inclinado, sabemos que

$$\mu = \tan \theta,$$

y así, las velocidades máxima y mínima toman una expresión muy simple

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{g R \tan (\phi + \theta)},$$

$$v_{\text{mín}} = \sqrt{g R \tan (\phi - \theta)}.$$

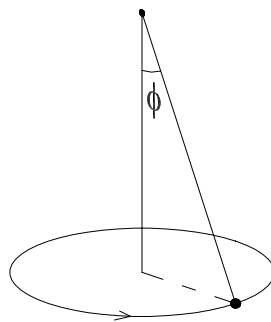
Si  $\phi \leq \theta$ ,  $v_{\text{mín}} = 0$  y el vehículo puede detenerse en un punto de la curva sin deslizarse hacia abajo por el peralte, lo que, naturalmente, es la situación normal en una carretera. Pero en velódromos y pistas especiales puede haber peraltes extremos.

Si  $\phi \geq \frac{\pi}{2} - \theta$ ,  $v_{\text{máx}} = \infty$ , y a cualquier velocidad (mayor que la mínima) puede recorrerse la curva sin deslizar lateralmente.

#### 4. EJEMPLO

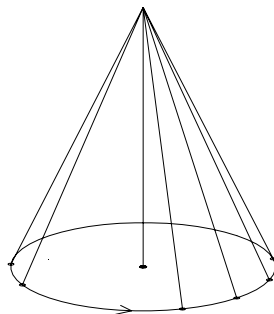
##### El péndulo cónico

Una pequeña bola suspendida de un hilo de longitud  $\ell$  se mueve en un círculo horizontal con velocidad angular constante.



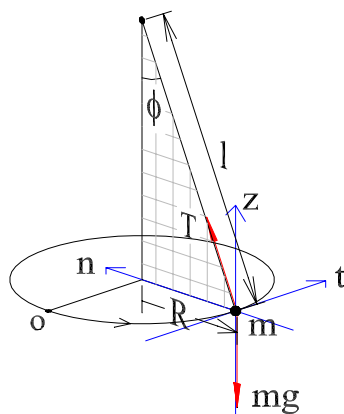
Hallar la tensión en la cuerda y la velocidad angular como funciones del ángulo  $\phi$  que forma la cuerda con la vertical.

Durante el movimiento la cuerda describe un cono circular y por eso el nombre de péndulo cónico.



Sistema mecánico: la bolita, tratada como una partícula de masa  $m$ .

Marco inercial. Componentes. Restricciones. La trayectoria circular está fija en un marco inercial terrestre local. Componentes tangencial, normal y vertical en una posición general. Eligiendo un origen cualquiera en el círculo y orientando el arco en dirección del movimiento, las direcciones y el diagrama de fuerzas en un punto genérico son



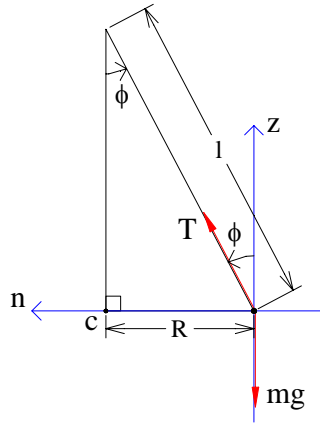
Como  $\omega$  es constante y además  $\dot{z} = 0$ ,

$$a_t = R \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$a_n = \omega^2 R = \omega^2 \ell \sin \phi$$

$$a_z = 0.$$

Mirando de frente el plano sombreado tenemos



Planteando las componentes de la segunda ley en las direcciones  $n, z$  (en  $t$  es trivial,  $0 = 0$ ),

$$n: \quad T \sin \phi = m \omega^2 \ell \sin \phi \quad (1)$$

$$z: \quad T \cos \phi = m g \quad (2)$$

De la (2),

$$T = \frac{m g}{\cos \phi},$$

de la (1), siempre y cuando  $\sin \phi \neq 0$ , es decir  $\phi \neq 0$ , podemos simplificar por  $\sin \phi$  y así

$$T = m \omega^2 \ell,$$

con lo que

$$\omega = \left( \frac{g}{\ell \cos \phi} \right)^{1/2}$$

Así, cuando  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $T$  y  $\omega$  crecen sin límite y el movimiento con la cuerda horizontal es imposible. Claro, puesto que, si la tensión fuese horizontal, ¿qué fuerza equilibraría al peso vertical?

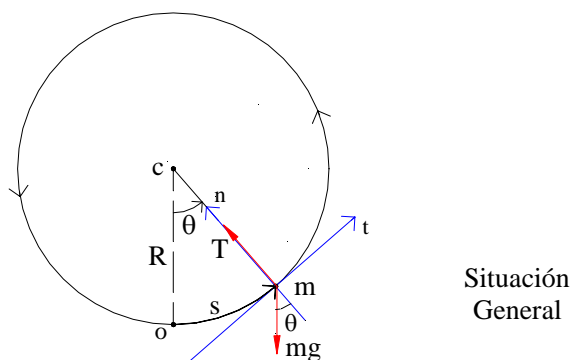
Cuando  $\phi \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow m g$ ,  $\omega \rightarrow \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ . En el caso en que  $\phi = 0$ ,  $T = m g$  y la ecuación (1) queda  $0 = 0$ . En este caso la partícula está en equilibrio, cuelga verticalmente en reposo y no hay velocidad angular.

## 5. EJEMPLO

### Movimiento en un círculo vertical

Consideremos una partícula de masa  $m$  sujeta a una cuerda de longitud  $R$  y girando en círculo en un plano vertical.

El sistema mecánico es la partícula. Un marco local fijo a tierra es el marco inercial. Elijamos un origen  $O$  sobre el círculo en el punto más bajo. En la situación general mostrada indicamos el arco  $s$ , el correspondiente ángulo  $\theta$ , la dirección tangencial ( $s$  creciente), la dirección normal (hacia el centro) y el diagrama de fuerzas. Despreciando la fricción con el aire, sólo actúan la tensión de la cuerda y el peso.



Las componentes de la segunda ley son

$$\text{tangencial: } -mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{normal: } T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}.$$

En este movimiento en el círculo vertical, una componente del peso produce una aceleración tangencial y por tanto, mientras las únicas fuerzas sean la tensión y el peso, la magnitud de la velocidad será necesariamente variable: una partícula sujeta a una cuerda no puede moverse en un círculo vertical con velocidad de magnitud constante. Si la partícula de masa  $m$  estuviese unida a una varilla rígida rotando con velocidad angular constante en el plano vertical, allí sí se movería la partícula con magnitud de velocidad constante, ya que la varilla rígida ejerce sobre la partícula una fuerza tangencial variable que anula la componente del peso.

Para obtener la variación de la velocidad con el ángulo  $\theta$ , hagamos cinemática en dirección tangencial, es decir, integremos, con unas condiciones iniciales y usando la regla de la cadena.

La regla de la cadena en dirección tangencial puede verse así



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

en donde  $v$  es, recuérdese, la componente de la velocidad en dirección tangencial.

Como  $s = R \theta$ , entonces  $ds = R d\theta$ , y por tanto

$$a_t = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\theta} = -g \sin \theta.$$

Llamando  $v_o$  a la velocidad en el punto O, las condiciones iniciales allí serán

$$t = 0, \quad \theta = 0$$

$$v = v_o,$$

y así,

$$\int_{v_o}^v v \, dv = -g R \int_0^\theta \sin \theta \, d\theta,$$

y entonces, en una situación general cualquiera, la velocidad como función de la posición angular  $\theta$ , es

$$v = \left[ v_o^2 - 2gR(1 - \cos \theta) \right]^{1/2},$$

y, de la dirección normal, la tensión en la cuerda como función del ángulo  $\theta$ , es

$$T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{R} = 3mg \cos \theta - 2mg + \frac{mv_o^2}{R}.$$

Supongamos que la masa  $m$  está describiendo completo el círculo vertical, de modo que las velocidades involucradas son suficientemente grandes y analicemos lo que sucede con la tensión y con la magnitud de la velocidad. Ambas,  $T$  y  $v$ , decrecen cuando  $\theta$  varía de  $0$  a  $\pi$ , es decir mientras la masa va subiendo, y luego aumentan de nuevo para  $\theta$  de  $\pi$  a  $2\pi$ , es decir, mientras la masa va bajando. En  $\theta = 2\pi$  se vuelve a la situación inicial, el movimiento se repite idénticamente, de modo que es un movimiento periódico pero no uniforme.

De manera pues que en el punto más bajo, situación O, la velocidad y la tensión son las mayores del recorrido y valen

$$v_o$$

$$T_o = mg + \frac{mv_o^2}{R},$$

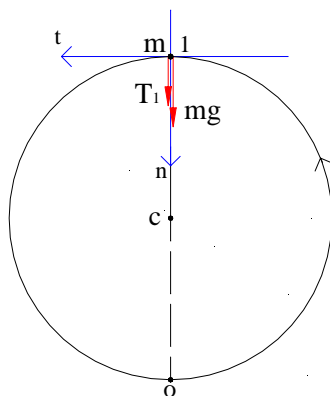
y en el punto más alto, que llamaremos situación 1, la velocidad y la tensión tienen los menores valores del recorrido, que son

$$v_1$$

$$T_1 = -mg + \frac{m v_1^2}{R}.$$

Esta relación entre la tensión  $T_1$  y la velocidad  $v_1$  en el punto más alto, la hemos obtenido particularizando la expresión general de la tensión, cuando  $\theta_1 = \pi$ . Pero esa situación del punto más alto es tan importante, que es necesario aprender a hacer el diagrama de fuerzas en dicha situación particular para analizar allí la relación entre tensión y velocidad. Veamos:

Diagrama de fuerzas de  $m$  en la situación particular 1:



La componente de la segunda ley en la dirección  $n$  en esa situación 1 es

$$T_1 + mg = \frac{m v_1^2}{R},$$

y por lo tanto

$$T_1 = -mg + \frac{m v_1^2}{R},$$

que es la misma expresión deducida antes, pero obtenida ahora de manera muy simple.

La componente tangencial, en cambio, queda

$$0 = m a_{t_1},$$

con lo que la aceleración tangencial en ese punto es nula, pero esa aceleración no es una función general, no puede integrarse, de ella no pueden obtenerse conclusiones generales para el movimiento.

Volvamos a la expresión para la tensión  $T_1$ ,

$$T_1 = -mg + \frac{m v_1^2}{R}.$$

Mientras la velocidad  $v_1$  con la que el cuerpo cruza por el punto más alto sea grande, la cuerda en ese punto tendrá tensión y el cuerpo describirá el círculo completo. Pero si la velocidad  $v_1$  disminuye, la correspondiente tensión  $T_1$  también disminuye. La pregunta es entonces, ¿hasta que valor puede disminuir  $v_1$ ? Se llama a veces velocidad crítica al mínimo valor posible de la velocidad que puede tener esa masa en el punto más alto, moviéndose unida a la cuerda y describiendo un círculo vertical.

Pues bien, como  $T_1 \geq 0$ , ya que una tensión negativa significaría que la cuerda está, no a tracción sino a compresión, lo que no es posible, entonces

$$v_1 \geq \sqrt{g R},$$

y por lo tanto

$$v_{1 \text{ mínima}} = v_{\text{crítica}} = \sqrt{g R}.$$

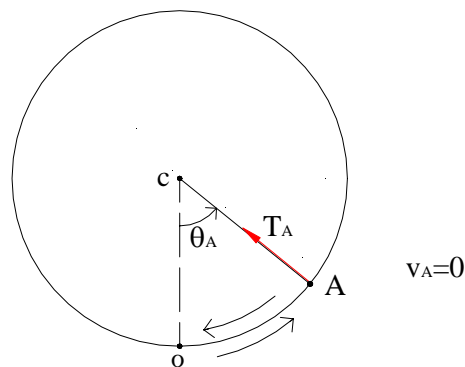
De la expresión general de la velocidad obtenemos que, si la velocidad arriba es la crítica, entonces

$$v_o = \sqrt{5 g R}$$

y esta es entonces la mínima velocidad con la cual debe lanzarse m desde el punto más bajo para que dé la vuelta completa. Y, ¿qué sucede entonces si el cuerpo se lanza desde abajo con una velocidad menor que esa  $\sqrt{5 g R}$ ? Que la partícula ya no describe el círculo completo, pero hay dos situaciones muy diferentes posibles.

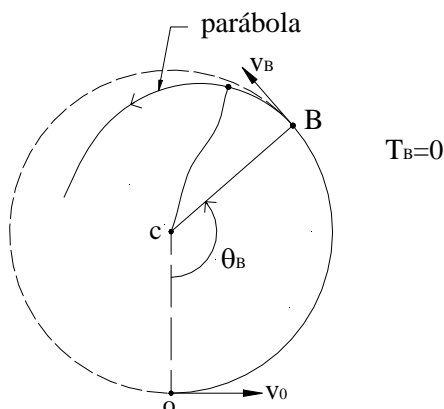
En primer lugar, si la velocidad  $v_o$  es pequeña ( $< \sqrt{2 g R}$  como puede probarse fácilmente),

hay un punto A en el primer cuadrante, es decir con  $\theta_A < \frac{\pi}{2}$ , en el que la velocidad se hace cero, pero no la tensión,  $v_A = 0$  pero  $T_A > 0$ . La masa se detiene instantáneamente y baja de nuevo por la trayectoria circular, estableciéndose el movimiento oscilatorio de un **péndulo simple**.



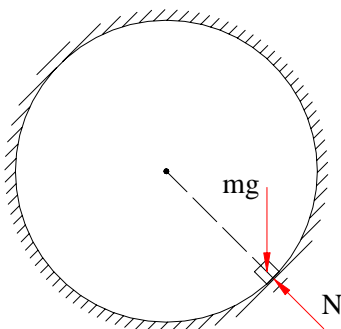
En segundo lugar, si  $\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR}$ , hay un punto B en el segundo cuadrante,  $\frac{\pi}{2} < \theta_B < \pi$ , en el que la tensión se hace cero, pero no la velocidad,  $T_B = 0$ ,  $v_B > 0$ .

Como la tensión se anula, de ese punto en adelante la cuerda no actúa, la única fuerza sobre la partícula es el peso, ya no hay movimiento circular y la trayectoria es una parábola que empalma con el círculo en el punto B, tangencialmente a  $\vec{v}_B$ .

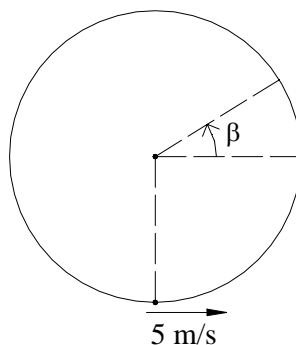


Para la comprensión de muchos aspectos de este extenso y complejo, pero muy importante problema, la realización experimental cualitativa es invaluable. Un trozo de cuerda, una bolita atada a él y buena disposición son todo lo que se requiere. Realice diversos movimientos con velocidades grandes y pequeñas. Juegue, observe, piense. Coteje sus observaciones con la descripción teórica de los diversos casos. Así irá aprendiendo que, en la mecánica, en la física, hay un doble juego en concordancia: por una parte, de la razón, de los modelos, de las matemáticas y por otra parte, de los cuerpos del mundo, de sus movimientos.

Si en vez de una partícula sujeta a una cuerda tenemos un pequeño bloque deslizando por la parte interior de una superficie circular lisa, el papel de la tensión lo desempeña ahora la normal de la superficie y el problema es idéntico. Basta cambiar T por N.

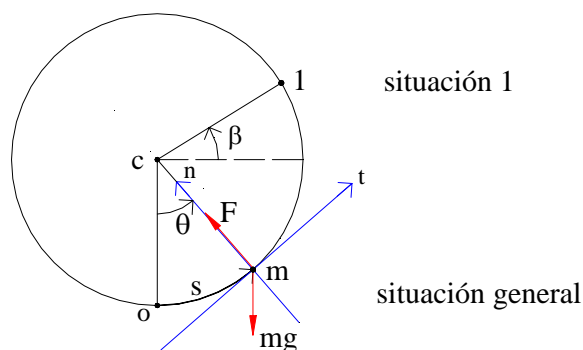


## 6. EJERCICIO



Una bola de masa 0.1 kg se mueve en un círculo vertical de radio 1 m de modo que en el punto más bajo tiene una velocidad de  $5 \text{ m s}^{-1}$ .

- Si la bola está atada a una cuerda, ¿hasta qué posición  $\beta$  sube tensa la cuerda y cuál es allí la velocidad?
- Si la bola está ensartada en un alambre liso, ¿hasta qué posición  $\beta$  sube ahora la bola y cuál es allí la fuerza hecha por el alambre y en que dirección?



Sistema mecánico: la bola. Marco inercial: tierra. Componentes  $n$  y  $t$ .

Segunda ley:

$$n: \quad F - mg \cos \theta = \frac{m v^2}{R}$$

$$t: \quad - mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}.$$

Integrando la aceleración tangencial,

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta).$$

a) Cuerda:  $F \geq 0$ .

Situación particular 1.  $F_1 = 0$ , con  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \beta$ ,  $\cos \theta_1 = -\sin \beta$ , dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\sin \beta = 0.18, \quad \beta = 10.58^\circ$$

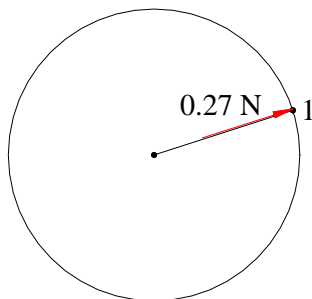
$$v_1 = 1.33 \text{ ms}^{-1}$$

b) Alambre: La normal del alambre,  $F$ , puede ser hacia el centro o hacia afuera,  $F \geq 0$ , bien  $F < 0$ . Así, en la situación 1,  $v_1 = 0$  y

$$\sin \beta = 0.28, \quad \beta = 16^\circ$$

$$F_1 = -0.27 \text{ N},$$

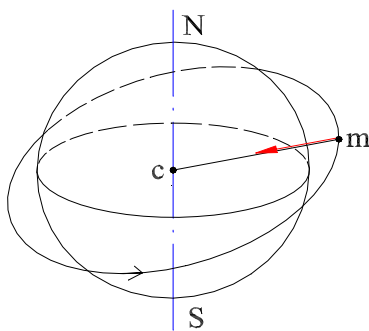
es decir, la fuerza normal del alambre sobre la bola tiene una magnitud de 0.27 N y es radial hacia afuera.



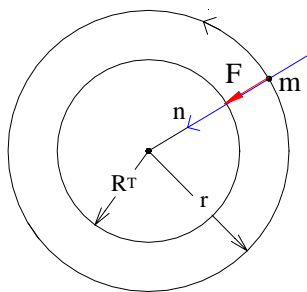
## 7. EJEMPLO

### Satélite en órbita circular

Las órbitas de los satélites que se mueven alrededor de la tierra pueden ser elípticas o circulares. Estudiaremos ahora un poco la órbita circular. Tomemos un marco de referencia con origen en el centro de la tierra y orientado hacia las estrellas como marco inercial. La única fuerza que actúa sobre un satélite de masa  $m$  es la fuerza de atracción gravitacional hecha por el planeta tierra. Esta fuerza, dirigida hacia el centro de la tierra, es entonces la fuerza centrípeta. No hay fuerzas tangenciales y el movimiento es circular uniforme. Elegiremos entonces, en situación general, solamente una dirección normal hacia el centro de la tierra que es el centro de la órbita circular.



En un corte por el plano de la órbita tendremos



Si  $r$  es el radio de la órbita y  $M_T$  la masa de la tierra, la fuerza de atracción gravitacional sobre el satélite es

$$F = \frac{G M_T m}{r^2} ,$$

y la componente normal de la segunda ley queda

$$\frac{G M_T m}{r^2} = m a_n ,$$

y  $a_n = \frac{G M_T}{r^2}$ , independientemente de la masa del satélite.

Como  $a_n = \frac{v^2}{r}$ , entonces  $v^2 = \frac{G M_T}{r}$ .

Como el movimiento es uniforme,

$$v = \frac{2 \pi r}{P} ,$$

siendo  $P$  el período de revolución del satélite. Inmediatamente se llega a

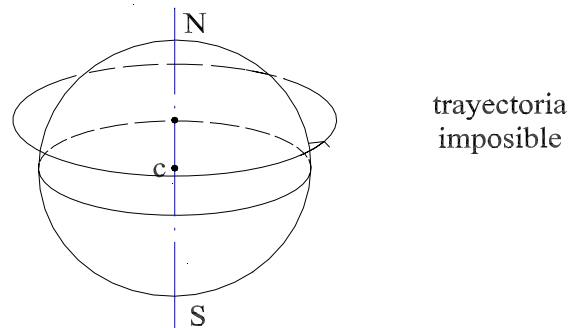
$$P^2 = \left( \frac{4\pi^2}{G M_T} \right) r^3.$$

“El período al cuadrado es proporcional al radio de la órbita al cubo”. Esta proposición es la tercera ley de Kepler aplicada a una órbita circular. Kepler, antes de Newton, descubrió tres leyes del movimiento planetario:

- 1) Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de los focos.
- 2) El radio vector del sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3) Los períodos de revolución al cuadrado son proporcionales a los semiejes mayores de las elipses al cubo, y la constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas.

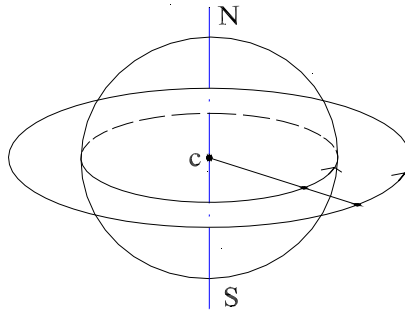
Newton demostró que esas leyes de Kepler eran una consecuencia de las leyes del movimiento y de la ley de gravitación. No sólo son válidas para el movimiento de los planetas alrededor del sol, sino para el movimiento de los satélites alrededor de un planeta. En este problema hemos demostrado la tercera ley para órbitas circulares.

Es importante notar que, como la única fuerza que actúa sobre el satélite es la atracción gravitacional dirigida hacia el centro de la tierra, el plano de la órbita circular tiene que contener el centro de la tierra  $C$ , y por eso una trayectoria circular que, por ejemplo, esté siempre sobre el hemisferio norte, es imposible para un satélite.



La tierra está girando alrededor de su eje, respecto al marco inercial de las estrellas que elegimos, con una velocidad angular bastante regular de 1 vuelta por día sideral, día que equivale a unos 86 160 s. Un satélite, colocado en órbita circular en el plano ecuatorial, que se mueva con esa misma velocidad angular, con ese mismo período, permanecerá siempre sobre la radial del mismo punto ecuatorial en la tierra, apareciendo así fijo o estacionario respecto a un observador en tierra. Tal satélite se llama **satélite geoestacionario** o geosincrónico.



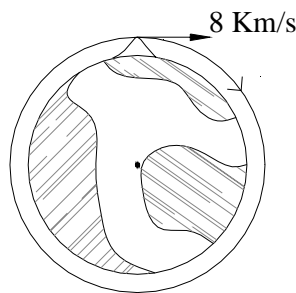


De la tercera ley de Kepler podemos entonces obtener el radio de la órbita geoestacionaria, con  $P = 86\,160$  s. Para el cálculo, es más simple recordar que  $G M_T = g R_T^2$  y así

$$r = \left( \frac{g R_T^2 P^2}{4 \pi^2} \right)^{1/3} = 4.214 \times 10^7 \text{ m} = 42\,140 \text{ km}.$$

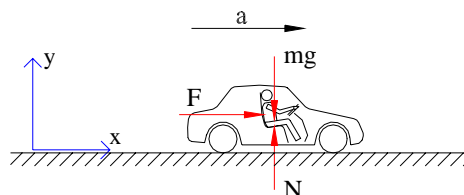
Los satélites geoestacionarios son lejanos y evidentemente la figura no está a escala. La altura sobre la superficie terrestre será entonces de 35 770 km.

Dejamos como ejercicio el cálculo de la velocidad del satélite geoestacionario respecto al marco inercial, así como el de la velocidad que tendría un satélite en una órbita circular muy cercana a la tierra, con  $r \approx R_T$ . Esta última velocidad, de unos  $8 \text{ km s}^{-1}$ , llamada a veces primera velocidad cósmica, es pues la velocidad con la cual hay que lanzar transversalmente un objeto, muy cerca de la tierra para que entre en órbita circular, haciendo caso omiso de la fricción con la atmósfera.



## 4.2 FUERZAS FICTICIAS O FUERZAS DE INERCIA

Estudiaremos la siguiente situación. Una persona de masa  $m$  está sentada en un automóvil que arranca con aceleración  $a$  por una carretera horizontal recta. Tomemos como sistema mecánico la persona de masa  $m$ , tratada como una partícula, y la carretera como marco inercial de referencia. En el diagrama de fuerzas, debido a la interacción de contacto



entre la persona y el espaldar del asiento, hay una fuerza  $F$  hecha por el espaldar sobre la persona. Hay también una fuerza vertical hecha por el asiento, que equilibra el peso.

La segunda ley respecto al marco inercial, componente horizontal, llamada ecuación de movimiento de  $m$ , es

$$F = m a .$$

Tomemos ahora por un momento el automóvil como marco de referencia para estudiar el movimiento de  $m$ . Ese marco no es inercial, es un marco de referencia acelerado. El movimiento de  $m$  respecto a él es muy simple, está en reposo y por tanto la aceleración de la persona respecto al auto es cero. Entonces, si queremos escribir una ecuación de equilibrio para  $m$  en el marco no inercial automóvil, tendremos

$$\sum F = 0 \quad (\text{respecto al marco no inercial}).$$

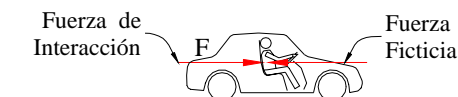
Si escribimos ahora la segunda ley que habíamos planteado como

$$F + F_{\text{ficticia}} = 0 ,$$

con

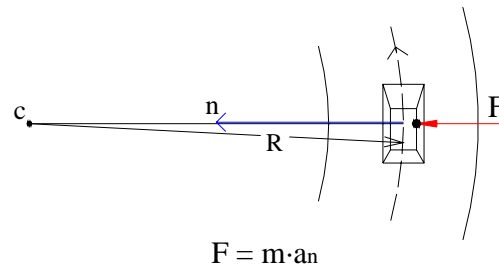
$$F_{\text{ficticia}} = -m a ,$$

vemos que, en efecto, se cumple en el marco no inercial la ecuación de equilibrio, con la condición de que tengamos en cuenta la presencia de una fuerza, llamada fuerza ficticia o fuerza de inercia.



Para el marco no-inercial en el auto, la persona está pues en equilibrio horizontal bajo la acción de dos fuerzas: una fuerza  $F$  de interacción, hecha por el espaldar del asiento y una fuerza hacia atrás, contraria a la aceleración, que no es una fuerza de interacción, que no es ejercida por ningún cuerpo, llamada fuerza ficticia o fuerza de inercia, y que aparece debido a la aceleración del marco de referencia. Todo el mundo ha experimentado esa fuerza de inercia hacia atrás cuando un vehículo acelera.

Consideremos ahora, de manera análoga, un vehículo que describe una curva horizontal plana y una persona de masa  $m$  sentada en reposo en él, apoyada en la pared lateral. El movimiento de la persona  $m$  respecto al marco inercial fijo en la carretera, se describe fácilmente en dirección normal hacia el centro.



$F$  es la fuerza de interacción, de contacto, hecha sobre  $m$  por la pared lateral del vehículo, y  $a_n$  es la aceleración normal hacia el centro, igual a  $\omega^2 R$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular a la que el vehículo recorre la curva. En la dirección vertical hay, por supuesto, equilibrio entre la fuerza vertical hecha por el asiento y el peso.

Si tomamos como marco de referencia el vehículo, marco no inercial, rotante, la persona aparece en equilibrio respecto a él. Escribiendo ahora la segunda ley en dirección horizontal como

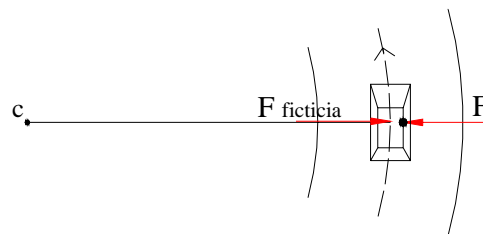
$$F + F_{\text{ficticia}} = 0$$

con

$$F_{\text{ficticia}} = -m \omega^2 R = F_{\text{centrífuga}},$$

vemos que se cumple la ecuación para  $m$ ,  $\sum F = 0$ , respecto al marco no-inercial rotante, con tal de que tengamos en cuenta una fuerza ficticia o fuerza de inercia, radialmente hacia fuera del centro, llamada **fuerza centrífuga**.

Desde el punto de vista del marco no-inercial la persona está pues en equilibrio bajo la acción de 2 fuerzas:



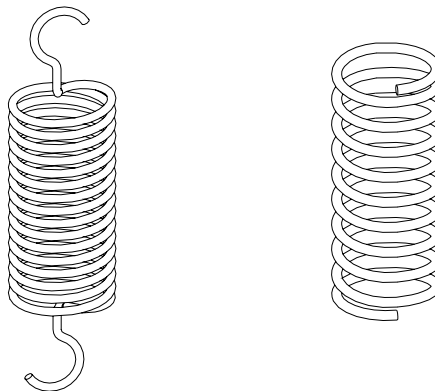
Una fuerza de interacción hacia el centro, de la cual es responsable la pared lateral, y una fuerza ficticia, la fuerza centrífuga, alejándose del centro, que no es ejercida por ningún cuerpo, que no es de interacción y que aparece debido al movimiento acelerado del marco no-inercial. El efecto de la fuerza centrífuga al dar una curva en un vehículo es también una experiencia común y cotidiana.

Salvo esta breve mención introductoria de las fuerzas de inercia, vamos a estudiar por ahora el movimiento de los cuerpos respecto a marcos inerciales de referencia, teniendo únicamente en cuenta las fuerzas que provienen de las interacciones entre diversos cuerpos.

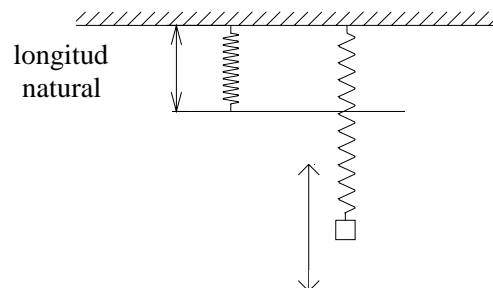
### 4.3 LA FUERZA ELÁSTICA HECHA POR UN RESORTE

Se dice, en general, que un cuerpo tiene un comportamiento elástico, cuando se deforma bajo la acción de fuerzas aplicadas, de tal modo que, al cesar la acción de esas fuerzas, el cuerpo recupera su forma inicial. Si las deformaciones son permanentes y no se recupera la forma primera, el comportamiento se dice plástico. Un mismo cuerpo puede tener un comportamiento elástico para un cierto rango de fuerzas, y un comportamiento plástico si las fuerzas exceden cierto límite. Se suelen llamar fuerzas elásticas, las fuerzas que aparecen a raíz de una deformación elástica.

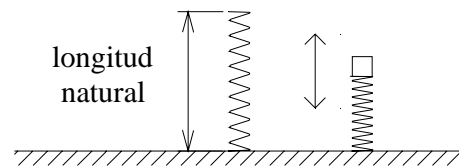
Una primera fuerza elástica, simple e importante, aparece cuando consideramos las deformaciones de un resorte. Hay resortes de muchas clases. Un tipo común, al que nos referiremos muy a menudo, es el resorte helicoidal, en el que un alambre, de mayor o menor calibre, forma una hélice de múltiples espiras más o menos separadas entre sí.



Llamaremos **longitud natural** del resorte a su longitud sin deformación. Muchos resortes tienen, en longitud natural, las espiras en contacto unas con otras, de modo que sólo pueden sufrir, a partir de la longitud natural, deformaciones de estiramiento por tracción. Otros en cambio, como los que se usan en los automóviles, tienen en longitud natural las espiras separadas y están diseñados para la compresión. En estos últimos se suele usar, bien un eje central, bien un tubo circundante, para evitar el pandeo. Una masa puede ponerse a oscilar suspendida verticalmente de un resorte de tracción:

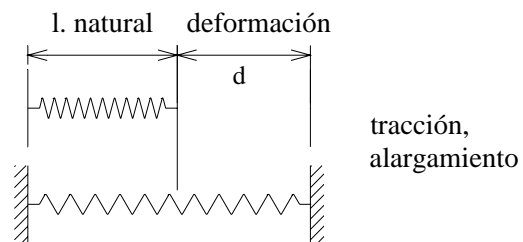


o bien, puede oscilar, o salir disparada, colocada sobre un resorte de compresión:

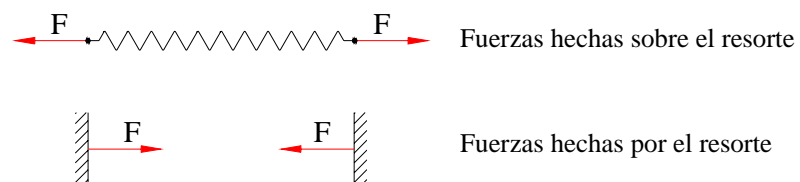


Con frecuencia la masa misma de un resorte no es relevante en comparación con las masas que soporta y usualmente se desprecia.

La **deformación** de un resorte,  $d$ , es la diferencia, en valor absoluto, entre la longitud cuando está deformado y la longitud natural.

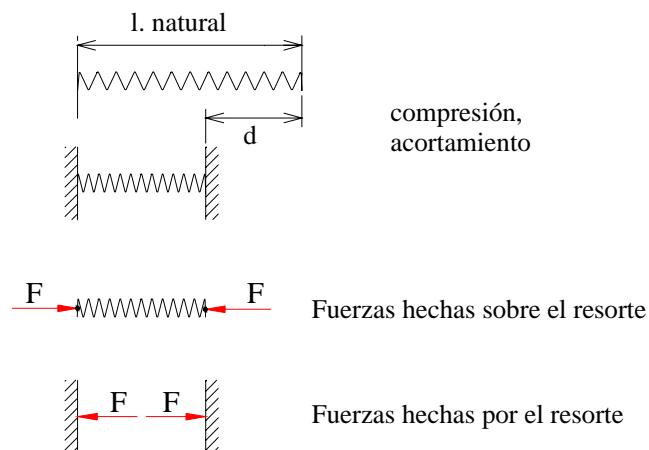


Si un resorte tiene una deformación por alargamiento, las fuerzas hechas sobre el resorte en sus extremos son de tracción.

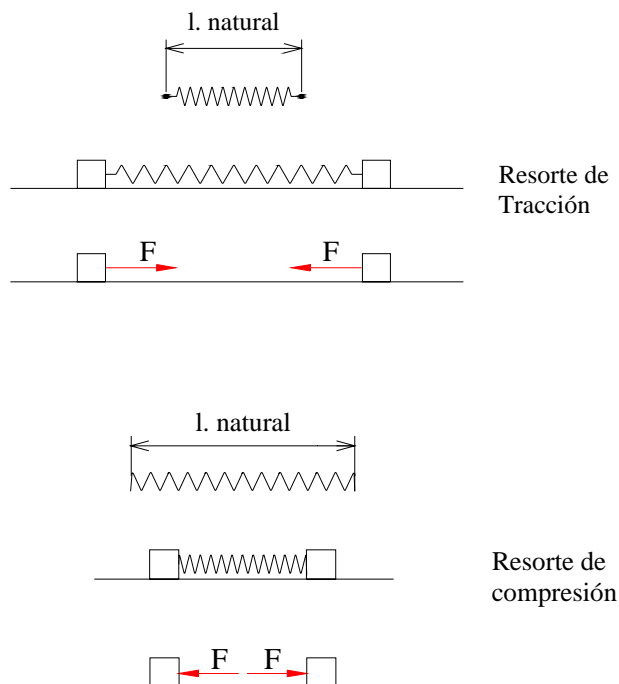


Las fuerzas hechas por el resorte sobre los cuerpos que lo soportan en sus extremos son de igual magnitud y dirección contraria, de acuerdo a la tercera ley de Newton.

Si el resorte tiene una deformación  $d$  por compresión, la situación es análoga.



Trátase de tracción o compresión, las direcciones de las fuerzas hechas por el resorte sobre los cuerpos en sus extremos, son tales que el resorte intenta recuperar la longitud natural.

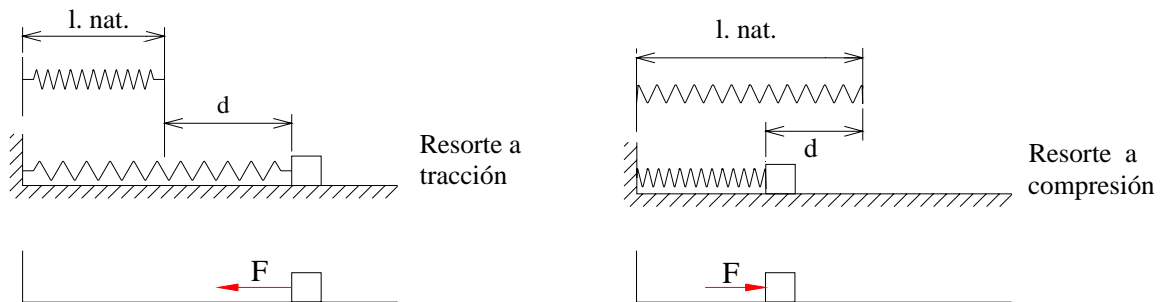


Experimentalmente se muestra que la magnitud de la fuerza hecha por un resorte o muelle es, con muy buena aproximación, proporcional a la deformación, tanto en resortes de tracción como de compresión, siempre y cuando fuerzas y deformaciones no excedan ciertos límites que dependen de cada resorte en particular. La constante de proporcionalidad,  $k$ , se llama la **constante de rigidez** o simplemente la constante del resorte. Por lo tanto

$$F = k d .$$

Esta ley, que establece la proporcionalidad entre la fuerza elástica hecha por un resorte y su deformación, se llama la **Ley de Hooke**, de gran importancia en el comportamiento de los cuerpos elásticos. Como la relación es lineal, se dice también que el resorte tiene un comportamiento lineal. La fuerza, que, como vimos, intenta recuperar la longitud natural, se llama también fuerza recuperadora.

Consideremos un resorte con su extremo izquierdo fijo y su extremo derecho sujeto a un bloque que puede deslizarse por una superficie horizontal. Resumamos las características, magnitud y dirección, de la fuerza elástica  $F$  hecha por el resorte sobre el bloque:

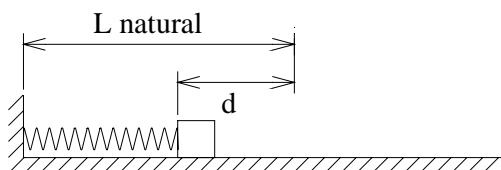


Las dimensiones de la constante del resorte son

$$\text{dimensiones de } k = [k] = \frac{[F]}{L} = M T^{-2} ,$$

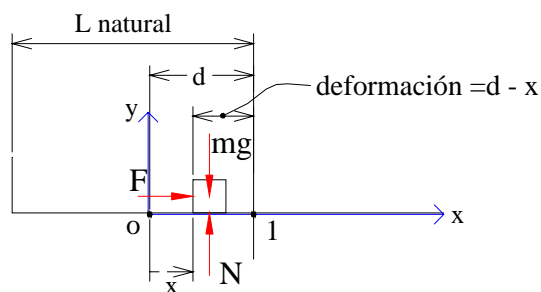
La unidad en SI es:  $\frac{N}{m} = kg \, s^{-2}$ . Una  $k$  baja caracteriza un resorte blando, que con pequeñas fuerzas sufre deformaciones considerables y, al contrario, una  $k$  elevada denota un resorte duro o muy rígido. La determinación de  $k$  se hace experimentalmente, bien por un método estático suspendiendo un bloque en equilibrio de un resorte, o por un método dinámico, estudiando la oscilación de una masa sujeta al resorte.

## 1. EJEMPLO



Un bloque de masa  $m$  se apoya contra el extremo de un resorte de constante  $k$ . Se le da una compresión inicial  $d$  y se suelta. Si el bloque desliza sobre una mesa sin fricción, hallar su velocidad cuando el resorte vuelve a su longitud natural.

Marco inercial terrestre ligado a la mesa. Ejes  $x, y$  con origen en la situación inicial,  $a_y = 0$ ,  $a_x = a$  (notación simplificada). Sistema mecánico: el bloque. Diagrama de fuerzas en posición general.



La deformación en posición general es  $d - x$  y entonces la magnitud de la fuerza elástica  $F$  es  $k(d - x)$ .

Las componentes de la segunda ley de Newton quedan

$$\text{en } x: \quad k(d - x) = m a$$

$$\text{en } y: \quad N - m g = 0,$$

con lo cual la componente  $x$  de la aceleración, variable con la posición, es

$$a = \frac{k}{m} (d - x).$$



Hagamos la cinemática, es decir, integremos, usando la regla de la cadena, con las condiciones iniciales en O:

$$t = 0, \quad x = 0$$

$$v = 0 \quad (\text{se suelta en O}),$$

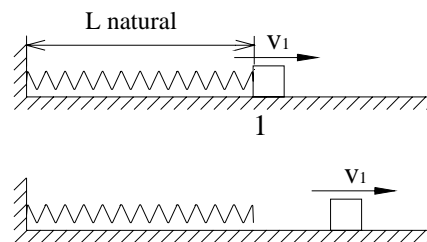
$$\int_0^v v \, dv = \frac{k}{m} \int_0^x (d - x) \, dx,$$

con lo que

$$v^2 = \frac{k}{m} (2dx - x^2).$$

En la situación particular 1 cuando el resorte vuelve a su longitud natural,  $x_1 = d$ , y así

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} d.$$



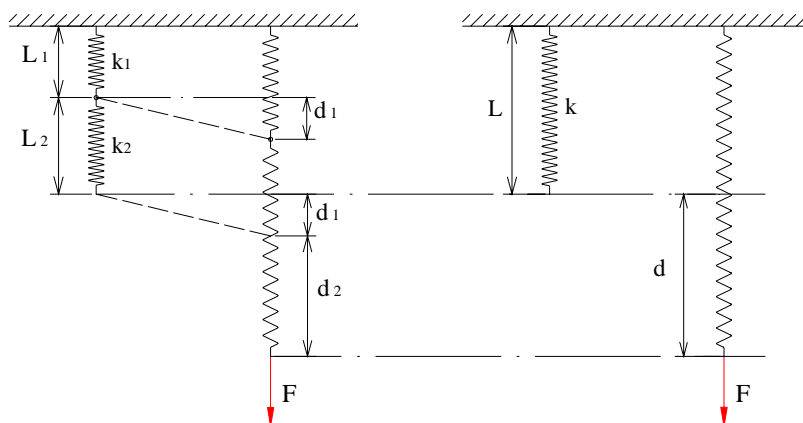
A partir de la situación 1, el resorte, que puede empujar el bloque simplemente apoyado contra él pero no jalarlo, cesa su acción y el bloque sigue con velocidad constante  $v_1$ , ya que la mesa es lisa.

## 2. EJERCICIO

### Resortes en serie y en paralelo

Dos resortes de longitudes naturales  $L_1$ ,  $L_2$  y constantes  $k_1$ ,  $k_2$ , se empalman uno a continuación del otro. Hallar la constante del resorte equivalente, es decir, de un resorte de longitud natural  $L = L_1 + L_2$ , que tenga exactamente el mismo comportamiento que los dos resortes empalmados, llamados resortes en serie.

Como los resortes son ideales, de masa despreciable, la fuerza  $F$  hecha sobre el resorte 2 en su extremo inferior es la misma en cualquier punto a lo largo de los resortes, estén en reposo o en movimiento (para verlo haga los diagramas de cada resorte).



Tendremos entonces

$$F = k_1 d_1 = k_2 d_2 = k d .$$

Como

$$d = d_1 + d_2$$

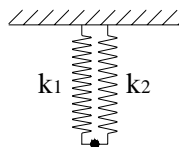
se obtiene

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} .$$

Si, por ejemplo, se acoplan dos resortes idénticos, la constante del resorte conjunto es sólo la mitad, es decir, es más blando. Si un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $L$  se divide en  $n$  partes iguales, cada una de longitud  $L'$  y constante  $k'$ , entonces

$$k' L' = k L ,$$

lo que muestra que la característica elástica que depende de la constitución del resorte, independientemente de su tamaño, es  $k L$ .



Si los resortes se disponen uno al lado del otro, se dice que están en paralelo. Asumiendo iguales longitudes naturales, hallar la constante del resorte equivalente.

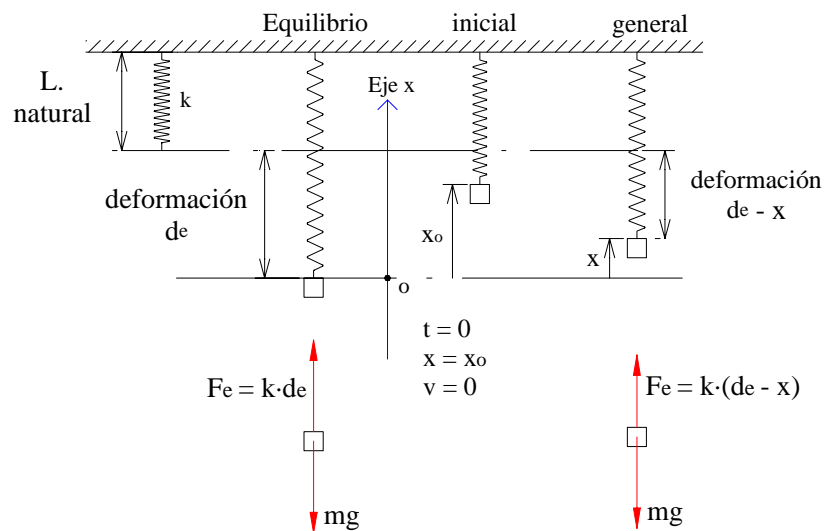
## 4.4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Como aplicación de las leyes de Newton vamos a presentar dos ejemplos importantes de movimiento oscilatorio.

### 1. EJEMPLO

#### Oscilación de una masa suspendida de un resorte

Consideremos un pequeño cuerpo de masa  $m$ , tratado como una partícula, suspendido verticalmente de un resorte de masa despreciable y constante  $k$ . Vamos a estudiar en primer término la posición de equilibrio de  $m$  y luego su movimiento cuando se suelta desde una cierta condición inicial. El punto de suspensión del resorte está fijo a un marco inercial ligado a tierra. El sistema mecánico es la masa  $m$ . Elijamos un eje  $x$  hacia arriba con origen en la posición de equilibrio. Vamos a dibujar comparativamente la longitud natural y tres situaciones importantes: la situación de equilibrio, la situación inicial y una situación general cualquiera, así como los diagramas de fuerzas en equilibrio y en situación general. Antes de hacerlo, es imperioso recordar que una realización experimental paralela de este fundamental movimiento es esencial para su comprensión.



En equilibrio, con  $d_e$ : deformación en equilibrio, la fuerza hecha por el resorte,  $F_e$  es

$$F_e = k d_e ,$$

y entonces, como  $\sum F_x = 0$ ,

$$k d_e - mg = 0 .$$

Veamos la ecuación de movimiento de  $m$ , segunda ley de Newton en situación general. Usemos notación simple, es decir  $a_x = a$ . Con la magnitud de la fuerza elástica igual a  $k$  por la deformación, o sea  $F = k(d_e - x)$ , se tiene

$$\sum F_x = m a_x : \quad k(d_e - x) - m g = m a ,$$

que, teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio, queda simplemente

$$-k x = m a .$$

La fuerza neta, resultante del peso y la fuerza elástica,  $-k x$ , es una fuerza recuperadora, dirigida siempre hacia la posición de equilibrio. La aceleración  $a$  es pues

$$a = -\frac{k}{m} x .$$

Llamemos  $\omega^2$ , como es usual, a la constante positiva  $\frac{k}{m}$ . Como se comprueba fácilmente la dimensión de  $\omega$  (letra griega omega minúscula),  $[\omega]$ , es  $T^{-1}$ . La ecuación

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x ,$$

o bien

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 ,$$

que también se escribe como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 ,$$

es la llamada ecuación diferencial del oscilador armónico, de gran importancia en la física y que va a aparecer en muchos otros movimientos. Una ecuación diferencial involucra funciones y sus derivadas. Resolverla es hallar una función que la satisface, cumpliendo además con unas condiciones iniciales determinadas. Buena parte de las ecuaciones fundamentales de la física son ecuaciones diferenciales. De hecho, cuando hicimos, por ejemplo, la cinemática de la caída libre, resolvimos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} = -g ,$$

con condiciones iniciales, en  $t = 0$ ,  $x = 0$ , mostrando que la función  $x(t)$  es,

$$\dot{x} = v_o$$

$$x = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Ecuaciones más complejas requerirán métodos especiales, pero con el cálculo elemental podemos abordar la solución de la ecuación del oscilador, es decir encontrar cual es la función  $x(t)$  que describe el movimiento de la masa  $m$  suspendida del resorte. Hagámoslo para unas condiciones iniciales simples, comunes y prácticas: demos a la masa un desplazamiento desde el equilibrio igual a  $x_o (> 0)$  y soltémosla en  $t = 0$ . En este caso,  $\dot{x} = v_o = 0$  y el problema es

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x. \quad \text{En } t = 0, \quad x = x_o$$

$$\dot{x}_o = 0$$

Hallar  $x(t)$

Usando la regla de la cadena,

$$\int_0^v v \, dv = -\omega^2 \int_{x_o}^x x \, dx,$$

y por tanto

$$v = \omega \sqrt{x_o^2 - x^2},$$

en donde hemos tomado la raíz positiva. Como  $v = \frac{dx}{dt}$ , separando las variables e integrando de nuevo,

$$\int_{x_o}^x \frac{dx}{\sqrt{x_o^2 - x^2}} = \omega \int_0^t dt = \omega t$$

La integral de la izquierda es inmediata si se conocen las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Si no es así, se puede usar la sustitución  $x = x_o \sin \phi$ . El resultado es

$$\left[ \arcsin \frac{x}{x_o} \right]_{x_o}^x = \omega t = \arcsin \frac{x}{x_o} - \arcsin 1,$$

o sea

$$\arcsin \frac{x}{x_o} = \omega t + \frac{\pi}{2},$$

y por tanto

$$x = x_o \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

o sea

$$x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

Siendo  $\omega t$  un ángulo, adimensional, en radianes,  $\omega$  tiene, como ya vimos, dimensiones  $T^{-1}$ .

Se llama frecuencia angular y su unidad SI es  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

El movimiento oscilatorio de  $m$  es un movimiento periódico muy importante, llamado movimiento armónico simple. La función coseno tiene período  $2\pi$  y por tanto

$$x = x_0 \cos \omega t = x_0 \cos (\omega t + 2\pi) = x_0 \cos \omega \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right).$$

Así, cuando transcurre un tiempo llamado el período  $P$ ,

$$P = \frac{2\pi}{\omega},$$

el movimiento se repite idénticamente. Como  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , el período es

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

El movimiento es simétrico alrededor de la posición de equilibrio, extendiéndose desde  $-x_0$  hasta  $x_0$ . El desplazamiento máximo desde el equilibrio se llama la amplitud del movimiento, en este caso  $x_0$ .

En realizaciones experimentales se miden la masa y el período para hallar  $k$ . Sin embargo, con resortes blandos y masas pequeñas, la idealización que hemos hecho al despreciar la masa del resorte no es buena. Para buscar cierta precisión es necesario tener en cuenta la masa del resorte. El problema es arduo y no lo abordaremos ahora, pero el resultado es simple. Si  $m_0$  es la masa del resorte, una mejor aproximación al período, con  $m_0 < m$ , es

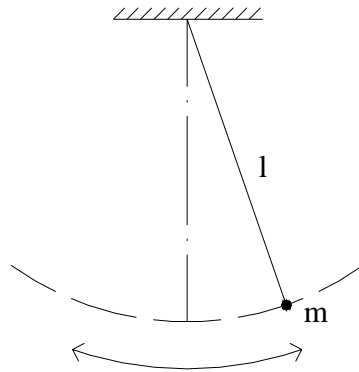
$$P = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{k}}.$$

## 2. EJEMPLO

### El péndulo simple

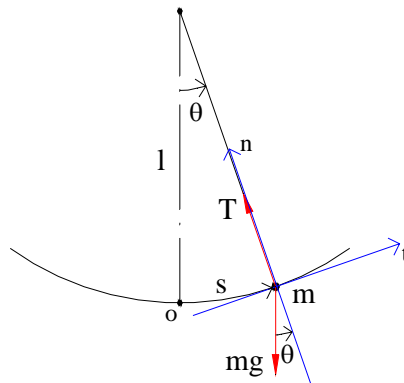
Un péndulo es un cuerpo suspendido verticalmente, que puede oscilar alrededor de la posición de equilibrio bajo la acción de la gravedad. El péndulo simple es una idealización en la cual

una masa puntual o partícula está suspendida de una cuerda ideal y oscila en un plano vertical. Una pequeña esfera masiva atada a una cuerda proporciona una realización práctica adecuada.



El péndulo es un sistema mecánico de gran importancia histórica. Hombres tan ilustres como Galileo, Huygens y Newton, lo estudiaron intensamente, tanto teórica como experimentalmente. La riqueza de su física, de su matemática, de sus movimientos, lo convierten en un paradigma de la mecánica. Por eso es imperiosa una primera visita temprana al péndulo, tanto en el papel como en el laboratorio. Ya habíamos presentado algunas facetas del péndulo cónico e hicimos una presentación del movimiento en un círculo vertical. Vamos ahora a centrar la atención en las pequeñas oscilaciones del péndulo simple para hallar su período.

Sea un marco inercial ligado a tierra, como es usual. Elijamos un origen  $O$  sobre el círculo en la posición de equilibrio de  $m$ . El arco  $s$  y el correspondiente ángulo  $\theta$  se indican en la figura. El sistema mecánico es  $m$  y su diagrama de fuerzas en posición general, así como las direcciones normal y tangencial, son:



El ángulo de  $mg$  con la dirección  $-n$  es  $\theta$  (correspondientes entre paralelas), y entonces la componente de la segunda ley en dirección  $t$  (elegida positiva en dirección de  $s$  y  $\theta$  crecientes como se sabe), queda

$$- mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt} = m \ell \alpha.$$

Por lo tanto

$$\alpha = -\frac{g}{\ell} \sin \theta.$$

Estudiemos ahora el caso particular llamado péndulo simple de pequeñas amplitudes, en el cual el péndulo oscila de modo que el máximo valor del ángulo  $\theta$  es un ángulo pequeño.

Las funciones seno y coseno pueden expresarse en series de potencias así

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

Si el ángulo  $\theta$  es pequeño, las potencias  $\theta^2, \theta^3, \dots$  son muy pequeñas y podemos despreciarlas y la aproximación lineal queda

$$\sin \theta \approx \theta,$$

$$\cos \theta \approx 1.$$

Un límite bien conocido del cálculo establece que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

el cual también permite ver la importante aproximación de ángulos pequeños

$$\sin \theta \approx \theta,$$

donde  $\theta$  está, por supuesto, en radianes. Es ilustrativo hacer la comparación en una calculadora para ángulos de 1 grado  $\left(1 \text{ grado} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360 \text{ grados}} = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}\right)$ , 5 grados y 10 grados, para ver concretamente el grado de precisión con el cual  $\sin \theta$  se aproxima a  $\theta$ .

Con la aproximación para ángulos pequeños  $\sin \theta \approx \theta$ , la aceleración angular del péndulo queda

$$\alpha = -\frac{g}{\ell} \theta$$

Si llamamos, como se acostumbra,

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell},$$



siendo  $\omega$  la frecuencia angular, podemos escribir la aceleración angular como

$$\alpha = \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta.$$

Es muy importante no confundir dicha frecuencia angular  $\omega$  con la velocidad angular que tiene el péndulo en su movimiento circular, que escribiremos como  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ .

Si damos al péndulo las siguientes condiciones iniciales: soltamos en  $t = 0$  desde  $\theta = \theta_0$ , el problema del movimiento queda entonces

$\alpha = \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta. \quad \text{En } t = 0 \quad \theta = \theta_0$ $\dot{\theta} = 0$ <p>Hallar <math>\theta(t)</math>.</p>
--

Este problema es el mismo que ya planteamos al estudiar las oscilaciones de una masa suspendida de un resorte. Simplemente, en vez de la posición  $x(t)$ , tenemos ahora la posición angular  $\theta(t)$ . El péndulo simple de pequeñas amplitudes describe por tanto un movimiento armónico simple

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t,$$

con amplitud  $\theta_0$  y cuyo período, recordando que  $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$ , es

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

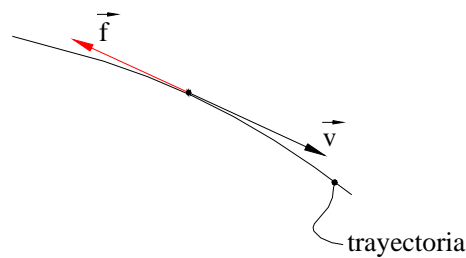
En el movimiento armónico simple, el período, es decir el tiempo que tarda una oscilación completa, no depende de la amplitud de la oscilación: El péndulo de pequeñas amplitudes, que describe un movimiento armónico simple, tiene esta propiedad y se dice que es isocrónico. Pero en un péndulo de amplitud cualquiera esto no es cierto, el péndulo no es isocrónico, es decir el período depende de la amplitud  $\theta_0$ . Para una amplitud  $\theta_0$  de unos  $15^\circ$ , el error relativo que se comete al calcular el período con la expresión que vimos, respecto al período exacto, es de un 0.5%, lo que indica el grado de precisión al considerar la aproximación de pequeñas amplitudes.

## 4.5 FUERZAS DE FRICCIÓN EN FLUIDOS

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido, sea líquido o gas, el fluido opone una resistencia al movimiento del cuerpo, que representaremos globalmente como una fuerza de fricción  $\vec{f}$  debida al medio fluido.

Esta resistencia o fuerza de fricción debida al fluido, llamada a veces fuerza resistiva, tiene las siguientes características:

- a) Dirección: es una fuerza que se opone siempre al movimiento. Su dirección es contraria al vector velocidad del cuerpo. A diferencia de la fricción seca, en la fricción en fluidos no existe la fricción estática: si el cuerpo está en reposo en el fluido, la fricción es nula.



- b) Magnitud: La magnitud de la fuerza opuesta por el fluido al movimiento del cuerpo, aumenta con la velocidad, es una función creciente de la velocidad. Para un amplio rango de valores de la velocidad  $v$ , la magnitud de la resistencia friccional  $f$  sobre el cuerpo puede describirse con la expresión

$$\left| \vec{f} \right| = A v + B v^2,$$

en la que los coeficientes  $A$  y  $B$  son constantes positivas que dependen del cuerpo y del fluido. Vectorialmente puede expresarse la fuerza de fricción como

$$\vec{f} = - A \vec{v} - B v \vec{v}.$$

El primer término,  $Av$ , de magnitud proporcional a la velocidad, está directamente relacionado con la viscosidad del fluido, que es la fricción interna entre las capas de fluido, cuyas velocidades varían de una capa a otra. Es el término predominante a bajas velocidades.

El segundo término,  $Bv^2$ , de magnitud proporcional al cuadrado de la velocidad, es el término predominante a altas velocidades y está asociado con la turbulencia que se produce en el fluido por el movimiento del cuerpo. En la mecánica de fluidos se estudian detalladamente esas complejas fuerzas de fricción y esos coeficientes  $A$  y  $B$ , que dependen de la forma y tamaño del cuerpo y de las propiedades del medio fluido. En esta descripción introductoria los tomaremos como coeficientes empíricos.

Una consecuencia muy importante del hecho de que la fuerza resistiva aumente con la velocidad es la existencia de una **velocidad límite o terminal** para el movimiento.

Consideremos un cuerpo que parte del reposo y se mueve en un fluido bajo la acción de una fuerza constante  $F_0$ , que puede ser por ejemplo el peso en el caso de un cuerpo cayendo en el aire o en algún líquido. Supongamos por sencillez que el movimiento es rectilíneo. Bajo la acción de  $F_0$ , el cuerpo acelera, aumenta su velocidad. Pero entonces la fuerza de fricción que se opone al movimiento aumenta correspondientemente, y llega un momento en el que prácticamente la fuerza resistiva  $f$  iguala a la fuerza activa  $F_0$ . Así, la fuerza neta sobre el cuerpo se anula, la aceleración es cero, y el cuerpo sigue moviéndose con la velocidad adquirida, llamada velocidad límite o terminal. ¡Gracias a ello salimos incólumes de la granizada!

## 1. EJEMPLO

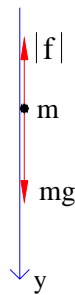
### Esfera que cae verticalmente en aire. Velocidad límite

La fuerza resistiva sobre una esfera de radio  $r$  que se mueve en el aire con velocidad  $v$ , tiene una magnitud

$$f = 3.1 \times 10^{-4} r v + 0.87 r^2 v^2,$$

en donde los coeficientes están en unidades S I. (Datos tomados de A.P. French. “Mecánica Newtoniana”).

Consideremos una esfera que cae en el aire bajo la acción de su propio peso y alcanza una velocidad límite. Sea un eje  $y$  vertical hacia abajo. La fuerza neta hacia abajo sobre la esfera de masa  $m$  es  $m g - |f|$  y



la componente de la segunda ley queda

$$m g - f = m a .$$

La velocidad terminal se adquiere cuando  $a = 0$  y por tanto

$$m g = f .$$

Ahora, si la esfera tiene densidad  $\rho$ , su masa será  $m = \rho \times \text{Volumen}$ , y así

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

Si consideramos una gota de lluvia de radio  $2 \times 10^{-3} \text{ m}$ , como la densidad del agua es  $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , su velocidad terminal o límite,  $v_L$  será tal que

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 3.1 \times 10^{-4} r v_L + 0.87 r^2 v_L^2,$$

(con todas las cantidades en SI) y entonces

$$v_L = 9.63 \text{ m s}^{-1}.$$

En caída libre, sin fricción con el aire, esta velocidad se adquiriría en un recorrido  $d$

$$d = \frac{v_L^2}{2g} = 4.73 \text{ m},$$

de modo que ya en distancias muy inferiores a esa los efectos de la fricción con el aire son importantes y el modelo de caída libre es inadecuado para estudiar la caída de una gota de lluvia de esas características. Si calculásemos la velocidad límite usando únicamente el término proporcional a  $v^2$  tendríamos una velocidad

$$v_L' = \sqrt{\frac{4 \pi r^3 \rho g}{3 \times 0.87 r^2}} = 9.72 \text{ m s}^{-1},$$

que difiere solo en un 1% respecto a los  $9.63 \text{ m s}^{-1}$ , lo que indica que el término proporcional a  $v^2$  es el fundamental en una esfera de ese tamaño. Para cuerpos más densos y de mayor tamaño puede considerarse con buena aproximación que la fuerza resistiva está dada por

$$f = 0.87 r^2 v^2$$

Calcúlese como ejercicio la velocidad límite de una piedra esférica de  $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$  de radio, con densidad  $\rho \approx 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ .

La fuerza viscosa, es decir el término proporcional a  $v$  de la fuerza resistiva, es dominante en el aire sólo en caso de esferas diminutas, como el caso de partículas de polvo, del orden de décimas a centésimas de milímetro de radio.

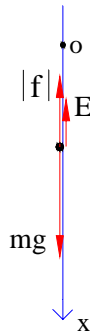
Dejamos como ejercicio el caso de un cuerpo, ya no de forma esférica, por ejemplo el de un paracaidista. La fuerza resistiva es  $f = B v^2$ . El valor aproximado de  $B$  es:  $0.2 \text{ kg m}^{-1}$  sin abrir el paracaídas y  $20 \text{ kg m}^{-1}$  con paracaídas abierto. Si la masa es de  $60 \text{ kg}$ , calcule la velocidad terminal en ambos casos.

## 2. EJEMPLO

### Fuerza resistiva viscosa

En líquidos viscosos, la resistencia del fluido al movimiento de un pequeño cuerpo a bajas velocidades, puede representarse bien como una fuerza viscosa de magnitud proporcional a la velocidad,  $|\vec{f}| = A v$ . Supongamos que un cuerpo se suelta desde el reposo y cae verticalmente en un líquido con resistencia viscosa. Estudiar la velocidad en función del tiempo.

Sea un marco inercial ligado a tierra, respecto al cual el líquido está en reposo. Eje  $x$  hacia abajo con origen en dónde se suelta el cuerpo, que es el sistema mecánico, tratado como partícula de masa  $m$ . En situación general el diagrama de fuerzas es:



$f$  es la magnitud de la fricción,  $f = A v$ .  $E$  es la fuerza de flotación o empuje arquimedeano, vertical hacia arriba e igual en magnitud al peso del fluido desalojado. En el caso del aire en el ejemplo anterior, despreciamos este empuje puesto que la densidad del aire, del orden de  $1 \text{ kg m}^{-3}$ , es muy pequeña, pero en un líquido, digamos el agua, con densidad de  $10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , el empuje es una fuerza importante.

La componente de la segunda ley es

$$m g - E - A v = m a ,$$

que, llamando  $F_o$  a la fuerza constante neta hacia abajo,

$$F_o = m g - E ,$$

conduce a una aceleración

$$a = \frac{F_o - A v}{m} ,$$

aceleración variable, dependiente de la velocidad. Para hacer la cinemática, las condiciones iniciales son, en  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $v = 0$ . Con

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_o - A v}{m},$$

separando las variables para integrar

$$\int_0^v \frac{dv}{F_o - A v} = \frac{1}{m} \int_0^t dt = \frac{t}{m}.$$

La integral de la izquierda, como integral indefinida, es

$$\int \frac{dv}{F_o - A v} = \frac{1}{A} \int \frac{\frac{A}{F_o} dv}{1 - \frac{A}{F_o} v} = -\frac{1}{A} \int \frac{d\left(1 - \frac{A}{F_o} v\right)}{1 - \frac{A}{F_o} v} = -\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right),$$

que, volviendo a los límites de la integral definida, es

$$\left. -\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right) \right]_0^v = -\frac{1}{A} \ln \left(1 - \frac{A}{F_o} v\right) = \frac{t}{m},$$

con lo que

$$\ln \left(1 - \frac{A v}{F_o}\right) = -\frac{A}{m} t,$$

y así

$$1 - \frac{A v}{F_o} = e^{-\frac{A}{m} t}.$$

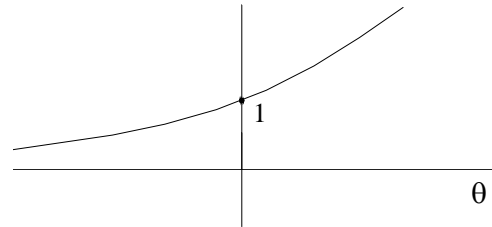
Por tanto

$$v = \frac{F_o}{A} \left(1 - e^{-\frac{A}{m} t}\right).$$

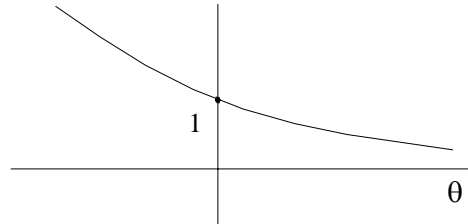
Dejamos como ejercicio la verificación de la coherencia dimensional.

Es importante construir cuidadosamente la gráfica de  $v$  contra  $t$ . Sugerimos al lector la siguiente secuencia de gráficas, partiendo de la gráfica fundamental de la exponencial,  $e^\theta$  versus  $\theta$ , con  $\theta$  adimensional.

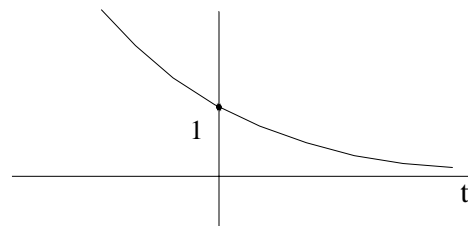
$$e^{\theta}$$



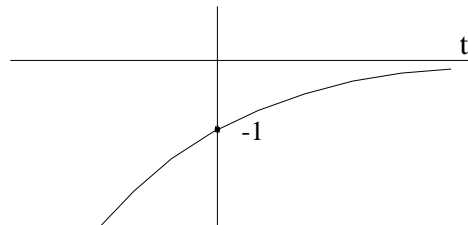
$$e^{-\theta} : \text{inversión del eje } \theta$$
  
 o de la gráfica:



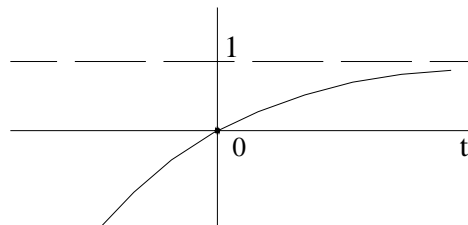
$$e^{-\frac{A}{m}t} : \text{cambio de escala}$$
  
 del eje horizontal



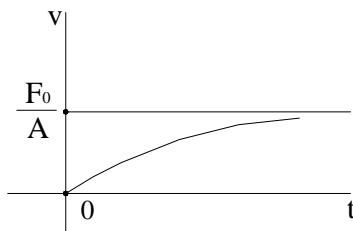
$$-e^{-\frac{A}{m}t} : \text{inversión del eje}$$
  
 vertical



$$1 - e^{-\frac{A}{m}t} : \text{subir la gráfica 1}$$
  
 (o bajar 1 el eje t)



$\frac{F_0}{A} \left( 1 - e^{-\frac{A}{m}t} \right)$  : cambio de escala en el eje vertical. Si sólo tomamos valores para  $t \geq 0$ , el gráfico de la velocidad versus  $t$  es:



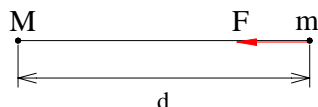
Cuando  $t$  es muy grande,  $v \rightarrow \frac{F_0}{A}$ , que es la velocidad límite o terminal, para la cual la aceleración es cero. En el modelo matemático, en rigor, la velocidad sólo se aproxima asintóticamente a la velocidad terminal y nunca llegaría a ella. El modelo es, sin embargo, sólo una idealización, y en la práctica la diferencia entre la velocidad real y la velocidad límite, se hace indetectable para una determinada precisión, al cabo de un cierto tiempo.

#### 4.6 TIPOS DE FUERZAS. RESUMEN

Las fuerzas comunes de la mecánica que hemos presentado son:

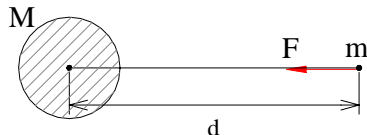
##### La fuerza de atracción gravitacional

En general, para dos masas puntuales (mostramos sólo la fuerza sobre  $m$ ):



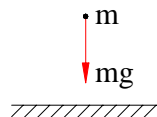
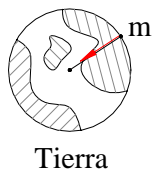
$$F = \frac{G M m}{d^2}$$

De una esfera (densidad con simetría esférica)

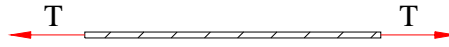
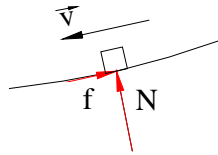
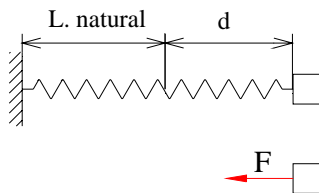


$$F = \frac{G M m}{d^2}$$

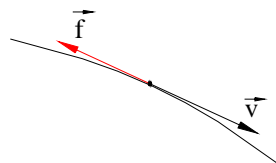
Caso particular: **El peso**





**Fuerzas de contacto:****La tensión en una cuerda:****Entre superficies de sólidos:**Normal  $N$ Fricción  $f$ Estática  $f_e \leq \mu_e N$ Dinámica  $f_d = \mu_d N$ **Fuerza elástica hecha por un resorte:**

$$F = k d$$

**Fuerza de fricción hecha por un fluido:**

$$f = A v + B v^2$$

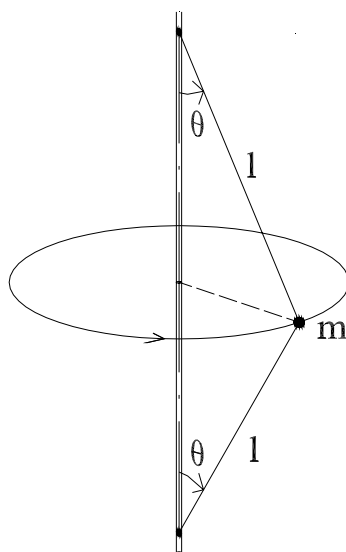
Otras fuerzas de contacto muy importantes son las que se presentan en una superficie que delimita una porción interior de un cuerpo, bien sea sólido o fluido. Estas fuerzas se estudian en la mecánica de los sólidos elásticos y de los fluidos.

**PROBLEMAS**

1. Un disco horizontal rota alrededor de su eje con una frecuencia de 1 Hz. Hallar la máxima distancia al centro del disco a la que puede colocarse un bloque para que no deslice respecto al disco, si el coeficiente estático de fricción entre el bloque y el disco es 0.5. Precise su marco inercial.

12 cm

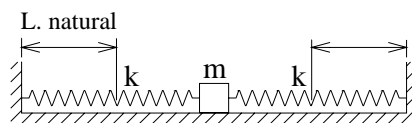
2. Una masa  $m$  gira en un círculo horizontal con velocidad angular constante  $\omega$ , sostenida de un eje vertical por dos cuerdas de igual longitud  $\ell$  y ángulos  $\theta$  con dicho eje. Hallar las tensiones en la cuerdas.



Chequeo: si  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \theta}}$ , la tensión en la cuerda inferior es nula.

3. Demuestre la igualdad de los períodos de dos péndulos cónicos de longitudes diferentes, pero suspendidos del mismo techo y tales que ambas masas están a la misma altura del piso.

4.

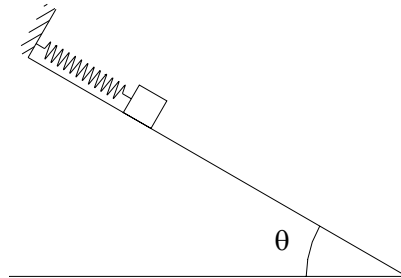


Un bloque se encuentra en una superficie horizontal sujeto a dos resortes iguales, como se muestra. El coeficiente estático de fricción entre el bloque y la superficie es  $\mu$ . Se

llama zona de detención a la región en la que el bloque puede permanecer en reposo en la superficie. Eligiendo un origen en el centro, determine la zona de detención

$$|x| \leq \frac{\mu mg}{2k}$$

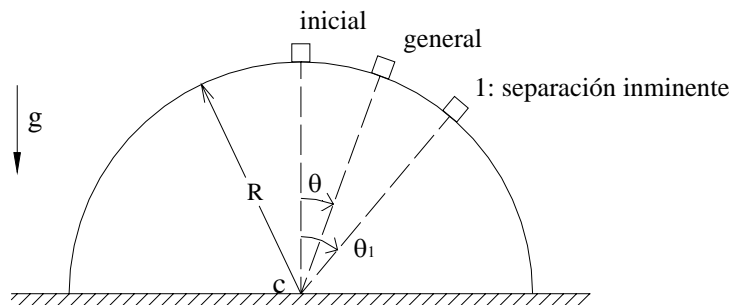
5.



Un resorte de constante  $k$  tiene un extremo fijo a la parte superior de un plano inclinado. Al otro extremo está sujeto un bloque de masa  $m$  que se suelta desde la longitud natural del resorte y baja deslizándose por el plano inclinado liso. Hallar la velocidad del bloque como función de la posición. ¿Cuál es la máxima deformación del resorte? ¿En qué posición adquiere el bloque su máxima velocidad?

$$\text{en } v_{\text{máxima}}, \text{ deformación} = \frac{mg \sin \theta}{k}$$

6.

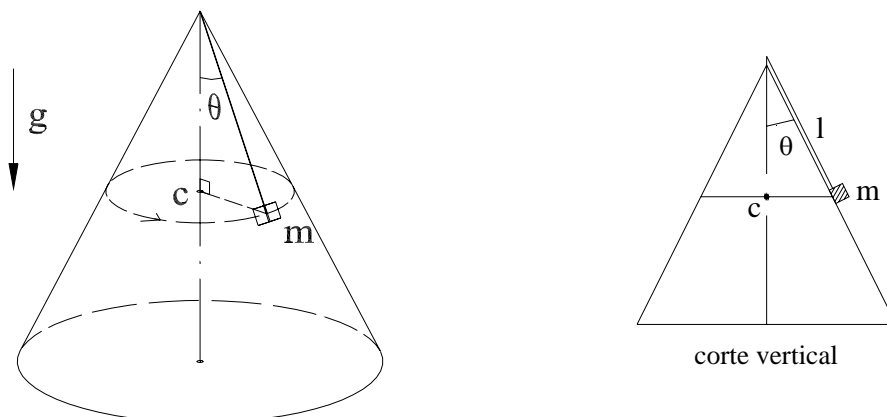


Un pequeño bloque se coloca sobre una superficie circular lisa de radio  $R$ . Podría ser bien una superficie esférica o cilíndrica, cuyo corte vertical es el círculo mostrado. Se le da al bloque una pequeñísima velocidad inicial en el punto más alto ( $v_0 \approx 0$ ), de modo que baja deslizándose por la superficie. Para la posición 1 en la que se despegue de la superficie, hallar el ángulo  $\theta_1$  y la velocidad  $v_1$ .

$$\cos \theta_1 = \frac{2}{3}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}$$

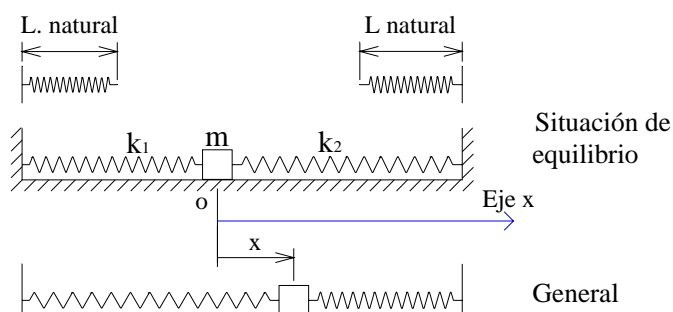
7.



Una partícula de masa  $m$  describe un círculo horizontal, apoyada en una superficie cónica lisa y sostenida por una cuerda de longitud  $\ell$ . Si la velocidad angular es  $\omega$ , hallar la tensión en la cuerda y la reacción de la superficie.

Chequeo: si  $\omega^2 = \frac{g}{\ell \cos \theta}$  el bloque pierde contacto con la superficie.

8.



Un bloque de masa  $m$  puede deslizarse sobre una superficie horizontal lisa, ligado a dos resortes como se muestra. Estudie la posición de equilibrio y muestre luego que la fuerza neta en situación general es una fuerza recuperadora dirigida hacia la posición de equilibrio y de magnitud  $k_1 x + k_2 x$ , es decir, como si el resorte (1) estuviese estirado  $x$ , y el resorte (2) estuviese comprimido  $x$ , desde la posición de equilibrio. Muestre que el movimiento de  $m$  es armónico simple y halle el período.

9. Hemos definido como peso la fuerza de atracción gravitacional hecha por la tierra sobre un cuerpo en su superficie. Llamemos peso aparente a la magnitud de la fuerza, hecha por ejemplo por una báscula de resortes, necesaria para mantener el cuerpo en reposo respecto a la superficie terrestre. Asumiendo una tierra completamente esférica y teniendo en cuenta su rotación, estudie un cuerpo en reposo sobre una báscula, tanto en

un polo como en el ecuador. Si la gravedad efectiva,  $g_{ef}$ , es tal que peso aparente es  $\text{masa} \times g_{ef}$ , halle la diferencia entre las gravedades efectivas en el polo y en el ecuador. Esta diferencia es sólo aproximada pues no tiene en cuenta el achatamiento de la tierra.

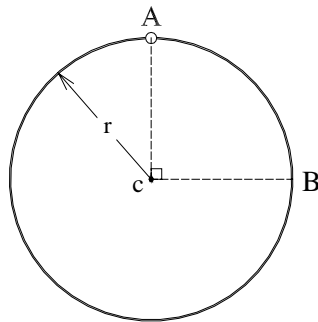
$$\Delta g_{ef} \approx 3.4 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

10. Un pequeño bote de masa  $m$  que viaja con velocidad  $v_o$  apaga su motor. Suponiendo que la resistencia de frenado es proporcional a la velocidad,  $|f| = A v$ , hallar la velocidad y la posición del bote en función del tiempo. Muestre que cuando el tiempo aumenta la velocidad tiende a cero y la distancia recorrida tiende a  $\frac{m v_o}{A}$ .

11. Un balde con agua gira en forma de péndulo cónico, suspendido del techo por una cuerda de 2 m cuyo ángulo con la vertical es de  $30^\circ$ . Si el balde está goteando, hallar el radio del círculo descrito por las gotas en el piso que está 4 m abajo del techo.

$$1.90 \text{ m}$$

12. Una pequeña cuenta o bolita perforada de masa  $m$  está ensartada en un alambre circular liso de radio  $r$  que se encuentra en un plano vertical.



Si la bolita se suelta desde la posición A, calcule la velocidad y la fuerza hecha por el alambre en la posición B.

$$v_B = \sqrt{2 g r}$$

$$F_B = 2 m g \text{ hacia el centro}$$

Calcule el tiempo que tarda la bolita en ir de A a B. La integral requiere un poco de cálculo. Cuando se intenta reemplazar el límite inicial, se obtiene un tiempo infinito (!). Esto se debe a que, en rigor matemático, si uno suelta la bolita en A con velocidad cero, allí permanecerá en la que se llama una posición de equilibrio inestable. Basta darle una pequeñísima velocidad para que se mueva.

## CAPÍTULO 5. TRABAJO Y ENERGÍA

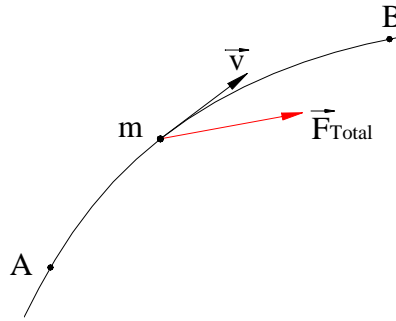
### 5.1 EL TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

La dinámica de una partícula, es decir, el estudio del movimiento de un cuerpo que puede ser considerado como un punto material, tiene como base la segunda ley de Newton,

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{F}^{\text{total}} = m \vec{a}}$$

según la cual, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a su masa por su aceleración, ley válida respecto a un marco inercial de referencia.

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria, desde una situación A hasta una situación B. En una situación la partícula tiene una posición y una velocidad determinadas.



En situación general, hemos representado la fuerza resultante o total,  $\vec{F}^{\text{total}}$ , y el vector velocidad. Vamos a hacer una elaboración matemática a partir de la segunda ley. Multipliquemos escalarmente por  $\vec{v}$  a ambos lados.

$$\vec{F}^{\text{total}} \cdot \vec{v} = m \vec{a} \cdot \vec{v}. \quad (1)$$

Transformemos un poco el término de la derecha:

$$m \vec{a} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right),$$

en donde la última igualdad se ve más fácilmente en sentido inverso. En efecto, derivando como un producto, con  $m$  constante,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{1}{2} m \left[ \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right] = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}.$$

Pero el producto escalar  $\vec{v} \cdot \vec{v}$  no es otra cosa que la magnitud de la velocidad al cuadrado,

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2.$$

Definamos **Energía cinética**,  $K$ , de una partícula, como

$$K = \frac{1}{2} m v^2.$$

El lado derecho de (1) es entonces simplemente

$$m \vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt},$$

Y podemos escribir (1) como

$$\vec{F}^{\text{total}} \cdot \vec{v} dt = dK,$$

que, teniendo en cuenta que  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  y por tanto  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , puede escribirse, integrando desde la situación A hasta la situación B, como

$$\int_A^B \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dK = K_B - K_A,$$

en donde  $K_B$  y  $K_A$  son las energías cinéticas evaluadas en las situaciones B y A,  $\frac{1}{2} m v_B^2$  y  $\frac{1}{2} m v_A^2$ , y la integral de la izquierda es por definición el **trabajo realizado por la fuerza total** a lo largo de la trayectoria, entre las situaciones A y B, que escribiremos como  $W_{A \rightarrow B}^{\text{total}}$ , y así

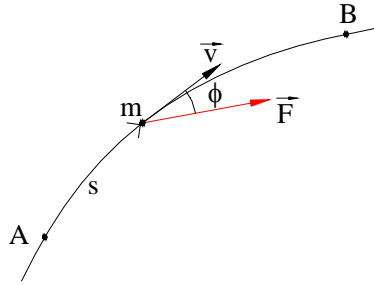
$$W_{A \rightarrow B}^{\text{total}} = K_B - K_A,$$

el trabajo realizado por la fuerza total o resultante es el cambio en la energía cinética de la partícula, resultado de gran importancia, conocido como principio o **Teorema del Trabajo y la Energía Cinética**, o simplemente teorema del Trabajo y la Energía, válido, como la segunda ley de la que proviene, respecto a un marco inercial de referencia.

El lado derecho, cambio en la energía cinética,  $\Delta K = K_B - K_A$ , no ofrece dificultad. Lo novedoso es el término de la izquierda, el concepto de trabajo. Antes de retornar al teorema del trabajo y la energía y a sus aplicaciones, vamos pues a estudiar el concepto de trabajo hecho por una fuerza.

## 5.2 TRABAJO HECHO POR UNA FUERZA

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria entre las situaciones A y B. Sea  $\vec{F}$  una fuerza que actúa sobre la partícula (no necesariamente la fuerza resultante o total, sino una de las fuerzas que actúan sobre ella). En una posición general,  $\phi$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{F}$ , fuerza, y  $\vec{v}$ , velocidad de la partícula. Tomemos la longitud de arco  $s$  medida por la curva desde A hasta la situación general.



De la cinemática sabemos que  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  y por tanto puede escribirse

$$d\vec{r} = \vec{v} dt.$$

Además, como  $v_t = \frac{ds}{dt}$ , siendo  $v_t > 0$  pues hemos elegido  $s$  en la dirección del movimiento de la partícula y por tanto la componente en dirección tangencial coincide con la magnitud de la velocidad,  $v$ ,

$$ds = v dt$$

Con estos preliminares sobre notación, vamos ahora a la definición de trabajo.

**El trabajo hecho por una fuerza**  $\vec{F}$ , que actúa sobre una partícula, a lo largo de una trayectoria, entre las situaciones A y B, se define como

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

que también puede escribirse como

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt,$$



o aún, ya que el producto escalar  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  es igual a  $F v \cos \phi$ , con  $F$  y  $v$  magnitudes de los vectores, y con  $ds = v dt$ , de esta otra forma,

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F ds \cos \phi .$$

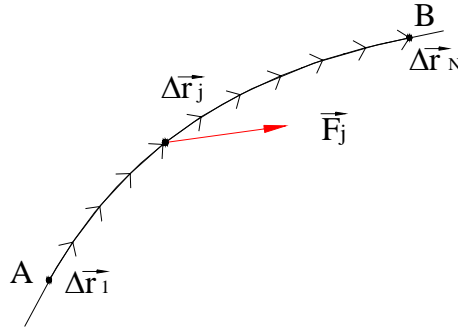
Las tres formas de expresar el trabajo hecho por una fuerza son importantes y útiles. Se llama **Potencia** al trabajo efectuado por una fuerza por unidad de tiempo. De la segunda expresión vemos que

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} .$$

Se le suele decir también: potencia instantánea desarrollada por la fuerza  $\vec{F}$ .

La integral  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$  se llama una integral de línea y puede definirse como un límite. El procedimiento generaliza el concepto de integral definida elemental  $\int_A^B F dx$ . Veamos:

Dividamos la trayectoria entre A y B en N partes y consideremos los pequeños desplazamientos  $\Delta \vec{r}_j$  entre puntos sucesivos, donde j es un índice que varía de 1 a N. Las longitudes de los pequeños  $\Delta \vec{r}_j$  no tienen que ser iguales. Consideremos ahora una función vectorial de la posición,  $\vec{F}(\vec{r})$ , que a cada punto del espacio dado por  $\vec{r}$  le asigna un vector  $\vec{F}$  (en nuestro caso, una fuerza), función que se llama campo vectorial.



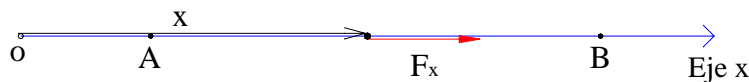
En un punto del tramo j evaluemos la función, que llamaremos  $\vec{F}_j$ . El límite de la suma

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j ,$$

cuando la longitud de cada segmento tiende a cero y el número de segmentos tiende a infinito, es la integral de línea.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

en la que hemos escrito A y B por sencillez, para significar las posiciones  $\vec{r}_A$  y  $\vec{r}_B$ . Si la trayectoria a lo largo de la cual se efectúa la integral de línea es simplemente el eje  $x$  y la fuerza, la función  $\vec{F}$ , sólo tiene componentes en dicho eje,  $F_x$ , tendremos  $\vec{F} = F_x \hat{i}$ ,  $d\vec{r} = dx \hat{i}$ ,



y la integral de línea es simplemente

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx$$

que es la integral definida más sencilla, bien conocida del cálculo elemental. Más aún, en este caso de un movimiento rectilíneo, la segunda ley de Newton es simplemente

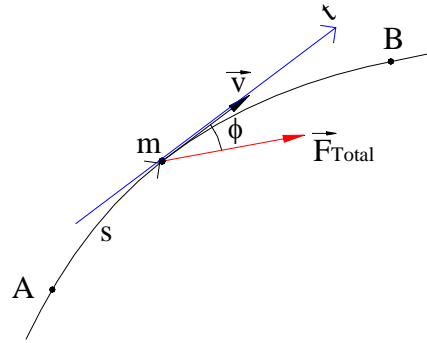
$$F_x^{\text{total}} = m a_x,$$

que, usando la regla de la cadena, podemos escribir, integrando,

$$\int_A^B F_x^{\text{total}} dx = \int_A^B m v_x dv_x = \left. \frac{1}{2} m v^2 \right|_A^B$$

que es de nuevo el teorema del trabajo y la energía para un movimiento rectilíneo, de modo que el estudio de movimientos que habíamos hecho en diversas ocasiones usando la regla de la cadena y en el que aparecía siempre el término  $\frac{v^2}{2}$ , tenía ya implícito el método del trabajo y la energía en problemas sencillos.

La integral de línea, integral de una función vectorial, o, como también se dice, de un campo vectorial, a lo largo de una curva, es de gran importancia en la física, en las matemáticas. En su estudio detallado hay resultados complejos, bellos, necesarios para una comprensión más avanzada de la mecánica e imprescindibles en la presentación del electromagnetismo. En nuestro estudio introductorio, no requerimos sin embargo el conocimiento detallado de la integral de línea. Mostraremos cómo, para las varias fuerzas que conocemos de la mecánica, podemos calcular con sencillez, apelando a las diversas formas alternativas, los trabajos efectuados. Pero antes de entrar en esa labor concreta, demos aún otra mirada al importante teorema del trabajo y la energía.



La componente tangencial de la segunda ley es

$$F_t^{\text{total}} = F^{\text{total}} \cos \phi = m a_t ,$$

que, usando la regla de la cadena en dirección tangencial,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} ,$$

e integrando, lleva a

$$\int_A^B F^{\text{total}} ds \cos \phi = \int_A^B m v dv ,$$

o sea, nuevamente al teorema del trabajo y la energía

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{total}} = K_B - K_A .$$

Hemos definido el trabajo hecho o realizado por una fuerza, pero en el teorema figura el trabajo total, que es el trabajo hecho por la fuerza total o resultante. Como la fuerza total es la suma vectorial de las diversas fuerzas  $\vec{F}_i$  actuantes sobre la partícula,

$$\vec{F}^{\text{total}} = \sum_i \vec{F}_i ,$$

y así

$$W^{\text{total}} = \int \vec{F}^{\text{total}} \cdot d\vec{r} = \int \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i W_i ,$$

y el trabajo total puede obtenerse también como la suma de los trabajos de las diversas fuerzas actuantes.

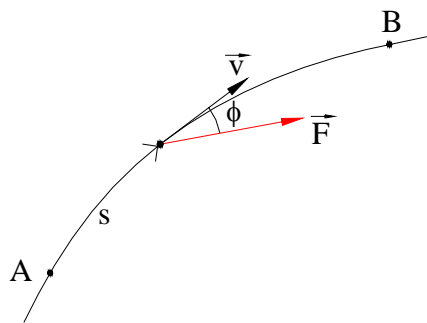
En el estudio que estamos haciendo del movimiento de un cuerpo, el concepto de energía cinética y los que introduciremos luego de energía potencial y energía mecánica, así como la ley de conservación de la energía, surgen como resultado de una elaboración de la segunda ley de Newton, que tomamos como punto de partida, como principio fundamental. No obstante,

es posible hacer la presentación de la mecánica partiendo, no ya de la fuerza y la ley de Newton, sino de la energía y de principios basados en ella. Más aún, el concepto de energía, uno de los más vastos e importantes de toda la física, de la ciencia, trasciende el ámbito de la mecánica clásica, tornándose mucho más importante que conceptos de aplicación y alcance más limitados como el de fuerza, y volviéndose imprescindible en la mecánica relativista, en la mecánica cuántica, en el electromagnetismo, en la termodinámica. La energía es pues un concepto polifacético, pero aquí nos centraremos en el estudio concreto y detallado de la energía mecánica, tanto cinética como potencial.

### Trabajo, energía, potencia: Dimensiones y unidades

Recordemos nuevamente las definiciones básicas

**Trabajo** realizado por una fuerza  $\vec{F}$ , a lo largo de una trayectoria, desde A hasta B :



$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_A^B F ds \cos \phi \end{aligned}$$

**Energía cinética** de una partícula:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 .$$

**Potencia** de una fuerza  $\vec{F}$ :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \phi .$$

Se dice también potencia efectuada o desarrollada por la fuerza  $\vec{F}$ , e incluso, potencia transmitida al cuerpo por esa fuerza, sobre todo en el caso en que  $P > 0$ .

El trabajo y la energía cinética tienen las mismas dimensiones,

$$[W] = [F] L = M L^2 T^{-2} = M [v^2] = [K] .$$

La unidad de trabajo y energía en el sistema internacional de unidades, SI, es el joule, cuyo símbolo es J. Los nombres de las unidades se escriben con minúscula aunque provengan, como en el caso del joule, de nombres propios. James Prescott Joule (1818–1889) fue un notable físico británico, estudioso de las energías mecánica y térmica. Algunos nombres de unidades se españolizan produciendo, como en este caso, el julio como nombre de la unidad de trabajo y energía.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}.$$

La potencia tiene dimensiones de trabajo por unidad de tiempo

$$[P] = \frac{[W]}{T} = M L^2 T^{-3},$$

y su unidad en SI es el vatio, del inglés watt, cuyo símbolo es W, unidad llamada así en honor del brillante ingeniero escocés James Watt (1736–1819), inventor de la máquina de vapor.

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}.$$

Son de uso frecuente otras unidades de energía, trabajo y potencia que mencionaremos brevemente. En el sistema de unidades c.g.s., la unidad de energía es el ergio, escrito erg, igual a 1 dina cm. Se usa a menudo, sobre todo en el caso de generación y consumo de energía eléctrica, el kilovatio hora como unidad de energía. Al ser el producto de una potencia por un tiempo es una unidad de energía o trabajo:

$$1 \text{ kilovatio hora} = 1 \text{ kW} \times \text{hora} \times \left( \frac{10^3 \text{ W}}{1 \text{ kW}} \right) \times \left( \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ hora}} \right) = 3.6 \times 10^6 \text{ J}.$$

En el sistema inglés, la unidad de potencia es el horse-power, hp, caballo de potencia, cuya equivalencia es  $1 \text{ hp} \approx 746 \text{ W}$ . En el estudio de las energías térmica y química se usa la caloría, llamada también caloría grande o kilocaloría, cuya equivalencia es  $1 \text{ Cal} = 4.2 \times 10^3 \text{ J}$ . En la física atómica y nuclear se usa el electrón-voltio, eV, cuya equivalencia es  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . Hay además, como lo estableció Einstein en la mecánica relativista, una equivalencia entre la masa y la energía, según la célebre expresión  $E = mc^2$ , de acuerdo a la cual 1 kg equivale a  $9 \times 10^{16} \text{ J}$ .

## 5.3 CÁLCULO DEL TRABAJO EFECTUADO POR DIVERSAS FUERZAS

### 5.3.1 Fuerza perpendicular a la trayectoria

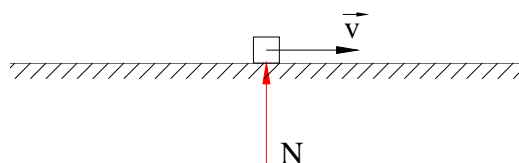
Con frecuencia una partícula se ve constreñida a moverse de una determinada manera. Por ejemplo, un plano inclinado obliga a un bloque a deslizar sobre él o una cuerda inextensible obliga a un péndulo a moverse en círculo. Con esas restricciones al movimiento están asociadas fuerzas, como la normal en el caso del plano inclinado o la tensión en el caso de la

cuerda, que son ortogonales a la trayectoria, a la velocidad del cuerpo, y así  $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$  y el trabajo efectuado por esas fuerzas es nulo.

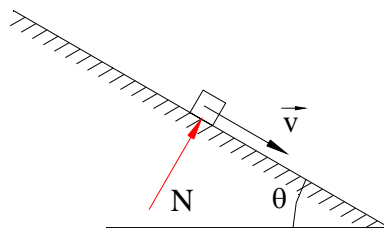
Veamos varios ejemplos concretos, en los cuales estamos interesados únicamente en el trabajo de una de las fuerzas que actúan sobre la partícula, de modo que los esquemas no son los diagramas de fuerzas, en los cuales deben figurar todas las fuerzas sobre la partícula. En los esquemas figura también el vector velocidad, denotado  $\vec{v}$ , a diferencia de la fuerza de la que sólo anotamos, como lo hacemos usualmente, la magnitud. Es importante no confundir en dichos esquemas la velocidad con una fuerza.

Consideremos un bloque que desliza sobre

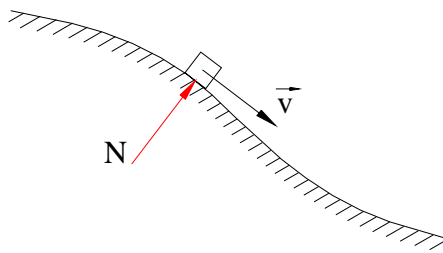
a) superficie horizontal



b) plano inclinado

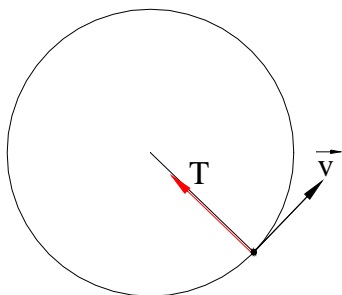


c) pista curva o tobogán en un plano vertical

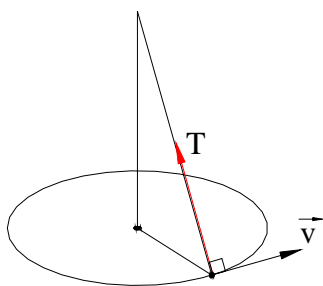


O bien, sea una partícula sujeta a una cuerda,

a) moviéndose en un círculo vertical



b) moviéndose en círculo horizontal como péndulo cónico



En los casos anteriores, para las diversas fuerzas mostradas,  $\vec{F} \perp \vec{v}$  y por tanto el trabajo es nulo:

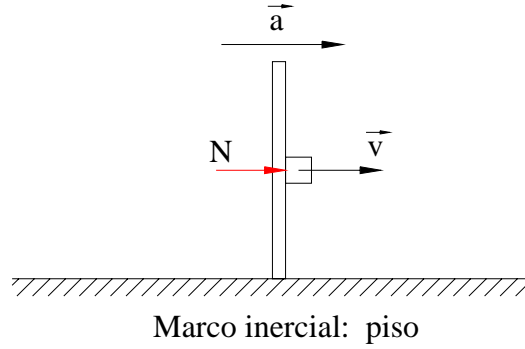
$$W^F = \int \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = \int F \, ds \, \cos \phi = 0 .$$

El ángulo  $\phi$  entre  $\vec{F}$  y  $\vec{v}$  vale  $\frac{\pi}{2}$  y  $\cos \phi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

Obtener las magnitudes de fuerzas como  $N$  ó  $T$  en algunos de los ejemplos anteriores puede ser, como ya vimos antes aplicando la segunda ley de Newton, relativamente complejo. Esas fuerzas, como su trabajo es nulo, no aparecen al aplicar el teorema del trabajo y la energía, como veremos luego con detalle. Esta es una de las razones por las cuales el método de trabajo y energía permite resolver con mayor sencillez muchos problemas, aunque en un comienzo esos conceptos parezcan muy abstractos. Lo son.

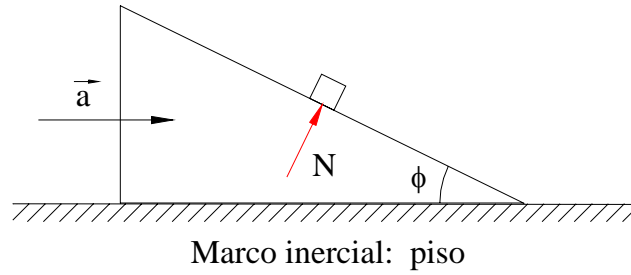
Aunque en varios casos mostramos que el trabajo de una fuerza como la normal a una superficie es nulo por ser perpendicular a la velocidad del cuerpo móvil, hay que ser cuidadoso y no perder nunca de vista que, para poder aplicar el teorema del trabajo y la energía la velocidad debe estar referida a un marco inercial. En los siguientes ejemplos la normal sí realiza trabajo:

- a) Una placa vertical se mueve aceleradamente empujando un bloque.



La normal  $N$  sobre el bloque, es paralela a  $\vec{v}$  y realiza trabajo.

- b) Una cuña se mueve aceleradamente respecto al marco inercial ligado al piso, mientras un bloque desliza hacia abajo por la cuña.



La normal  $N$  hecha sobre el bloque es perpendicular a la superficie de la cuña. Para saber si realiza o no trabajo debemos examinar la velocidad del bloque respecto al marco inercial en el piso. Del movimiento relativo, llamando B al bloque, C a la cuña y P al piso, tenemos

$$\vec{v}_{BP} = \vec{v}_{BC} + \vec{v}_{CP}.$$

En el sistema mecánico bloque, para calcular el trabajo hecho por  $N$ , requerimos el producto escalar  $\vec{N} \cdot \vec{v}_{BP}$ ,

$$W^N = \int \vec{N} \cdot \vec{v}_{BP} dt.$$

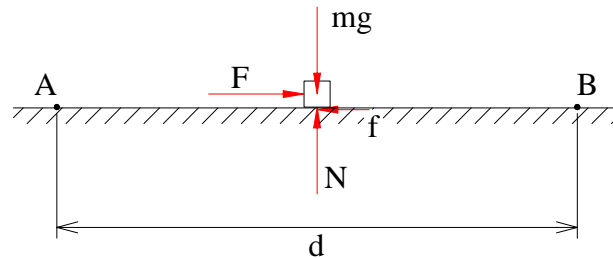
$$\text{Ahora, } \vec{N} \cdot \vec{v}_{BP} = \vec{N} \cdot (\vec{v}_{BC} + \vec{v}_{CP}) = \vec{N} \cdot \vec{v}_{BC} + \vec{N} \cdot \vec{v}_{CP}.$$

La velocidad del bloque respecto a la cuña es a lo largo de la cuña y por tanto ortogonal a  $\vec{N}$  y así,  $\vec{N} \cdot \vec{v}_{BC} = 0$ . Pero  $\vec{v}_{CP}$  es horizontal y así  $\vec{N} \cdot \vec{v}_{CP} \neq 0$  y existe un trabajo no nulo hecho por la normal  $N$  sobre el bloque.



### 5.3.2 Fuerza constante. Trayectoria rectilínea

Consideremos como ejemplo concreto un bloque que, empujado por una fuerza  $F$ , se mueve con velocidad constante sobre una superficie horizontal rugosa. El marco inercial es el piso y el sistema mecánico el bloque, cuyo diagrama de fuerzas en situación general es



El bloque se mueve desde A hasta B una distancia  $d$ . Como la velocidad es constante, la aceleración es cero,  $F$  es igual a la fricción dinámica  $f$  y ambas son constantes.

Calculemos el trabajo hecho por cada una de las fuerzas (indicaremos ocasionalmente como un superíndice la fuerza cuyo trabajo se calcula):

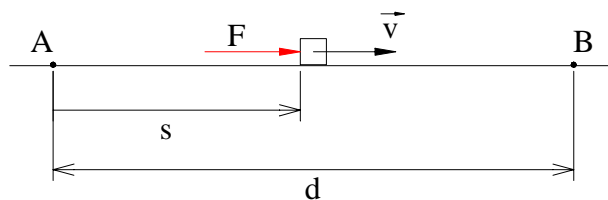
$W_{A \rightarrow B}^N = W_{A \rightarrow B}^{mg} = 0$  ya que las fuerzas son perpendiculares a la trayectoria y, como vimos,  $\vec{F}_{\text{uerza}} \cdot \vec{v} = 0$ , o bien  $\cos \phi = \frac{\pi}{2} = 0$ .

$W_{A \rightarrow B}^F$  :

Para calcular el trabajo hecho por una fuerza, requerimos: la fuerza, la trayectoria y las situaciones inicial y final. Las tres maneras de calcular el trabajo que vimos en la definición, son equivalentes, pero en estos casos sencillos probablemente lo más fácil es usar la expresión

$$\int_A^B F ds \cos \phi,$$

en la que  $F$  es la magnitud de la fuerza,  $\phi$  el ángulo entre fuerza y velocidad y  $ds$  el elemento de arco de la trayectoria, elegido en la dirección en que va la partícula, es decir, positivo en dirección de  $\vec{v}$ . Así, para calcular el trabajo de la fuerza constante  $F$  tenemos



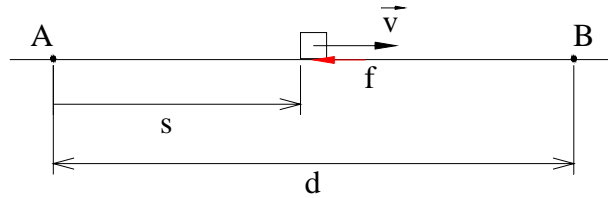
$$W_{A \rightarrow B}^F = \int_B^A F ds \cos 0 = F \int_0^d ds = F d.$$

Como  $F$  es constante, sale de la integral. Recuperamos aquí la noción más elemental de lo que es el trabajo hecho por una fuerza: el trabajo hecho por una fuerza constante  $F$  en la dirección

del movimiento es la fuerza por la distancia recorrida. Además, el trabajo es positivo, ya que fuerza y velocidad están en la misma dirección.

$$W_{A \rightarrow B}^f :$$

De manera análoga podemos calcular el trabajo hecho por la fuerza de fricción dinámica, constante,  $f = \mu N = \mu mg$ , ya que, como no hay movimiento en el eje vertical,  $N - mg = 0$ .



$$W_{A \rightarrow B}^f = \int_A^B f \, ds \cos \pi = \int_0^d (\mu mg) ds \times (-1) = -\mu mg d,$$

de nuevo fuerza por distancia, pero esta vez el trabajo es negativo ya que la fuerza y la velocidad tienen direcciones opuestas.

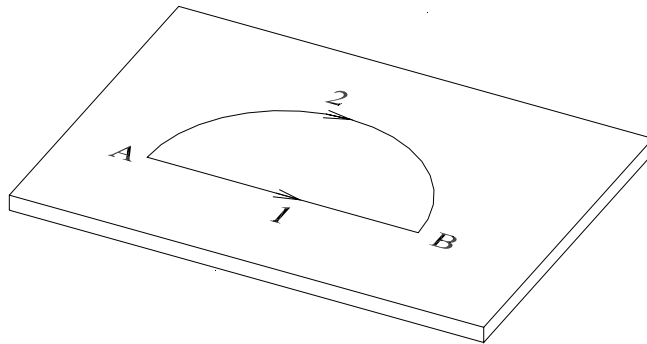
El teorema del trabajo y la energía en este caso establece que

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{total}} = (W^N + W^{mg} + W^F + W^f)_{A \rightarrow B} = K_B - K_A = 0,$$

como se comprueba inmediatamente, ya que  $v_A = v_B$ . Nótese que las fuerzas son vectores pero los trabajos son escalares y se suman todos como números con su signo.

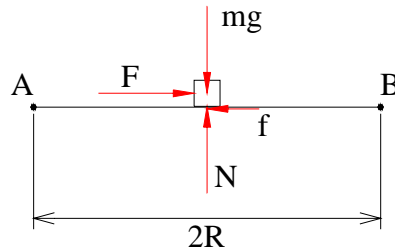
### 5.3.3 Trabajo de la fricción. Dependencia de la trayectoria

Un bloque se lleva, deslizando por una mesa horizontal rugosa, mediante una fuerza también horizontal que puede ser hecha digamos por la mano, desde una situación A hasta una situación B, por dos trayectorias diferentes: 1, por una línea recta y 2, por un semicírculo. Calculemos el trabajo de la fricción por ambas trayectorias, siendo R el radio del círculo.

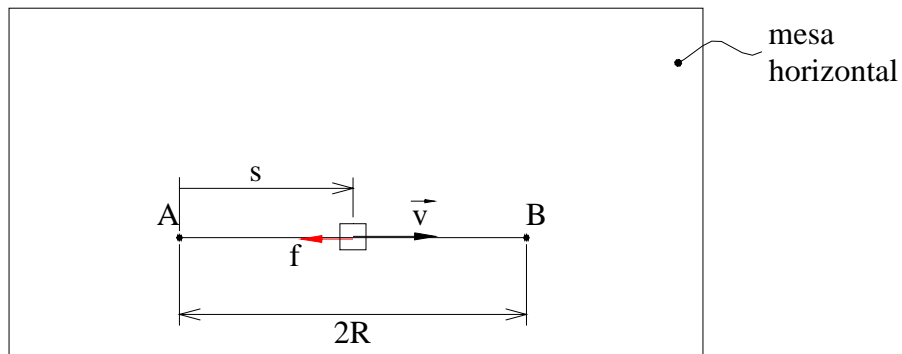


Trayectoria 1:

En un corte vertical, en posición general, el diagrama de fuerzas sobre el bloque es



Como no hay movimiento en dirección vertical,  $N = mg$  y la fuerza de fricción dinámica es  $f = \mu mg$ . En el plano horizontal visto desde arriba y mostrando sólo la fuerza de fricción cuyo trabajo queremos calcular:

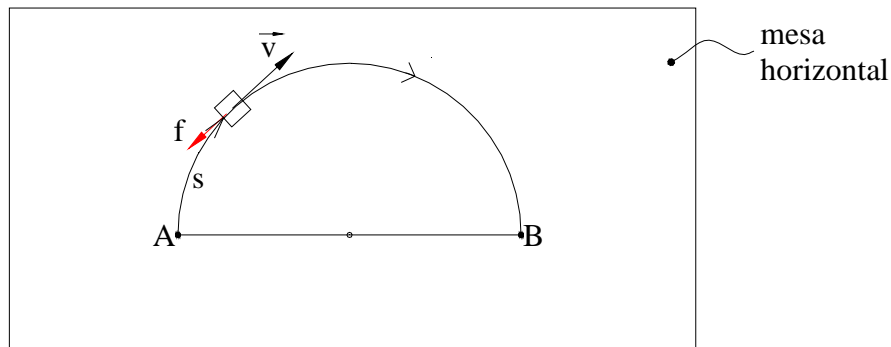


$$W_{A \rightarrow B}^f = \int_0^{2R} f \, ds \cos \pi = -\mu mg \times 2R$$

Trayectoria 1

Trayectoria 2:

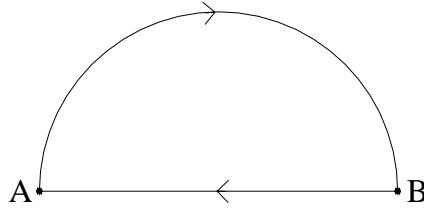
En el plano horizontal de la mesa, la fricción, opuesta a la velocidad, es



y por tanto,

$$W_{A \rightarrow B}^f = \int_0^{\pi R} f \, ds \cos \pi = -\mu m g \times \pi R \quad \text{Trayectoria 2}$$

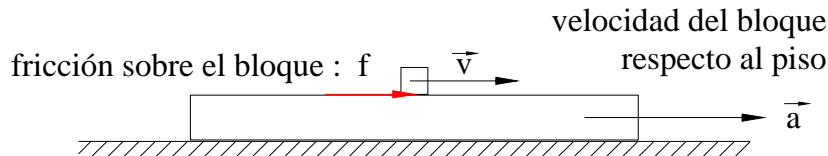
Vemos que el trabajo realizado por la fricción dinámica entre los mismos puntos inicial y final, A y B, pero por trayectorias diferentes, es diferente: ese trabajo de la fricción depende de la trayectoria.



Es más, si se va de A a B por el semicírculo y se retorna al punto inicial A por la recta, se muestra fácilmente que el trabajo efectuado por la fricción en esa trayectoria cerrada  $A \rightarrow B \rightarrow A$  es diferente de cero,

$$W_{A \rightarrow B \rightarrow A}^f = -\mu m g (2 + \pi) R .$$

Vamos a ver enseguida que hay unas fuerzas muy importantes, cuyo trabajo, a diferencia del de la fricción, es independiente de la trayectoria o, lo que es equivalente, en una trayectoria cerrada es siempre nulo. Pero antes de ello, anotemos que, si bien el trabajo de la fricción como fuerza opuesta al movimiento relativo respecto a un marco inercial es negativo, hay casos en los que la fricción tiene un papel activo en el movimiento y su trabajo puede ser positivo. Tal ocurre con el trabajo hecho por la fricción sobre un bloque que se encuentra sobre una plataforma, la cual se mueve con aceleración respecto al piso inercial.



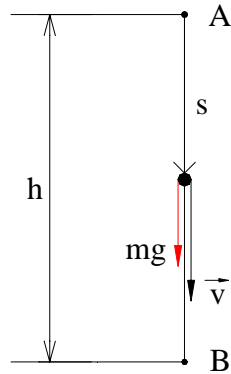
En este caso,  $W^f > 0$ , puesto que fuerza y velocidad respecto al marco inercial tienen la misma dirección.

### 5.3.4 Trabajo realizado por el peso de un cuerpo

Para afianzar el concepto de trabajo y su cálculo, consideremos un cuerpo, idealizado como una partícula de masa  $m$ , que se mueve desde una situación inicial A hasta una situación final B, por cuatro trayectorias diferentes: bajando verticalmente; subiendo verticalmente; bajando por un plano inclinado y bajando por una pista circular. El cuerpo puede estar sometido a la acción de otras fuerzas: la fricción, la normal, la fuerza hecha por una mano que lo lleva o por una cuerda, pero ahora estamos interesados únicamente en el trabajo realizado por el peso. Vamos a usar la expresión

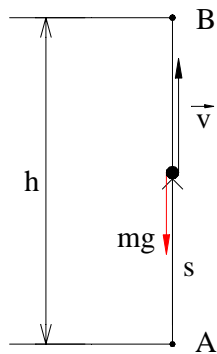
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B f \, ds \cos \phi ,$$

en la que, recordemos,  $F$  es la magnitud de la fuerza,  $mg$ ;  $s$  es la longitud de arco desde el punto inicial y en dirección del movimiento, y  $\phi$  el ángulo entre fuerza y velocidad. Indicamos lo esencial en los gráficos y dejamos ciertos detalles de cálculo al lector

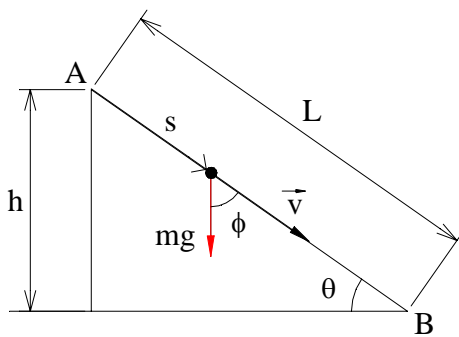


$$W_{A \rightarrow B}^{mg} =$$

$$\int_0^h mg \, ds \cos 0 = mg h$$

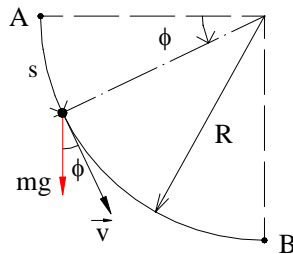


$$\int_0^h mg \, ds \cos \pi = -mg h$$



$$\int_0^L mg \, ds \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = mg L \sin \theta = mg h$$

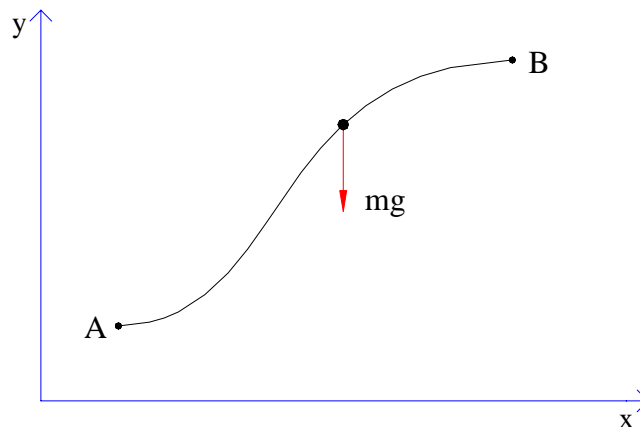
Notemos que, como el trabajo involucra el producto escalar  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ , fuerza por elemento de trayectoria, puede interpretarse, en este caso de fuerza constante, bien como la fuerza,  $mg$ , por la proyección de la trayectoria,  $h$ , o bien como la proyección de la fuerza,  $mg \sin \phi$ , por la trayectoria,  $L$ .



$$\int_0^{\pi/2} mg R d\phi \cos \phi = mg R \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi = mg R$$

Notemos que, en todos los casos, el trabajo del peso es igual a la fuerza,  $mg$ , por la proyección vertical de la trayectoria, trabajo positivo si el cuerpo baja, es decir si el ángulo  $\phi$  entre  $\vec{F}$  y  $\vec{v}$  es menor que  $\frac{\pi}{2}$ , y negativo si sube, es decir si  $\phi > \frac{\pi}{2}$ . Podemos hacer algo más general, calcular el trabajo hecho por el peso a lo largo de una trayectoria cualquiera.

Consideremos una trayectoria cualquiera en un plano vertical  $x, y$ , con el eje  $y$  positivo hacia arriba, entre los puntos A  $(x_A, y_A)$  y B  $(x_B, y_B)$ .



<sup>1</sup> En este caso es más conveniente usar la expresión

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Como  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j},$

Puede escribirse

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j}$$

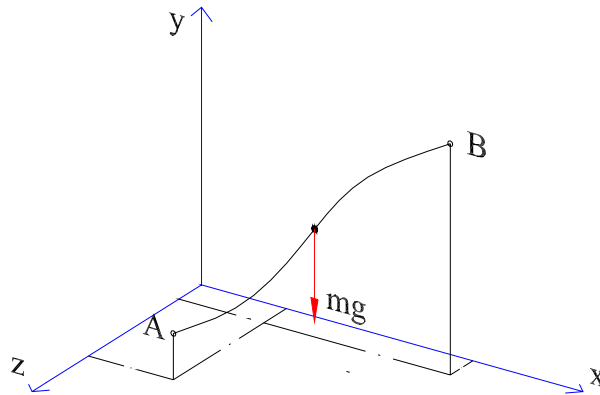
y, con  $\vec{F} = -mg \hat{j}$ ,  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg dy$ , y el trabajo es

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B mg dy = - [mg y_B - mg y_A],$$

que escribiremos así

$$W_{A \rightarrow B}^{mg} = -[(mg y)_B - (mg y)_A].$$

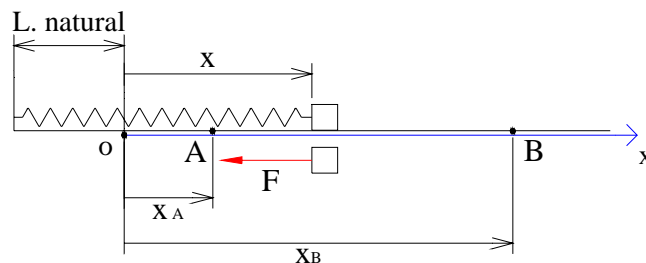
Esta expresión no sólo es válida para una trayectoria en un plano vertical, sino para una trayectoria espacial cualquiera. En efecto, si  $d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$ , el producto



escalar  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  sigue siendo  $-mg dy$ , y el cálculo de trabajo es el mismo.

### 5.3.5 Trabajo realizado por la fuerza elástica de un resorte

Consideremos un resorte con un extremo fijo y el otro sujeto a un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo, desde una situación inicial A hasta una situación final B. Sobre el cuerpo pueden estar actuando otras fuerzas como el peso, la normal y la fricción, la fuerza de otro agente externo que lo jala o empuja, como la mano, en fin, pero ahora estamos interesados únicamente en calcular el trabajo hecho por la fuerza elástica del resorte sobre el cuerpo.



Si elegimos un eje  $x$  con origen en la longitud natural del resorte, la fuerza es  $\vec{F} = -kx \hat{i}$ , ya que  $x$  es la deformación del resorte. Como  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i}$ ,  $d\vec{r} = dx \hat{i}$  y el trabajo hecho por el resorte es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_A^B kx \, dx = - \left[ \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2 \right],$$

trabajo hecho por la fuerza elástica, que escribiremos así

$$W_{A \rightarrow B}^e = - \left[ \left( \frac{1}{2} kx^2 \right)_B - \left( \frac{1}{2} kx^2 \right)_A \right].$$

## 5.4 ENERGÍA POTENCIAL

El peso, fuerza gravitacional constante, local, hecha por la tierra sobre un cuerpo cerca de su superficie, y la fuerza elástica hecha por un resorte sobre un cuerpo en movimiento rectilíneo, tienen en común el hecho de que el trabajo efectuado para ir de una posición inicial A a una posición final B depende únicamente de las posiciones A y B y no de la trayectoria por la cual se vaya de uno a otro punto. Vimos, en efecto, en el numeral anterior, que

$$W_{A \rightarrow B}^{mg} = - \left[ (mgy)_B - (mgy)_A \right]$$

$$W_{A \rightarrow B}^e = - \left[ \left( \frac{1}{2} kx^2 \right)_B - \left( \frac{1}{2} kx^2 \right)_A \right].$$

Esas dos fuerzas, peso y fuerza elástica, pertenecen a la importante clase de las fuerzas conservativas. En general una **fuerza conservativa** es una fuerza que sólo depende de la posición y cuyo trabajo efectuado desde una posición inicial cualquiera a una posición final cualquiera, es independiente de la trayectoria seguida. Si la fuerza es conservativa, existe una función de la posición,  $U$ , tal que

$$W_{A \rightarrow B}^F = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \left[ U_B - U_A \right] = - \Delta U.$$

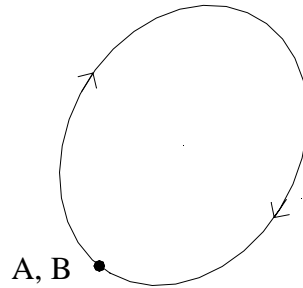
La función  $U$  se llama la **energía potencial** asociada con la fuerza conservativa  $\vec{F}$ , de modo que el trabajo hecho por una fuerza conservativa es el negativo del cambio en la energía potencial asociada. En rigor, la expresión anterior define el cambio de la función energía potencial más que la función propiamente dicha, que puede incluir una constante arbitraria. En efecto, si sumamos una constante  $C$  a la función  $U$ , el cambio en la nueva función  $U + C$ , y por tanto el trabajo hecho por la fuerza conservativa, permanece igual

$$W_{A \rightarrow B} = - \left[ (U + C)_B - (U + C)_A \right] = - \Delta U.$$



Usualmente se elige la constante arbitraria de modo que la energía potencial sea cero en una posición adecuada llamada **posición de referencia**.

Si las posiciones inicial y final coinciden, es decir, si la trayectoria es una curva cerrada,



el trabajo,  $-\left[U_A - U_A\right]$  es cero, y así

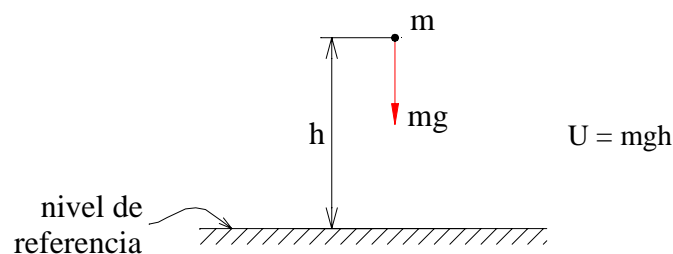
$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 ,$$

en donde ese símbolo integral indica que la trayectoria es una curva cerrada. Una fuerza conservativa puede ser definida de manera equivalente como una fuerza dependiente de la posición, cuyo trabajo en cualquier trayectoria cerrada es nulo.

Si comparamos la expresión para el cálculo del trabajo del peso con la definición de energía potencial, vemos que la energía potencial asociada con el peso, a veces llamada energía potencial gravitacional, es

$$U = mgy ,$$

con el eje  $y$  vertical, positivo hacia arriba. La energía potencial vale cero donde  $y = 0$ . Esta condición define un plano horizontal de referencia o **nivel de referencia** para la energía potencial asociada con el peso. Este nivel de referencia es bastante arbitrario y puede elegirse según la conveniencia en las aplicaciones concretas, como veremos. Llamando simplemente  $h$  a la altura sobre el nivel de referencia, tendremos

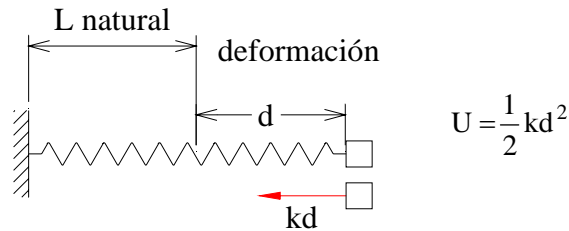


Por debajo del nivel de referencia la energía potencial es negativa.

La fuerza elástica es también, como el peso, una fuerza conservativa. Como puede verse de la expresión para el cálculo de su trabajo, la energía potencial asociada con la fuerza elástica, llamada energía potencial elástica es

$$U = \frac{1}{2} k x^2 ,$$

de modo que la posición de referencia, en la cual  $U = 0$ , corresponde a la posición  $x = 0$ , en la cual el resorte se encuentra en su longitud natural y no tiene ninguna deformación. Sea el resorte de tracción o de compresión, la energía potencial es siempre positiva puesto que  $x$  está al cuadrado. Llamando simplemente  $d$  a la deformación del resorte, sea alargamiento o compresión, tendremos



Una vez conocido el concepto de energía potencial, el cálculo del trabajo efectuado por una fuerza conservativa como el peso o la fuerza elástica es muy sencillo:

$$W_{A \rightarrow B} = -(U_B - U_A) = -\Delta U ,$$

y no es necesario retornar a la integral de línea en la definición de trabajo. Esa sencillez es una de las razones por las cuales el método del trabajo y la energía es útil y proporciona soluciones simples a múltiples problemas.

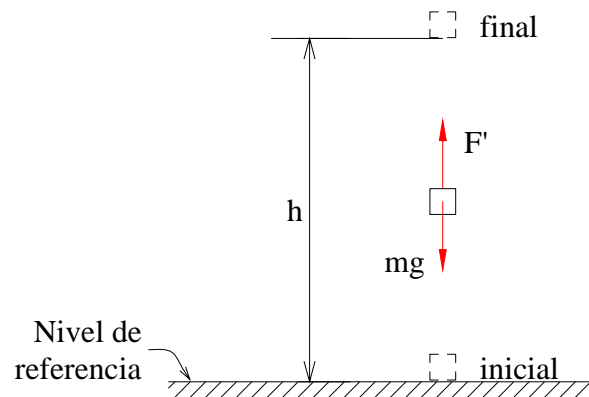
Si en la expresión anterior tomamos el punto inicial A como la posición de referencia, es decir  $U_A = 0$ ,

$$W_{\text{ref} \rightarrow B} = -U_B , \quad U_B = -W_{\text{ref} \rightarrow B} ,$$

y la energía potencial en un punto cualquiera B, es el negativo del trabajo realizado por la fuerza conservativa para ir allá desde la posición de referencia. Esto nos permite pensar en una interpretación importante, que esclarece el significado físico de la energía potencial. Consideremos un cuerpo sobre el que actúa una fuerza conservativa, en reposo en la posición de referencia. Mediante un agente externo, que ejerce una fuerza  $\vec{F}'$  contraria a la fuerza conservativa, llevemos el cuerpo lentamente, con una velocidad prácticamente constante, hasta detenerse en una posición B. En ese proceso, llamado cuasiestático, como prácticamente no hay aceleración, la fuerza del agente externo es  $\vec{F}' = -\vec{F}$  y entonces el trabajo del agente externo es:

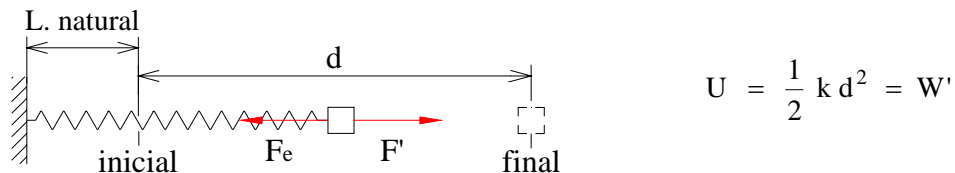
$$W'_{\text{ref} \rightarrow B} = -W_{\text{ref} \rightarrow B} = U_B ,$$

es decir, la energía potencial en una determinada posición es igual al trabajo hecho contra la fuerza conservativa para llevar el cuerpo hasta esa posición, partiendo de la posición de referencia. Para ser concretos, pensemos en un objeto que esté sobre una mesa en el nivel de referencia. Si subimos el objeto hasta un nivel  $h$ , mediante, digamos, la mano, si es pequeño, o mediante un cable jalado por un motor, en fin, la energía potencial que adquiere el cuerpo,  $mg h$ , es precisamente igual al trabajo cuasiestático hecho por la mano, o por el motor, contra el peso, para subir el cuerpo hasta ese nivel  $h$ .



Si allí se suspende la acción del agente externo, es decir se suelta el cuerpo, el peso comienza a realizar un trabajo positivo, la energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta correspondientemente, como veremos de modo cuantitativo en los ejemplos.

De manera análoga, la energía potencial elástica correspondiente a una determinada deformación  $d$  de un resorte, puede interpretarse como el trabajo que es necesario hacer contra el resorte para producir esa deformación.



Si se retira el agente externo, la fuerza elástica comienza a realizar trabajo, la energía potencial disminuye y la cinética aumenta.

Como vimos antes, el trabajo de la fuerza de fricción por deslizamiento cambia al variar la trayectoria entre los mismos puntos, o bien, en una trayectoria cerrada el trabajo es diferente de cero, de manera que la fricción no es una fuerza conservativa. La fricción es una fuerza que depende de la velocidad. En efecto, se opone siempre al vector velocidad y su trabajo en cualquier trayectoria es negativo. Se dice que es una fuerza no conservativa, más aún, es una fuerza disipativa, lo mismo que la fricción en fluidos. No existe por tanto una función energía potencial asociada con la fricción.

## 5.5 APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

El teorema del trabajo y la energía para un cuerpo, considerado como una partícula, establece que el trabajo total es el cambio en la energía cinética, relación válida respecto a un marco inercial de referencia.

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{total}} = K_B - K_A = \Delta K.$$

El trabajo total es, bien el trabajo de la fuerza total o resultante, o bien la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas actuantes. Es posible que algunas de las fuerzas no realicen trabajo, como vimos en el caso de fuerzas de constricción perpendiculares a la velocidad de la partícula respecto al marco inercial. De las fuerzas que sí realizan trabajo, consideremos, por una parte las conservativas, cuyo trabajo es  $W_{A \rightarrow B}^{\text{cons}}$ , y por otra parte, otras fuerzas, como la fricción disipativa, como la tensión en un cable que jala, en fin, la suma de cuyos trabajos llamaremos  $W_{A \rightarrow B}^{\text{otras}}$ . El teorema del trabajo y la energía queda entonces

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{cons}} + W_{A \rightarrow B}^{\text{otras}} = K_B - K_A,$$

que, como

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{cons}} = -(U_B - U_A),$$

puede escribirse

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{otras}} = (K_B + U_B) - (K_A + U_A),$$

El término  $K + U$ , suma de las energías cinética y potencial, se llama la energía mecánica total  $E$ , o, como se dice a menudo, la energía total de la partícula,

$$E = K + U.$$

Aparece aquí la razón del signo menos introducido en la definición de la energía potencial al plantear el trabajo de una fuerza conservativa: al pasar al término de la derecha, la energía potencial se suma con la cinética para obtener la energía mecánica total, en términos de la cual

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{otras}} = E_B - E_A.$$

Supongamos ahora que las fuerzas que realizan trabajo son todas conservativas. En ese caso

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{otras}} = 0 \text{ y por tanto}$$

$$E_A = E_B = E,$$

$$\text{con } E = K_A + U_A = K_B + U_B,$$

es decir, la energía mecánica total  $E$  se mantiene constante durante el movimiento de la partícula. Esta es la ley de la **conservación de la energía** en mecánica. Si las otras fuerzas

que realizan trabajo son fuerzas disipativas como la fricción, cuyo trabajo es negativo, tendremos

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{disip}} = E_B - E_A < 0$$

y así

$$E_B < E_A ,$$

es decir, la energía mecánica total disminuye, se disipa, y de allí el nombre de esas fuerzas. Pero, cuando hay trabajo de la fricción y la energía mecánica se pierde, se presenta otro fenómeno: los cuerpos en contacto se calientan, como sin duda todo el mundo ha constatado. Aunque desde el punto de vista de la mecánica macroscópica se pierde energía, es posible ampliar dicho concepto para incluir una energía interna, térmica, de modo que, más allá de la mecánica newtoniana, puede plantearse una ley de conservación de la energía más amplia, que incluye otras formas de energía.

### Problemas de dinámica de la partícula. Método del trabajo y la energía

Cuando va a estudiarse algún aspecto del movimiento de un cuerpo, idealizado como una partícula, mediante los conceptos de trabajo y energía, el primer paso fundamental es, por supuesto, definir o aislar el sistema mecánico, vale decir, determinar cuál es la partícula que va a estudiarse. Es muy importante además definir con precisión y graficar con claridad las situaciones inicial y final. Debe establecerse igualmente el marco inercial de referencia, aunque con mucha frecuencia es un marco localmente ligado a tierra.

Una vez realizado el diagrama de fuerzas, que debe hacerse como sabemos en una posición o situación general, es necesario hacer un análisis de las diversas fuerzas actuantes desde el punto de vista del trabajo que efectúan. En primer lugar, hay que determinar cuáles no realizan trabajo. Después, cuáles son conservativas: por ahora conocemos el peso y la fuerza elástica, pero luego veremos que la atracción gravitacional y en general las fuerzas centrales son también conservativas. Por último, debe determinarse si hay otras fuerzas que realizan trabajo, como pueden ser las fuerzas de fricción que en muchos casos son disipativas, pero también fuerzas como tensiones en cuerdas, en fin.

Hecho ese análisis, hay que aplicar el teorema del trabajo y la energía,

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{total}} = K_B - K_A .$$

Para las fuerzas conservativas el trabajo se calcula como

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{cons}} = -(U_B - U_A) ,$$

lo cual requiere definir la posición de referencia, que sabemos es la posición sin deformar para la fuerza elástica y un plano horizontal, llamado nivel de referencia, para el peso. Si hay varias fuerzas conservativas, sus trabajos se suman, lo que equivale a sumar, en una situación dada, sus energías potenciales asociadas. Si se quiere, el teorema del trabajo y la energía puede reformularse, como ya vimos, así

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{otras}} = (K + U)_B - (K + U)_A ,$$

y el trabajo de las otras fuerzas debe calcularse apelando a la definición de trabajo.

Si todas las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, hay conservación de la energía total  $E = K + U$  y lo más conveniente es usar directamente este principio

$$\boxed{(K + U)_A = (K + U)_B ,}$$

pero es necesario comprender bien que este principio se deriva del teorema más general del trabajo y la energía. Una manera alterna y compacta de mostrar cómo se obtiene es:

teorema del trabajo y la energía :

$$W^{\text{total}} = \Delta K ,$$

sólo hay trabajo de fuerzas conservativas :

$$W^{\text{total}} = W^{\text{cons}} = -\Delta U$$

y por tanto

$$-\Delta U = \Delta K ,$$

$$\Delta(K + U) = 0$$

conservación de la energía

$$E = K + U : \text{ constante.}$$

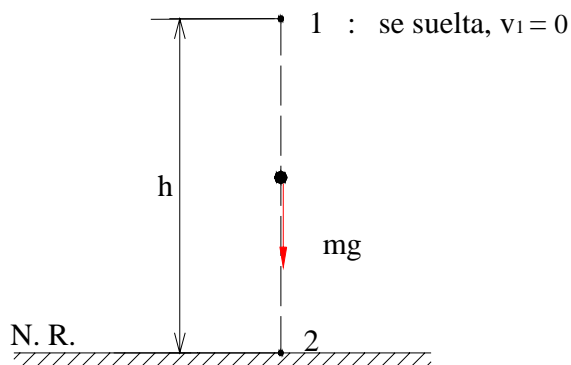
## EJEMPLOS Y EJERCICIOS

### 1. EJEMPLO

Se suelta un objeto desde una altura  $h$  sobre un piso horizontal, hallar su velocidad final.

Sea un marco inercial ligado a tierra. El sistema mecánico es el objeto, tratado como una partícula de masa  $m$ . Situación inicial, 1: el cuerpo se suelta,  $v_1 = 0$ . Situación final, 2 : un instante antes de tocar el piso. Es importante señalar que la situación final 2 es inmediatamente antes de que ocurra la colisión del cuerpo con el piso. Esta colisión es un problema diferente que estudiaremos luego. Las situaciones inicial y final, caracterizadas porque en cada una la partícula tiene una cierta posición y una cierta velocidad, también suelen llamarse A y B, o bien i y f.

Despreciando la resistencia del aire, el diagrama de fuerzas en posición general es



Como la única fuerza, el peso, es conservativa, se conserva la energía de la partícula. En todos los puntos de la trayectoria  $E = K + U$  es la misma.

Elijamos el piso como nivel de referencia (N. R.) para la energía potencial del peso. Entonces

$$E_1 = E_2$$

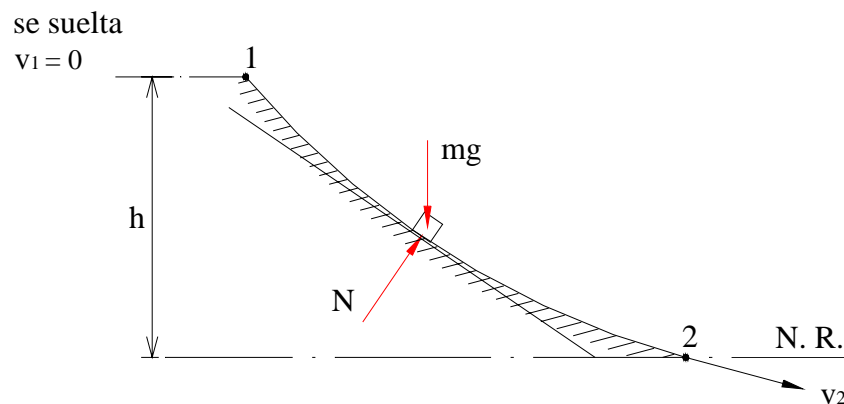
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + mg h = \frac{1}{2} m v_2^2 + 0,$$

con lo que

$$v_2 = \sqrt{2 g h},$$

resultado bien conocido, obtenido aquí de modo muy simple. Si en vez de un objeto cayendo libremente tenemos un bloque que baja deslizando por una pista o tobogán fijo, sin fricción, y el bloque se suelta desde un punto cuya altura es  $h$  respecto a la base del tobogán, que tomaremos como nivel de referencia, el diagrama será



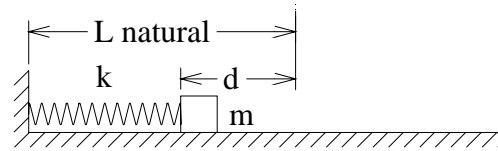
El trabajo de la normal es nulo por ser perpendicular a la velocidad respecto al tobogán, que está fijo en el marco inercial, y entonces hay de nuevo conservación de la energía, de planteamiento idéntico al del caso anterior y así

$$v_2 = \sqrt{2 g h},$$

sea cual sea la forma del tobogán liso. El método de energía, que sólo involucra la magnitud de la velocidad al cuadrado, no proporciona información sobre su dirección, que sabemos, por otra parte, que es tangente al tobogán.

Notemos que en este problema no ha sido necesaria la elección de unos ejes, elección que, en cambio, era tan importante al aplicar directamente la segunda ley de Newton.

## 2. EJEMPLO

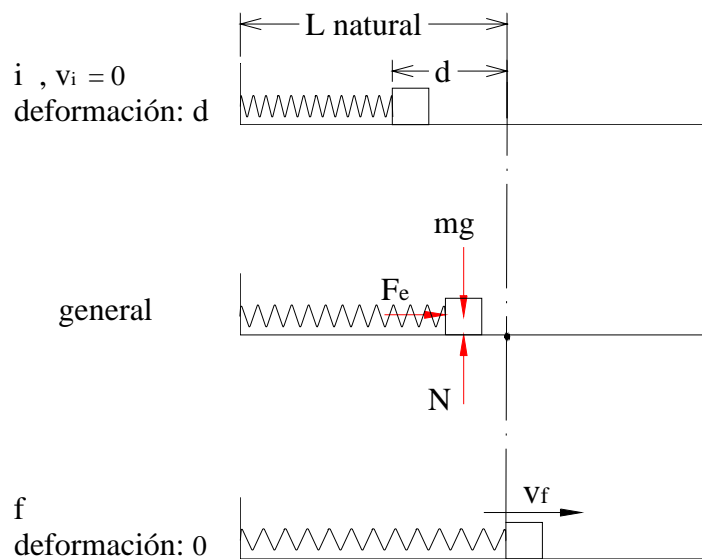


Con un bloque de masa  $m$  se da una compresión inicial  $d$  a un resorte y se suelta ¿con qué velocidad pasa por la longitud natural, si el bloque desliza por una mesa sin fricción?

Marco inercial: la mesa. Sistema: el bloque.

Situación inicial,  $i$  : se suelta el bloque,  $v_i = 0$ .

Situación final,  $f$  : pasa por la longitud natural.



Como  $N$  y el peso son perpendiculares a la trayectoria, a la velocidad,

$$W^N = 0$$

$$W^{mg} = 0.$$

En el caso del peso también puede afirmarse que el trabajo es nulo, puesto que el bloque está siempre al mismo nivel y no hay cambio en su energía potencial.

La única fuerza que hace trabajo es la elástica, conservativa, y por tanto hay conservación de la energía.



$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0,$$

por tanto

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}} d.$$

El resorte ideal cesa su acción en la longitud natural y el bloque, que está simplemente apoyado en el resorte, continúa su movimiento con velocidad constante por la mesa lisa.

Obsérvese de nuevo que no hemos requerido aquí aquella elección detallada de un origen y unos ejes, que resultaba indispensable al aplicar la segunda ley.

### 3. EJERCICIO

El problema anterior, con coeficiente de fricción dinámica  $\mu$  entre el bloque y la mesa.

El teorema del trabajo y la energía queda

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{fricc}} + W_{i \rightarrow f}^e = W_{i \rightarrow f}^{\text{fricc}} - (U_f - U_i) = K_f - K_i,$$

$$W_{i \rightarrow f}^{\text{fricc}} = (K + U)_f - (K + U)_i$$

El trabajo de la fricción, fuerza constante, se calcula fácilmente y así

$$v_f = \left( \frac{k}{m} d^2 - 2 \mu g d \right)^{1/2}.$$

### 4. EJERCICIO

Se lanza un bloque con velocidad  $v_o$  por una mesa horizontal rugosa. El coeficiente dinámico de fricción es  $\mu$ . Usando el método de trabajo y energía, hallar a que distancia  $d$  se detiene.

El teorema del trabajo y la energía queda

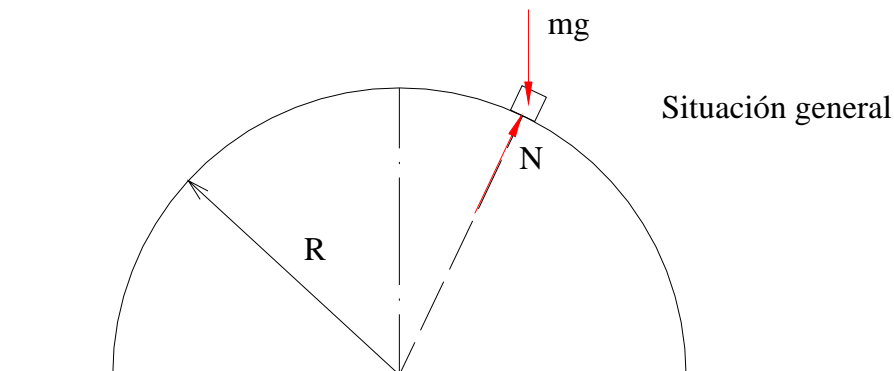
$$W^{\text{fricc}} = K_{\text{final}} - K_{\text{inicial}}$$

y entonces

$$d = \frac{v_o^2}{2 \mu g}.$$

## 5. EJEMPLO

Resolvamos un problema, ya propuesto para ser estudiado mediante la componente tangencial de la segunda ley, para ver la simplificación que aporta el método de la energía.

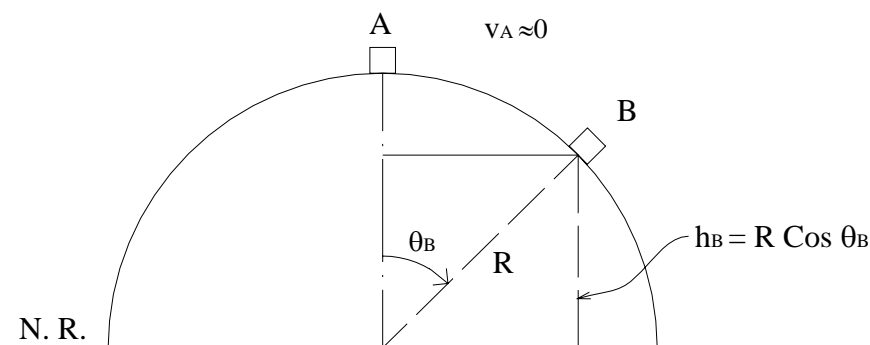


En qué posición y con cuál velocidad se despega un bloque de una superficie semicircular lisa, si en el punto más alto se le da una pequeñísima velocidad.

El círculo es parte del marco inercial ligado a tierra. El sistema mecánico es el bloque. La situación inicial, A, arriba,  $v_A \approx 0$ . Lo de pequeñísima velocidad es para evitar un equilibrio, inestable, puramente matemático, en el punto más alto. La situación final, B, en el momento en que se despega. El trabajo de la normal es nulo ya que N es perpendicular a la trayectoria y mg es conservativa y por tanto se conserva la energía mecánica total del bloque durante el descenso.

$$E = K_A + U_A = K_B + U_B.$$

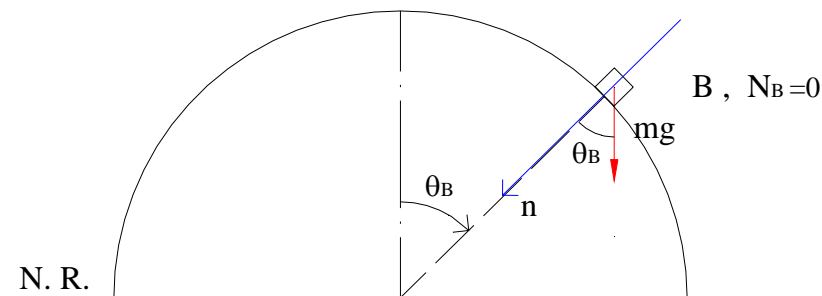
El nivel de referencia para la energía potencial asociada con el peso, es decir donde  $U = 0$ , es, como ya vimos, arbitrario. En este problema concreto una elección conveniente es en la base del semicírculo.



La conservación de la energía queda

$$0 + m g R = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g R \cos \theta_B. \quad (1)$$

En esta ecuación hay dos incógnitas,  $v_B$  y  $\theta_B$ . La otra ecuación necesaria la proporciona el hecho de que la normal en el punto de despegue B se anula,  $N_B = 0$ . Haciendo el diagrama de fuerzas en la situación particular B y tomando la componente normal  $n$  de la segunda ley:



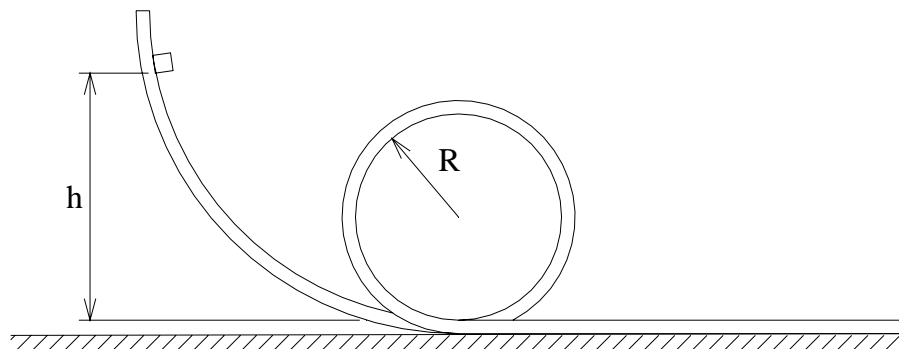
En B,  $\sum F_n = m a_n$  :  $m g \cos \theta_B = \frac{m v_B^2}{R}$ . (2)

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene entonces

$$\cos \theta_B = \frac{2}{3}, \quad \theta_B = \arccos \frac{2}{3} \approx 48^\circ,$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{3} g R}.$$

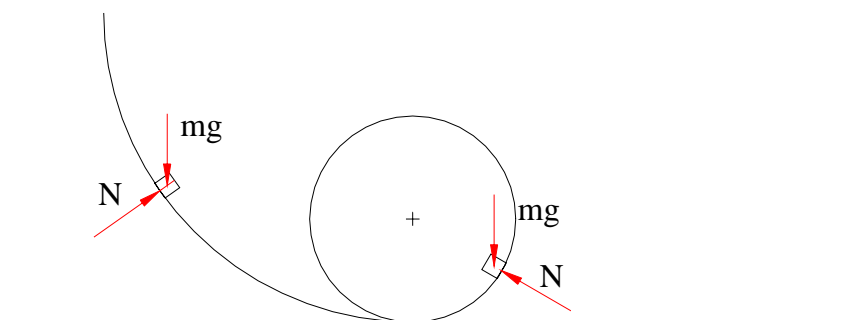
## 6. EJEMPLO



Una pista lisa tiene un rizo vertical, es decir la pista forma un círculo como se muestra en la figura, de modo que en la parte inferior se traslapan los tramos de ascenso y descenso.

Hallar la mínima altura  $h$  desde la cuál debe soltarse un bloque para que describa el rizo completo, es decir para que recorra todo el tramo circular en contacto con la pista.

El marco inercial es el rizo, el sistema mecánico es el bloque. En una posición general, tanto en el primer tramo de descenso como en el círculo, sólo actúan la normal, que no hace trabajo por ser perpendicular a la trayectoria, y el peso, que es una fuerza conservativa. Hay por tanto conservación de la energía a lo largo de todo el recorrido.

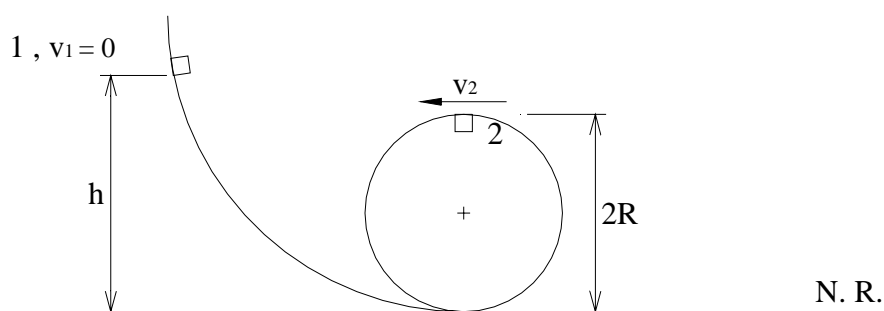


La normal de contacto hecha por la pista sobre el bloque en el tramo circular, siempre hacia el centro, va disminuyendo a medida que se sube, como ya estudiamos. De modo que el contacto más débil, la menor  $N$ , al describir el círculo completo, se presenta en el punto más alto. Al descender deslizando por el círculo,  $N$  aumenta gradualmente. Así, para garantizar que el bloque da toda la vuelta en contacto con la pista, basta garantizar que hay contacto en el punto más alto.

Sean entonces:

Situación 1 : se suelta el bloque,

Situación 2 : punto más alto del círculo.



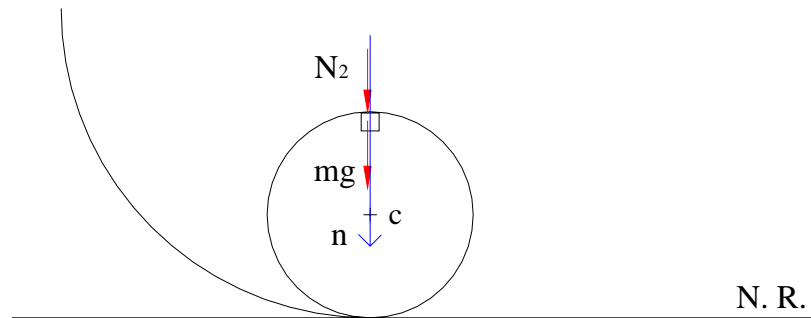
Tomando el nivel de referencia en la parte baja del círculo, la conservación de la energía entre 1 y 2 queda

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 ,$$

$$0 + mg h = \frac{1}{2} m v_2^2 + mg (2 R) ,$$

con lo que  $v_2^2 = 2 g h - 4 g R$ . (1)

Estudiemos ahora la componente normal de la segunda ley de Newton en el punto crucial 2,



$$\sum F_n = m a_n : \quad N_2 + m g = \frac{m v_2^2}{R}$$

Para garantizar el contacto allí,  $N_2 \geq 0$  ,

$$N_2 = m \left( \frac{v_2^2}{R} - g \right) \geq 0 ,$$

$$v_2^2 \geq g R .$$

La mínima velocidad, velocidad crítica,  $\sqrt{g R}$  , corresponde al caso límite  $N_2 = 0$  .  
Teniendo en cuenta (1),

$$v_2^2 = 2 g h - 4 g R \geq g R ,$$

$$h \geq \frac{5}{2} R ,$$

para que haya contacto en todo el rizo y por tanto

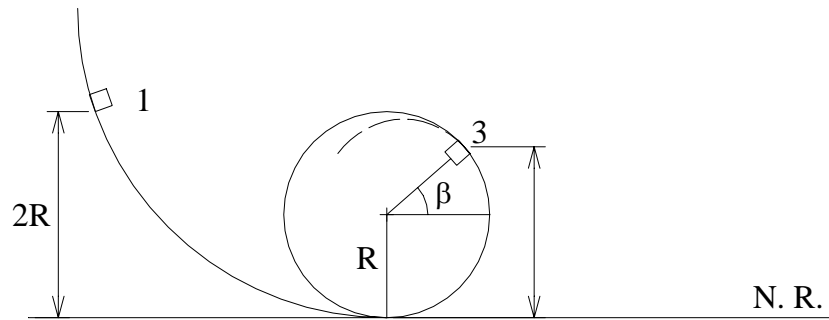
$$h_{\text{mínima}} = \frac{5}{2} R .$$

## 7. EJERCICIO

- a) En el problema anterior, si el bloque resuelta desde  $h = 3 R$  , hallar la fuerza de contacto en el punto más alto del círculo.

mg

b)



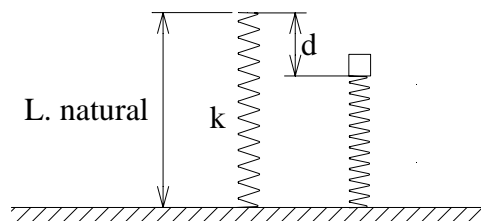
Si el bloque se suelta desde  $h = 2R$ , ¿en qué punto pierde contacto con la pista y qué velocidad lleva?

**Sugerencia:** Conservación de energía entre 1 y 3, punto de despegue. Componente normal de la segunda ley en 3, con  $N_3 = 0$ . Dos ecuaciones con dos incógnitas. Después de perder contacto, el bloque sigue con movimiento parabólico.

$$\sin \beta = \frac{2}{3} ,$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{3} g R} .$$

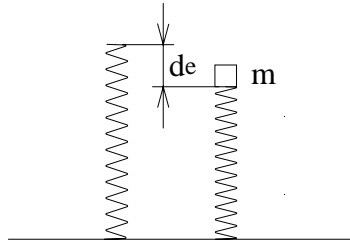
## 8. EJEMPLO



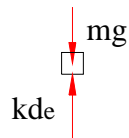
Sobre un resorte de compresión, vertical, se coloca un bloque, sin engancharlo. Se da una compresión inicial  $d$  y se suelta el bloque. ¿Hasta qué altura sube?

Demos primero un vistazo cualitativo al problema. Si la deformación inicial es pequeña, el bloque no alcanza a rebasar la longitud natural y se queda oscilando con movimiento armónico simple, de modo completamente análogo al bloque colgado de un resorte de tracción que estudiamos en las leyes de Newton. Si la deformación inicial es grande, el bloque llegará a la longitud natural del resorte con una cierta velocidad y seguirá hacia arriba, ya sin contacto con el resorte. Para evitar, en la práctica, el pandeo de un resorte de compresión es necesaria una guía, que puede ser, por ejemplo, un cilindro liso.

Calculemos en primer lugar una deformación crucial, la deformación de equilibrio  $d_e$ . El marco inercial, por supuesto, es el piso.



En equilibrio, el sistema bloque queda

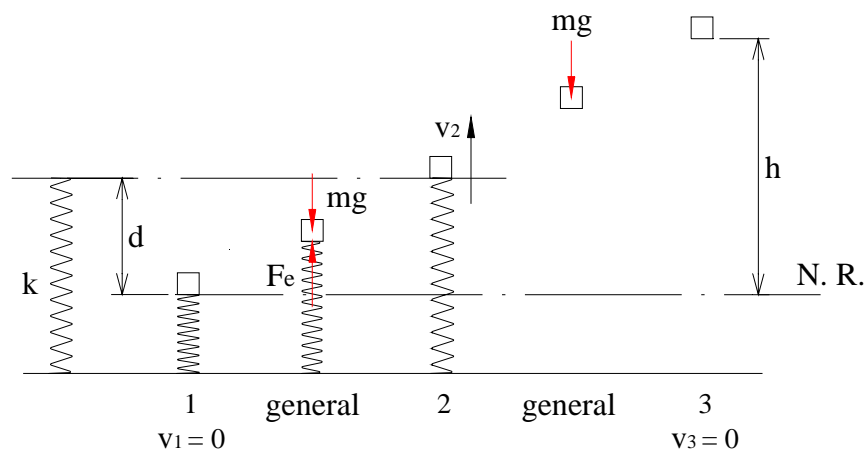


$$m g = k d_e, \quad d_e = \frac{m g}{k}.$$

Si  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ ,  $k = 25 \text{ N/m}$ ,

$$d_e = 0.04 \text{ m} = 4 \text{ cm}.$$

Llamemos situación 1 a la posición en que se suelta el bloque,  $v_1 = 0$ . Supongamos que el bloque pasa por la longitud natural y llamemos 2 a esa situación



Como las únicas fuerzas sobre el bloque son el peso y la fuerza elástica y ambas son conservativas, se conserva la energía mecánica total del bloque. Partamos de nuevo del teorema del trabajo y la energía para afianzar las ideas.

$$W^{\text{total}} = W^e + W^{\text{mg}} = \Delta K,$$

$$- \Delta U^e - \Delta U^{\text{mg}} = \Delta K,$$

$$\Delta (K + U^{\text{mg}} + U^e) = 0,$$

conservación de energía:  $K + U^{\text{mg}} + U^e = E$ : constante,

Tomando el nivel de referencia para la energía potencial gravitacional en la situación 1, tenemos

$$K_1 + U_1^{\text{mg}} + U_1^e = K_2 + U_2^{\text{mg}} + U_2^e$$

$$0 + 0 + \frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g d + 0,$$

y por tanto 
$$v_2 = \sqrt{d \left( \frac{k d}{m} - 2 g \right)}.$$

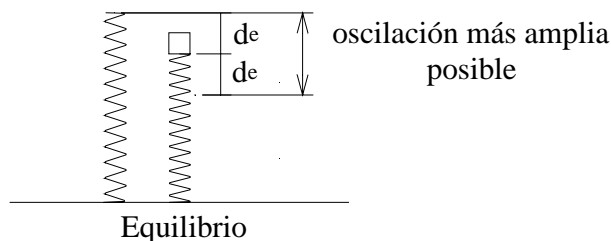
Para que exista esa velocidad  $v_2$ , es decir para que el bloque llegue efectivamente a esa posición, se requiere que

$$\frac{k d}{m} - 2 g \geq 0,$$

o sea 
$$d \geq 2 \frac{m g}{k},$$

$$d \geq 2 d_e.$$

Resultado lógico. En efecto, la masa efectúa un movimiento armónico simple, simétrico respecto a la posición de equilibrio,



de modo que la oscilación más amplia posible para que el bloque, no enganchado, no pierda contacto con el resorte, corresponde a una deformación inicial



$$2d_e = 0.08 \text{ m} = 8 \text{ cm}, \text{ en cuyo caso } v_2 = 0.$$

Si  $d > 2d_e$ , el bloque subirá hasta una posición 3,  $v_3 = 0$ . De 2 a 3 hay también conservación de energía.

$$E_2 = E_3,$$

pero ya no hay energía elástica. Si mantenemos el mismo nivel de referencia para estudiar el movimiento de 1 a 2 y de 2 a 3, entonces

$$E_1 = E_2 = E_3,$$

y así  $K_1 + U_1^{mg} + U_1^e = K_3 + U_3^{mg},$

$$\frac{1}{2} k d^2 = mg h,$$

$$h = \frac{k d^2}{2 mg}.$$

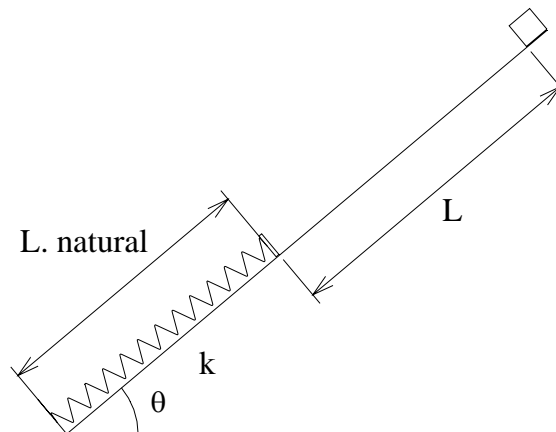
Si, por ejemplo,  $d = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm},$

$$h = 0.125 \text{ m} = 12.5 \text{ cm}.$$

Se deja al lector el cálculo de la máxima altura alcanzada desde el punto de máxima compresión, si  $d = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}.$

$$h = 4 \text{ cm}$$

## 9. EJERCICIO



Un bloque se suelta desde la posición mostrada. Baja deslizando y comprime el resorte. Hallar la máxima compresión, en primer lugar si el plano inclinado es liso y luego si es rugoso.

$$m = 0.1 \text{ kg}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad L = 0.5 \text{ m}, \quad \theta = 45^\circ, \quad k = 20 \text{ N/m}, \quad \mu = 0.5$$

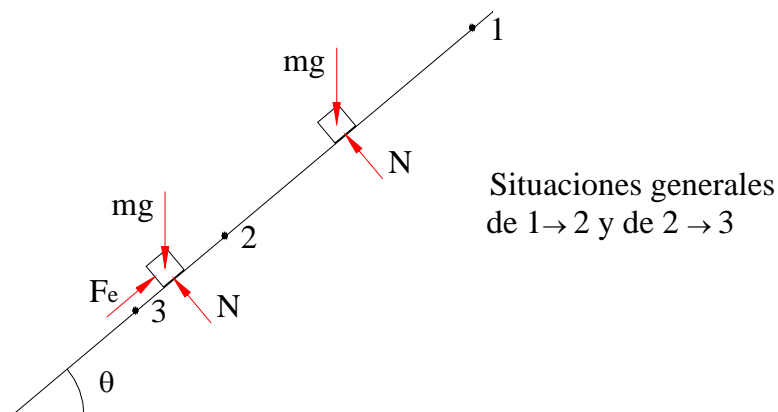
Marco inercial : el plano inclinado, ligado a tierra.

Sistema mecánico : el bloque

Situación 1 : se suelta,

Situación 2 : toca el resorte,

Situación 3 : máxima deformación.

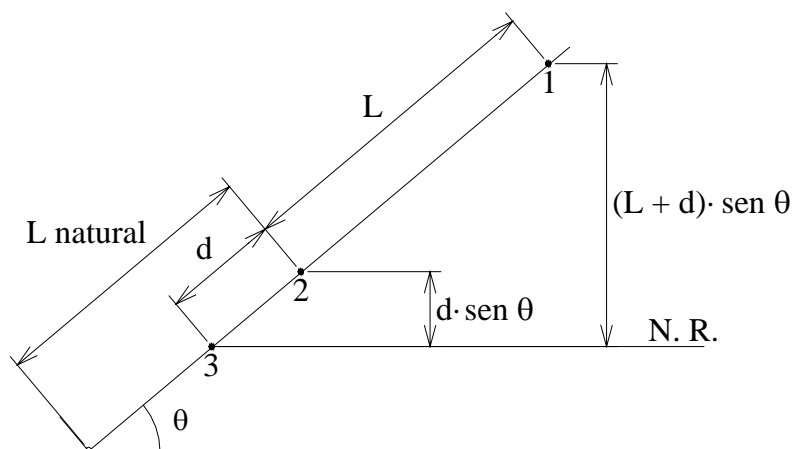


Si el plano inclinado es liso: De  $1 \rightarrow 2$  actúan normal y peso

De  $2 \rightarrow 3$  actúan normal, peso y fuerza elástica.

$$W^N = 0 \quad (\text{perpendicular a la trayectoria}),$$

$mg$  y  $F_e$ , conservativas. Hay conservación de energía en todo el trayecto de  $1 \rightarrow 2$  no hay energía potencial elástica. Nivel de referencia en 3.



$$E_1 = E_3$$

$$mg (L + d) \sin \theta = \frac{1}{2} k d^2.$$

En este punto, lo más conveniente es reemplazar los valores numéricos, en unidades SI y resolver la cuadrática numéricamente,

$$10 d^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} d - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0, \quad d = 0.23 \text{ m}.$$

Si hay fricción dinámica, con coeficiente dinámico  $\mu$ , hay que añadirla en los diagramas,

$$f = \mu N,$$

y, por la segunda ley, como no hay movimiento en dirección perpendicular al plano inclinado,  $N = mg \cos \theta$  y así

$$f = \mu mg \cos \theta,$$

fuerza constante cuyo trabajo es fácil de calcular. El teorema del trabajo y la energía puede plantearse en una de sus formas alternas como

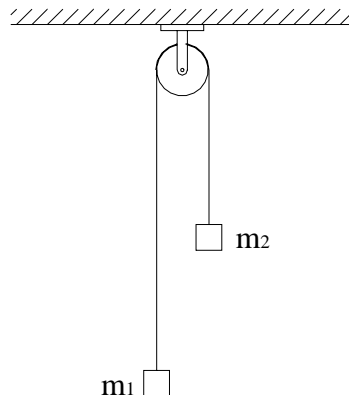
$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 3}^f &= E_3 - E_1 \\ - (\mu mg \cos \theta) (L + d) &= \frac{1}{2} k d^2 - mg (L + d) \sin \theta. \end{aligned}$$

Numéricamente:

$$10 d^2 - 0.353 d - 0.176 = 0, \quad d = 0.15 \text{ m}.$$

## 10. EJEMPLO

Máquina de Atwood con polea ideal.



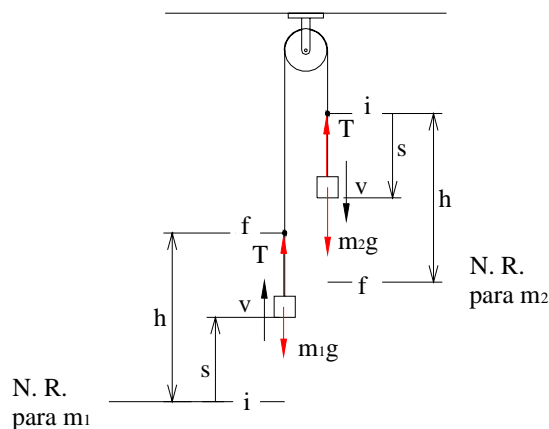
Si las masas se sueltan desde una situación inicial  $i$ , calcular sus velocidades en la situación  $f$ , cuando se han desplazado  $h$  cada una.

Vamos a plantear este problema, ya resuelto por la segunda ley de Newton, aplicando el método de trabajo y energía para una partícula.

Marco inercial: el techo, ligado a tierra. Dos sistemas mecánicos : un sistema es la masa  $m_1$ ; otro sistema es la masa  $m_2$ .

Aquí es importante ser muy preciso: no se trata de un solo sistema con dos partículas sino de dos sistemas mecánicos diferentes. Más adelante aprenderemos a estudiar el problema usando como modelo un sistema de dos partículas. Incluso, si la polea tiene masa y no es ideal, un buen modelo será luego el de un sistema de 3 partes; dos partículas y un cuerpo rígido.

Supongamos una dirección de movimiento:  $m_1$  sube y  $m_2$  baja. Sabemos ya, debido a la cuerda inextensible, que los desplazamientos,  $\Delta s$ , y las velocidades,  $v$ , son iguales. Además, por ser la polea ideal, las tensiones a ambos lados son iguales.



El teorema del trabajo y la energía para  $m_1$  es

$$W^{\text{total}} = \Delta K_1,$$

$$W_{i \rightarrow f}^T + W_{i \rightarrow f}^{mg} = K_{1f} - K_{1i}.$$

Como no conocemos la tensión  $T$ , dejemos indicado su trabajo

$$W_{i \rightarrow f}^T = \int_0^h T \, ds \cos 0 = \int_0^h T \, ds.$$

Con nivel de referencia en  $i$ , el trabajo de  $m_1 g$  es

$$W_{i \rightarrow f}^{m_1 g} = - (U_f - U_i) = - m_1 g h,$$

y así.

$$\int_0^h T \, ds - m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_f^2. \quad (1)$$

De modo análogo, para  $m_2$ , con nivel de referencia en f,

$$W_{i \rightarrow f}^T + W_{i \rightarrow f}^{m_2 g} = K_{2f} - K_{2i}$$

con

$$W_{i \rightarrow f}^T = \int_0^h T \, ds \cos \pi = - \int_0^h T \, ds,$$

$$W_{i \rightarrow f}^{m_2 g} = - (U_f - U_i) = m_2 g h,$$

$$- \int_0^h T \, ds + m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_f^2. \quad (2)$$

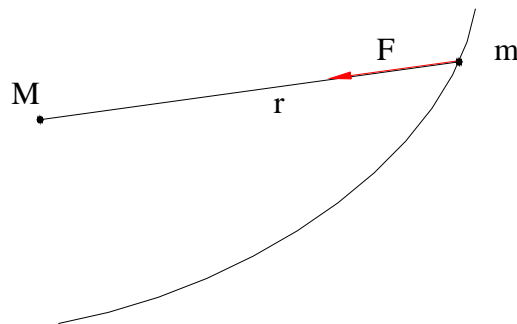
Sumando (1) y (2), se cancelan las integrales de la tensión y

$$v_f = \left( \frac{2 (m_2 - m_1) g h}{m_1 + m_2} \right)^{1/2},$$

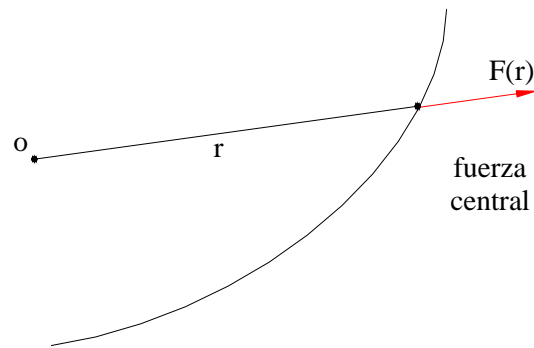
que corresponde a  $v_f = \sqrt{2 a h}$  con la aceleración que ya habíamos obtenido por las leyes de Newton.

## 5.6 TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ATRACCIÓN GRAVITACIONAL

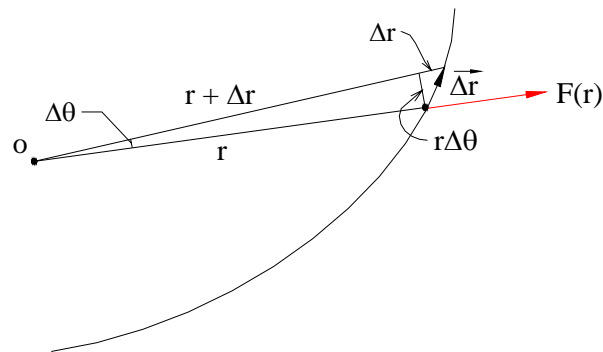
Consideremos la fuerza de atracción gravitacional hecha por una masa  $M$  sobre  $m$ .



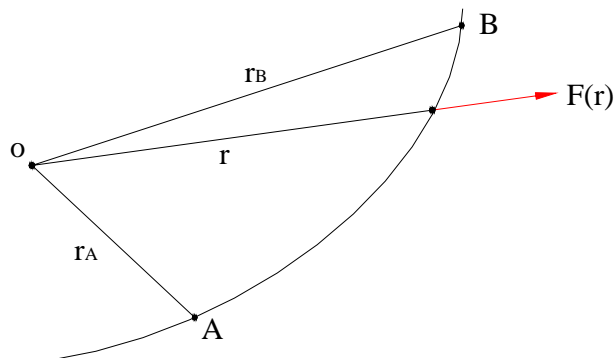
$M$  puede ser una partícula o, como ya sabemos, una esfera. Si suponemos que  $M$  es mucho mayor que  $m$ ,  $M$  puede considerarse fija. La fuerza de atracción gravitacional pertenece a la importante clase de las fuerzas centrales, que son fuerzas dirigidas siempre a un punto o centro fijo y cuya magnitud sólo depende de la distancia radial  $r$  desde el centro de fuerzas.



Una fuerza central, positiva en dirección de  $r$  creciente, es repulsiva si  $F(r) > 0$  y atractiva si  $F(r) < 0$ . Las fuerzas centrales se plantean de manera muy natural en coordenadas polares. Como aún no hemos hecho la cinemática en coordenadas polares, estudiemos ahora el trabajo hecho por una fuerza central  $F(r)$  así :



Un pequeño desplazamiento  $\Delta \vec{r}$  tiene dos componentes, una transversal de valor  $r \Delta \theta$ , perpendicular a  $F(r)$  y una radial de valor  $\Delta r$ . Al hacer el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, la componente transversal no contribuye al trabajo realizado, puesto que es perpendicular a la fuerza, y sólo queda el producto de la fuerza  $F(r)$  por el cambio radial  $\Delta r$ . El trabajo total desde una situación inicial A hasta una final B es entonces



$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(r) dr$$

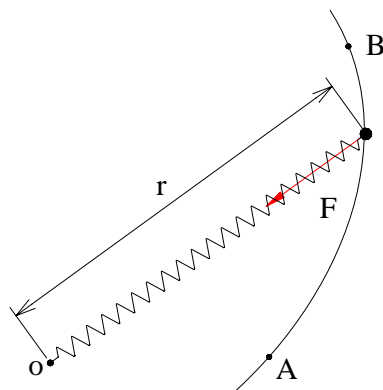
Para la atracción gravitacional,  $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$  y así su trabajo es

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \frac{GMm}{r^2} dr = - \left[ \left( -\frac{GMm}{r_B} \right) - \left( -\frac{GMm}{r_A} \right) \right],$$

que escribiremos como

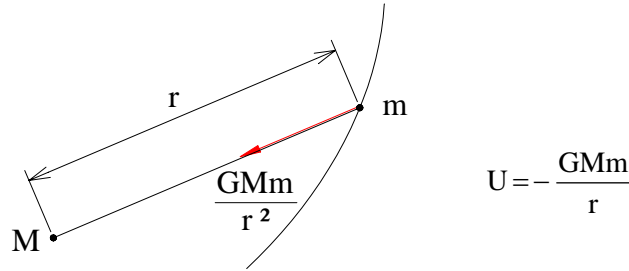
$$W_{A \rightarrow B}^{\text{grav}} = - \left[ \left( -\frac{GMm}{r} \right)_B - \left( -\frac{GMm}{r} \right)_A \right].$$

La fuerza elástica hecha por un resorte sobre un cuerpo, no ya en movimiento rectilíneo sino en un movimiento curvilíneo, es también una fuerza central. Sea  $r_0$  la longitud natural. En una situación general la deformación es  $d = r - r_0$ . La fuerza, atractiva, es de magnitud  $k d = k (r - r_0)$  y su trabajo es



$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= - \int_A^B k(r - r_0) dr = - \int_A^B k(r - r_0) d(r - r_0) \\ &= - \left[ \left( \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right)_B - \left( \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 \right)_A \right] \\ W_{A \rightarrow B}^e &= - \left[ \left( \frac{1}{2} k d^2 \right)_B - \left( \frac{1}{2} k d^2 \right)_A \right]. \end{aligned}$$

Retornemos al caso de la atracción gravitacional, en cuyo caso la posición de referencia, en la que  $U = 0$ , está en el infinito,  $r = \infty$ . La energía potencial asociada es



Esta energía potencial se llama también energía potencial gravitacional, lo mismo que la asociada con el peso, que al fin y al cabo es sólo un caso particular de la atracción gravitacional general. En cada caso concreto se sabrá de cuál energía gravitacional se trata. Las dos expresiones son muy diferentes pero el  $mgh$  se puede obtener como caso particular de la expresión general. En efecto, cerca de la superficie terrestre, para alturas  $h$  pequeñas comparadas con el radio de la tierra  $R_T$ , es decir  $h \ll R_T$ , la diferencia entre la energía potencial general entre un nivel  $R_T$  y un nivel  $R_T + h$  es

$$\begin{aligned} U(R_T + h) - U(R_T) &= -\frac{G M_T m}{R_T + h} + \frac{G M_T m}{R_T} \\ &= \left( \frac{G M_T}{R_T^2} \right) m \left( \frac{h}{1 + \frac{h}{R_T}} \right) \end{aligned}$$

que, con  $\frac{h}{R_T} \ll 1$ , y, como ya vimos,  $g = \frac{G M_T}{R_T^2}$ , queda

$$U(R_T + h) - U(R_T) \approx m g h,$$

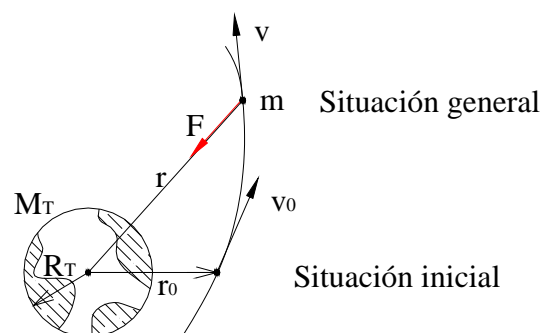
que es la energía potencial cerca de la superficie.

### 1. EJEMPLO. Velocidad de escape

Desde un punto a una distancia  $r_0$  del centro de la tierra se quiere lanzar un objeto al espacio de modo que nunca retorne. ¿Qué velocidad debe dársele?

Tomemos como marco inercial un marco de referencia con origen en el centro de la tierra y orientado hacia las estrellas fijas. El sistema mecánico es el objeto, que podría ser una sonda o nave espacial. Vamos a suponer que sobre él actúa únicamente la atracción gravitacional terrestre, es decir, que no hay influencia de la luna, los planetas o el sol. La velocidad inicial  $v_0$  con la que comienza el movimiento sujeto sólo a la atracción terrestre, es la velocidad final de un movimiento impulsado por cohetes, que después estudiaremos con modelos simplificados.





Como la única fuerza es la atracción gravitacional, conservativa, se conserva la energía total del objeto, tratado como una partícula de masa  $m$ . Entre la situación inicial y la situación general tendremos

$$K_o + U_o = K + U ,$$

$$\frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{G M_T m}{r_o} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r} ,$$

y así,

$$v^2 = v_o^2 - \frac{2 G M_T}{r_o} + \frac{2 G M_T}{r} .$$

Para que el objeto se aleje definitivamente,  $r = \infty$  y así  $\frac{2 G M_T}{r} = 0$ . Llamando  $v_\infty$  la velocidad “allá”,

$$v_\infty^2 = v_o^2 - \frac{2 G M_T}{r_o} \geq 0$$

y por tanto

$$v_o^2 \geq \frac{2 G M_T}{r_o} .$$

La velocidad de escape es la mínima velocidad  $v_o$  que debe dársele para que no retorne, y por lo tanto

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{r_o}} ,$$

velocidad que se calcula más fácil recordando que

$$G M_T = g R_T^2 ,$$

con lo cual se obtiene

$$v_e = \sqrt{\frac{2gR_T^2}{r_o}}.$$

Si calculamos esa velocidad de escape desde la superficie terrestre, asumiendo que se ha superado ya la atmósfera, cuyo espesor es muy pequeño comparado con el radio terrestre, de modo que  $r_o \approx R_T$ , tendremos

$$v_e = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 6.37 \times 10^6 \text{ m}}$$

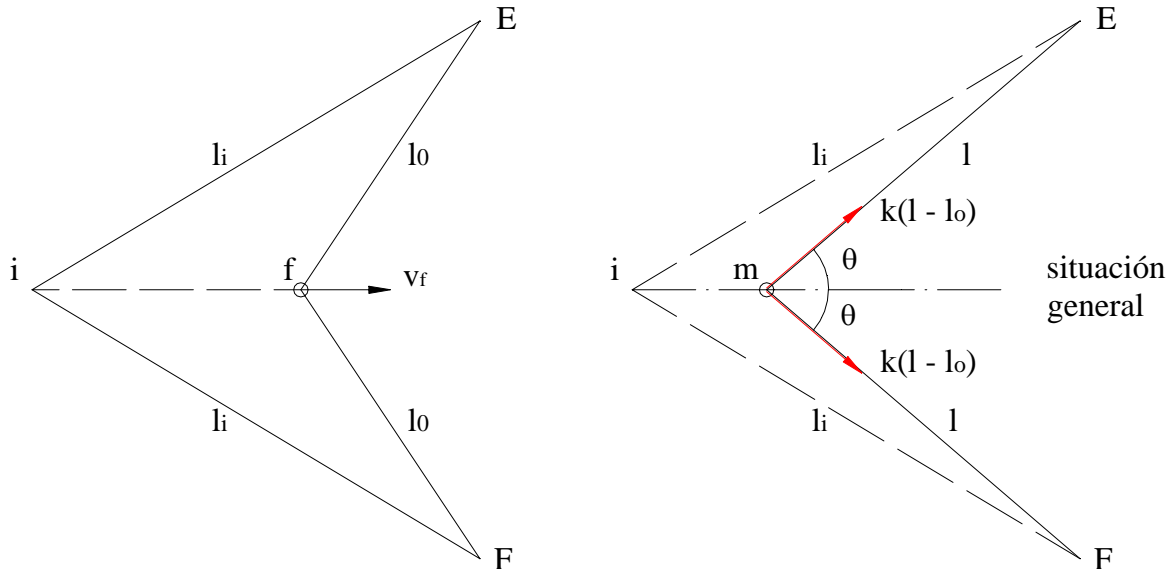
$$v_e = 11.2 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Hay que anotar que esta es la velocidad para escapar de la tierra sea cual sea su dirección, pues en la conservación de la energía sólo figura la magnitud de la velocidad.

Este problema se plantea análogamente para otros cuerpos astronómicos diferentes a la tierra.

## 2. EJEMPLO

Un eficiente mecanismo disparador usa la energía elástica para convertirla en energía cinética así: una cuerda elástica, que puede ser un caucho, de longitud natural  $2\ell_o$ , se amarra en dos soportes fijos E y F.



En el centro del elástico se coloca un cuerpo de masa  $m$ . Se lleva hasta la posición inicial  $i$  estirando el caucho y allí se suelta. Supongamos que los dos tramos del caucho se comportan cada uno como un resorte elástico lineal, cuya fuerza en posición general es  $k(\ell - \ell_o)$ ,

proporcional a la deformación  $\ell - \ell_o$ . Despreciemos el efecto del peso, pequeño en comparación con el efecto elástico durante el disparo. Como las fuerzas de cada trozo elástico son conservativas, se conserva la energía mecánica total de m de i a f, siendo f la situación final en la cual se retorna a la longitud natural. La energía potencial inicial es  $\frac{1}{2} k (\ell_i - \ell_o)^2$  para cada trozo y así, como son dos, tenemos

$$E_i = E_f$$

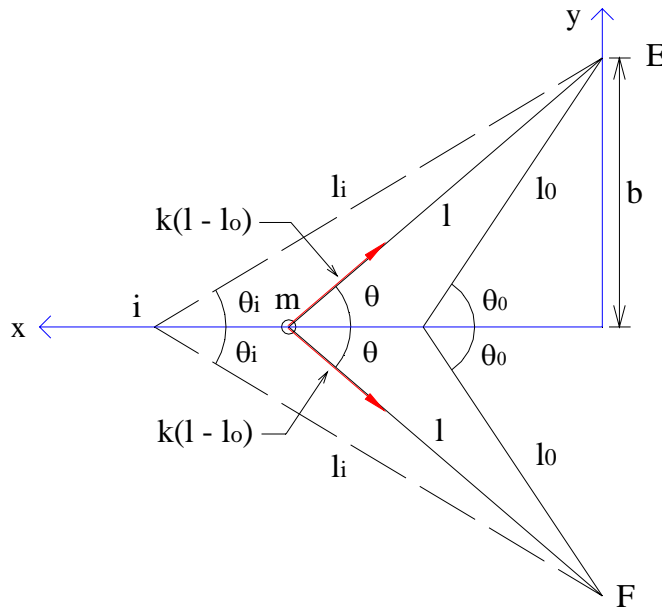
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$0 + 2 \times \frac{1}{2} k (\ell_i - \ell_o)^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0 ,$$

y por tanto

$$v_f = \sqrt{\frac{2k}{m} (\ell_i - \ell_o)}.$$

Este análisis muestra con claridad la sencillez con la cual la energía permite resolver ciertos problemas que, mediante la integración de la segunda ley de Newton o, lo que es equivalente, mediante el cálculo directo del trabajo efectuado, resultan mucho más arduos.



En efecto, fijemos en el marco inercial usual ligado a tierra unos ejes  $x, y$ . En  $y$  las fuerzas se cancelan. En  $x$  tenemos

$$\sum F_x = m a_x : - 2k (\ell - \ell_o) \cos \theta = m a = m v \frac{dv}{dx}$$

y entonces

$$\int_i^f m v \, dv = \int_i^f (-2k) (\ell - \ell_o) \cos \theta \, dx$$

El término de la izquierda es, obviamente, el cambio en la energía cinética  $K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^2$ , y el de la derecha es el trabajo hecho por las fuerzas elásticas. Para calcularlo, lo más sencillo puede ser expresar  $\ell$  y  $x$  en términos de la variable  $\theta$  y efectuar la integración sobre  $\theta$ , llamando  $2b$  a la separación entre los soportes E y F. Entonces

$$\ell = \frac{b}{\sin \theta}, \quad \ell_o = \frac{b}{\sin \theta_o}$$

$$x = b \cot \theta, \quad dx = -b \csc^2 \theta \, d\theta = -\frac{b}{\sin^2 \theta} \, d\theta,$$

y el trabajo realizado es

$$\int_i^f 2k b^2 \left( \frac{1}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{\sin \theta_o \sin^2 \theta} \right) d(\sin \theta)$$

$$= k b^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \theta_o} + \frac{1}{\sin^2 \theta_i} - \frac{2}{\sin \theta_o \sin \theta_i} \right)$$

$$= k (\ell_i - \ell_o)^2,$$

que es el mismo resultado ya obtenido de manera tan sencilla usando el concepto de energía potencial.

## 5.7 RELACIÓN ENTRE LA FUERZA Y LA ENERGÍA POTENCIAL. MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL. DIAGRAMAS DE ENERGÍA

Consideremos una partícula que se mueve en línea recta en un eje  $x$ , exclusivamente bajo la acción de una fuerza conservativa, función de la posición,  $F(x)$ . La energía potencial asociada es  $U(x)$ , también función de la posición  $x$ . El trabajo de  $F$ , cambio en la energía potencial, es entonces

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F(x) \, dx = - [U(x)]_A^B = [-U(x)]_A^B.$$

Según el llamado teorema fundamental del cálculo,

$$F(x) = \frac{d(-U)}{dx}$$

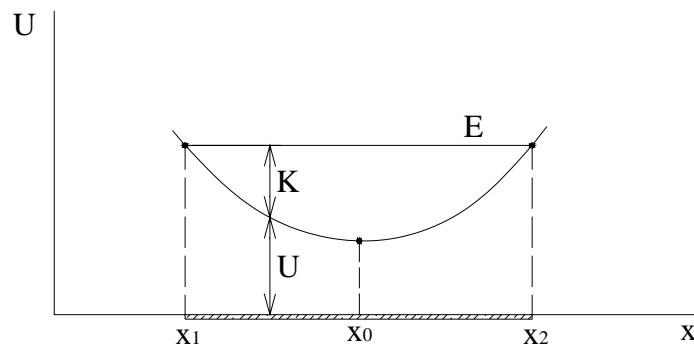
y la fuerza conservativa es, en un movimiento rectilíneo, el negativo de la derivada de la energía potencial,

$$F = - \frac{dU}{dx}.$$

Como la única fuerza que actúa sobre la partícula es conservativa, hay conservación de la energía total

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x).$$

Muchas características importantes de un movimiento unidimensional pueden estudiarse utilizando un **diagrama de energía**, en el que se grafican la energía potencial como función de la posición  $x$  y la energía total  $E$  de un determinado movimiento. Consideremos por ejemplo el movimiento rectilíneo de una partícula en el eje  $x$ , cuya energía potencial en una región de dicho eje tiene una gráfica como la siguiente:



En el punto  $x = x_0$ , la energía potencial tiene un mínimo local y por tanto su derivada vale cero y entonces

$$F(x_0) = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0,$$

Entonces, como la fuerza es nula, la posición  $x_0$  es una posición de equilibrio, es decir, si la partícula se coloca, sin velocidad, en el punto  $x_0$ , allí permanece en reposo. Más aún, supongamos que le damos un pequeño desplazamiento a la partícula hacia la derecha del punto  $x_0$  ( $x > x_0$ ). Como allí  $\frac{dU}{dx} > 0$ , entonces  $-\frac{dU}{dx} = F < 0$ , y aparece una fuerza negativa, es decir hacia la izquierda, hacia la posición de equilibrio. Si el desplazamiento es

hacia la izquierda de  $x_0$  ( $x < x_0$ ),  $\frac{dU}{dx} < 0$  y así  $-\frac{dU}{dx} = F > 0$ , y la fuerza es ahora

hacia la derecha, de nuevo hacia la posición de equilibrio. En cualquier caso, donde hay un mínimo de la energía potencial hay entonces una posición de **equilibrio estable**, lo que significa que para cualquier desplazamiento aparece una fuerza recuperadora que dirige la partícula de nuevo hacia su posición de equilibrio. Ahora, supongamos que la partícula tiene una energía total  $E$ , que por ser constante se grafica como una recta horizontal que corta a la curva  $U(x)$  en dos puntos correspondientes a las posiciones  $x_1$ ,  $x_2$ . Como la energía cinética no puede ser negativa,

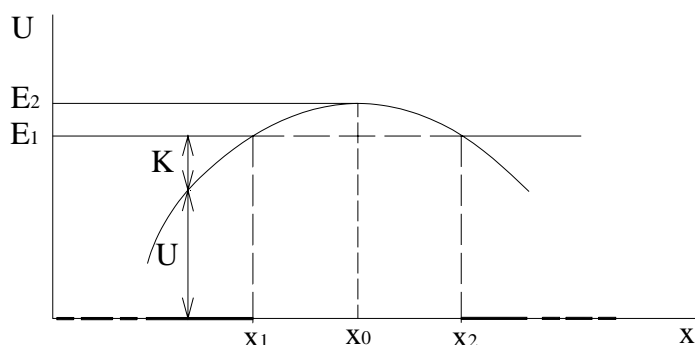
$$K = \frac{1}{2} m v^2 = E - U(x) \geq 0 ,$$

y el movimiento sólo es posible en la región en que  $E \geq U(x)$ , es decir en

$$x_1 \leq x \leq x_2 .$$

En los puntos  $x_1$  y  $x_2$ , la energía cinética y por tanto la velocidad, valen cero. En ellos la partícula se detiene instantáneamente, pero no se queda allí, puesto que la fuerza recuperadora la dirige de nuevo hacia la posición de equilibrio, por la cual pasa, como se vé claramente en la gráfica, con la máxima energía cinética, es decir con la máxima velocidad. La partícula describe así un movimiento oscilatorio, periódico, alrededor de su posición de equilibrio estable, entre los llamados puntos de retorno  $x_1$ ,  $x_2$ . Esas regiones alrededor de un mínimo local de la energía potencial se llaman a veces **pozos de potencial**.

En las regiones próximas a un máximo local de la energía potencial, llamadas **barreras de potencial**, el movimiento tiene un comportamiento cualitativo muy diferente.

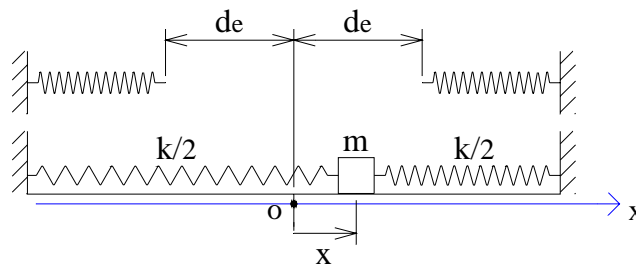


El punto  $x_0$ , correspondiente al máximo de  $U$ , es también un punto de equilibrio puesto que allí la derivada de  $U$  y por tanto la fuerza son nulas. Pero es un **equilibrio inestable**, pues cualquier desplazamiento, por pequeño que sea, conlleva la aparición de una fuerza que aleja la partícula aún más de la posición de equilibrio, como puede analizarse con facilidad, de manera análoga a como analizamos el pozo de potencial.

Como ya vimos, el movimiento sólo es posible en las zonas en que  $E \geq U(x)$ . Supongamos que la energía total es  $E_1$ . El movimiento sólo es posible en las regiones  $x \leq x_1$  y  $x \geq x_2$ . Si una partícula con  $x < x_1$  se mueve hacia la derecha, se detiene instantáneamente en el punto de retorno  $x_1$  y, como hay allí una fuerza hacia la izquierda, se devuelve hacia la izquierda, aumentando su energía cinética. O bien, análogamente, una partícula con  $x > x_2$  que viene hacia la izquierda, se detiene en  $x_2$  y retorna hacia la derecha, pero en ningún caso, con esa energía  $E_1$ , puede moverse en la región  $x_1 < x < x_2$ , o como se dice, no puede penetrar en la barrera de potencial. La mínima energía necesaria para superar esa barrera de potencial es  $E_2$ . Para energías superiores la partícula puede moverse en una u otra dirección, pasando por  $x_0$  con una cierta velocidad.

## 1. EJEMPLO

Consideremos el movimiento de una masa  $m$  sobre una superficie horizontal lisa, sujeta a dos resortes estirados e iguales, cada uno de constante  $k/2$ .



Eligiendo el origen en la posición de equilibrio, la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{2} \right) (d_e + x)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{2} \right) (d_e - x)^2$$

$$= \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k d_e^2,$$

siendo  $d_e$  la deformación de equilibrio de cada resorte. “Recalibrando” el potencial, es decir, redefiniendo la posición de energía potencial cero en  $x = 0$  ya que la constante no es esencial,

$$U = \frac{1}{2} k x^2.$$

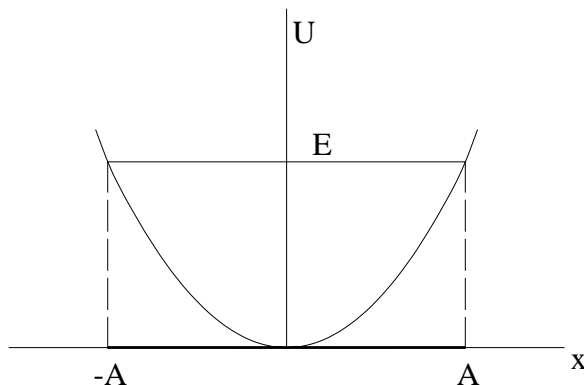
La fuerza neta, función de  $x$ , es entonces

$$F = - \frac{dU}{dx} = -kx.$$

La energía total es

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

La gráfica de  $U(x)$  es una parábola, simétrica respecto a  $x = 0$ .



$U$  tiene un mínimo en  $x = 0$ , que es la posición de equilibrio estable. Para una energía total  $E$ , el cuerpo realizará un movimiento oscilatorio, simétrico respecto a la posición de equilibrio, entre los puntos  $x = -A$  y  $x = A$ . En ambos puntos de retorno la energía es toda potencial elástica,  $\frac{1}{2} k A^2$ , y cuando  $m$  pasa por la posición de equilibrio, su energía es toda cinética,  $\frac{1}{2} m v_o^2$ , de modo que

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} k A^2,$$

y así

$$v_o = \sqrt{\frac{k}{m}} A.$$

Vemos pues como el análisis de la gráfica de energía permite conocer muchas características importantes del movimiento: es un movimiento oscilatorio, periódico, simétrico respecto a la posición de equilibrio. Si queremos resolver explícitamente el problema dinámico fundamental de hallar el movimiento de  $m$ , es decir la función  $x(t)$ , procedemos así: de la expresión de la energía total obtenemos la velocidad

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left( \frac{2E}{m} - \frac{k}{m} x^2 \right).$$



Demos como condición inicial: en  $t = 0$ ,  $x = A$ ,  $v = 0$ , de modo que  $E = \frac{1}{2} k A^2$  y así, reemplazando y separando las variables,

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^t dt = \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Con  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , frecuencia angular, esta integral es exactamente igual a la que obtuvimos, partiendo de la segunda ley de Newton, al estudiar el movimiento análogo de una masa suspendida de un resorte. Allí llamamos  $x_0$  lo que aquí es  $A$ . Así

$$x = A \cos \omega t,$$

y el movimiento es armónico simple de período

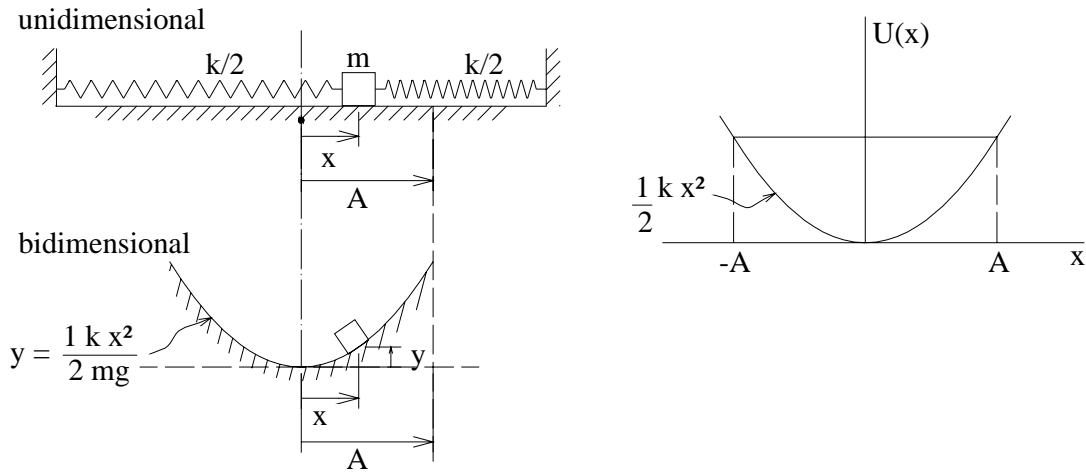
$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Hagamos énfasis en que el movimiento del bloque que estamos discutiendo es un movimiento rectilíneo, unidimensional, en el eje  $x$ . La gráfica de  $U(x)$ , una parábola, es una representación abstracta, muy útil, pero debe quedar claro que no hay aquí ningún cuerpo moviéndose por una parábola: se trata de una partícula oscilando en el eje  $x$ . Se encuentra, no obstante, en la literatura, una comparación entre este movimiento unidimensional, rectilíneo, y un movimiento bidimensional, curvilíneo, con el cual, si bien hay analogías cualitativas, hay diferencias esenciales que es necesario comprender bien.

Supongamos que tenemos en un plano vertical una pista o tobogán liso en forma de parábola, con ecuación  $y = Cx^2$ . Un pequeño bloque, partícula de masa  $m$ , que se mueve deslizando por el tobogán, está sometido a la acción de dos fuerzas, el peso y la normal hecha por la pista. Como esta normal, perpendicular a la trayectoria, no efectúa trabajo, hay conservación de la energía. La energía potencial será  $U = mgy$ , que podemos tomar como una función de  $x$ ,

$$U = mgy(x) \quad . \quad \text{Elijamos la constante } C \text{ de modo que } C = \frac{1}{2} \frac{k}{mg}, \text{ siendo } k \text{ la misma}$$

constante elástica del ejemplo anterior. Así,  $U = \frac{1}{2} kx^2$ , que tiene la misma forma de la energía del oscilador armónico. Tenemos entonces una partícula en movimiento bidimensional, en el plano  $x, y$ , sobre una pista parabólica, cuya energía potencial varía con  $x$  de forma idéntica a la de un movimiento rectilíneo armónico simple.



La energía total, tanto para el movimiento rectilíneo como para el curvilíneo, es

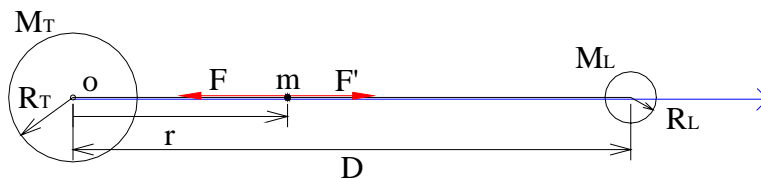
unidimensional:  $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$

bidimensional:  $E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} k x^2$ .

La partícula  $m$  describe en la pista parabólica un movimiento oscilatorio bidimensional, que no es un movimiento armónico simple debido a la presencia del término  $\dot{y}^2$  en la expresión de la derecha. Aunque ambos movimientos, el rectilíneo y el curvilíneo, son oscilatorios, periódicos, sus períodos son diferentes, no son movimientos sincrónicos uno con otro. Es necesario pues ser cuidadoso en la interpretación de los gráficos, abstractos,  $U(x)$ .

## 2. EJEMPLO

Consideremos un cuerpo de masa  $m$  que viaja en línea recta de la tierra a la luna. Asumamos que la luna está fija respecto a la tierra en un marco de referencia inercial con origen en el centro de la tierra y con dirección radial  $r$  dirigida hacia el centro de la luna. Sea  $D$  la distancia entre los centros.



La partícula está sometida a las fuerzas de atracción de la tierra y la luna, ambas conservativas, de modo que se conserva su energía total. La energía potencial, función de  $r$ , es

$$U(r) = - \frac{G M_T m}{r} - \frac{G M_L m}{(D-r)} .$$

Este potencial, como se dice a veces, es válido desde la superficie terrestre,  $r = R_T$ , hasta la superficie lunar,  $r = D - R_L$ . Unas relaciones numéricas aproximadas son  $M_T \approx 81 M_L$ ,  $D \approx 60 R_T$ ,  $R_T \approx 3.7 R_L$ . Tenemos entonces

$$U(r) = - G M_T m \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{81 (D-r)} \right),$$

que en  $r = R_T$ , donde domina el término terrestre, vale

$$U(R_T) \approx - \frac{G M_T m}{R_T},$$

y en  $r = D - R_L$ ,

$$U(D - R_L) \approx - \frac{1}{16} \frac{G M_T m}{R_T} .$$

La gráfica de  $U(r)$  tiene la forma de una barrera de potencial, con un máximo en una posición  $r_o$  en la cual  $\frac{dU}{dr} = 0$ , posición de equilibrio inestable que corresponde, como debe ser, a la igualdad de las fuerzas de atracción de la tierra y la luna,

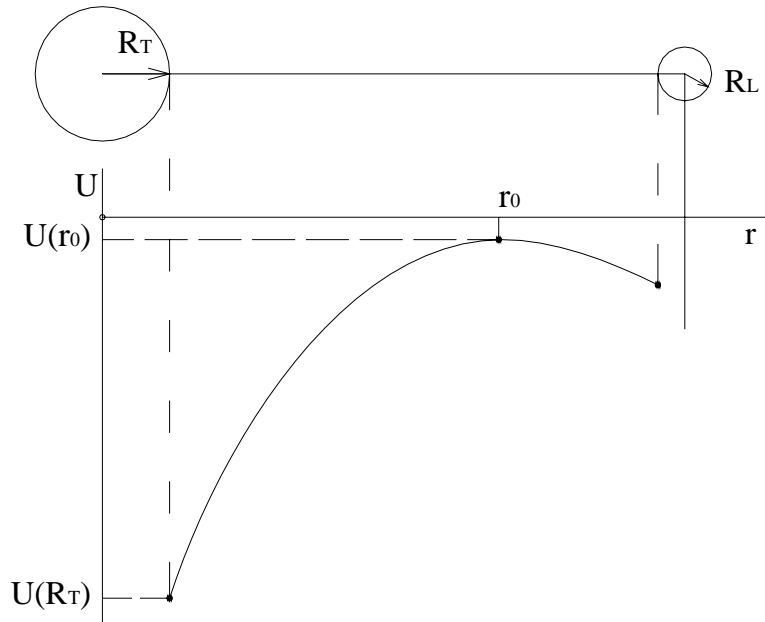
$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_o} = 0 \Rightarrow \frac{G M_T m}{r_o^2} = \frac{G M_L m}{(D-r_o)^2} .$$

Así,

$$r_o = 0.9 D = 54 R_T ,$$

y

$$U(r_o) = U(54 R_T) = - \frac{1}{48.6} \frac{G M_T m}{R_T} .$$



Para lanzar el cuerpo desde la superficie terrestre de modo que alcance a llegar a la luna, es necesario superar la barrera de potencial, es decir, su energía total debe superar a  $U(r_0)$ ,

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + U(R_T) > U(r_0)$$

y por tanto la velocidad de lanzamiento  $v_1$  debe ser, recordando que  $GM_T = g R_T^2$ ,

$$v_1 > 0.99 \sqrt{2 g R_T},$$

$\sqrt{2 g R_T}$  es la velocidad de escape que ya habíamos calculado de  $11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ , y entonces

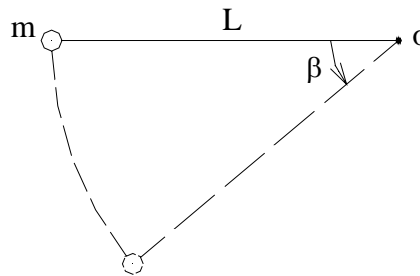
$$v_1 > 11.1 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Si se lanza con  $11.1 \text{ km/s}$ , el cuerpo llegará a la superficie lunar con velocidad de  $2.3 \text{ km/s}$  como puede comprobarse fácilmente.

Hemos conocido este buen problema de una barrera de potencial al estudiar el esmerado libro de A. P. French : “Mecánica Newtoniana”.

## PROBLEMAS

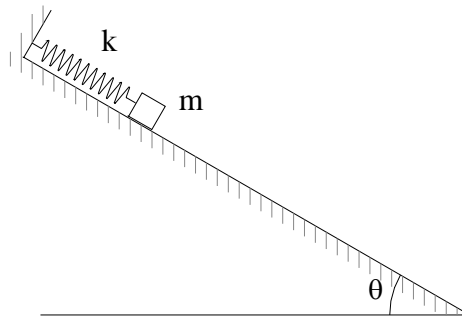
1.



Una partícula de masa  $m$ , sujeta a una cuerda de longitud  $L$  con un extremo fijo en  $O$ , se suelta desde el reposo en una posición horizontal. Si la cuerda se rompe cuando la tensión es dos veces el peso de  $m$ , hallar el ángulo  $\beta$  en el que esto sucede y la velocidad de  $m$  en ese instante.

$$\beta = \arcsin \frac{2}{3}$$

2.



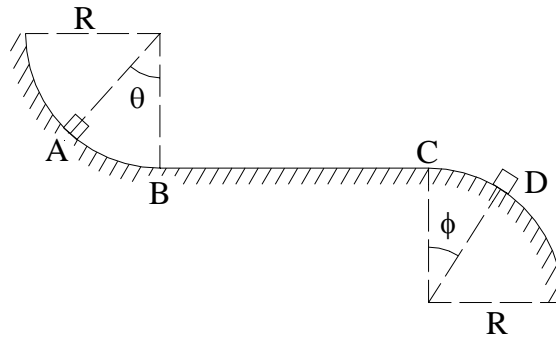
Un bloque de masa  $m$  unido a un resorte de constante  $k$ , se suelta desde la longitud natural y baja deslizando por un plano inclinado rugoso. Si el coeficiente dinámico de fricción entre el bloque y el plano es  $\mu$ , hallar la máxima elongación del resorte.

$$\text{Chequeo: si } \theta = 45^\circ, d = \sqrt{2} \frac{mg}{k} (1 - \mu)$$

3. Un tobogán liso en un plano vertical está formado por dos tramos de cuarto de círculo unidos por un tramo recto  $BC$  como se muestra en la figura.

a) Si desde la posición  $A$  se suelta un pequeño bloque con  $\theta = 45^\circ$ , ¿para cuál ángulo  $\phi$  se despega del tobogán?

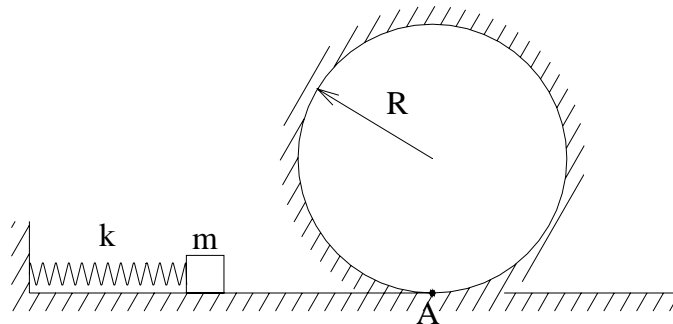
$$\phi = 30.5^\circ$$



b) ¿Desde qué ángulo  $\theta$  debe soltarse para que se despegue del tobogán en C?

$$\theta = 60^\circ$$

4. Una partícula sujeta al extremo de una cuerda gira describiendo un círculo vertical. Muestre que la diferencia de tensiones entre el punto más bajo y,
- el punto más alto, es seis veces el peso de la partícula,
  - un punto con la cuerda horizontal, es tres veces el peso.
- 5.

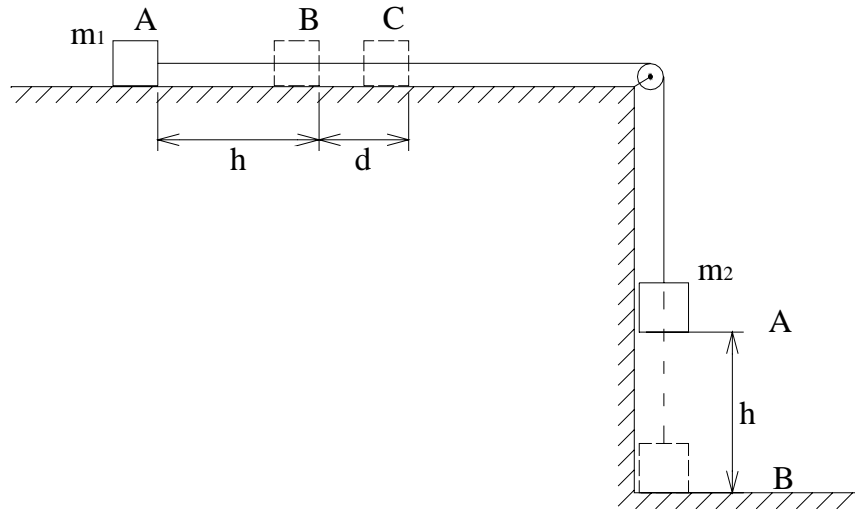


Mediante la compresión de un resorte se dispara un bloque que desliza por una pista sin fricción con un rizo o bucle vertical. Hallar la mínima velocidad necesaria en A para recorrer todo el rizo y la mínima compresión requerida en el resorte.

$$v_{A \text{ mín}} = \sqrt{5 g R}$$

6. Los bloques  $m_1$  y  $m_2$  están unidos por una cuerda como se indica en la figura.  $m_1$  desliza por una mesa horizontal con coeficiente dinámico de fricción  $\mu$ . En la situación A los bloques se sueltan desde el reposo. La situación B es un instante antes de que  $m_2$  choque con el piso. A partir de ese momento la cuerda pierde la tensión y  $m_1$  sigue deslizando hasta detenerse en la situación C. Usando métodos de trabajo y energía,

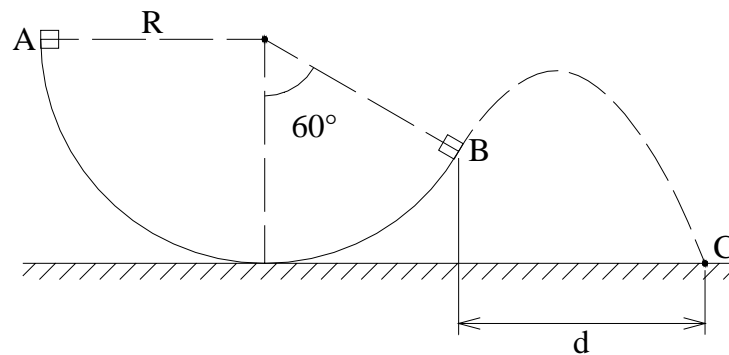
determine el coeficiente de fricción  $\mu$  en términos de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $h$  y  $d$ . Este método proporciona una manera experimental de determinar  $\mu$ .



**Sugerencia :** Teorema del trabajo y la energía para  $m_1$  y para  $m_2$ , de A a B. Luego para  $m_1$ , de B a C.

$$\mu = \frac{m_2 h}{m_1 (h + d) + m_2 d}$$

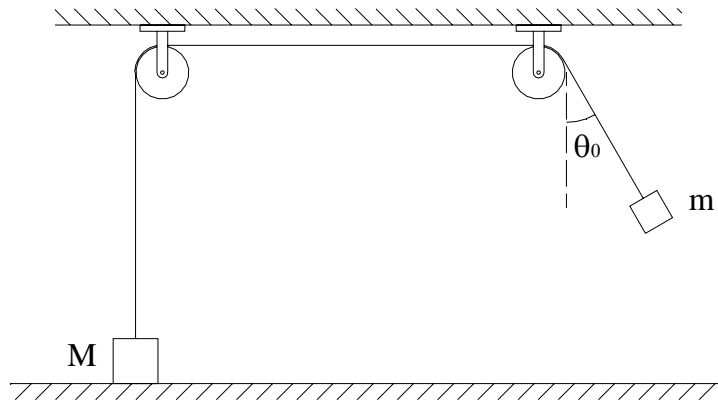
7.



Una masa que se suelta desde A, desliza por una pista circular vertical sin fricción que termina en B ¿A qué distancia  $d$  cae al piso horizontal?

$$\frac{d}{R} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}$$

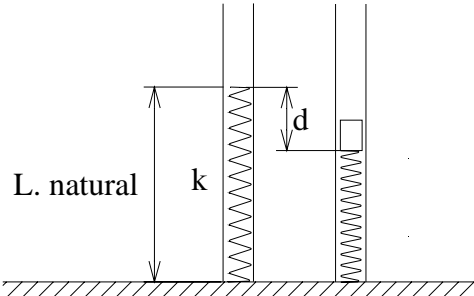
8.



Un bloque de masa  $M$  reposa sobre una superficie horizontal y está unido por una cuerda a otro bloque de masa  $m$ , como se muestra en la figura. Hallar el mínimo ángulo  $\theta_0$  desde el cual debe soltarse  $m$ , para que  $M$  alcance justo a levantarse del piso cuando  $m$  describe su movimiento pendular.

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{M}{m} \right)$$

9.



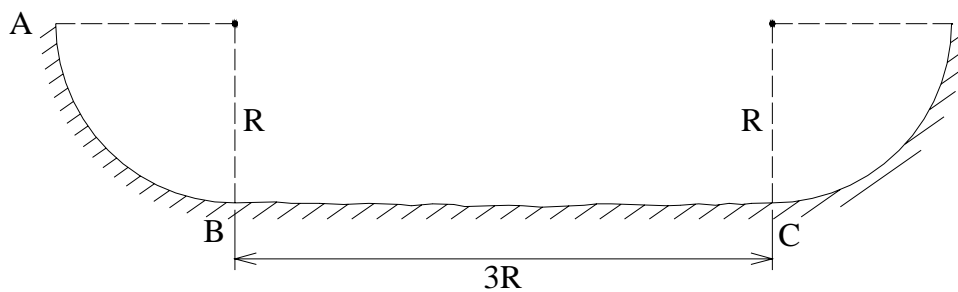
Un bloque cilíndrico de masa  $m$  se coloca sobre un resorte, sin engancharlo, de modo que puede moverse dentro de un tubo vertical liso.  $k$  es  $40 \text{ N/m}$ ,  $m$  es  $0.2 \text{ kg}$ . Use  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ . Si se le da una compresión inicial de  $8 \text{ cm}$ , ¿alcanzará a sobrepasar la longitud natural? ¿Hasta qué altura sube el bloque, medida desde su nivel más bajo?

No;  $6 \text{ cm}$

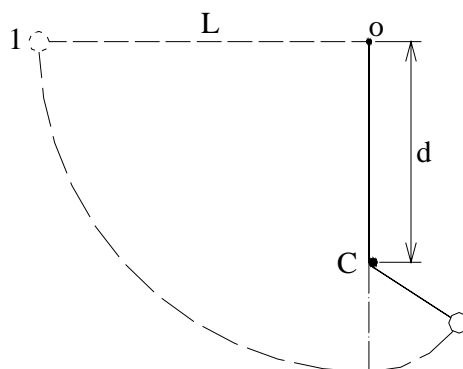
10. Una pista está formada por dos tramos verticales lisos en forma de cuarto de círculo y un tramo horizontal rugoso. Si el bloque se suelta desde A y el coeficiente dinámico de fricción en el tramo rugoso es  $1/4$ , hallar en qué punto se detiene definitivamente el bloque.

R a la izquierda de C





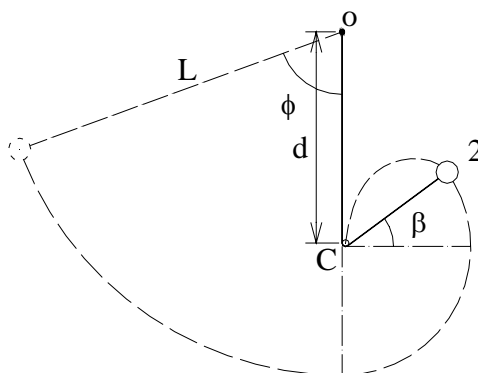
11.



- a) La masa de un péndulo de longitud  $L$  se suelta desde la situación 1. Cuando llega al punto más bajo, un clavo  $C$  la obliga a moverse en un círculo con centro en él. Hallar la mínima distancia  $d$  para que la masa describa el círculo completo alrededor de  $C$ .

$$d_{\min} = \frac{3L}{5}$$

b)



Para una distancia  $d$  determinada, hallar el ángulo  $\phi$  desde el cual debe soltarse el péndulo, para que la cuerda pierda su tensión en la posición 2 y la masa caiga con movimiento parabólico justo en  $C$ .

**Sugerencia :** Demuestre, en primer lugar, que si el movimiento parabólico pasa justo por el centro C en el círculo de radio  $R = L - d$ , entonces  $\cot \beta = \sqrt{2}$  y

$v_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} g R$ . Realice el experimento. Es un buen juego.

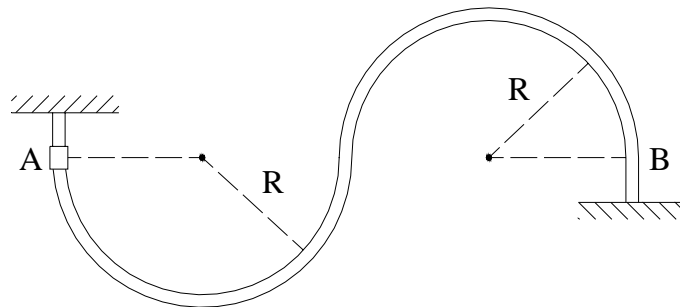
$$\cos \phi = \frac{d (2 + \sqrt{3}) - L \sqrt{3}}{2 L}$$

12. Un automóvil de masa 1000 kg se mueve por una carretera horizontal, logrando una velocidad máxima de 90 km/h cuando el motor desarrolla su máxima potencia de 50 kW. Asumiendo que la resistencia del aire es una fuerza constante, calcule la máxima velocidad que logra el automóvil, a) subiendo, b) bajando, una carretera de 5% de pendiente.

Subiendo, 77 km/h

Bajando, 120 km/h

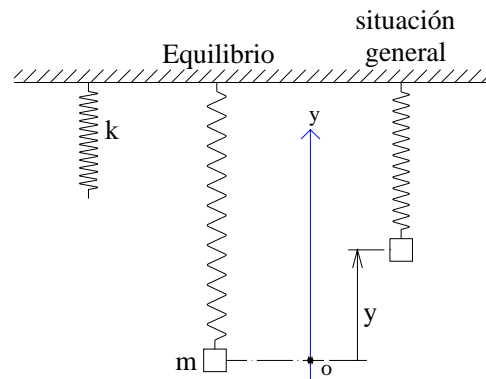
13.



Un collarín se mueve por una varilla lisa formada por dos semicírculos verticales. ¿Qué velocidad debe dársele al collarín en A para que logre llegar a B?

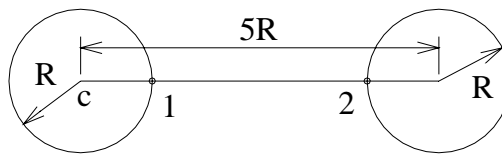
$$v_A > \sqrt{2 g R}$$

14.



Una masa  $m$  oscila verticalmente suspendida de un resorte de constante  $k$ . Se elige un eje  $y$  hacia arriba con origen en la posición de equilibrio. Muestre que, en la posición general, la energía potencial total debida a las dos fuerzas conservativas, peso y fuerza elástica, puede escribirse como  $U(y) = \frac{1}{2} k y^2 + U_o$ , con  $U_o$  constante. Como lo que interesa físicamente en un movimiento es el cambio en la energía potencial, la constante no es importante y podemos recalibrar el potencial, llamando  $U'(y) = U(y) - U_o$  y así  $U'(y) = \frac{1}{2} k y^2$ . Este potencial es idéntico al que ya estudiamos para un movimiento armónico simple. El peso no interviene en la descripción del movimiento y su papel es el de desplazar la posición de equilibrio.

15. Supongamos que un sistema estelar doble está formado por dos estrellas iguales, cada una de masa  $M$  y radio  $R$ , separadas una distancia  $5R$  entre centros. Asumiendo que las estrellas están fijas,



- a) Calcular la velocidad de escape del sistema estelar, para una partícula que se lanza desde el punto 1. ¿Interesa la dirección de lanzamiento?

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{5 G M}{2 R}}$$

- b) ¿Cuál debe ser la velocidad de lanzamiento radial en 1 para que la partícula logre llegar al punto 2?

**Sugerencia:** Diagrama de energía a lo largo de la línea entre centros, desde  $R$  hasta  $4R$  y estudiar la energía para superar la barrera de potencial.

$$v > 3 \sqrt{\frac{G M}{10 R}}$$

## CAPÍTULO 6. MOMENTUM. SISTEMAS DE PARTÍCULAS

### 6.1 MOMENTUM DE UNA PARTÍCULA

La segunda ley de Newton establece que la suma vectorial de todas las fuerzas actuantes sobre una partícula, fuerzas que provienen de las interacciones con los cuerpos de su entorno, es igual a la masa por la aceleración, expresión válida respecto a un marco inercial de referencia,

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}.$$

Usamos el símbolo de sumatoria para recalcar que se trata de la suma o resultante. Otras veces escribimos  $\vec{F}^{\text{total}}$ , pero también se escribe con frecuencia simplemente  $\vec{F}$  para la fuerza resultante.

El término  $m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ , también puede escribirse como  $\frac{d}{dt} (m \vec{v})$ , ya que la masa de una partícula es una constante. La cantidad  $m \vec{v}$ , que desempeña un papel esencial en la mecánica, se llama el **momentum** de la partícula, escrito  $\vec{p}$ . Así,

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{v}}.$$

Se le dice en ocasiones momentum lineal, pero lo usual es llamarlo simplemente momentum, aunque en la literatura en español es común llamarlo cantidad de movimiento y, a veces, momento lineal.

Las dimensiones del momentum son

$$[p] = M L T^{-1},$$

y su unidad en el sistema internacional SI, que no tiene nombre especial, es el  $\text{kg m s}^{-1}$ , que también puede verse como  $\text{N s}$ .

La segunda ley de Newton puede entonces escribirse como

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Se llama **impulso** producido por una fuerza  $\vec{F}$  durante el intervalo de tiempo transcurrido entre un instante inicial  $t_i$  y un instante final  $t_f$ , a la integral temporal de la fuerza,

$$\boxed{\text{Impulso de } \vec{F} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt},$$

algunas veces escrito como  $\vec{J}$ , pero con mayor frecuencia simplemente como la integral.

Escribiendo la segunda ley como

$$\vec{F}^{\text{total}} dt = d\vec{p},$$

e integrando desde una situación inicial  $i$  hasta una situación final  $f$ , tendremos

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}^{\text{total}} dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p},$$

el cambio de momentum de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso total de las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho impulso total,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}^{\text{total}} dt = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt = \sum \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt,$$

puede verse también como la suma vectorial de los impulsos de las diversas fuerzas actuantes.

Una partícula en movimiento está caracterizada por dos cantidades dinámicas: una escalar, la energía cinética,  $K = \frac{1}{2} m v^2$ , y una vectorial, el momentum,  $\vec{p} = m \vec{v}$ , cuyos cambios están vinculados con la integración, en un caso “espacial” y en otro “temporal”, de la fuerza neta, que designaremos como  $\vec{F}$ . De ese modo

$$\text{Trabajo de } \vec{F} : W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K,$$

$$\text{Impulso de } \vec{F} : \vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p}.$$

Ambas expresiones provienen de la segunda ley de Newton y son de gran importancia. La primera suele manejarse en su forma integral,  $W = \Delta K$ , mientras que la segunda se usa más a menudo en su forma diferencial,  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

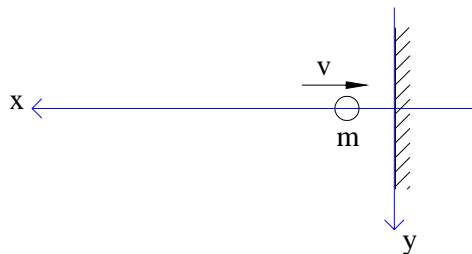
## 1. EJEMPLO

Como ejemplo de aplicación de los conceptos de momentum e impulso, consideremos el choque o colisión de una bola lanzada horizontalmente y de frente contra un muro vertical.

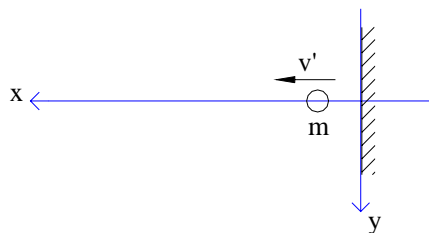
El marco inercial es el muro, ligado a tierra. El sistema mecánico es la bola. Los ejes se indican en la figura.

Ya conocemos el movimiento de la bola en el aire. En rigor, es un movimiento parabólico, pero si el lanzamiento se hace con velocidad relativamente alta (digamos unos 10 m/s) y cerca al muro, podemos hacer caso omiso de la pequeña desviación vertical y considerar que la bola

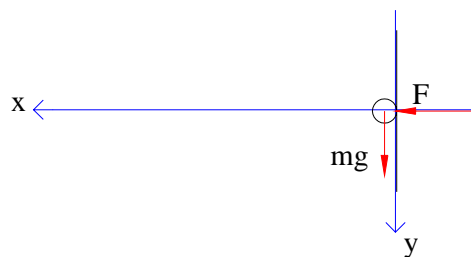
llega al muro con velocidad horizontal. Estudiaremos ahora la colisión. En la situación inicial  $i$ , en un instante  $t_i$ , justo antes del choque, es decir inmediatamente antes de hacer contacto con el muro, la bola tiene una velocidad  $v$ .



La situación final es justo después del choque, o sea cuando la bola pierde contacto con el muro y sale con velocidad de magnitud  $v'$  en un instante  $t_f$ .



El intervalo de tiempo transcurrido entre las situaciones inicial y final: entre  $t_i$  y  $t_f$ ,  $\Delta t = t_f - t_i$ , es muy pequeño comparado con los intervalos de tiempo que hemos estudiado en problemas anteriores. En este caso de la colisión, el intervalo  $\Delta t$  puede ser del orden de unas cuantas milésimas de segundo, tal vez una centésima de segundo, variable según los materiales de la bola y del muro y según la velocidad, intervalo que podría determinarse usando, por ejemplo, filmación de alta velocidad. Se requiere pues cierta reflexión para concebir la situación general del sistema mecánico durante la colisión. Las fuerzas sobre la bola son: la fuerza de contacto hecha por el muro (asumamos que no hay fricción) y el peso de la bola, de modo que el diagrama de fuerzas durante la colisión es



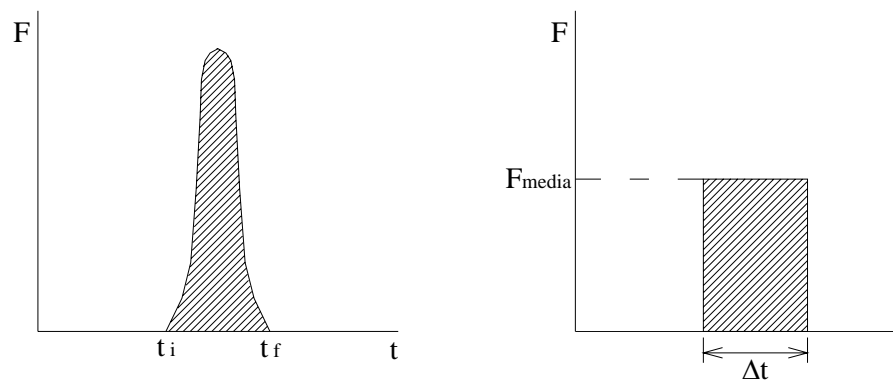
Como la ecuación  $\vec{F}^{\text{total}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , segunda ley de Newton, es vectorial, podemos estudiar sus componentes :

Componente  $x$  :  $F = \frac{dp_x}{dt}$ ,

$$\int_{t_i}^{t_f} F dt = p_{fx} - p_{ix} = m v' - m (-v) = m(v' + v) .$$

Obsérvese que, con la elección que hicimos del eje  $x$ , la componente  $x$  de la velocidad inicial es  $-v$ .

La variación exacta de la fuerza  $F$  con el tiempo no es conocida, pero cualitativamente su comportamiento puede ser así



Hemos graficado a la derecha la fuerza media o promedio durante el intervalo  $\Delta t$ ,

$$F_{\text{media}} \Delta t = \int_{t_i}^{t_f} F dt ,$$

de modo que las dos áreas sombreadas son iguales. Entonces

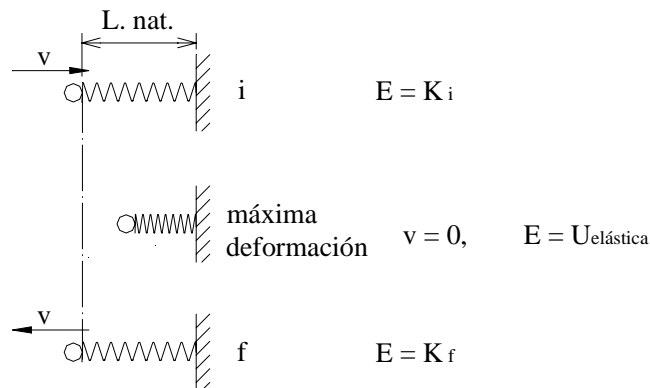
$$F_{\text{media}} \Delta t = m (v' + v) .$$

Para estudiar la relación entre la velocidad de salida de la colisión  $v'$ , y la velocidad de ingreso  $v$ , examinemos la energía de la bola. La energía antes de la colisión es  $K_i = \frac{1}{2} m v^2$

y después de la colisión es  $K_f = \frac{1}{2} m v'^2$ . Si la energía cinética inicial es igual a la energía

cinética final,  $K_i = K_f$ , se dice que la colisión es **elástica**. Podemos imaginar el mecanismo de una colisión elástica de la siguiente manera: cuando la bola toca el muro, comienza a deformarse, convirtiendo la energía cinética en energía potencial elástica. En la situación de máxima deformación, la velocidad es cero y toda la energía se ha vuelto energía potencial elástica. Viene luego una etapa de recuperación, la bola va recuperando su forma y la energía elástica se va convirtiendo en cinética hasta que, al final, se recupera la forma

inicial y la energía es de nuevo toda cinética. Un resorte ideal, muy rígido, ilustra el mecanismo de una colisión elástica:



Ahora, el símil es sólo aproximado, pues en el caso de la bola, la masa inercial y la elasticidad no están separadas como en el modelo.

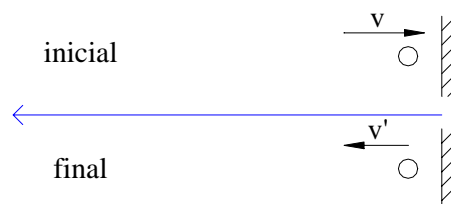
Decir que la colisión es elástica, o, como se dice a veces para enfatizar, perfectamente elástica, equivale así a decir que la fuerza de interacción es conservativa. Entonces

$$K_i = K_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v'^2 \Rightarrow v = v'.$$

Ahora bien, ese modelo de una colisión perfectamente elástica, para una colisión macroscópica como la que estamos estudiando, es una idealización que no se realiza completamente en la práctica. En la colisión real de una bola con un muro, parte de la energía mecánica inicial  $K_i$  se pierde, convirtiéndose en otras formas de energía como energía vibracional, o energía de ondas sonoras y, ante todo, transformándose por fricciones disipativas internas en movimiento interno caótico, es decir en energía térmica. En este caso  $K_f < K_i$  y la colisión se llama inelástica. Puede incluso suceder que  $v' = 0$ , como cuando se lanza contra el muro una bola de plastilina o arcilla blanda, en cuyo caso se habla de una colisión completamente inelástica o **plástica**.

Esas pérdidas de energía son difíciles de estudiar con detalle y es más simple introducir el **coeficiente de restitución**  $e$ , debido a Newton, y definido, en este caso de colisión contra una pared inmóvil, como

$$e = -\frac{v_f}{v_i} = -\frac{v'}{(-v)} = \frac{v'}{v},$$





Las componentes de las velocidades al inicio y al final de la colisión son  $v_i$  y  $v_f$ . En el caso de una colisión elástica,  $e = 1$ , y en una colisión plástica,  $e = 0$ . El cambio en la energía cinética de la bola durante el choque o colisión es entonces

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v^2 (e^2 - 1) \leq 0.$$

El coeficiente de restitución es un coeficiente empírico que depende de los materiales de bola y pared, pero también de la velocidad. Más adelante generalizaremos su definición a la colisión de dos cuerpos móviles. Después de plantear por extenso los aspectos energéticos de la colisión bola-muro, retornemos al momentum y al impulso, asumiendo que usamos una bola de “buen rebote”, por ejemplo una bola de caucho, de modo que podemos considerar la colisión como aproximadamente elástica y así  $v = v'$ , con lo que la fuerza promedio hecha por la pared durante el choque es

$$F_{\text{media}} = \frac{2 m v}{\Delta t}.$$

Si  $m = 0.1 \text{ kg}$ , de modo que su peso, usando  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ , es aproximadamente  $1 \text{ N}$ ;  $v = 10 \text{ m/s}$  y  $\Delta t = 4 \text{ ms} = 4 \times 10^{-3} \text{ s}$ , entonces

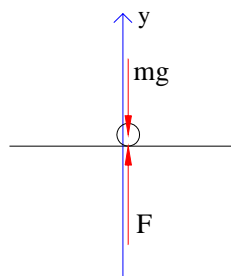
$$F_{\text{media}} = 500 \text{ N} = 500 \times (mg) = 500 \times \text{peso}.$$

¡La fuerza media durante el choque es 500 veces el peso de la bola!, fuerza enorme comparada con el peso, y la fuerza máxima durante el impacto es aún superior. Comparemos la magnitud del impulso en el eje  $y$  producido por el peso durante la colisión, con la magnitud del impulso producido en el eje  $x$  por la fuerza de impacto  $F$ :

$$\text{Impulso de } mg = \int_{t_i}^{t_f} mg \, dt = mg \, \Delta t$$

$$\text{Impulso de } F = \int_{t_i}^{t_f} F \, dt = F_{\text{media}} \, \Delta t = 500 \times (\text{Impulso de } mg).$$

El impulso del peso es 500 veces menor que el impulso de la fuerza de impacto  $F$ . Por esa razón, el cambio de velocidad en  $x$ , durante el breve tiempo de la colisión, es apreciable, importante, pero el cambio de velocidad en  $y$ , es muy pequeño, despreciable. Si la bola se hubiese lanzado verticalmente hacia abajo contra el piso, en cuyo caso la fuerza  $F$  y el peso estarían en un mismo eje vertical y sus impulsos en  $y$  se sumarían algebraicamente, tendríamos (obviamente las fuerzas no están dibujadas a escala)



en  $y$  :  $J^F + J^{mg} = \Delta p_y$

$$F_{\text{media}} \Delta t - \frac{1}{500} F_{\text{media}} \Delta t = \Delta p_y .$$

Vemos que el impulso del peso se puede despreciar, con muy pequeño error, en el cambio de momentum. Las fuerzas, como  $F$ , de gran magnitud y corta duración que en el tiempo muy breve en el que actúan producen un impulso considerable, se llaman **fuerzas impulsivas**. Son las fuerzas típicas de los impactos, percusiones, choques, colisiones, golpes. Son las que aparecen en tantos impactos usados en juegos: bate–bola; raqueta–bola; pie–balón; bola–taco, bola–bola o bola–banda en billar, en fin. Fuerzas como el peso producen impulsos que, con tiempo suficiente, pueden conducir a cambios significativos en el momentum, en la velocidad, pero durante el brevísimo lapso de tiempo de un choque, los impulsos de esas fuerzas moderadas, no impulsivas, suelen ser despreciables frente a los impulsos de las enormes fuerzas impulsivas de contacto en el impacto.

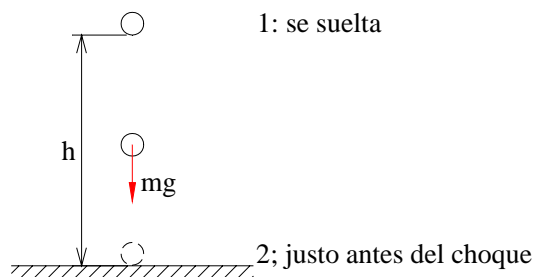
## 2. EJERCICIO

Una bola se suelta desde una altura  $h$  sobre el piso y rebota hasta una altura  $h'$ . Muestre que

el coeficiente de restitución de la colisión es  $e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$ .

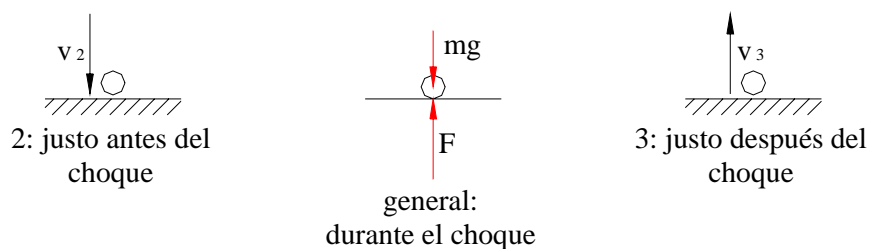
El problema tiene 3 partes. Sistema mecánico: la bola. Marco inercial: el piso.

a) el descenso:  $1 \rightarrow 2$



La conservación de la energía lleva a  $v_2 = \sqrt{2 g h}$ .

b) el choque:  $2 \rightarrow 3$



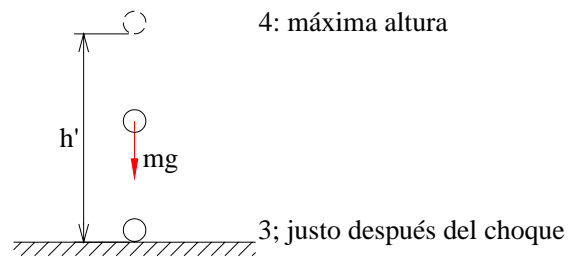
coeficiente de restitución:  $e = \frac{v_3}{v_2}$ .

Durante el choque no se conservan ni la energía ni el momentum de la bola. El cambio de energía es

$$\Delta K = K_3 - K_2 = \frac{1}{2} m (v_3^2 - v_2^2),$$

que, como  $v_3 < v_2$ ,  $\Delta K < 0$ . La energía perdida o disipada en el choque es así  $|\Delta K|$ .

c) el ascenso:  $3 \rightarrow 4$



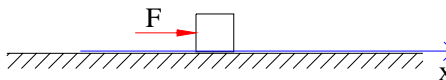
Por conservación de energía,  $v_3 = \sqrt{2 g h'}$ .

Por lo tanto,  $e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$ , lo que proporciona un método experimental sencillo para determinar  $e$ , para una bola y un piso dados.

### 3. EJEMPLO

Efecto de una fuerza impulsiva de impacto en el cambio de velocidad y en el cambio de posición.

Consideremos un bloque que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa y al cual le damos horizontalmente un golpe.



Durante el tiempo  $\Delta t$ , muy pequeño, que dura el golpe, el impulso en el eje  $x$  de la fuerza de impacto  $F$ , es

$$J = \int_0^{\Delta t} F dt = F_{\text{media}} \Delta t.$$

El producto de la enorme fuerza impulsiva constante  $F_{\text{media}}$ , por el pequeñísimo tiempo  $\Delta t$ , tiene como resultado un impulso apreciable, finito, de valor  $J$ .

La segunda ley, usando la  $F_{\text{media}}$  constante, aplicada a  $m$  es

$$F_{\text{media}} = m a_{\text{media}} \Rightarrow a_{\text{media}} = \frac{F_{\text{media}}}{m}.$$

Con esa  $a_{\text{media}}$ , constante, los cambios de velocidad y de posición durante  $\Delta t$  son

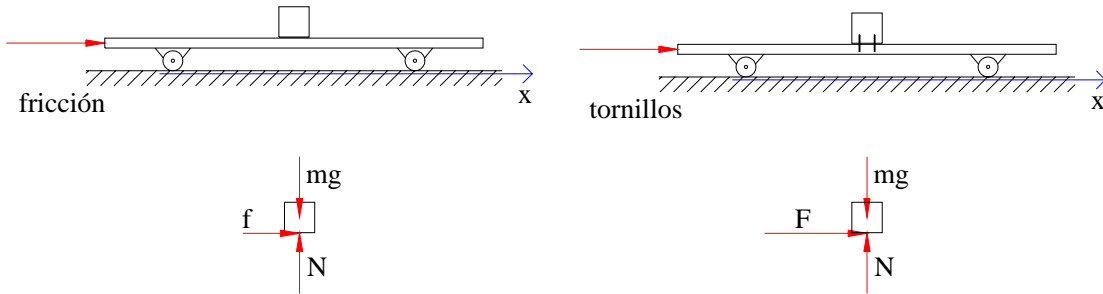
$$\Delta v = a_{\text{media}} \Delta t = \frac{F_{\text{media}}}{m} \Delta t = \frac{J}{m}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{\text{media}} (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \frac{J}{m} \Delta t = \frac{1}{2} \Delta v \times \Delta t \approx 0,$$

en donde el producto de un  $\Delta v$  finito, apreciable, por un  $\Delta t$  muy pequeño, es prácticamente nulo, y mientras más corta sea la duración del impacto, mejor será la aproximación. Así, como resultado de un impacto, hay un cambio sustancial, notable, en la velocidad, sin que la posición cambie apreciablemente.

#### 4. EJEMPLO

Para ilustrar la diferencia entre fuerzas impulsivas de impacto y fuerzas como una fricción no impulsiva, examinemos las siguientes situaciones: un bloque descansa sobre una plataforma que puede deslizarse sobre un piso horizontal. En un caso el bloque está simplemente colocado sobre la plataforma rugosa y en el otro, está atornillado a la plataforma.



$$\Delta p_x = m \Delta v = f \Delta t \approx 0$$

$$\Delta v \approx 0$$

$$\Delta p_x = m \Delta v = F \Delta t \neq 0$$

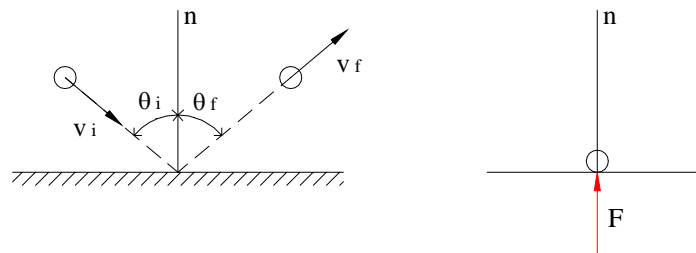
$$\Delta v \neq 0$$

Si se da un golpe a la plataforma, durante el breve tiempo  $\Delta t$  que dura, la fuerza en  $x$  sobre el bloque será, en un caso la fricción  $f$  y en otro la fuerza  $F$  hecha por los tornillos. La fricción es una fuerza no impulsiva, de valor máximo  $\mu mg$ , de modo que el cambio de velocidad del bloque durante el golpe es prácticamente nulo. Ahora, después del golpe, en tiempos más

prolongados, la fricción modificará la velocidad del bloque. En cambio, la fuerza de los tornillos es aquí una fuerza impulsiva, capaz de modificar la velocidad del bloque durante el brevísimo  $\Delta t$ , para que, al finalizar el impacto el bloque tenga obviamente la misma velocidad de la plataforma.

## 5. EJERCICIO

Una partícula choca oblicuamente con una pared lisa. Oblicuamente significa que la velocidad inicial  $\vec{v}_i$  forma un ángulo  $\theta_i$  con la normal a la pared. Si la colisión es elástica, muestre que la partícula rebota con un ángulo con la normal  $\theta_f$ , en el mismo plano que  $\theta_i$ , con  $\theta_i = \theta_f$ .



**Sugerencia:** como la pared es lisa, la fuerza hecha por ella es normal y la componente de la velocidad paralela al muro no cambia.

**Comentarios:** Esta ley es la misma que sigue un rayo luminoso que se refleja, en cuyo caso el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

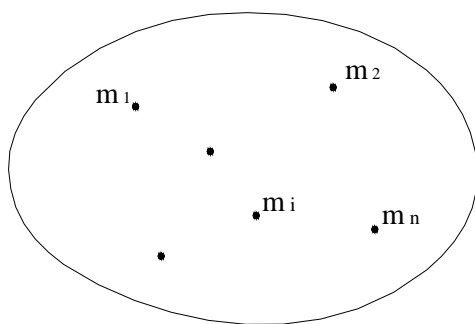
En el choque de una bola de billar contra la banda, la fuerza de fricción por deslizamiento en la banda cuando la bola está rotando, es una fuerza impulsiva tangencial, ya que al ser  $N$  impulsiva,  $\mu N$  también lo es, y así, ni la bola puede ser considerada como partícula, ni la pared como lisa y por tanto la colisión de una bola de billar con “efecto” contra la banda es un problema muy diferente, mucho más arduo.

## 6.2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS. MASA Y CENTRO DE MASA

Un sistema de partículas es un conjunto de partículas. Los elementos del sistema son pues partículas, es decir, puntos materiales o sea puntos geométricos con masa. Por ejemplo, el sistema sol–tierra puede idealizarse como un sistema de dos partículas, localizadas en sus centros geométricos, o bien el sistema tierra–luna, o, incluso, todo el sistema solar puede verse como un sistema de partículas. En otro tipo de ejemplos, dos bolas que chocan pueden considerarse como un sistema de dos partículas, siempre y cuando sus rotaciones no sean relevantes, e incluso dos autos que chocan pueden modelarse, de modo aproximado, como un sistema de dos partículas. Una cadena que se mueve sobre una superficie puede considerarse también como un sistema de partículas y, además, un cuerpo extenso puede verse como el límite de un sistema de muchas partículas como luego veremos.

Un sistema de partículas es un modelo físico–matemático abstracto. Los cuerpos reales no son, en sentido estricto, partículas. El asunto está en saber si tales o cuales cuerpos reales, con determinado propósito de estudio, pueden ser representados o modelados como sistemas de partículas. Ahora, esa representación de los cuerpos del mundo real mediante ese modelo abstracto será buena si las consecuencias matemáticas del modelo describen adecuadamente los movimientos reales de los cuerpos.

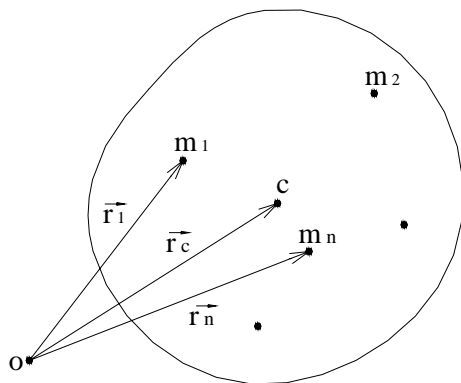
Consideremos un sistema discreto, o sea numerable, de partículas, y además finito, es decir un sistema de  $n$  partículas, de masas  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .



$$M = \sum_{i=1}^n m_i = \sum m_i$$

La masa total del sistema,  $M$ , es la suma de las masas. El símbolo sumatoria sin los índices, indica que la suma es para todas las partículas del sistema.

Un concepto de gran importancia física, como luego veremos, es el de centro de masa de un sistema de partículas. Sea un marco de referencia, con origen  $O$ , y sean  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , las posiciones de las partículas en un instante determinado. Se llama **centro de masa** de un sistema de partículas a un punto  $C$ , cuya posición  $\vec{r}_c$  es tal que  $M \vec{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$ .



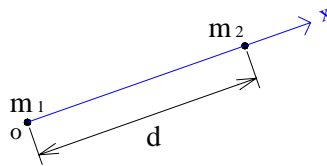
$$M = \sum m_i$$

$$M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$$

En un sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$ , la expresión vectorial tiene componentes

$$M x_c = \sum m_i x_i \quad ; \quad M y_c = \sum m_i y_i \quad ; \quad M z_c = \sum m_i z_i .$$

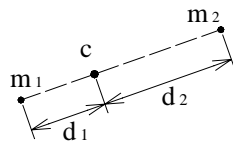
A veces se escriben las coordenadas del centro de masa como  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Como ejemplo calculemos el centro de masa de un sistema de dos partículas:



Elijamos origen en  $m_1$  y eje  $x$  en dirección de  $m_2$ . Así

$$(m_1 + m_2) x_c = m_1 \times 0 + m_2 d, \quad y_c = 0, \quad z_c = 0$$

$$x_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d = d_1, \quad d_2 = d - x_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d.$$

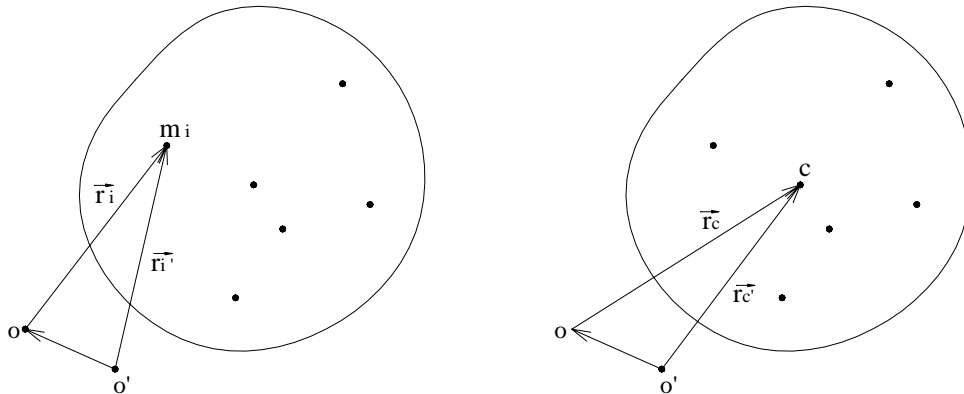


$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

El centro de masa está en la línea que une las partículas y las distancias a ellas son inversamente proporcionales a las masas: el centro de masa está más cerca de la partícula más masiva.

Veamos unas propiedades importantes del centro de masa de un sistema de partículas:

a) Independencia del origen



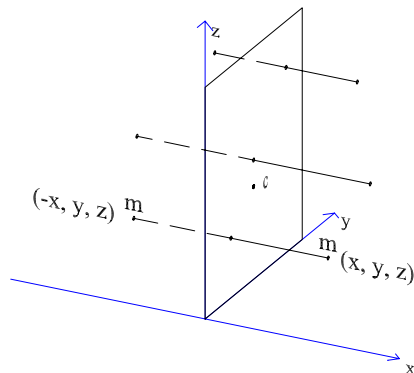
Si tomamos otro origen  $O'$ , la posición del centro de masa será

$$\vec{r}_c' = \frac{\sum m_i \vec{r}_i'}{M} = \frac{\sum m_i (\vec{O'O} + \vec{r}_i)}{M} = \vec{O'O} + \vec{r}_c,$$

y el vector  $\vec{r}_c'$  apunta de nuevo al mismo punto C.

## b) Simetrías

Si el sistema de partículas (o distribución de masas) tiene un plano de simetría, el centro de masa está sobre dicho plano.

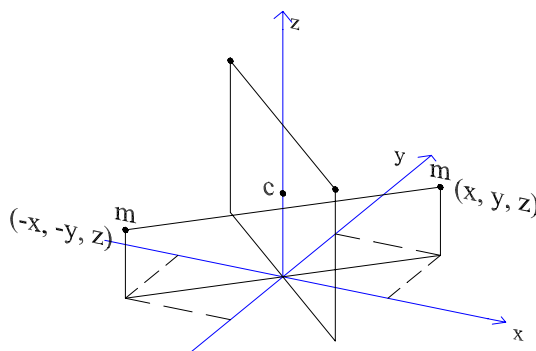


A cada masa le corresponde otra masa igual en un punto simétrico respecto al plano. Si el plano de simetría es el  $y z$ , a cada  $m$  en  $(x, y, z)$  le corresponde una  $m$  en  $(-x, y, z)$  y por tanto

$$x_c = \frac{1}{M} \sum m_i x_i = 0 \quad , \quad x_c = 0 \quad ,$$

puesto que la suma se anula por parejas.

Si el sistema tiene un eje de simetría, el centro de masa estará sobre él. En efecto, eligiendo como  $z$  el eje de simetría, a cada masa  $m$  en  $(x, y, z)$  le corresponde otra  $m$  igual en  $(-x, -y, z)$ .



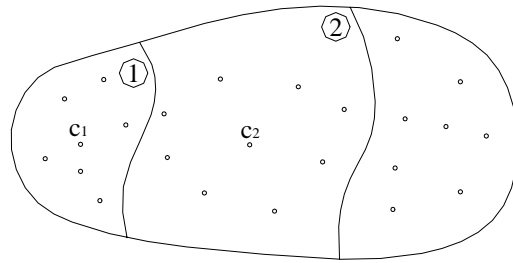
y así, al anularse las sumas por parejas,

$$x_c = \frac{1}{M} \sum m_i x_i = 0 \quad ; \quad y_c = \frac{1}{M} \sum m_i y_i = 0.$$

## c) Sistema compuesto

Consideremos un sistema formado por diversos subsistemas, cuyos respectivos centros de masa son  $C_1, C_2, \dots$





La suma para el centro de masa global  $C$  puede partirse en sumas para los subsistemas

$$M \vec{r}_c = \sum (1) m_i \vec{r}_i + \sum (2) m_i \vec{r}_i + \dots$$

Como, para cada parte, la suma es su masa por la posición de su propio centro de masa,

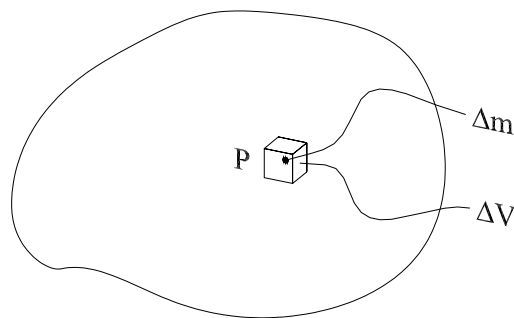
$$M \vec{r}_c = M_1 \vec{r}_{c_1} + M_2 \vec{r}_{c_2} + \dots$$

$$M \vec{r}_c = \sum M_j \vec{r}_{c_j},$$

es decir, la masa total por la posición del centro de masa global es la suma de las masas de las partes por las correspondientes posiciones de sus centros de masa. Este resultado es muy importante cuando un sistema se puede dividir en partes cuyos centros de masa son conocidos.

### 6.3 CUERPOS CONTINUOS. MASA Y DENSIDAD

Tomemos un punto  $P$  en el interior de un cuerpo extenso y tracemos a su alrededor una superficie cerrada, que delimita un volumen  $\Delta V$ . Sea  $\Delta m$  la masa contenida en ese volumen.



Se llama densidad media de ese trozo de cuerpo al cociente

$$\rho_{\text{media}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Para aproximarnos a lo que es la densidad en el punto P, tomemos la densidad media de un trozo de cuerpo alrededor de P y cuyo volumen  $\Delta V$  es cada vez menor. Mientras el volumen  $\Delta V$  sea macroscópico, es decir, contenga un gran número de moléculas, la densidad media tiende a un valor estable y bien definido. Pero a medida que el volumen  $\Delta V$  decrece, llega un momento en el que aparece la naturaleza granular, atómico-molecular, de la materia. En ese caso, el volumen  $\Delta V$  contendrá sólo unas cuantas moléculas, o ninguna. Es más, debido a la agitación térmica, esas moléculas pueden entrar y salir del volumen y entonces la relación  $\frac{\Delta m}{\Delta V}$  fluctuará entre un valor cero, si no hay ninguna molécula en  $\Delta V$ , y un valor muy grande

si hay una o algunas moléculas en él. Así, la relación física, real,  $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ , no tiende hacia un límite bien determinado.

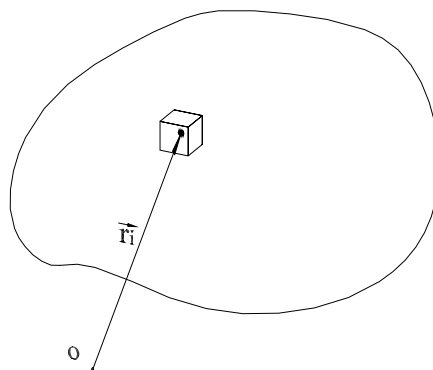
Ahora bien, en un **cuerpo continuo**, modelo físico-matemático abstracto, supondremos que cuando  $\Delta V$  tiende a cero, existe un límite matemático bien definido, que corresponde al valor de la densidad macroscópica media, y tal que

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV},$$

en el que  $\rho$  es la **densidad** de masa en el punto P. Si un cuerpo es continuo, su masa está distribuida en todo su volumen, de modo que un punto del cuerpo no tiene masa sino densidad de masa y cualquier elemento de volumen  $dV$  tiene una masa

$$dm = \rho dV.$$

Tomemos un cuerpo extenso y subdividámoslo en pequeños trozos de volúmenes  $\Delta V_i$  y masas  $\Delta m_i$ . Podemos asimilar esa subdivisión a un sistema de partículas de masas  $\Delta m_i$ , ubicadas en puntos  $\vec{r}_i$  dentro de su volumen  $\Delta V_i$ ,



El centro de masa de ese sistema de partículas, aproximación al centro de masa del cuerpo extenso, es tal que

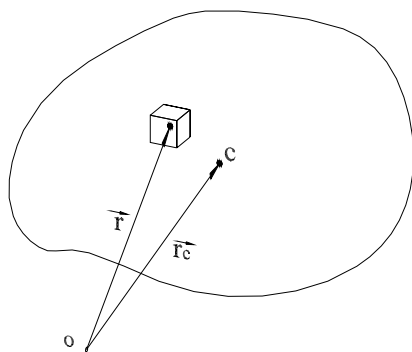
$$M \vec{r}_c = \sum \vec{r}_i \Delta m_i, \quad \text{con} \quad M = \sum \Delta m_i$$

Si refinamos la subdivisión, de modo que los  $\Delta V_i$  sean más pequeños y más numerosos, la aproximación al cuerpo extenso será mejor y, en el límite, cuando  $\Delta V_i \rightarrow 0$  y por tanto  $\Delta m_i \rightarrow 0$  y el número de partículas tiende a infinito, las sumas se convierten en integrales y el centro de masa del cuerpo cumplirá que

$$M \vec{r}_c = \int \vec{r} dm, \quad \text{con} \quad M = \int dm.$$

Así pues, un cuerpo continuo puede verse como el límite de una sucesión de sistemas de partículas, en los cuales las partículas están cada vez más próximas y son más numerosas y de menor masa cada una. Las propiedades del centro de masa de un sistema discreto se cumplen también en el caso de un cuerpo o sistema continuo.

Retomemos las ideas básicas de lo que es un cuerpo continuo: es un cuerpo que ocupa una región del espacio de volumen  $V$  y cuyos elementos son los puntos de esa región, en los cuales está definida una función  $\rho(\vec{r})$ , llamada la densidad de masa en un punto, de modo que la masa total del cuerpo y su centro de masa son

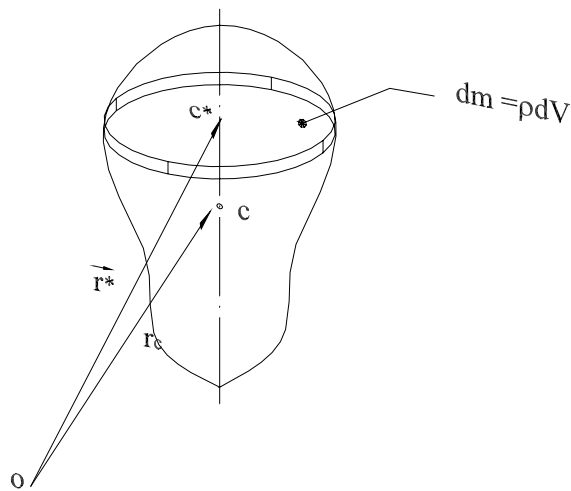


$$M = \int dm = \int \rho dV$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \rho \vec{r} dV.$$

Las integrales son integrales de volumen que se extienden a toda la región ocupada por el cuerpo.

Se usan con frecuencia elementos de masa, de volumen, de cierta “extensión”. Esto ocurre, por ejemplo, cuando en un sólido de revolución los elementos son discos. En ese caso, el centro de masa, usando el resultado del sistema compuesto, puede calcularse como



$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int \vec{r}^* dm$$

$\vec{r}^*$ : posición de  $C^*$ , centro de masa de  $dm$ .

La densidad volumétrica de masa,  $\rho$ , tiene dimensiones

$$[\rho] = ML^{-3} = \frac{M}{L^3}.$$

Su unidad en el Sistema Internacional, SI, es:  $kg/m^3$ . De especial importancia es la densidad del agua, que a presión atmosférica y unos  $4^\circ$  centígrados de temperatura, tiene un valor muy cercano a  $10^3 kg/m^3$ , o bien a  $1 g/cm^3$ . La densidad relativa de un cuerpo respecto al agua es

$$\rho_{rel} = \frac{\rho_{cuerpo}}{\rho_{agua}},$$

y es por tanto adimensional: un número. Se usa a veces el peso específico, peso por unidad de volumen, igual entonces a  $\rho g$ .

Un cuerpo es homogéneo si  $\rho$  es constante en todos los puntos y entonces

$$M = \rho V,$$

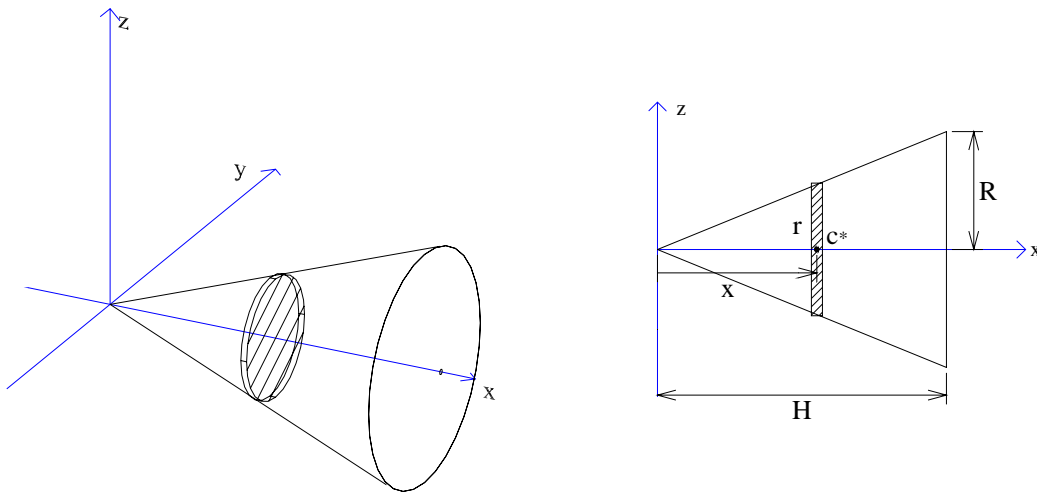
$$\vec{r}_c = \frac{1}{\rho V} \cdot \rho \int \vec{r}^* dV = \frac{1}{V} \int \vec{r}^* dV,$$

donde  $V$  es el volumen del cuerpo. La densidad se cancela y el punto  $C$ , llamado el **centroide** de la figura geométrica, sólo depende de la geometría del cuerpo. El centro de masa de un cuerpo homogéneo coincide con el centroide de la figura geométrica. En cierto lenguaje informal, no obstante, se habla de centro de masa para referirse tanto al cuerpo masivo como a la figura geométrica.

Hallar el centro de masa de un cuerpo es pues un problema de cálculo. Es conveniente mirar algunos casos simples de cuerpos sólidos homogéneos. Los centros de masa de cuerpos simétricos, como esferas, bloques rectangulares, cilindros circulares rectos, están en sus centros geométricos, según los teoremas de simetrías vistos antes.

## 1. EJEMPLO

Centro de masa de un cono homogéneo de radio  $R$  y altura  $H$ .



El eje  $x$  es de simetría y  $C$  estará sobre él. Basta hallar  $x_c$ . Como el cuerpo es homogéneo,

$$\vec{r}_c = \frac{1}{V} \int \vec{r}^* dV, \quad \text{con } \vec{r}^* : \text{posición de } C^*, \text{ centroide de } dV.$$

Tomando la componente  $x$ ,

$$x_c = \frac{1}{V} \int x^* dV.$$

Como elemento de volumen tomemos discos cuyo  $C^*$  está, por simetría, en el centro del disco. Así,

$$x^* = x$$

$$dV = \pi r^2 dx$$

Por semejanza de triángulos, o bien por la ecuación de la recta

$$r = \frac{R}{H} x ,$$

y entonces

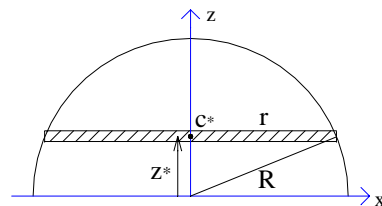
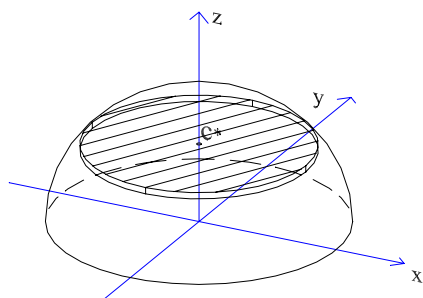
$$dV = \frac{\pi R^2}{H^2} x^2 dx , \quad V = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{1}{3} \pi R^2 H ,$$

y

$$x_c = \frac{1}{V} \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} x^3 dx = \frac{3H}{4} .$$

## 2. EJERCICIO

Centro de masa de una semiesfera homogénea



C está sobre el eje  $z$ , de simetría.

$$z_c = \frac{1}{V} \int z^* dV$$

$$z^* = z$$

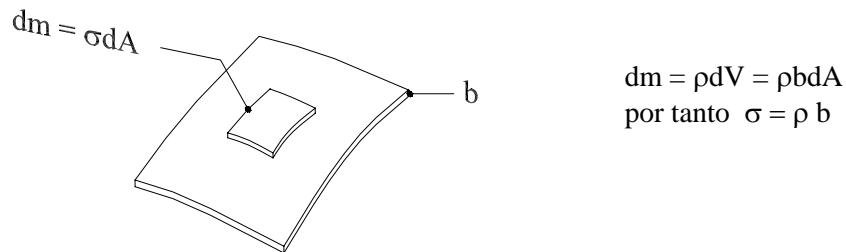
$$dV = \pi r^2 dz$$

$$r^2 = R^2 - z^2 ,$$

$$z_c = \frac{3}{8} R .$$

### Densidad superficial de masa

Con frecuencia se estudian cuerpos como conchas, cáscaras, membranas, placas delgadas, con un espesor muy pequeño en comparación con las dimensiones de su superficie. En esos casos es conveniente introducir la densidad superficial de masa,  $\sigma$ , masa por unidad de área.



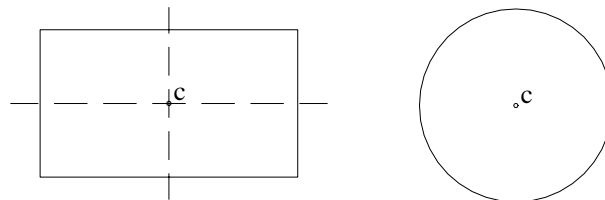
$dA$  es el elemento de área y  $b$  el espesor. En el límite de espesor muy pequeño se habla de una distribución superficial de masa. Si el cuerpo es homogéneo,  $\sigma$  es constante y el centro de masa es

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \int \bar{r}^* dm = \frac{1}{\sigma A} \cdot \sigma \int \bar{r}^* dA = \frac{1}{A} \int \bar{r}^* dA .$$

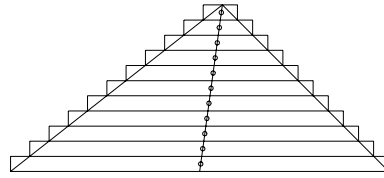
La última expresión define el centroide del área, que sólo depende de las características geométricas. El centro de masa de una distribución superficial de masa, homogénea, coincide con el centroide del área. Si tenemos en cuenta el espesor, el centro de masa de una placa, digamos plana, no está realmente en su superficie sino en la mitad de su espesor, pues por allí pasa un plano de simetría. Si la placa con espesor es curva el asunto es más complejo.

Vamos a mirar el centroide de diversas áreas, o bien el centro de masa de las correspondientes placas homogéneas muy delgadas.

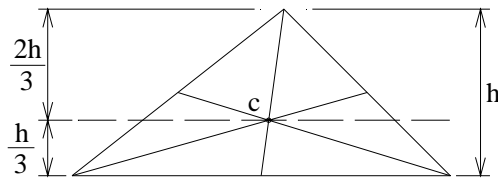
En cuerpos simétricos, como placas rectangulares o circulares, el centro de masa coincide con el centro geométrico.



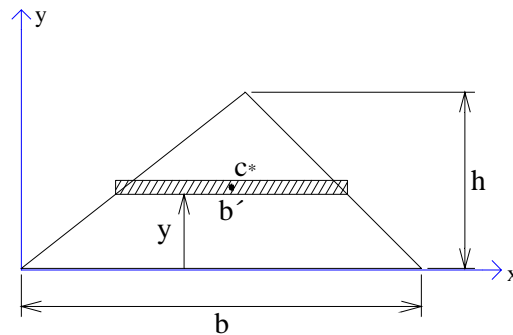
Muy importante es el centroide de un triángulo o centro de masa de una placa triangular homogénea, también llamado baricentro o centro de gravedad, concepto que después estudiaremos al considerar el peso de un cuerpo extenso. Consideremos la placa triangular como formada por placas rectangulares, muy delgadas, paralelas a su base



El centro de cada franja está en su punto medio y entonces, en el límite, el centro de masa de la placa triangular estará sobre la línea que une todos los puntos medios, es decir sobre la mediana. Como se sabe de la geometría, las tres medianas se cortan en un punto, centroide del triángulo o centro de masa de la placa triangular, punto situado a  $1/3$  de la base y  $2/3$  del vértice, así



Que el centro de masa se encuentra a  $h/3$  de la base se muestra fácilmente con el cálculo:



$$y_c = \frac{1}{A} \int y^* dA$$

con

$$y^* = y$$

$$dA = b' dy.$$

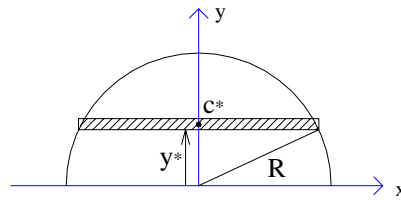
Por triángulos semejantes,  $b' = \frac{b}{h} (h - y),$

$$y_c = \frac{h}{3}.$$

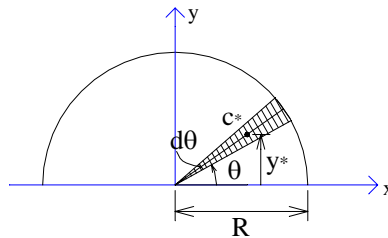


### 3. EJERCICIO

Hallar el centro de masa de una placa delgada semicircular homogénea. (o bien el centroide de un semicírculo como figura geométrica)



El centro de masa está sobre y, eje de simetría. Como ejercicio de cálculo se propone el elemento de área rectangular mostrado. Pero el cálculo es más simple usando como elemento de área el pequeño sector circular de las coordenadas polares, equiparable a un triángulo para ubicar  $C^*$ .



$$y^* = \frac{2}{3} R \sin \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

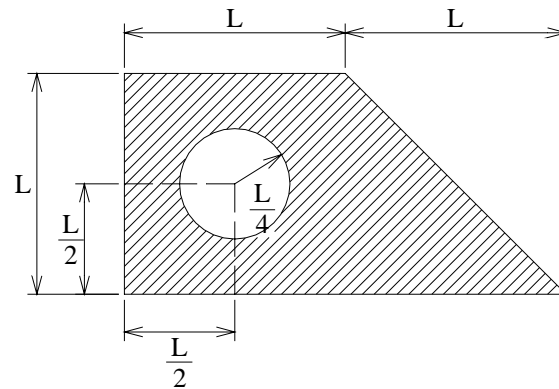
$$y_c = \frac{1}{A} \int_0^\pi \left( \frac{2}{3} R \sin \theta \right) \left( \frac{1}{2} R^2 d\theta \right)$$

$$y_c = \frac{4R}{3\pi} .$$

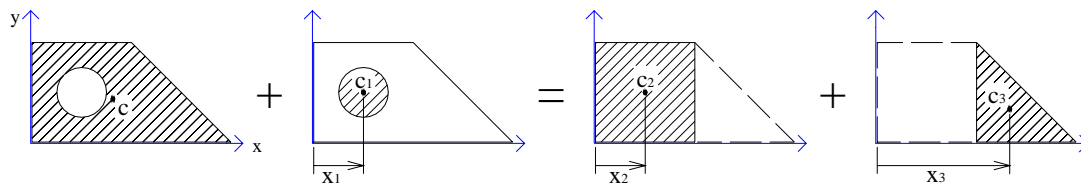
### 4. EJERCICIO

Es sencillo hallar el centro de masa de un cuerpo compuesto por partes cuyos centros de masa se conocen, aplicando el resultado que vimos para un sistema compuesto. Veamos.

Hallar el centro de masa de una placa delgada homogénea de la forma mostrada, con un agujero circular, lo que equivale a hallar el centroide del área, pues la densidad superficial  $\sigma$  es constante.



El trapecio plano puede descomponerse de dos maneras diferentes así



Por tanto  $A \bar{x} + A_1 \bar{x}_1 = A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3$ ,

con  $A + A_1 = A_2 + A_3$ .

Las ubicaciones de los centroides de las componentes 1, 2 y 3 son conocidas y así se obtiene

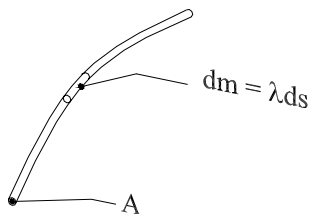
$$\bar{x} = 0.82 L.$$

Análogamente se muestra que

$$\bar{y} = 0.44 L.$$

### Densidad lineal de masa

Cuando hay cuerpos como alambres, cuerdas o varillas delgadas, cuyas dimensiones transversales son muy pequeñas comparadas con su longitud, es útil el concepto de densidad lineal de masa,  $\lambda$ , masa por unidad de longitud.



$$dm = \rho dV = \rho A ds$$

por tanto  $\lambda = \rho A$

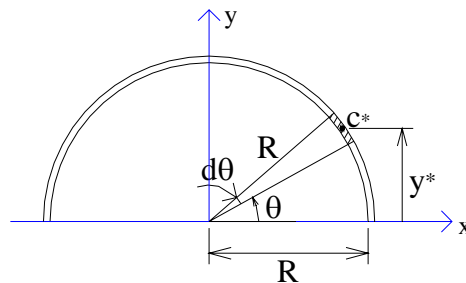
$ds$  es el elemento de arco y  $A$  el área de la sección transversal. En el límite de calibre muy pequeño se habla de una distribución lineal de masa. Si el cuerpo es homogéneo,  $\lambda$  es constante y el centro de masa es

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int \vec{r}^* dm = \frac{1}{\lambda L} \cdot \lambda \int \vec{r}^* ds = \frac{1}{L} \int \vec{r}^* ds .$$

que es también el centroide de la línea como figura geométrica.

## 5. EJERCICIO

Hallar el centro de masa de un alambre homogéneo y delgado en forma de semicircunferencia.



El centro de masa está sobre el eje  $y$ , de simetría.

$$y_c = \frac{1}{L} \int y^* ds ,$$

$$ds = R d\theta$$

$$y^* = R \sin \theta ,$$

y por lo tanto

$$y_c = \frac{2R}{\pi} .$$

## 6.4 DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. MOMENTUM. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA

Una partícula en movimiento está caracterizada, según lo que hemos estudiado, por dos cantidades dinámicas básicas, el momentum,  $\vec{p} = m \vec{v}$  y la energía cinética,  $K = \frac{1}{2} m v^2$ .

Las relaciones fundamentales de la **dinámica de una partícula**, son las que se establecen entre dichas cantidades dinámicas y aquellas otras cantidades que cuantifican las interacciones

de la partícula con su entorno, que son la fuerza neta hecha sobre la partícula,  $\vec{F}$ , y el trabajo realizado por dicha fuerza,  $W$ .

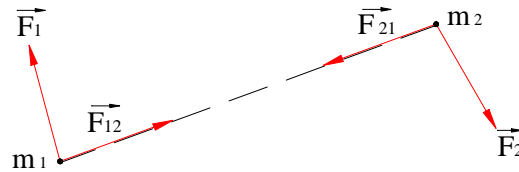
Las relaciones, válidas respecto a un marco inercial de referencia, son

$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ $W = \Delta K$	Dinámica de una partícula
---	---------------------------

Más adelante introduciremos el momentum angular y el torque, magnitudes que nos faltan para completar el panorama de la dinámica de una partícula. Ahora vamos a mostrar como las relaciones básicas para una partícula nos permiten obtener resultados fundamentales para el movimiento de un sistema de partículas.

En el caso de un sistema de partículas es necesario establecer la distinción entre **fuerzas externas**, ejercidas sobre las partículas del sistema por cuerpos externos a él, y **fuerzas internas**, que son las fuerzas de interacción entre las propias partículas del sistema.

Consideremos en primer lugar, por sencillez, un sistema de dos partículas



$\vec{F}_1$  es la fuerza externa sobre 1.  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza interna sobre la partícula 1 hecha por la 2. De modo análogo se escriben las fuerzas sobre 2. La tercera ley de Newton establece que las fuerzas  $\vec{F}_{12}$  y  $\vec{F}_{21}$  son de igual magnitud y dirección contraria,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Es común considerarlas como centrales, es decir, a lo largo de la línea que une 1 y 2, pero, en rigor, para el análisis que haremos ahora, no sería necesario que estuviesen en la misma línea.

Las leyes de movimiento para  $m_1$  y  $m_2$  son

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt},$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}.$$

Al sumarlas, las fuerzas internas se anulan, de acuerdo a la tercera ley, y por lo tanto

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt}.$$

Llamando  $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  a la fuerza externa neta sobre el sistema y  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  al momentum total del sistema, tendremos

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}} \quad ,}$$

relación válida respecto a un marco inercial de referencia. Aunque hemos obtenido esta relación para un sistema de dos partículas, es fácil extender su demostración para un sistema de N partículas, pues al sumar las ecuaciones para las diversas partículas las fuerzas internas se cancelan por parejas. El momentum del sistema será

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad .$$

Recordemos el concepto de centro de masa C

$$M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i \quad .$$

Derivando respecto al tiempo,

$$M \vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i \quad ,$$

donde  $\vec{v}_c$  es la velocidad del centro de masa, y entonces

$$\vec{P} = M \vec{v}_c \quad ,$$

y por tanto

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_c \quad ,$$

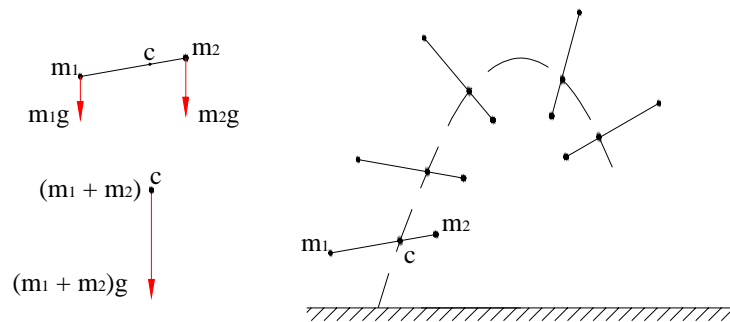
siendo  $\vec{a}_c$  la aceleración del centro de masa.

Esta última relación describe el movimiento del centro de masa de un sistema: el centro de masa se mueve como una partícula cuya masa es la masa total del sistema y sobre la que actúa una fuerza neta que es simplemente la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Muchos de los cuerpos que estudiamos son sólidos cuyas pequeñas deformaciones no son, en muchos casos, relevantes y podemos considerarlos como rígidos. Pues bien un cuerpo rígido puede verse como un sistema de partículas cuyas distancias entre ellas son constantes. O también, en el límite, es un cuerpo continuo cuyas distancias entre puntos son constantes. En cualquier caso, las fuerzas internas que mantienen la cohesión y rigidez del cuerpo no interesan para el movimiento de su centro de masa, que se rige por la expresión

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_c .$$

A la luz de este resultado, podemos reinterpretar el estudio que hacíamos del movimiento de traslación de un bloque considerándolo como una partícula: el centro de masa del bloque se mueve realmente como una partícula sobre la que actúan todas las fuerzas externas. En esos casos de traslación, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad, de modo que el movimiento del centro de masa describe plenamente el movimiento de todo el cuerpo. En otros casos, cuando hay rotaciones, el movimiento del centro de masa puede describirse a veces de modo muy sencillo, pero el movimiento más complejo que describe el cuerpo alrededor del centro de masa requiere de otros conceptos que luego veremos. Por ejemplo, consideremos un sistema rígido de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$ , unidas por una varilla de masa despreciable y supongamos que lo lanzamos al aire.



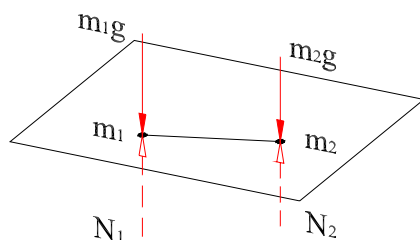
Despreciando la fuerza de fricción con el aire, el movimiento del centro de masa está dado por

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_c : \quad m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} = (m_1 + m_2) \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = \vec{g} ,$$

y por tanto el centro de masa se mueve con movimiento parabólico, aunque el cuerpo describa complejos movimientos de rotación alrededor del centro de masa. Ahora, si el cuerpo es más complejo, el análisis es similar. Puede ser un cuerpo de forma cualquiera. Más aún no tiene que ser rígido. Por ejemplo, si una cadena se lanza al aire, o un atleta realiza un salto, pese a los variados movimientos que puedan tener, su centro de masa describe ineluctablemente una parábola. Incluso, siempre y cuando la resistencia del aire pueda depreciarse, el centro de masa de un puñado de arena arrojado a voleo, sigue un curso parabólico, independientemente de los movimientos relativos entre las partículas del sistema.

Retornemos por un momento al sistema de dos partículas unidas por una varilla rígida de masa despreciable. Si el sistema se mueve sobre una mesa horizontal lisa, el diagrama de fuerzas externas será



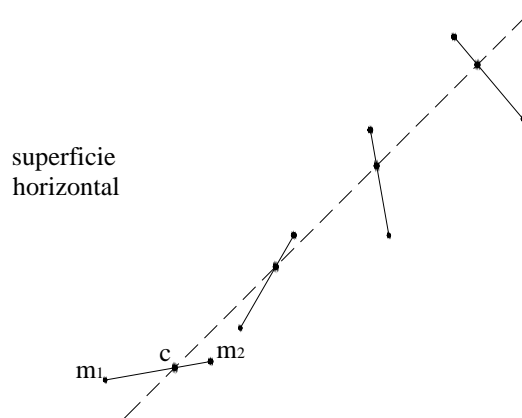
En el plano horizontal

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

y por tanto el momentum del sistema es constante, con lo que

$$\vec{P} = M \vec{v}_c = \text{constante},$$

y el centro de masa se mueve con movimiento uniforme rectilíneo por la mesa horizontal.



$m_1$  y  $m_2$  no tienen que estar conectadas por una varilla rígida. Podrían estar conectadas por un resorte ideal de masa despreciable. Su movimiento relativo sería más complejo, pero su centro de masa tendría igualmente un movimiento rectilíneo uniforme por la mesa lisa.

En general, si la resultante de las fuerzas externas sobre un sistema es nula, el momentum o cantidad de movimiento total del sistema se mantiene constante durante el movimiento.

Si  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$  ,  $\vec{P} : \text{constante},$

que es la **ley de conservación del momentum**, ley de gran importancia, que trasciende incluso el ámbito de la mecánica newtoniana en el que la estamos estudiando. Como la relación entre fuerza externa y derivada del momentum es vectorial, es posible que se anule la componente de la fuerza en una determinada dirección, con lo que se conserva la componente del momentum del sistema en esa dirección.

Como el momentum del sistema es  $\vec{P} = M \vec{v}_c$ , si  $\vec{P}$  es constante,  $\vec{v}_c$  es constante y puede elegirse un marco inercial de referencia con origen en el centro de masa, respecto al cual el momentum total es nulo y en el cual pueden estudiarse con más sencillez ciertos problemas.

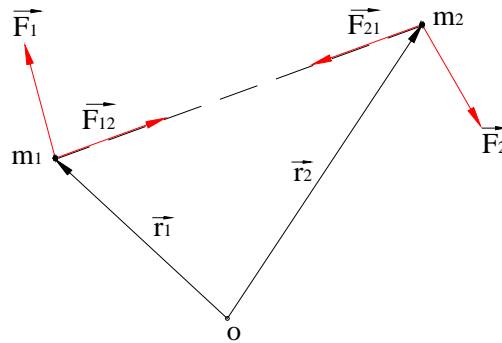
En este tratamiento elemental, hemos obtenido la relación fundamental,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

para un sistema, basándonos en la tercera ley de Newton para la cancelación por parejas de las fuerzas internas. Pues bien, en el estudio moderno de cuerpos extensos, rígidos o deformables, la relación fundamental, que realmente es debida a Euler, suele tomarse como postulado básico, sin hacerla depender directamente de esa estructura de partículas con fuerzas por parejas de acuerdo a la tercera ley de Newton.

## 6.5 DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. ENERGÍA

Consideremos un sistema de dos partículas y supongamos que su fuerza de interacción, que satisface la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , es una fuerza central, es decir, es a lo largo de la línea que las une.



Sean  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  sus posiciones respecto a un marco inercial con origen en O. El teorema del trabajo y la energía aplicado a cada partícula, entre situaciones A y B, es

$$\int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \cdot d\vec{r}_1 = K_{1B} - K_{1A}$$

$$\int_A^B (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \cdot d\vec{r}_2 = K_{2B} - K_{2A}.$$



Sumando esas expresiones, tenemos, dado que  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ,

$$\int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = (K_1 + K_2)_B - (K_1 + K_2)_A.$$

Sean:  $K = K_1 + K_2$  la energía cinética total del sistema;

$$W_{\text{ext}}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2$$

el trabajo externo, trabajo realizado por las fuerzas externas, y

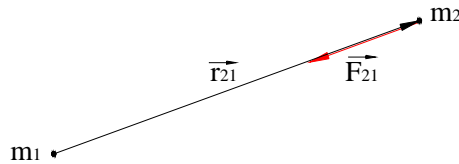
$$W_{\text{int}}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1),$$

el trabajo interno, trabajo realizado por las fuerzas internas. Teniendo en cuenta la posición relativa de 2 respecto a 1,

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad d\vec{r}_{21} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1,$$

el trabajo interno puede verse como

$$W_{\text{int}}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21} = \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot \vec{v}_{21} dt,$$



integral de la fuerza interna  $\vec{F}_{21}$ , escalarmente por el desplazamiento relativo elemental  $d\vec{r}_{21}$ . Podemos intercambiar los índices 1 y 2 y entonces

$$W_{\text{int}}_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}.$$

Con las notaciones introducidas, la suma para las dos partículas se escribe

$$\boxed{W_{\text{ext}}_{A \rightarrow B} + W_{\text{int}}_{A \rightarrow B} = K_B - K_A,}$$

que también puede escribirse como

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K ,$$

que es el teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas. Al generalizar para un sistema de  $N$  partículas, la energía cinética del sistema será

$$K = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$

El trabajo externo,  $W_{\text{ext}}$  es el trabajo de todas las fuerzas externas y el trabajo interno,  $W_{\text{int}}$  , se obtiene agrupando por parejas, como,

$$W_{\text{int}} = \sum \int \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} ,$$

donde la suma se extiende a todas las parejas de partículas.

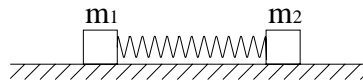
El comportamiento de la energía cinética y del momentum de un sistema difieren en un aspecto esencial. El cambio en el momentum del sistema sólo puede ser producido por fuerzas externas, sin que las fuerzas internas, sean cuales sean, contribuyan en nada, según lo establecido en la relación

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \dot{\vec{P}} ,$$

a diferencia de la energía cinética del sistema, a cuyo cambio contribuyen en general tanto el trabajo de las fuerzas externas como el de las fuerzas internas, según la relación

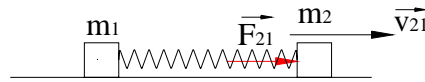
$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K .$$

En efecto, en general el trabajo interno no se anula. Volvamos al sistema de dos partículas para verlo. Consideremos el sistema de dos partículas que se mueven por una pista rectilínea lisa, ligadas por un resorte ideal sin masa.



Si los bloques se sueltan cuando el resorte tiene una cierta compresión, la energía cinética inicial y el momentum inicial del sistema son ambos cero. Ambos bloques comienzan a moverse separándose, de modo que, como no hay fuerza externa, el momentum del sistema se mantiene igual a cero, pero la energía cinética aumenta debido al trabajo de la fuerza elástica interna. En efecto, el trabajo interno

$$W_{\text{int}} = \int \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21} = \int \vec{F}_{21} \cdot \vec{v}_{21} dt$$



es positivo puesto que  $\vec{F}_{21}$  y  $\vec{v}_{21}$  tienen la misma dirección. En este caso la fuerza interna es conservativa y existe una energía potencial interna,  $U_i = \frac{1}{2} k d^2$ , donde  $k$  es la constante del resorte y  $d$  la deformación, tal que  $W_{\text{int}} = -\Delta U_i$ .

Hay un caso importante, sin embargo, en el cual el trabajo interno es cero. Si dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  forman un sistema rígido, es decir, están unidas por una varilla sin masa, de modo que  $|\vec{r}_{21}| = \text{constante}$ , y suponemos que la fuerza interna es central, es decir sólo puede ser una atracción o una repulsión,  $\vec{F}_{21}$  está en dirección de  $\vec{r}_{21}$ . Pero como

$$|\vec{r}_{21}|^2 = \vec{r}_{21} \cdot \vec{r}_{21} \text{ constante},$$

derivando respecto al tiempo,

$$\vec{r}_{21} \cdot \vec{v}_{21} + \vec{v}_{21} \cdot \vec{r}_{21} = 0,$$

$$\vec{r}_{21} \cdot \vec{v}_{21} = 0, \quad \text{y} \quad \vec{r}_{21} \perp \vec{v}_{21}$$

entonces  $\vec{v}_{21}$  es ortogonal a  $\vec{F}_{21}$  y

$$W_{\text{int}} = \int \vec{F}_{21} \cdot \vec{v}_{21} dt = 0.$$

En palabras: como la distancia es constante,  $m_2$  sólo puede rotar respecto a  $m_1$  y así su desplazamiento elemental  $d\vec{r}_{21}$  es perpendicular a  $\vec{r}_{21}$  y por tanto a  $\vec{F}_{21}$ .

Este argumento puede extenderse a un sistema rígido de cualquier número de partículas y por tanto el trabajo interno en un sistema rígido, en un cuerpo rígido, es nulo, sea cual sea su movimiento global. El teorema de la energía para un cuerpo rígido es pues

Cuerpo Rígido:  $W_{\text{int}} = 0$ ,  $W_{\text{ext}} = \Delta K$ .

Si las fuerzas internas en un sistema de partículas son conservativas, por ejemplo, fuerzas de atracción gravitacional, existirá una energía potencial asociada a cada pareja de partículas, de modo que

$$W_{\text{int}} = -\Delta U_i$$

donde  $U_i$  es la suma de las energías potenciales internas. En este caso la relación fundamental para la energía del sistema es

$$W_{\text{ext}} = \Delta(K + U_i) .$$

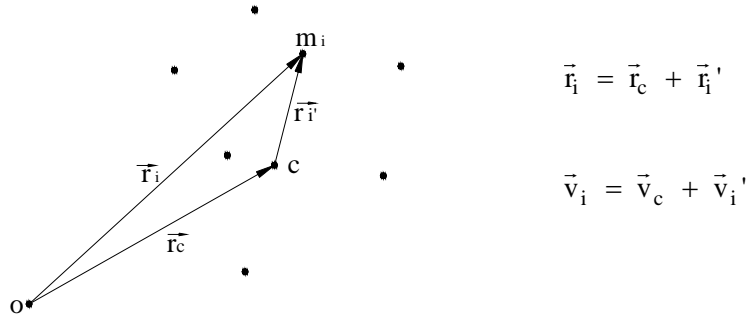
Si el sistema es aislado y no hay interacciones externas,  $W_{\text{ext}} = 0$ , el valor de  $K + U_i$ , a veces llamado energía propia, es constante.

$$W_{\text{ext}} = 0, \quad K + U_i : \text{ constante.}$$

Si las fuerzas externas son también conservativas y hay entonces una energía potencial externa  $U_e$ , habrá conservación de la energía total  $E$ ,

$$E = K + U_i + U_e : \text{ constante.}$$

Las posiciones y velocidades,  $\vec{r}_i, \vec{v}_i$ , de las partículas de un sistema, están referidas a un marco inercial con origen en  $O$ . Definamos un nuevo marco de referencia, en traslación respecto al marco inercial, y con origen en el centro de masa  $C$ . Se llama el **marco de referencia del centro de masa**. Si no hay  $\vec{F}_{\text{ext}}$ ,  $\vec{v}_c$  es constante y el marco del centro de masa es inercial, pero si hay  $\vec{F}_{\text{ext}}$ , habrá aceleración de  $C$  y dicho marco no será inercial. En cualquier caso, es importante conocer como se relaciona el movimiento del sistema respecto al marco inercial en  $O$ , llamado a veces marco del laboratorio, con el movimiento respecto al marco del centro de masa. En concreto, debemos conocer como son el momentum y la energía cinética del sistema respecto al marco en  $O$  y al marco en traslación en  $C$ . Para ello, llamemos  $\vec{r}_i', \vec{v}_i' = \dot{\vec{r}}_i'$ , a las posiciones y velocidades respecto al marco  $C$ .  $\vec{P}'$  y  $K'$  serán el momentum y la energía cinética respecto a dicho marco  $C$ .



Por definición del centro de masa  $C$ ,

$$M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i, \quad M \vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i .$$

La posición y la velocidad de  $C$  respecto al marco de referencia del centro de masa, con origen en  $C$ , son cero,  $\vec{r}_c' = 0$ ,  $\vec{v}_c' = 0$  y así

$$M \vec{r}'_c = 0 = \sum m_i \vec{r}'_i \quad , \quad M \vec{v}'_c = 0 = \sum m_i \vec{v}'_i \quad .$$

Ahora,

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) = \vec{v}_c \sum m_i + \sum m_i \vec{v}'_i \quad ,$$

$$\vec{P} = M \vec{v}_c + \vec{P}' \quad , \quad \text{pero } \vec{P}' = \sum m_i \vec{v}'_i = 0 \quad ,$$

$$\vec{P} = M \vec{v}_c \quad .$$

El momentum del sistema respecto al marco del centro de masa es siempre nulo y así el momentum respecto al marco en O es simplemente el momentum que tendría una partícula con la masa total M moviéndose con el centro de masa.

Para la energía cinética,

$$\begin{aligned} K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}'_i \quad . \end{aligned}$$

El último término, como ya vimos, es nulo. La energía cinética respecto al marco C es

$$K' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad ,$$

y entonces,

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K' \quad ,$$

la energía cinética de un sistema respecto a un marco en O, es igual a la suma de la que tendría una partícula con la masa total M y moviéndose con el centro de masa, más la energía cinética del movimiento relativo del sistema respecto al marco en traslación con origen en C. Este resultado se conoce como el teorema de König.

Retornemos al teorema básico del trabajo y la energía para un sistema de partículas:

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K \quad .$$

En la mecánica macroscópica trabajamos con frecuencia con sistemas cuyas “partículas” son realmente cuerpos macroscópicos de los que hacemos una idealización. Sean, por ejemplo, dos bolas que chocan plásticamente quedando unidas entre sí. En ausencia de fuerzas externas,  $W_{\text{int}} = \Delta K$ . Como luego calcularemos con detalle, hay aquí una pérdida de energía cinética, macroscópica, del sistema de las dos bolas, que consideramos como partículas pero que

realmente son cuerpos extensos, deformables, con estructura interna compleja. Desde el punto de vista de la energía mecánica macroscópica, podemos decir que hay una pérdida de energía cinética debido a que hay un trabajo interno negativo. Pero, ¿cuál es la naturaleza de ese trabajo interno?, ¿cómo se realiza? Lo que sucede es que los cuerpos tienen una estructura interna, que en último caso es la estructura atómica, y que existe tanto una energía cinética debida del movimiento de los átomos y moléculas, como una energía potencial debida a sus mutuas interacciones. Globalmente estas energías conforman la energía interna, energía que se ve entonces modificada en la colisión macroscópica: hay reacomodamientos interiores, hay aumento en la energía cinética de agitación molecular, íntimamente vinculada con la temperatura. La energía interna se puede estudiar de forma global y macroscópica en la Termodinámica, o de forma atómico-molecular en la Física Estadística. En la mecánica macroscópica llegamos hasta la pérdida de la energía mecánica por un trabajo interno negativo, sin profundizar en la energía interna.

En otro ejemplo diferente, consideremos como sistema de dos “partículas” el sistema formado por un hombre y un bote. El hombre está parado en el extremo del bote. Ambos están en reposo y la energía cinética del sistema es cero. Despreciemos la fricción con el agua de modo que no hay fuerzas externas y  $W_{\text{ext}} = 0$ . Cuando el hombre salta en una dirección, el bote se mueve en la otra, como después cuantificaremos con el momentum. Lo que ahora nos interesa es que hay una ganancia de energía mecánica, cinética, del sistema y por ende un trabajo interno positivo. ¿De dónde salió esa energía? De la energía interna del hombre: el hombre durante el salto hace un gasto de su energía interna que se torna energía cinética macroscópica, cuya cuantificación global puede estudiarse en la mecánica, pero no los detalles de la modificación de las energías internas, del trabajo interno.

## 6.6 APLICACIONES

Recordemos las dos relaciones fundamentales que hemos estudiado para un sistema de partículas:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K ,$$

en donde el momentum del sistema es  $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$ , la energía cinética del sistema es  $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ , y las relaciones son válidas respecto a un marco inercial de referencia, que en muchos casos es un marco ligado a tierra.

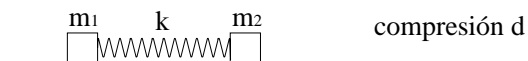
Como ya sabemos, al estudiar un problema lo primero y fundamental es definir con precisión cuál es el sistema mecánico. ¿Cuáles son los cuerpos que lo forman? ¿Pueden ser idealizados como partículas? Hay que realizar el diagrama de fuerzas externas en una situación general del sistema. Para hacer el análisis del momentum, basta con el diagrama de fuerzas externas. Pero para estudiar la energía es necesaria la consideración del trabajo de las fuerzas internas. En algunos casos puede hacerse con precisión un diagrama de las fuerzas internas entre las

“partículas” del sistema y se puede calcular explícitamente su trabajo. En otros casos hay, que limitarse a esquemas y consideraciones cualitativas, como ya dijimos al hablar de la energía interna de los cuerpos extensos.

Una vez precisado el sistema mecánico y determinados los cuerpos que van a ser considerados como “partículas” de dicho sistema, es necesario determinar el marco inercial de referencia. En muchos casos hay que elegir en dicho marco unas coordenadas específicas, aunque a veces pueden hacerse tratamientos vectoriales generales sin apelar a unas coordenadas. Es importante definir adecuadamente las situaciones inicial y final del movimiento del sistema. La realización clara de unos esquemas en los que figuren las masas y las velocidades de las partes del sistema en esas situaciones, facilita los planteamientos del momentum y la energía cinética. Recuérdese que las velocidades que figuran en ese momentum y en esa energía, son velocidades respecto al marco inercial de referencia y son entonces esas velocidades las que deben aparecer en los esquemas.

Pueden ahora aplicarse las relaciones básicas. El momentum, vector, puede estudiarse en direcciones específicas. En varios problemas, el análisis se limita al momentum, sin considerar las fuerzas internas ni la energía. En otros, en cambio, sólo se estudia la energía.

## 1. EJEMPLO

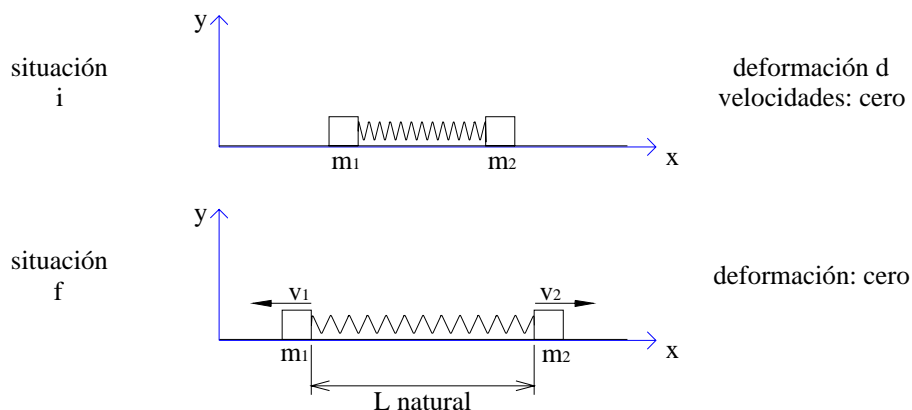


Dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$ , unidos por medio de un resorte de constante  $k$ , pueden moverse sobre una superficie horizontal lisa. Si se da una compresión inicial  $d$  al resorte y se sueltan los bloques, hallar sus velocidades en la situación en que el resorte llega a su longitud natural.

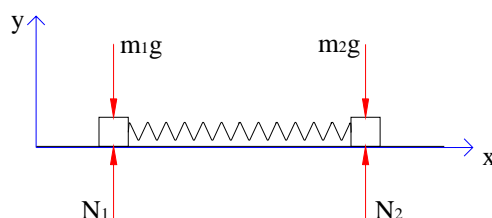
El marco inercial, ligado a tierra, es la propia superficie, la edificación, el laboratorio. Fijemos en él un origen y unos ejes  $x, y$ .

El sistema mecánico es un sistema de dos partículas, los bloques, tratados como dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ . El resorte ideal, sin masa, no es una partícula del sistema. Su función es la de realizar la interacción interna entre las partículas  $m_1$  y  $m_2$ .

Esquematicemos las situaciones inicial: compresión  $d$ , velocidades cero (se sueltan) y final: deformación cero, longitud natural.



El diagrama de fuerzas externas sobre el sistema en situación general es



La fuerza interna es la fuerza elástica, conservativa, hecha por el resorte. En una situación general, el diagrama de fuerzas internas será



Estudiemos ahora el momentum del sistema de dos partículas  $m_1$ ,  $m_2$ . Tomemos la componente  $x$  de la relación fundamental:

$$\sum F_{\text{ext } x} = \frac{d P_x}{d t}.$$

Como vemos del diagrama de fuerzas externas, no hay fuerzas externas en  $x$ . Por tanto, se conserva la componente  $x$  del momentum o cantidad de movimiento del sistema,  $P_x = \text{cte}$ . Obsérvese que el momentum individual de  $m_1$  no se conserva. En efecto, si tomamos como sistema mecánico a  $m_1$ , la fuerza elástica sobre  $m_1$  es en ese caso una fuerza externa que hace cambiar su momentum. Análogo argumento se aplica a  $m_2$ . Retornemos al sistema de dos partículas  $m_1$ ,  $m_2$  e igualemos el momentum total en  $x$  del sistema en las situaciones inicial y final. El objetivo de unos esquemas claros de masas y velocidades es facilitar la escritura de ese momentum.



$$P_{ix} = P_{fx}$$

$$0 = m_1(-v_1) + m_2 v_2. \quad (1)$$

Nótese que, como obviamente el resorte está separando a  $m_1$  y  $m_2$ , hemos elegido la velocidad final de  $m_1$  hacia la izquierda y entonces su componente  $x$  es  $-v_1$ . Como el momentum total en  $x$  es constante e igual a cero

$$P_x = (m_1 + m_2) v_{cx} = 0, \quad v_{cx} = 0,$$

y el centro de masa del sistema no se mueve.

En el eje  $y$ , como no hay movimiento ni de  $m_1$  ni de  $m_2$ , puede hacerse separadamente para cada uno  $\sum F_y = 0$  y así,  $N_1 = m_1 g$ ,  $N_2 = m_2 g$ .

Estudiemos ahora la energía del sistema  $m_1, m_2$ . Como  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$ ,  $W_{\text{ext}} = 0$  y la relación básica es

$$W_{\text{int}} = K_f - K_i.$$

Como la fuerza interna, la fuerza elástica, es conservativa,

$$W_{\text{int}} = -(U_f - U_i),$$

y se conserva la energía del sistema

$$K_i + U_i = K_f + U_f,$$

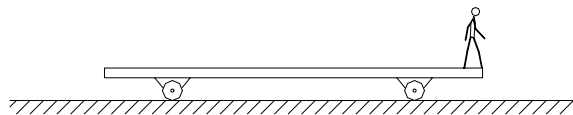
$$0 + \frac{1}{2} k d^2 = \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) + 0, \quad (2)$$

en donde hemos puesto  $v_1^2$  ya que es igual a  $(-v_1)^2$ . (1) y (2) son un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas  $v_1$ ,  $v_2$ . Con  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , tenemos

$$v_1 = \frac{\sqrt{k \mu} d}{m_1}$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{k \mu} d}{m_2}.$$

## 2. EJEMPLO

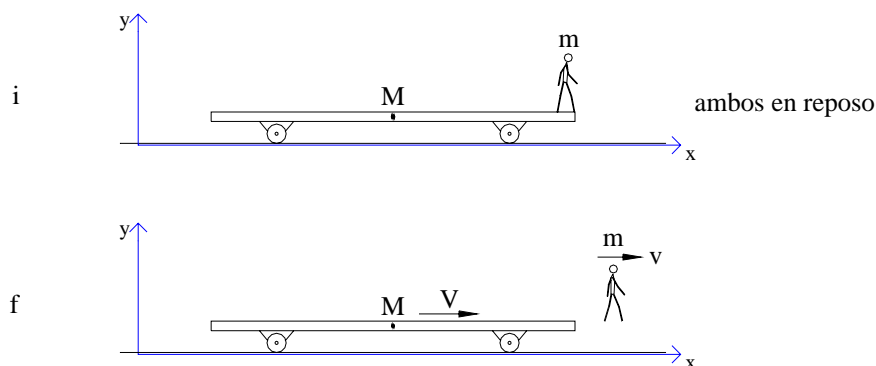


Un hombre de masa  $m$  está en el extremo de una plataforma de masa  $M$  que puede deslizar sin fricción por un piso horizontal. Inicialmente ambos están en reposo. El hombre salta horizontalmente de la plataforma con una velocidad relativa respecto a ella de magnitud  $v_o$ . Hallar las velocidades del hombre y de la plataforma respecto al piso horizontal inmediatamente después del salto. Hallar el cambio de energía.

Tomemos como marco inercial el piso y fijemos en él unos ejes  $x$ ,  $y$ .

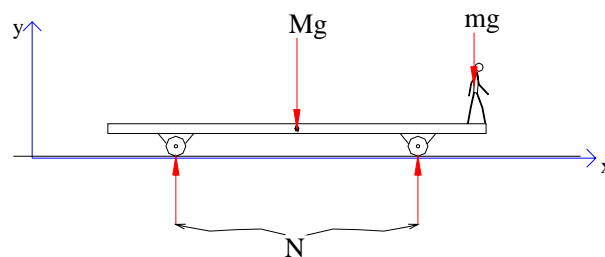
Elijamos un sistema mecánico de dos partes, el hombre y la plataforma. Son en realidad dos subsistemas que vamos a considerar como “partículas” de masas  $m$  y  $M$ .

Los esquemas en las situaciones: inicial, instante antes del salto, y final, justo después del salto, son



Recuérdese que las velocidades que figuran en estos esquemas para el momentum y la energía, son velocidades respecto al marco inercial, es decir respecto al piso, y no velocidades relativas, como la velocidad hombre-plataforma.

El diagrama de fuerzas externas en una situación general durante el salto es



N es la normal resultante del piso sobre la plataforma. No hay fricción entre piso y plataforma y por tanto

$\sum F_{\text{ext } x} = 0$ ,  $P_x = \text{constante}$ : conservación del momentum en  $x$ .

$$P_{ix} = P_{fx} ,$$

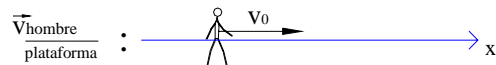
$$0 = M V + m v . \quad (1)$$

Estudiemos ahora la velocidad relativa. Durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  que dura el salto, el hombre y la plataforma van gradualmente modificando sus velocidades hasta que, en la situación final, la velocidad relativa del hombre respecto a la plataforma es horizontal y de magnitud  $v_o$ .

Situación f :  $\vec{v}_{\frac{\text{hombre}}{\text{piso}}} = \vec{v}_{\frac{\text{hombre}}{\text{plataforma}}} + \vec{v}_{\frac{\text{plataforma}}{\text{piso}}} .$

Lo prudente al estudiar velocidades relativas es plantear primero la relación vectorial y luego tomar cuidadosamente las componentes.

Como



la componente  $x$  es

$$v = v_o + V . \quad (2)$$

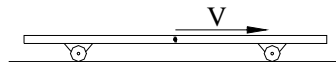
Tenemos dos ecuaciones para las incógnitas  $v$ ,  $V$ . Al resolver,

$$v = \frac{M}{m+M} v_o$$

$$V = -\frac{m}{m+M} v_o .$$

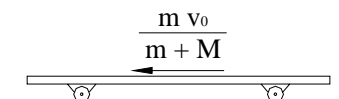
El signo  $-$  de  $V$  indica que la velocidad de la plataforma es en dirección contraria a la que asumimos.

Asumimos:

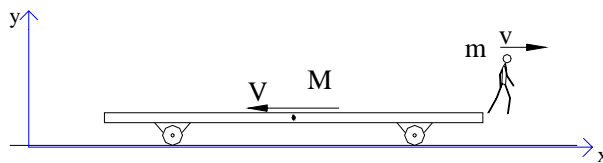


Resultado:  $V < 0$

Significa que realmente es así:



Una buena alternativa es haber intuido desde el comienzo el movimiento de la plataforma, es decir haber hecho el esquema en situación final así



Con lo que las ecuaciones (1) y (2) serían

$$0 = M (-V) + m v$$

$$v = v_o + (-V) .$$

El resultado sería entonces

$$V = \frac{m}{m + M} v_o .$$

En el eje y no hay movimiento ni del hombre ni de la plataforma. Sus velocidades en y son cero y por tanto el momentum del sistema en y es cero, de donde se infiere que la fuerza externa neta en y es cero.

$$P_y = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \sum F_{\text{ext } y} = \frac{dP_y}{dt} = 0 ,$$

$$\text{con lo cual} \quad N - (m + M) g = 0 .$$

Es bastante obvio, pero es importante darse cuenta que los análisis en x y en y son diferentes: en x no hay fuerza externa, luego el momentum en x se conserva; en y los cuerpos no se mueven, el momentum en y es cero, luego no hay fuerza externa neta en y.

Los análisis de las fuerzas externas y el momentum, y de la velocidad relativa, bastan para hallar las velocidades respecto al piso justo después del salto. Pero también es importante el estudio de la energía del sistema. Como  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$ ,  $W_{\text{ext}} = 0$  y el teorema del trabajo y la energía dice

$$W_{\text{int}} = K_f - K_i .$$

Podemos evaluar con facilidad el lado derecho, el cambio de energía cinética del sistema

$$\Delta K = K_f - K_i = \left( \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) - 0 ,$$

que, reemplazando V y v, y organizando queda

$$\Delta K = \frac{1}{2} \mu v_o^2 ,$$

en donde hemos usado la masa  $\mu$  , que ya había aparecido en el ejemplo 1, tal que

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$$

llamada masa reducida del sistema y que tomaremos por ahora como una simple abreviatura, pues no necesitamos aún ahondar en ella.

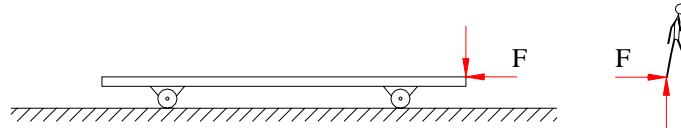
Hay pues durante el salto una ganancia de energía proporcional al cuadrado de la velocidad relativa. ¿De dónde sale esa energía? Del trabajo interno. Ahora, la plataforma es un subsistema que es un cuerpo rígido en traslación, pero el hombre es un subsistema flexible y complejo. Vale la pena hacer una descripción al menos cualitativa de las fuerzas entre hombre y plataforma durante el salto.

Situación general

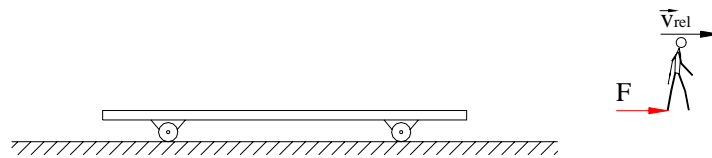
durante el salto,

Fuerzas internas

hombre-plataforma



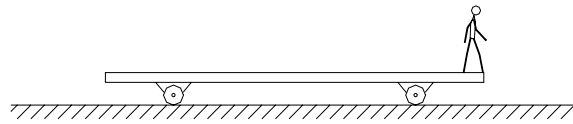
Imaginemos al hombre, rodillas flexionadas, listo para el salto. Hay una fuerza vertical, que contrarresta el peso del hombre para que el salto sea horizontal. Pero la fuerza del salto es la fuerza horizontal  $F$ . El hombre, al estirar sus piernas, ejerce una fuerza hacia atrás sobre la plataforma y ésta, según la ley de acción-reacción, empuja al hombre hacia adelante. Mirando el movimiento relativo desde la plataforma puede verse, al menos cualitativamente,



que el trabajo interno es positivo, pues  $F$  y  $\vec{v}_{rel}$  tienen la misma dirección. La cuantificación de la fuerza  $F$  y el detalle de cómo se realiza, son cuestiones complejas. En el subsistema hombre hay una conversión de energía interna en energía cinética y la ganancia que evaluamos de energía cinética se obtiene a expensas de la energía del hombre que salta.

Hemos estudiado este problema con detalle para mostrar como se organizan las ideas, como se aplican los conceptos. Otras veces, ya comprendidas las cosas, se agiliza, se abrevia, ciertos análisis se piensan más no se escriben. Pero se piensan.

### 3. EJERCICIO



Un niño de 30 kg está parado en el extremo de una plataforma de 100 kg que puede deslizarse sin fricción por un piso horizontal. Al comienzo están en reposo. Luego el niño salta de la plataforma de modo que, justo al final del salto, su velocidad relativa respecto a la plataforma tiene una magnitud de 2 m/s y forma un ángulo de  $60^\circ$  con la horizontal.

- Hallar las velocidades de la plataforma y del niño respecto al piso (en magnitud y dirección), inmediatamente después del salto.
- Si el salto dura 1 s, hallar la fuerza media ejercida durante él por el piso sobre la plataforma.

Marco inercial: El piso. Ejes  $x$ ,  $y$  fijos al piso, como se muestran.

Sistema mecánico: sistema de dos partes: niño y plataforma.

Situación inicial: instante antes del salto

Situación final: instante después del salto

Unidades: SI.

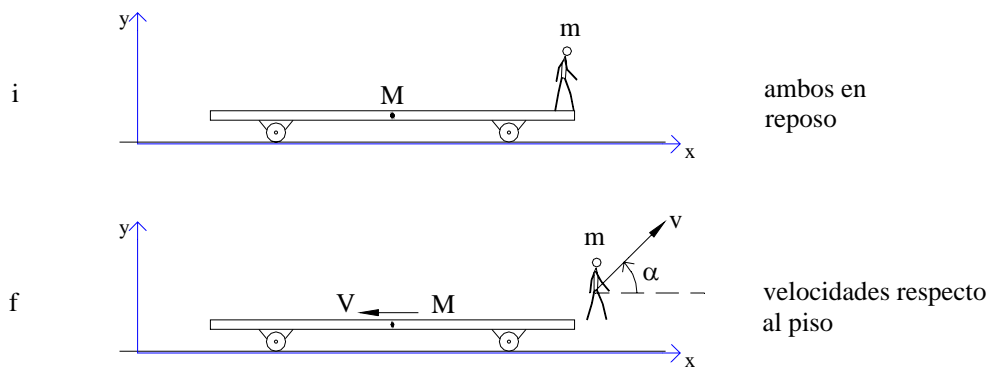
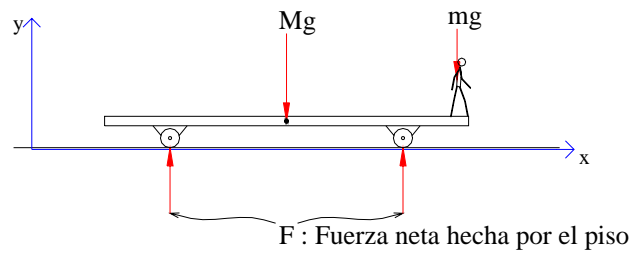


Diagrama de fuerzas externas en situación general durante el salto:



a)  $\sum F_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow$  Conservación del momentum del sistema en  $x$ ,

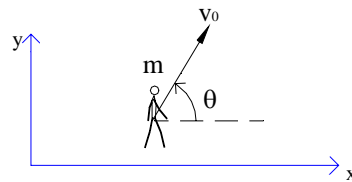
$$P_{ix} = P_{fx},$$

$$0 = M(-V) + m v \cos \alpha. \quad (1)$$

Movimiento relativo en situación final:

$$\vec{v}_{\frac{m}{\text{piso}}} = \vec{v}_{\frac{m}{M}} + \vec{v}_{\frac{M}{\text{piso}}},$$

con  $\vec{v}_{\frac{m}{M}}$ :



$$v_o = 2$$

$$\theta = 60^\circ$$

componente  $x$ :

$$v \cos \alpha = v_o \cos \theta + (-V) \quad (2)$$

componente  $y$ :

$$v \sin \alpha = v_o \sin \theta + 0 \quad (3)$$

Álgebra: de (1) y (2) se obtienen  $V$  y  $v \cos \alpha$ . Luego con (3) se obtienen  $v$  y  $\tan \alpha$ . Los resultados son

$$V = 0.23 \text{ m/s}$$

$$v = 1.90 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 66.05^\circ.$$

b) En dirección y,

$$\sum F_{\text{ext } y} = \frac{d P_y}{d t}$$

$$F - (M + m) g = \frac{d P_y}{d t}$$

$$\int_i^f F d t - \int_i^f (M + m) g d t = \int_i^f d P_y$$

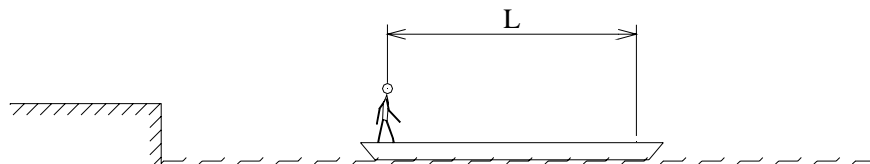
$$\begin{aligned} F_{\text{media}} \Delta t &= (M + m) g \Delta t + P_{f y} \\ &= (M + m) g \Delta t + m v \sin \alpha \end{aligned}$$

$$F_{\text{media}} = (M + m) g + \frac{m v \sin \alpha}{\Delta t}, \quad \text{con } g \approx 10 \text{ m s}^{-2},$$

$$F_{\text{media}} = 1352 \text{ N},$$

un poco mayor que el peso total del sistema, de 1300 N.

#### 4. EJERCICIO



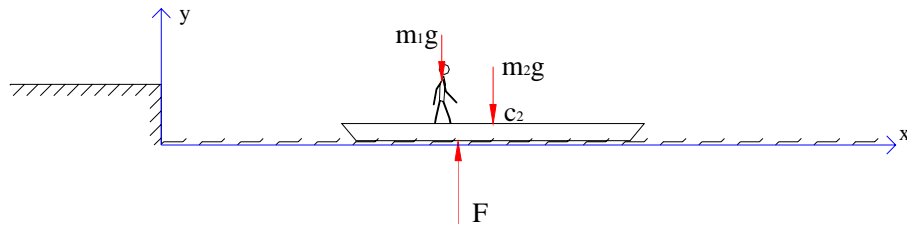
Un hombre de masa  $m_1$  está parado en el extremo de una barca de masa  $m_2$ . Ambos están en reposo. El hombre camina por la barca de longitud  $L$  hasta el otro extremo y se detiene allí. Asumiendo que no hay fricción entre la barca y el agua, calcular los desplazamientos del hombre y la barca respecto a un observador en el muelle.

Marco inercial: Tierra. También podría ser el agua, quieta respecto a tierra. Ejes  $x, y$  con origen en el muelle.

Sistema mecánico: Sistema de 2 partes: el hombre de masa  $m_1$ , tratado como una partícula, y la barca, subsistema que es un cuerpo rígido cuyo centro de masa está en  $C_2$ . (Si fuese homogénea  $C_2$  sería el centro de la barca).

En situación general, mientras el hombre camina por la barca, las fuerzas externas son





Como  $\sum F_{\text{ext } x} = 0$ , hay conservación de la componente  $x$  del momentum del sistema.

En la situación inicial, hombre en el extremo izquierdo, hombre y barca están en reposo y así  $P_{ix} = 0$ . En la situación final, hombre en el extremo derecho, de nuevo ambos están en reposo y  $P_{fx} = 0$ . De modo que en este problema, en el que no se involucran velocidades sino posiciones, la conservación del momentum en la forma  $P_{ix} = P_{fx}$ , no proporciona la información que buscamos. Pero recordemos que el momentum del sistema es también  $\vec{P} = M \vec{v}_c$ , donde  $\vec{v}_c$  es la velocidad del centro de masa del sistema. Así

$$P_x = M v_{cx} = 0,$$

y entonces

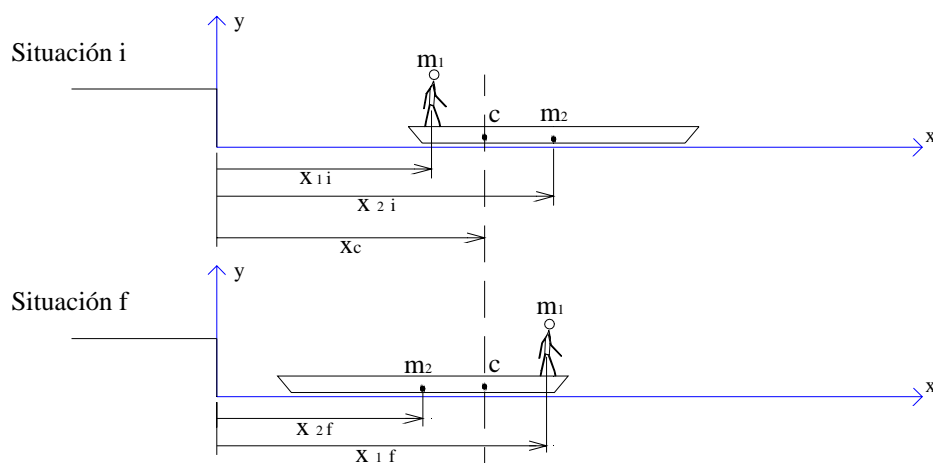
$$v_{cx} = 0$$

es decir

$$x_c: \text{ constante },$$

el centro de masa del sistema conjunto hombre–barca no se mueve.

Hagamos los esquemas con las posiciones de  $m_1$  y  $m_2$  en las situaciones i, f.



$$x_{ci} = x_{cf} : \frac{m_1 x_{1i} + m_2 x_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_{1f} + m_2 x_{2f}}{m_1 + m_2} .$$

Las incógnitas son los desplazamientos

$$\Delta x_1 = x_{1f} - x_{1i} ,$$

$$\Delta x_2 = x_{2f} - x_{2i} ,$$

y entonces

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0 . \quad (1)$$

La segunda ecuación la proporciona el desplazamiento relativo

$$\Delta \vec{r}_{\text{hom bre}_{\text{tierra}}} = \Delta \vec{r}_{\text{hom bre}_{\text{barca}}} + \Delta \vec{r}_{\text{barca}_{\text{tierra}}} ,$$

cuya componente  $x$  es

$$\Delta x_1 = L + \Delta x_2 .$$

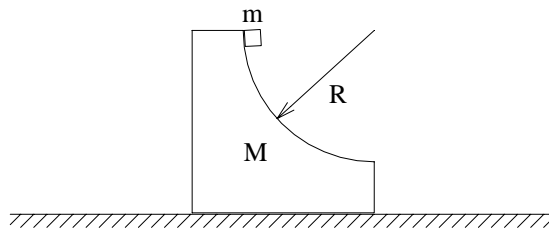
Por tanto

$$\Delta x_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta x_2 = -\frac{m_1 L}{m_1 + m_2} .$$

Obviamente el desplazamiento de la barca tiene componente en  $x$  negativa.

## 5. EJEMPLO



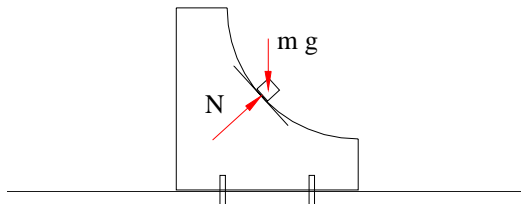
Un pequeño bloque de masa  $m$  puede deslizarse por la superficie de cuarto de círculo de otro bloque de masa  $M$ . Todas las superficies son lisas. Si los bloques se sueltan desde la situación mostrada, hallar las velocidades de  $m$  y  $M$ , cuando  $m$  sale del bloque  $M$ .

En primer lugar es necesario comprender con claridad por qué no se conserva la energía del pequeño bloque  $m$  tomado individualmente. Esto puede comprenderse mejor si estudiamos por comparación el movimiento de  $m$  cuando la cuña se encuentra fija al piso.

Tomemos como sistema mecánico la partícula  $m$  y un marco inercial fijo al piso.

Diagramas de fuerzas sobre  $m$  en situación general

Cuña  $M$  fija al piso

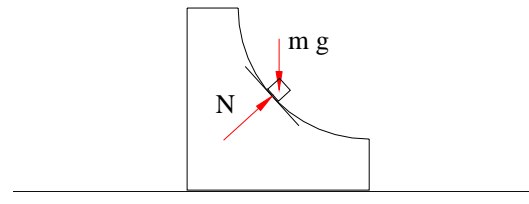


Como la cuña está fija, el círculo es la trayectoria de  $m$  respecto al marco inercial y así la normal es perpendicular a la velocidad. Por tanto

$$W^N = 0,$$

se conserva la energía de  $m$  y su velocidad final es  $\sqrt{2 g R}$ .

Cuña  $M$  en piso liso



La normal es perpendicular a la velocidad relativa de  $m$  respecto a  $M$  pero, como la cuña se mueve, no es perpendicular a la velocidad de  $m$  respecto al piso (ver numeral 5.3.1). Así,

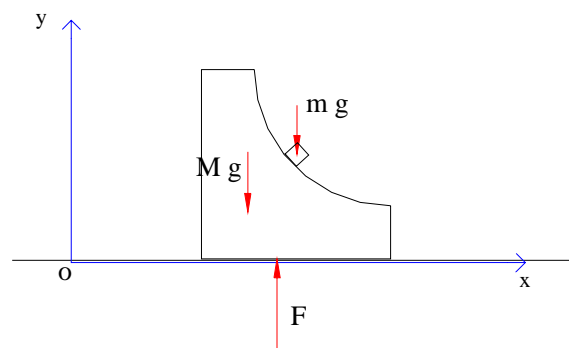
$$W^N \neq 0,$$

no se conserva la energía de  $m$ .

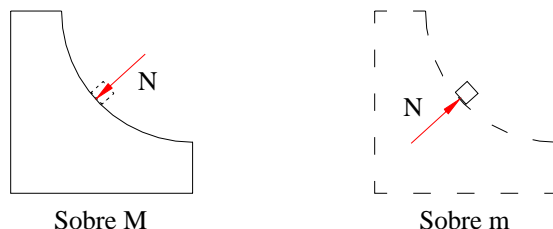
Abordemos hora la solución del problema de la cuña móvil. El sistema mecánico adecuado es el sistema de 2 partes:  $m$  y  $M$ . El marco inercial es el piso.

Veamos los diagramas de fuerzas externas e internas en situación general. Es importante comprender que son dos diagramas diferentes. En el diagrama de fuerzas externas los dos bloques se dibujan juntos, en cambio, en el diagrama de fuerzas internas hay que dibujarlos separados para poder representar la interacción interna.

Fuerzas externas



## Fuerzas internas



Elijamos unos ejes  $x, y$ , fijos al piso, como se indican.

Análisis del momentum:

Eje  $x$ :  $\sum F_{\text{ext } x} = 0 \Rightarrow$  Conservación de momentum del sistema en  $x$ .

Eje  $y$ : en posición general  $m$  tiene componente  $y$  de la velocidad, pero  $M$  no. Hay por tanto momentum neto en  $y$ . Por tanto

$$\sum F_{\text{ext } y} = \frac{dP_y}{dt} \neq 0.$$

Análisis de la energía:

Estudiemos primero el trabajo de las fuerzas externas. Como la velocidad de  $M$  es horizontal, tanto  $F$  como  $Mg$  son perpendiculares a dicha velocidad y así

$$W^{Mg} = W^F = 0$$

$mg$  es una fuerza conservativa, con energía potencial  $U^{mg}$  y por tanto

$$W_{\text{ext}} = -\Delta U^{mg}$$

Estudiemos ahora el trabajo de la fuerza interna  $N$ . Recordemos que el trabajo de la fuerza interna es

$$W_{\text{int}} = \int \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{21} = \int \vec{F}_{21} \cdot \vec{v}_{21} dt,$$

si  $m$  es la 2 y  $M$  la 1,

$$W_{\text{int}} = \int \vec{N} \cdot \vec{v}_{m/M} dt.$$

Pero  $\vec{N} \perp \vec{v}_{m/M}$ : La normal, fuerza interna, es perpendicular a la velocidad relativa, tangente al círculo que es la trayectoria relativa de  $m$  respecto a  $M$ , y por tanto

$$W_{\text{int}} = 0.$$

La normal  $N$  no realiza pues trabajo como fuerza interna al sistema conjunto  $M$  y  $m$ , pero sí realiza trabajo como fuerza externa sobre cualquiera de los sistemas  $M$  o  $m$  tomados individualmente.

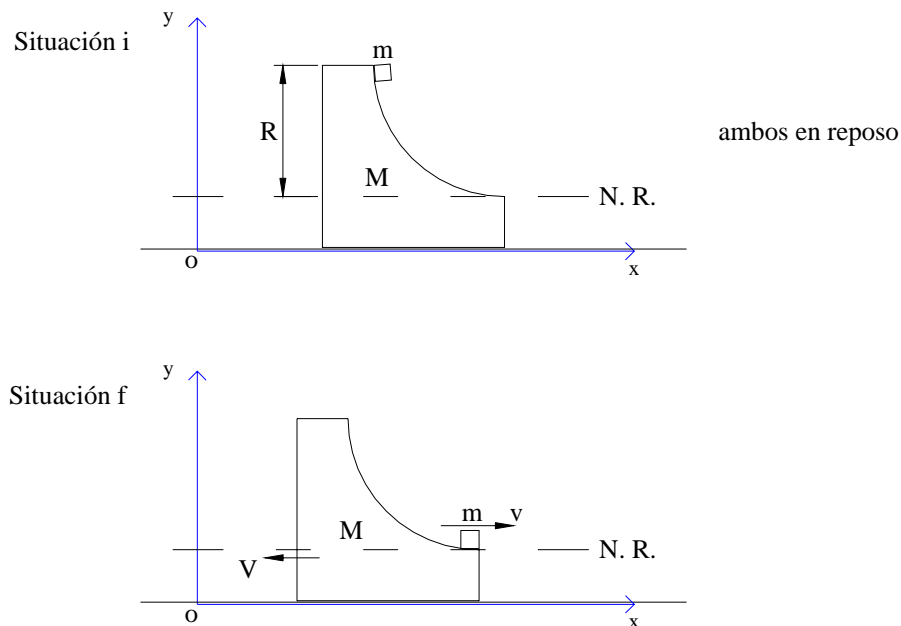
Sobre el sistema conjunto  $M$  y  $m$ , el teorema del trabajo y la energía queda entonces,

$$W_{\text{ext}} = -\Delta U^{\text{mg}} = \Delta K,$$

$$\Delta (U^{\text{mg}} + K) = 0,$$

y hay conservación de energía del sistema conjunto.

Los esquemas que muestran las masas, las posiciones y las velocidades, en situación inicial, cuando los bloques se sueltan, y final, cuando  $m$  sale de  $M$ , son



Recuérdese que en estos esquemas las velocidades que se requieren para el momentum y la energía cinética, son velocidades respecto al marco inercial en el piso. Nótese además que la velocidad final de  $m$  respecto al piso es horizontal, ya que la velocidad final relativa de  $m$  respecto a  $M$  es horizontal, puesto que la tangente al círculo lo es. Con el nivel de referencia elegido, las conservaciones del momentum en  $x$  y de la energía quedan

Momentum:  $P_{ix} = P_{fx} :$   $0 = M(-V) + m v$

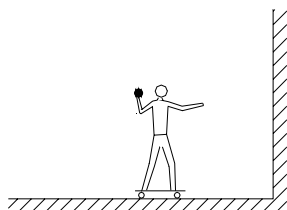
Energía:  $(K + U^{\text{mg}})_i = (K + U^{\text{mg}})_f :$   $m g R = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2,$

sistema de dos ecuaciones para las incógnitas  $V$ ,  $v$ , que son entonces

$$v = \sqrt{2 g R \left( \frac{M}{M + m} \right)}$$

$$V = \frac{m}{M} \sqrt{2 g R \left( \frac{M}{M + m} \right)}.$$

## 6. EJERCICIO



Un niño en patines (masa global  $M$ ) lanza horizontalmente un balón de masa  $m$ , con velocidad relativa  $v_0$ . El balón choca elásticamente con un muro vertical y luego el niño lo atrapa. ¿Con qué velocidad quedan moviéndose?

El niño está cerca del muro y podemos suponer que el balón sigue una trayectoria horizontal al ir y volver despreciando la pequeña deflexión vertical.

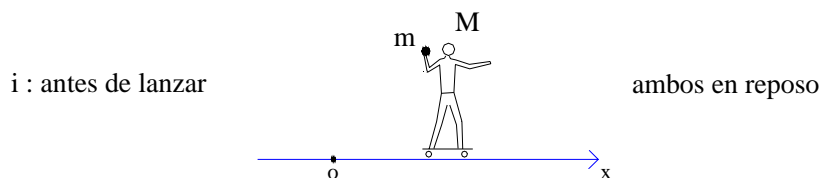
El problema tiene tres partes: el lanzamiento, la colisión y la recepción. El marco inercial es obviamente el piso, el muro.

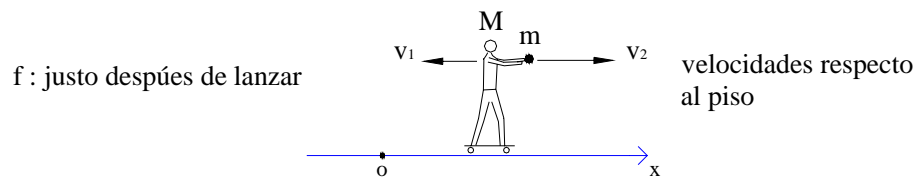
a) El lanzamiento:

Eje  $x$  horizontal hacia la derecha.

Sistema:  $M$  y  $m$

Durante el lanzamiento, despreciando la fricción con el piso, no hay fuerzas externas en  $x$  y por lo tanto el momentum en  $x$  se conserva.





La conservación del momentum en  $x$  y la velocidad relativa en la situación final conducen a

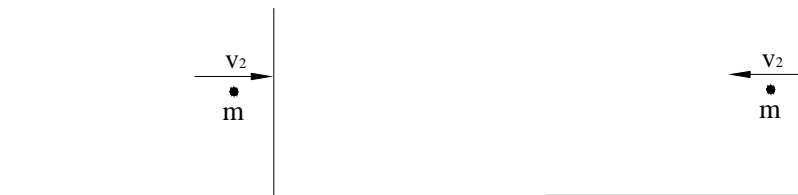
$$v_1 = \frac{m v_o}{M + m}$$

$$v_2 = \frac{M v_o}{M + m} .$$

- b) La colisión: Como es elástica, la magnitud de la velocidad al ingreso y a la salida son iguales. Aquí el sistema es únicamente  $m$ .

i) antes de la colisión

f) después de la colisión

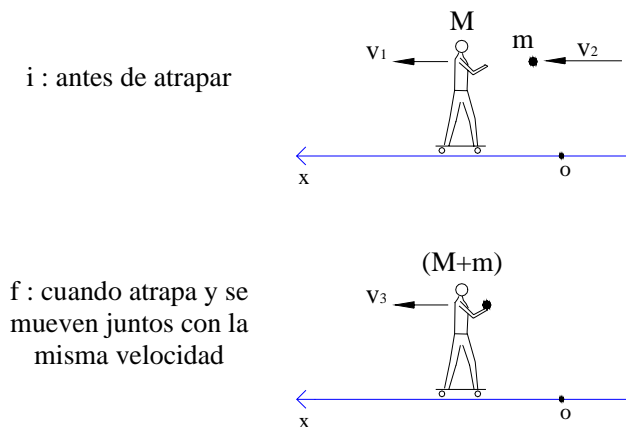


- c) La recepción:

Eje horizontal hacia la izquierda (más simple)

Sistema:  $M$  y  $m$

No hay fuerzas externas en  $x$  durante la recepción del balón y se conserva la componente  $x$  del momentum del sistema.

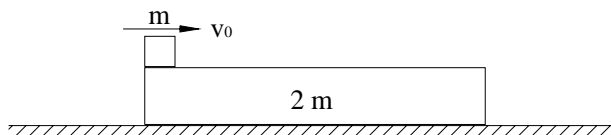


La conservación del momentum en  $x$  permite hallar  $v_3$ ,

$$v_3 = \frac{2 M m v_0}{(M + m)^2}.$$

¿De dónde sale la energía ganada en todo el proceso?

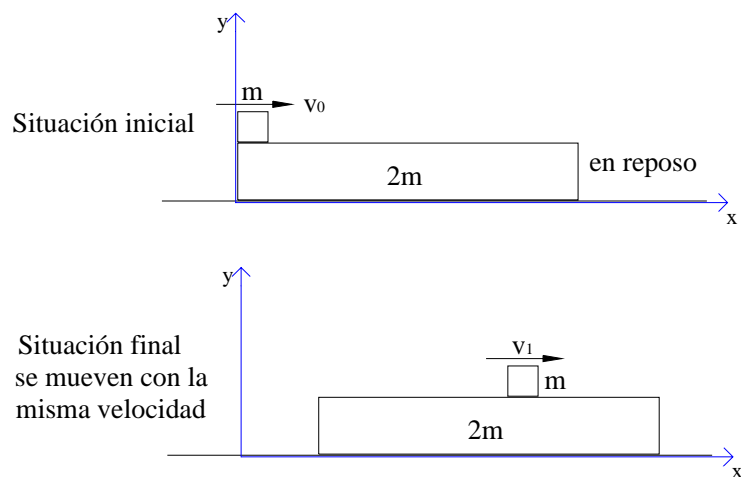
## 7. EJERCICIO



Una plataforma de masa  $2m$  descansa sobre un piso liso. Un bloque de masa  $m$  se lanza horizontalmente a deslizar sobre ella en la situación mostrada. El coeficiente dinámico de fricción entre el bloque y la plataforma es  $\mu = 1/2$ . El bloque desliza sobre la plataforma a medida que ésta se mueve, hasta que, en una cierta situación, el bloque queda en reposo relativo respecto a la plataforma. Hallar la velocidad de ambos en esa situación y la distancia recorrida por el bloque sobre la plataforma, así como las distancias recorridas por cada uno respecto al piso hasta ese momento.

Marco inercial: el piso. Ejes  $x, y$  fijos a él.

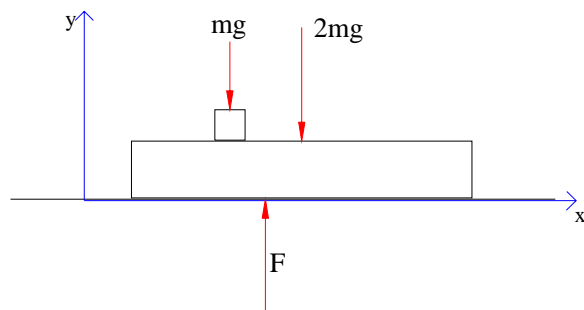
Sistema mecánico: bloque y plataforma





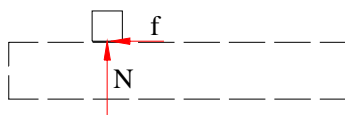
En situación general

Fuerzas externas

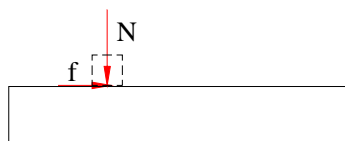


Fuerzas internas

sobre m



sobre 2m



$$\sum F_{\text{ext } x} = 0 \Rightarrow P_x : \text{ constante}$$

Sistema mecánico: el bloque

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \Rightarrow f = \mu mg$$

Sistema: m y 2m. Teorema del trabajo y la energía

$$W_{\text{int}} = -f \Delta x_{\frac{m}{2m}} = \Delta K$$

$$\Delta x_{\frac{m}{2m}} = \frac{2 v_o^2}{3g}.$$

Sistema: m. Teorema del trabajo y la energía:

$$\Delta x_m = \frac{8 v_o^2}{9g}$$

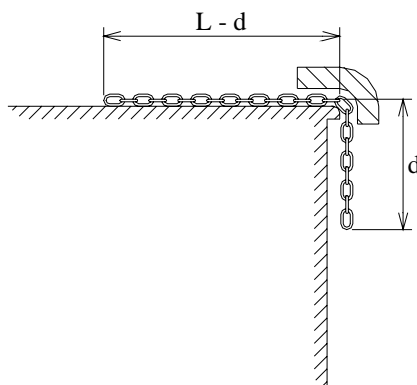
Sistema: 2 m. Teorema del trabajo y la energía:

$$\Delta x_{2m} = \frac{2 v_o^2}{9g}$$

Comprobación, desplazamientos relativos:

$$\Delta x_m = \Delta x_{\frac{m}{2m}} + \Delta x_{2m}.$$

## 8. EJEMPLO

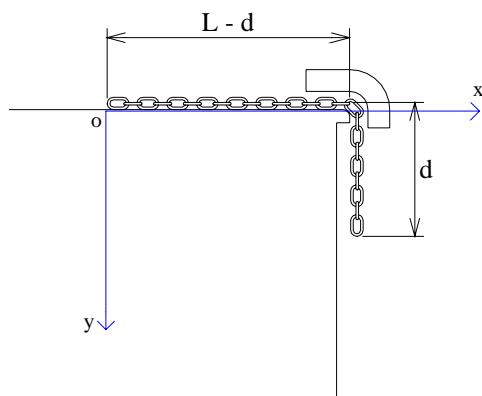


Una cadena de longitud  $L$  y masa total  $M$  está colocada sobre una mesa lisa, de modo que un trozo de longitud  $d$  está colgando verticalmente. En esa situación se suelta la cadena y comienza a deslizar, pasando por un canal que la guía en el borde. Hallar su velocidad en una situación general cuando el tramo colgante mide  $y$ .

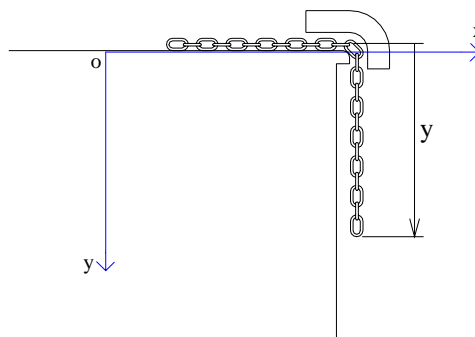
El marco inercial es la mesa, ligada a tierra.

Elijamos como sistema mecánico toda la cadena, considerada como un sistema de partículas cuyas partículas son los eslabones.

Los esquemas de las situaciones inicial:  $t = 0$ , y general: tiempo  $t$ , así como los ejes, son

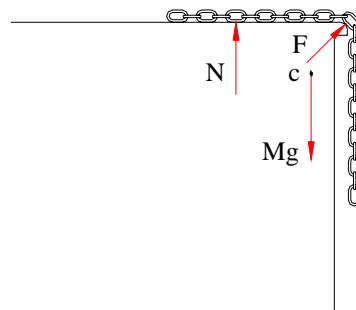


situación inicial  $t = 0$   
se suelta



situación general:  $t$

El diagrama de fuerzas externas sobre la cadena en situación general es



C : Centro de masa de toda la cadena. Como seguramente se conoce, y después estudiaremos con detalle, el peso es una fuerza distribuida en toda la cadena que, para efectos del movimiento global, puede remplazarse por una única fuerza equivalente, igual al peso total y situada en el centro de gravedad o centro de masa.

N es la resultante de las fuerzas normales hechas por la mesa sobre los eslabones.

F es la fuerza neta hecha por el borde de la mesa y por el canal redondeado sobre la cadena.

El estudio del trabajo de las fuerzas externas es simple. En efecto, la normal N es perpendicular a la velocidad de los eslabones sobre la mesa y por tanto  $W^N = 0$ .

En el borde redondeado, como no hay fricción, la fuerza es en cada punto también perpendicular a la velocidad.

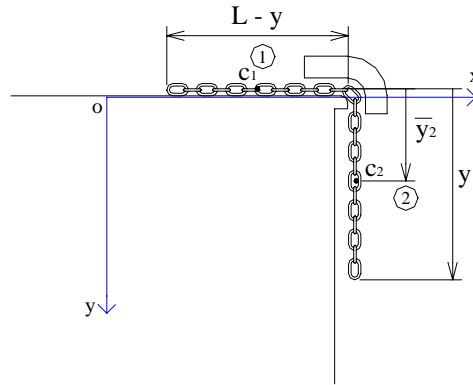


y entonces  $W^F = 0$ .

Mg es conservativa y su energía potencial asociada es, tomando como nivel de referencia el eje x,

$$U = - Mg y_c$$

El signo menos se debe a que C está bajo el nivel de referencia, siendo  $y_c$  la coordenada del centro de masa de toda la cadena. Calculemos  $y_c$  en situación general



Dividamos la cadena en dos subsistemas (1) y (2). La masa por unidad de longitud es  $\frac{M}{L}$  y así, estudiando el centro de masa del sistema compuesto,

$$M y_c = \frac{M}{L} (L - y) \bar{y}_1 + \frac{M}{L} y \cdot \bar{y}_2$$

que, como  $\bar{y}_1 = 0$ ,  $\bar{y}_2 = y/2$ , conduce a

$$y_c = \frac{y^2}{2L}.$$

Examinemos ahora las fuerzas internas y su trabajo. Las fuerzas internas son las fuerzas de contacto que hay entre los eslabones de la cadena. Consideremos dos de ellos



Como la cadena es inextensible, todos los eslabones tienen la misma magnitud de la velocidad  $v$ . Así, la velocidad relativa entre dos eslabones consecutivos es cero y por tanto el trabajo interno se anula.

$$W_{\text{int}} = 0.$$

El teorema del trabajo y la energía aplicado a toda la cadena es entonces

$$W_{\text{ext}} = -\Delta U = \Delta K,$$

$$\Delta (K + U) = 0.$$

Por tanto,

$$E = K + U : \text{ constante ,}$$

hay conservación de energía de toda la cadena. La presencia de la fuerza  $F$ , desconocida, hace, en cambio, que el estudio del momentum del sistema sea más complejo.

Planteemos pues la conservación de la energía para las situaciones inicial y general, recordando que todos los eslabones tienen la misma magnitud de la velocidad.

$$K_i + U_i = K + U ,$$

$$0 - \frac{M g d^2}{2 L} = \frac{1}{2} M v^2 - \frac{M g y^2}{2 L}$$

por lo tanto,

$$v = \sqrt{\frac{g}{L} (y^2 - d^2)} .$$

En particular, cuando toda la cadena está colgando,  $y = L$  y  $v = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - d^2)} .$

El análisis del movimiento puede proseguirse con un poco de cálculo. Veamos,

$$v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{y^2 - d^2}$$

$$\int_d^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \int_0^t dt ,$$

$$\arg \cosh \frac{y}{d} = \sqrt{\frac{g}{L}} t$$

$$y = d \cosh \sqrt{\frac{g}{L}} t ,$$

y entonces

$$v = d \sqrt{\frac{g}{L}} \sinh \sqrt{\frac{g}{L}} t ,$$

$$a = \frac{d}{L} g \cosh \sqrt{\frac{g}{L}} t ,$$

$$a = \frac{g}{L} y ,$$

interesante expresión para la aceleración de la cadena que, cuando  $y = L$  y toda la cadena está colgando, conduce al esperado y lógico valor

$$a = g .$$

## 6.7 COLISIONES

Cuando dos cuerpos macroscópicos chocan, aparecen fuerzas impulsivas entre ellos, de gran magnitud y muy corta duración, que cambian de manera apreciable el momentum, la velocidad, de cada uno de ellos considerado por separado. Pero si consideramos como sistema mecánico el sistema formado por los dos cuerpos que chocan, las fuerzas impulsivas de impacto se vuelven fuerzas internas. En muchos casos las fuerzas externas sobre el sistema conjunto se cancelan, o bien son fuerzas constantes o pequeñas, cuyo impulso durante el corto tiempo de la colisión es despreciable. De este modo, el momentum del sistema durante la colisión se conserva. Si  $\vec{P}_i$  es el momentum del sistema en la situación inicial, justo antes de la colisión y  $\vec{P}_f$  el momentum en la situación final, justo después de la colisión, entonces

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f : \text{conservación del momentum.}$$

Insistamos en que el momentum del sistema conjunto se conserva durante la colisión siempre y cuando no haya fuerzas externas impulsivas. En el choque, por ejemplo, de un bate y una bola, la fuerza externa hecha por la mano sobre el sistema bate–bola, es, en general, una fuerza impulsiva y no hay entonces conservación del momentum. Pero retornemos a las colisiones usuales en las cuales se conserva el momentum del sistema conjunto. El trabajo externo, dado que no hay fuerzas externas, es también nulo,  $W_{\text{ext}} = 0$  y el teorema del trabajo y la energía para el sistema es así

$$W_{\text{int}} = \Delta K = K_f - K_i .$$

El cambio de la energía cinética del sistema conjunto se llama a veces  $Q = \Delta K$ . Una colisión es **elástica** si  $\Delta K = 0$ . Esto ocurre, por ejemplo, si la fuerza interna es una fuerza elástica ideal, conservativa. En este caso, durante la primera parte de la colisión hay una deformación y parte de la energía cinética se convierte en energía potencial elástica, que, durante la segunda parte de recuperación plena, vuelve de nuevo a ser energía cinética, sin pérdida ninguna. El trabajo interno, negativo durante la deformación, se cancela exactamente con el trabajo positivo durante la recuperación y así  $W_{\text{int}} = 0$ .

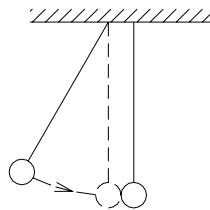
Colisión elástica:  $\Delta K = 0$  ,  $K_i = K_f$  .

En un laboratorio de mecánica, el choque en un riel de aire de dos carritos que interactúan por medio de un resorte, proporciona un buen modelo de una colisión elástica.



Es más, en este caso los dos cuerpos son cuerpos rígidos en traslación, que se pueden representar bien como partículas. Hay, sin embargo, en toda colisión macroscópica, pérdidas de energía cinética. Hay en mayor o menor grado disipación de energía. Ya hemos dicho que esta energía, perdida como energía cinética macroscópica, global, se transforma en otras formas de energía, como energía interna, en fin. Esas colisiones, en las que  $\Delta K < 0$ , se llaman **inelásticas**. Un caso particular es aquel en el cual los dos cuerpos salen juntos después de la colisión. Se habla entonces de una colisión **plástica**.

Hay, no obstante, colisiones macroscópicas que pueden considerarse aproximadamente elásticas. Por ejemplo, la colisión de dos esferas de acero suspendidas como péndulos, común en algunos juegos:



El choque de dos bolas de billar puede considerarse elástico como aproximación, pero en él las rotaciones de las bolas son con frecuencia tan importantes, que considerarlas como partículas puede no ser una buena representación.

El estudio de las colisiones entre partículas de la microfísica, átomos, núcleos, partículas elementales, es de gran importancia. Allí, conceptos macroscópicos como el de contacto pierden relevancia y una colisión está caracterizada porque hay una zona de gran proximidad en la que hay una interacción de mucha intensidad que modifica apreciablemente el momentum y la energía de cada partícula. Aquí sólo estudiaremos algunos aspectos sencillos de las colisiones macroscópicas.

### Colisiones plásticas

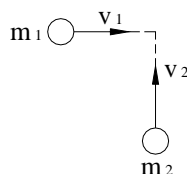
Una colisión especialmente simple es la colisión plástica, en la cual, como ya vimos, las dos partículas quedan juntas después de la colisión. En este caso, la conservación del momentum del sistema permite hallar la velocidad común después de la colisión. Sean, en la situación inicial, un instante antes del choque,  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , las velocidades de  $m_1$  y  $m_2$ . Es importante comprender con precisión cuál es la situación final de la colisión plástica. Durante la colisión, las velocidades de  $m_1$  y  $m_2$  cambian debido a su mutua interacción y llega un momento, después de un tiempo brevísimo, en el que ambas adquieren la misma velocidad  $\vec{v}$ . Esa es la situación final de la colisión. Recordemos, como ya mostramos antes, que si una partícula está sometida a una fuerza impulsiva de impacto, su velocidad cambia apreciablemente pero su posición no cambia durante el impacto brevísimo. Así, en la colisión de las dos partículas, sus velocidades cambian pero no sus posiciones. Después de la colisión, las partículas

cambiarán sus posiciones, pero no durante la colisión propiamente dicha. La conservación del momentum queda entonces

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

de donde se obtiene  $\vec{v}$ .

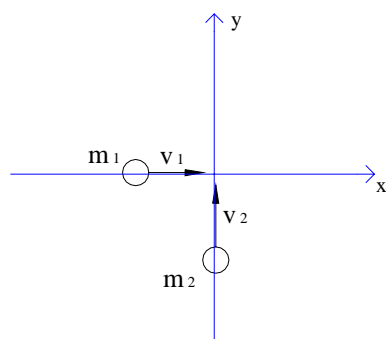
## 1. EJEMPLO



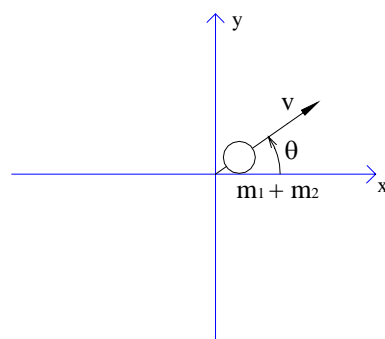
Dos partículas van al encuentro con sus velocidades formando ángulo recto y chocan plásticamente, es decir quedan unidas al finalizar la colisión. Hallar la magnitud y dirección de la velocidad después del choque.

Marco inercial: el laboratorio en el que se realiza la colisión. O bien, si por ejemplo son dos autos que chocan en una esquina y quedan enganchados, el marco inercial es el piso.

Sistema mecánico: Sistema de dos partículas:  $m_1$  y  $m_2$ . No hay fuerzas externas durante la colisión. Si se trata de los dos autos, en el plano horizontal de la colisión la única fuerza externa sería una eventual fricción hecha por el piso, pero ya sabemos que esa fuerza no impulsiva no altera el momentum del sistema durante el breve tiempo de la colisión. Esa fricción será importante después del choque. En todo caso, hay conservación del momentum en el plano de la colisión. Tomemos componentes en los ejes  $x, y$  mostrados.



i: justo antes de la colisión



f : instante en que adquieren la misma  $v$

Recuérdese que unos buenos esquemas de las situaciones inicial y final, en los que aparezcan con claridad las masas y las velocidades respecto al marco inercial, facilitan el estudio tanto del momentum como de la energía cinética.

$$P_{ix} = P_{fx} : \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \cos \theta$$

$$P_{iy} = P_{fy} : \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \sin \theta$$



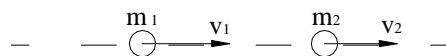
Sistema de dos ecuaciones para las incógnitas  $v$  y  $\theta$ . Dividiendo queda

$$\tan \theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1},$$

y, elevando al cuadrado y sumando,

$$v^2 = \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

## 2. EJEMPLO

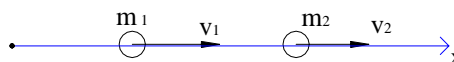


Dos cuerpos que se mueven en la misma dirección chocan plásticamente. Hallar la velocidad después de la colisión y estudiar la pérdida de energía cinética durante ella.

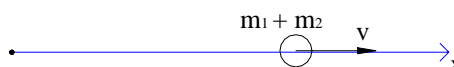
Sea un marco inercial ligado a tierra, llamado a menudo el marco de referencia del laboratorio, respecto al cual están dadas las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ .

El sistema mecánico es el sistema de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$ . No hay fuerzas externas durante la colisión de modo que se conserva el momentum del sistema. Sea  $x$  el eje del movimiento, con origen fijo en algún punto del laboratorio. La situación inicial es un instante antes de la colisión, y la final, justo cuando adquieren la misma velocidad. Atención que en la situación inicial las masas están muy próximas y a punto de chocar, de modo que hay que comprender que en el esquema se dibujan separadas sólo por claridad.

i: instante antes  
del choque



f: luego del choque  
cuando ambos adquieren  
la misma velocidad



Componente  $x$  del momentum del sistema

$$P_{ix} = P_{fx} : \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

así,

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

El cambio en la energía cinética del sistema durante el choque es

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \left( \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right),$$

que, remplazando  $v$  y organizando se escribe como

$$\Delta K = - \frac{1}{2} \mu v_{12}^2$$

donde  $\mu$  es la ya mencionada masa reducida del sistema,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

y  $v_{12}$  la magnitud de la velocidad relativa de 1 respecto a 2 antes del choque

$$v_{12} = v_1 - v_2 .$$

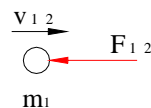
Por supuesto  $v_1 > v_2$  para que haya choque. El signo negativo en  $\Delta K$  indica que hay una pérdida de energía cinética.

$$\text{Energía cinética perdida} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 .$$

El cambio de energía cinética negativo corresponde a un trabajo interno negativo,

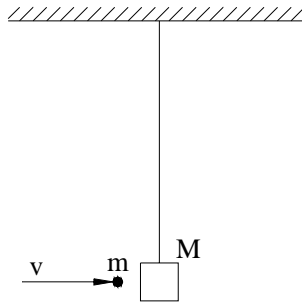
$$W_{\text{int}} = \Delta K < 0 ,$$

cuyo signo puede comprenderse cualitativamente si se observa que, durante el choque, vistas las cosas desde  $m_2$ , la velocidad relativa de 1 respecto a 2 y la fuerza interna sobre 1 son opuestas:



$m_1$  se deforma aplastándose contra  $m_2$  mientras la fuerza se le opone. Hemos llamado  $v_{12}$  a la velocidad relativa inicial. Esta velocidad va disminuyendo durante la colisión y al final de ella se hace cero.

### 3. EJERCICIO



Un péndulo está formado por un bloque de masa  $M$  suspendido de una cuerda de longitud  $L$ , y se encuentra en reposo en su posición de equilibrio. Un proyectil de masa  $m$  que se mueve horizontalmente con velocidad  $v$ , choca con el bloque y queda incrustado en él. Si el conjunto oscila hasta un ángulo  $\theta$  con la vertical, mostrar que la velocidad del proyectil está dada por

$$v = 2 \frac{(M + m)}{m} \sqrt{gL} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Este dispositivo se conoce como el péndulo balístico.

El marco inercial es el usual, ligado al techo. El problema tiene dos partes:

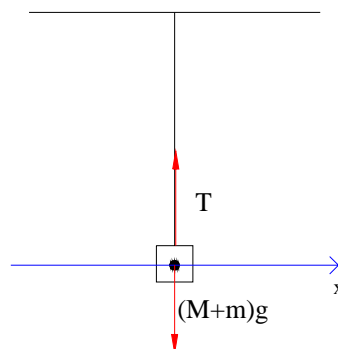
a) La colisión.

El sistema mecánico: es el sistema de dos partículas:  $m$  y  $M$ .

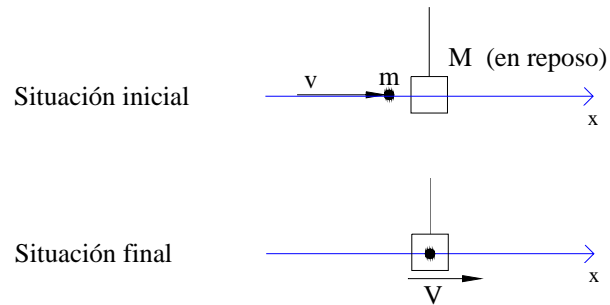
Situación inicial: un instante antes de la colisión.

Situación final: la colisión es plástica. A medida que el proyectil va penetrando en el bloque, va disminuyendo la velocidad del proyectil y aumentando la del bloque, hasta que, en un momento dado, que es la situación final de la colisión, ambos tienen la misma velocidad, su velocidad relativa es cero, se mueven juntos. Todo esto sucede en un tiempo tan breve que, como ya sabemos, el bloque no ha cambiado prácticamente su posición vertical como péndulo.

Las fuerzas externas durante la colisión son entonces verticales



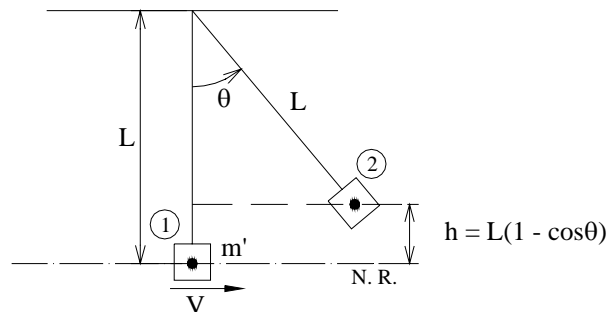
Hay pues conservación de momentum del sistema en  $x$ .



$$P_{ix} = P_{fx} : \quad m v = (M + m) V .$$

b) Ascenso del péndulo de masa  $M + m$ .

El sistema mecánico es ahora un sistema de una sola partícula de masa  $m' = M + m$ . En el movimiento pendular las fuerzas son la tensión en la cuerda, perpendicular a la velocidad y por tanto de trabajo nulo, y el peso  $m'g$ , fuerza conservativa. Hay por tanto conservación de la energía entre la situación 1, que es la final del choque, y la 2, máxima altura.



Para  $m' = M + m$

$$E_1 = E_2 : \quad \frac{1}{2} m' V^2 = m' g L (1 - \cos \theta).$$

Usando la importante identidad de ángulo medio

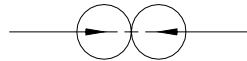
$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  y substituyendo  $V$  se obtiene el resultado para  $v$ .

### Colisiones elásticas e inelásticas. Coeficiente de restitución

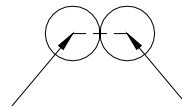
Consideremos en primer lugar una colisión elástica unidimensional de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ . Una buena realización la proporcionan los carritos de un riel de aire que ya mencionamos. En ciertos casos el choque de dos esferas puede considerarse aproximadamente

como elástico. Un choque es frontal cuando las velocidades de ambas esferas tienen la dirección de la línea que une sus centros. En caso contrario el choque es oblicuo.

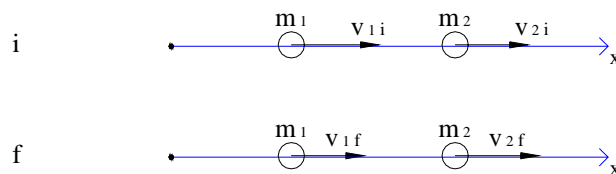
choque frontal  
de esferas



choque oblicuo



Si la colisión es frontal, las velocidades están en la misma línea y la colisión es unidimensional. Sea  $x$  el eje de la colisión. En ese eje durante la colisión no hay fuerzas externas de modo que la componente  $x$  del momentum del sistema de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$  se conserva. Las situaciones: inicial, justo antes del choque, y final, justo después de él, son



La velocidad relativa con que  $m_1$  se aproxima a  $m_2$  antes de la colisión es  $v_{12i} = v_{1i} - v_{2i}$ , por supuesto mayor que cero para que haya colisión. Después de la colisión, la velocidad relativa con que  $m_2$  se aleja de  $m_1$  es  $v_{21f} = v_{2f} - v_{1f}$ .

La conservación del momentum en  $x$  queda

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$

que podemos describir como

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) . \quad (1')$$

Como la colisión es elástica, totalmente elástica se dice a veces para enfatizar, se conserva la energía cinética del sistema

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 , \quad (2)$$

que también podemos escribir como

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \quad (2')$$

Dividiendo (2') por (1') se obtiene

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

que, usando las velocidades relativas que introdujimos, puede escribirse como

$$1 = \frac{v_{21f}}{v_{12i}} = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}}. \quad (3)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones, ahora lineales, (1) y (3), se obtiene

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}.$$

Algunos casos particulares son interesantes. Si las masas son iguales,  $m_1 = m_2$ , tenemos

$$v_{1f} = v_{2i}$$

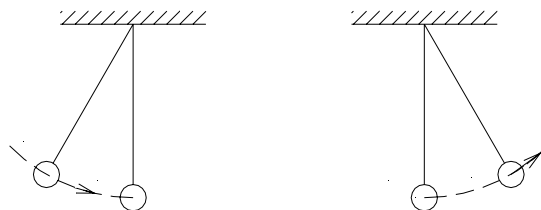
$$v_{2f} = v_{1i},$$

es decir, los cuerpos intercambian sus velocidades. Si  $m_2$  está inicialmente en reposo,

$$v_{1f} = 0$$

$$v_{2f} = v_{1i}.$$

Esta colisión se observa muy bien entre esferas iguales suspendidas como péndulos, incluso mejor que con esferas que se mueven por una superficie, las cuales tienen movimiento de rotación y no sólo de traslación.



En vez de dos esferas, consideremos una hilera de varias, suspendidas de hilos, completamente elásticas, en contacto unas con otras y con sus centros alineados en la misma recta.



Si separamos el péndulo 1 de la vertical y lo soltamos, llega a la colisión con velocidad  $v$ . Lo que se observa experimentalmente es que la última esfera sale moviéndose con la misma velocidad mientras las otras permanecen en reposo. Este resultado puede explicarse si consideramos una serie de colisiones elásticas así: 1 choca con 2 y así 1 permanece en reposo y transmite su velocidad a 2; ahora 2 choca con 3 y entonces 2 permanece en reposo y transmite la velocidad a 3, en fin, repitiéndose las colisiones hasta que la última sale con la misma velocidad mientras las demás permanecen en reposo.



Un argumento análogo, analizando el fenómeno como una cadena de colisiones elásticas entre bolas iguales, puede aplicarse al caso en el que se separan dos (o más) bolas y se sueltan juntas, en cuyo caso son los dos (o más) últimas las que salen moviéndose, como se observa bien experimentalmente con péndulos alienados.

Retornemos a las expresiones generales para las velocidades después del choque de dos masas,  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$ , y veamos que sucede si la masa  $m_2$  está inicialmente en reposo,  $v_{2i} = 0$ , y

además es muy grande comparada con  $m_1$ , es decir  $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$ .

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} ,$$

dividiendo numerador y denominador por  $m_2$ , en el límite cuando  $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$ , queda

$$v_{1f} = -v_{1i}$$

$$v_{2f} = 0 ,$$

es decir la masa grande,  $m_2$ , no se mueve, y  $m_1$  se devuelve con la misma velocidad incidente. El choque de una bola con una pared fija puede verse como ese caso límite del choque de un sistema de dos cuerpos, uno de masa inmensa comparado con el otro. Es, sin

embargo, más sencillo y más claro conceptualmente, estudiarlo como ya lo habíamos hecho, tomando como sistema mecánico únicamente la bola, cuyo momentum no se conserva, y analizando su energía o bien el coeficiente newtoniano de restitución. En efecto, en el sistema mecánico bola–pared, ¿cuál es exactamente el subsistema “pared”? ¿Incluye vigas, columnas, toda la edificación, el planeta entero? Puede ser así, y el caso límite es correcto y su comprensión es necesaria, pero, repitamos, en el choque de una bola con una pared, con el piso, es más sencillo, es mejor, tomar como sistema únicamente la bola.

Volvamos a la colisión elástica unidimensional de  $m_1$  y  $m_2$ . Vimos que, en ese caso, el momentum y la energía cinética del sistema se conservan y se cumple que las velocidades relativas de alejamiento después de la colisión,  $v_{21f}$ , y de acercamiento antes de la colisión,  $v_{12i}$ , son iguales, lo que expresábamos como

$$1 = \frac{v_{21f}}{v_{12i}} .$$

Ahora, como dijimos, en las colisiones macroscópicas hay en general pérdidas de energía cinética,  $Q = \Delta K < 0$ . En el estudio de estas colisiones, llamadas inelásticas o a veces parcialmente elásticas, es útil la introducción del coeficiente de restitución, debido a Newton, y definido como la relación de las velocidades relativas

$$e = \frac{v_{21f}}{v_{12i}} .$$

El coeficiente de restitución está entre 0 y 1,

$$0 \leq e \leq 1 ,$$

$e = 1$  corresponde a una colisión elástica,  $e = 0$  a una colisión plástica. Es un coeficiente experimental, vinculado con la pérdida de energía cinética  $\Delta K$ , y depende de la forma, tamaño y naturaleza de los cuerpos que chocan, así como de sus velocidades. Si el cuerpo 2 es una pared,  $v_{2i} = v_{2f} = 0$  y así

$$e = - \frac{v_{1f}}{v_{1i}} ,$$

que coincide, obviamente, con el coeficiente que introducimos al estudiar el choque de una bola con un muro.

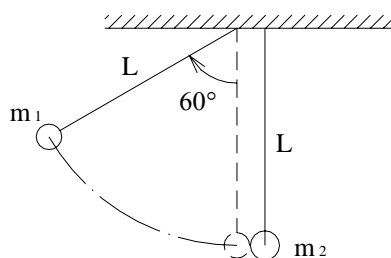
Una colisión unidimensional macroscópica de dos cuerpos, por ejemplo una colisión frontal de dos esferas, se estudia pues con dos ecuaciones lineales: la conservación del momentum del sistema de los dos cuerpos durante la colisión y el coeficiente de restitución, ecuaciones que permiten hallar las velocidades después de la colisión  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$ . En la colisión elástica puede volverse al punto de vista más fundamental de la conservación de la energía cinética,



pero, como mostramos, ello equivale a estudiar la ecuación lineal, más simple, de igualdad de las velocidades relativas, es decir  $e = 1$ .

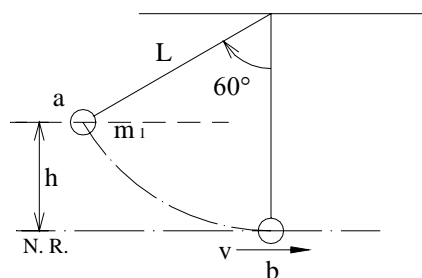
Si la colisión no es unidimensional, y se trata por ejemplo de la colisión oblicua de dos esferas o de dos discos que se mueven sobre una superficie plana, las velocidades finales después de la colisión tienen cada una dos componentes, de modo que hay en total cuatro incógnitas. Si la colisión es elástica habría tres ecuaciones, la conservación de la energía y dos componentes de la conservación del momentum, de modo que para hallar completamente las velocidades finales se requiere más información. En los ejemplos estudiaremos un poco esa situación.

## 1. EJEMPLO



La bola de masa  $m_2$  de un péndulo de longitud  $L$  reposa en su posición de equilibrio. La bola de otro péndulo de igual longitud y de masa  $m_1$ , se suelta desde un ángulo de  $60^\circ$  y en el punto más bajo de su trayectoria choca frontalmente con  $m_2$ . Si  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$  y el choque es elástico, hallar las velocidades inmediatamente después de la colisión. ¿Hasta qué alturas suben luego  $m_1$  y  $m_2$  y a qué ángulos con la vertical corresponden esas alturas?

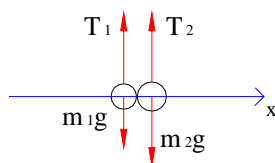
El marco inercial es obviamente el techo ligado a tierra. Estudiemos en primer lugar el descenso de  $m_1$ , que ya conocemos bien. El sistema es  $m_1$ , las fuerzas en posición cualquiera son la tensión, de trabajo nulo y el peso, fuerza conservativa. Hay entonces conservación de energía de  $m_1$  entre la situación a) cuando se suelta y la situación b) un instante antes del choque.



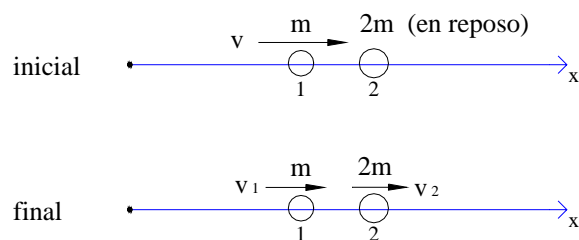
Para  $m_1$ :

$$E_a = E_b: \quad m_1 g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m_1 v^2, \quad v = \sqrt{gL}.$$

Estudiemos la colisión. El sistema es ahora el sistema de dos partículas  $m_1$  y  $m_2$ . La situación inicial, un instante antes de la colisión y la situación final, un instante después. Recordemos que durante la colisión, brevísima, las velocidades cambian pero no las posiciones, de modo que las tensiones en las cuerdas durante la colisión son verticales y las fuerzas externas son



Como la colisión es frontal en el eje  $x$ ,  $\sum F_{\text{ext } x} = 0$  y  $P_x$  efectivamente se conserva durante el choque. La otra ecuación la proporciona el coeficiente de restitución igual a 1 puesto que la colisión es elástica. Recalcemos que podría usarse como segunda ecuación la conservación de la energía cinética del sistema. Sin embargo, la igualdad de las velocidades relativas es equivalente, como ya mostramos, y simplifica el planteamiento algebraico. Se podrían incluso particularizar para el caso concreto las expresiones que obtuvimos para las velocidades finales. No es necesario apelar a ello, pues en un caso simple las ecuaciones son fáciles de plantear y resolver. Veamos. Unos esquemas claros en los que figuren las masas y sus velocidades en las situaciones inicial y final facilitan el planteamiento.



Conservación momentum en  $x$ :  $m v = m v_1 + 2 m v_2$

Choque elástico,  $e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}} = 1$ ,  $1 = \frac{v_2 - v_1}{v - 0}$

Las dos ecuaciones se resuelven fácilmente y se obtiene

$$v_1 = -\frac{v}{3}.$$

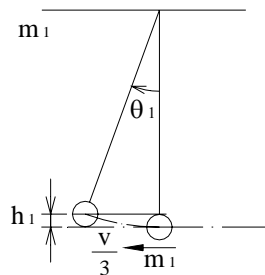
$$v_2 = \frac{2v}{3},$$

en donde el signo menos en  $v_1$  indica que esa velocidad no es como la supusimos en nuestro esquema final, sino al contrario. Es decir, las velocidades inmediatamente después de la colisión son

$$\frac{v}{3} \leftarrow \bigcirc \quad \bigcirc \rightarrow \frac{2v}{3}$$

con  $v = \sqrt{gL}$ .

Para estudiar los ascensos de  $m_1$  y de  $m_2$  cambiamos el sistema mecánico. Los sistemas son ahora  $m_1$  por un lado y  $m_2$  por otro, cada uno con movimiento pendular y conservación de energía



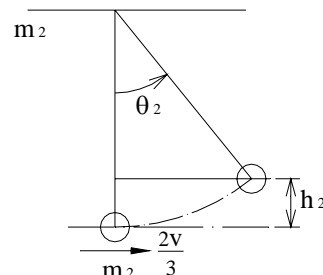
$$\frac{1}{2} m_1 \left( \frac{v}{3} \right)^2 = m_1 g h_1$$

$$h_1 = \frac{L}{18}$$

$$h_1 = L (1 - \cos \theta_1)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{17}{18}$$

$$\theta_1 = 19.2^\circ$$



$$\frac{1}{2} m_2 \left( \frac{2v}{3} \right)^2 = m_2 g h_2$$

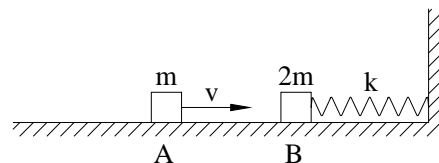
$$h_2 = \frac{2L}{9}$$

$$h_2 = L (1 - \cos \theta_2)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{7}{9}$$

$$\theta_2 = 38.9^\circ$$

## 2. EJERCICIO



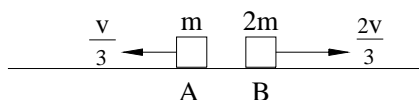
Un bloque B de masa  $2m$  está en reposo sobre una superficie horizontal, apoyado en un resorte de constante  $k$  en longitud natural. Otro bloque A, de masa  $m$ , se lanza con velocidad  $v$  directo hacia B. La superficie es lisa, la colisión es elástica. Todos los movimientos ocurren en la misma línea recta. Hallar las velocidades inmediatamente después de la colisión y luego la máxima deformación del resorte. ¿Con qué velocidad sale despedida la masa B cuando el

resorte vuelve a su longitud natural? Se presenta entonces una nueva colisión elástica con A. ¿Cuáles son las velocidades después de ella? Compruebe que la energía final del sistema A y B es la misma energía inicial  $\frac{1}{2} m v^2$  pero el momentum cambió. ¿Cuál es el cambio y a qué se debe?

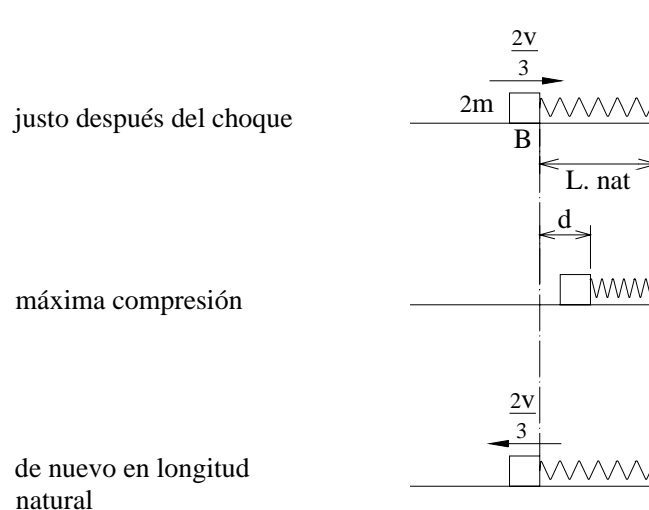
El marco inercial es el usual, fijo al piso ligado a tierra.

Durante la colisión el sistema es A y B. Aquí hay un asunto que ya hemos mencionado que hay que comprender bien. Como la colisión es tan breve, aunque las velocidades cambian notablemente durante ella, las posiciones son prácticamente las mismas, de modo que el resorte, que se encuentra en longitud natural, no ejerce ninguna fuerza durante el impacto y se conserva el momentum del sistema en dirección horizontal.

La colisión es idéntica a la del ejemplo anterior y su resultado es



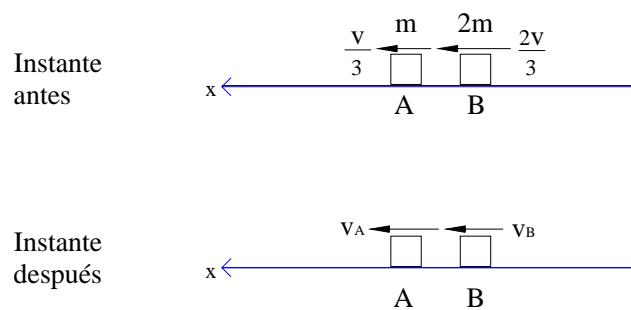
Estudiemos la ya conocida compresión del resorte tomando como sistema el bloque B. Hay conservación de energía, puesto que normal y peso no hacen trabajo y la fuerza elástica es conservativa. Así



$$\frac{1}{2} k d^2 = \frac{1}{2} (2m) \left( \frac{2v}{3} \right)^2$$

$$d = \frac{2v}{3} \sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Vuelve a la longitud natural con  $\frac{2v}{3}$  hacia la izquierda, mayor que la velocidad de A,  $\frac{v}{3}$ , y habrá entonces una nueva colisión. El eje  $x$  conveniente es hacia la izquierda y así



La conservación del momentum del sistema A y B en  $x$ , y el coeficiente de restitución  $e = 1$ ,

$$1 = \frac{v_{ABf}}{v_{BAi}}, \text{ conducen a}$$

$$v_A = \frac{7v}{9}$$

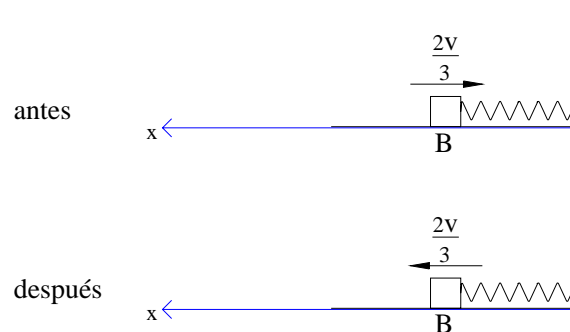
$$v_B = \frac{4v}{9}.$$

La energía final del sistema es

$$K = \frac{1}{2} m \left( \frac{7v}{9} \right)^2 + \frac{1}{2} (2m) \left( \frac{4v}{9} \right)^2 = \frac{1}{2} m v^2,$$

igual a la energía inicial pues en todo el proceso se conserva la energía.

El momentum del sistema A y B, en cambio, se conserva durante las dos colisiones, pero no durante la compresión y expansión del resorte, ya que allí la fuerza elástica es una fuerza externa que produce un impulso. Ese impulso es igual al cambio de momentum de B durante la compresión y expansión del resorte.

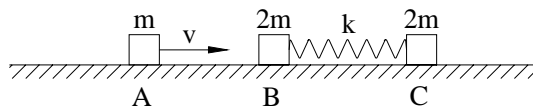


$$\Delta p_B = (2m) \left( \frac{2v}{3} \right) - (2m) \left( -\frac{2v}{3} \right) = \frac{8mv}{3},$$

que coincide, claro está, con el cambio global del momentum del sistema A y B,

$$\Delta P = \left[ m \left( \frac{7v}{9} \right) + 2m \left( \frac{4v}{9} \right) \right] - m(-v) = \frac{8mv}{3}.$$

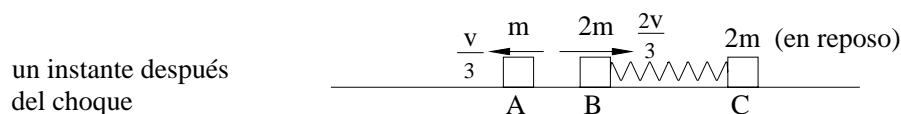
### 3. EJERCICIO



Con el ánimo de afianzar la comprensión y manejo del momentum y la energía de un sistema de partículas, proponemos esta variante del ejercicio anterior, en la cual el extremo derecho del resorte no está apoyado en un muro fijo sino en otro bloque C de masa  $2m$  que inicialmente está en reposo en la superficie lisa.

Recuerde que los ejercicios deben ser resueltos por el lector estudioso y sólo después debe cotejar su propia solución con la aquí propuesta o esbozada. Los ejemplos, en cambio, deben leerse y estudiarse íntegramente.

Retornemos al ejercicio. La primera colisión, ya estudiada, tiene como resultado:



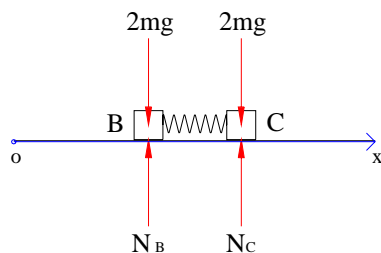
El problema es entonces: estudiar el sistema BC y mostrar con claridad que en la máxima compresión del resorte ambos bloques se mueven con la misma velocidad (o bien su velocidad relativa es cero) y hallar esa velocidad. Hallar la máxima compresión del resorte. Hallar la velocidad de B y de C cuando el resorte retorna a su longitud natural y los bloques quedan sueltos. En este caso, como se verá, no hay nueva colisión de B y A. Comprobar que la energía y el momentum del sistema A B C, son iguales a los que había en un comienzo, antes de la colisión A B.

Marco inercial : El piso.

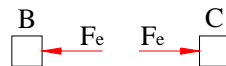
Sistema mecánico: Sistema de dos partículas B y C.

Situación general cualquiera durante la compresión o expansión del resorte:

Fuerzas externas



Fuerzas internas



$F_e$ : fuerza elástica, conservativa.  $W_{\text{int}} = -\Delta U$ .

$\sum F_{\text{ext } x} = 0 \Rightarrow$  Conservación del momentum en  $x$ .

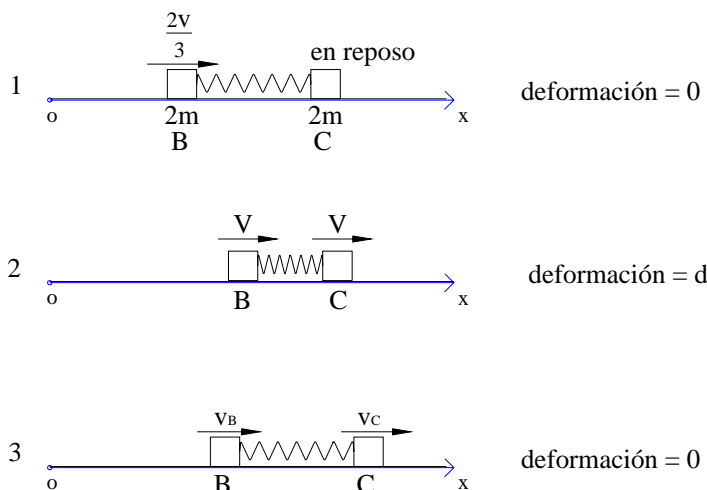
$W_{\text{int}} = -\Delta U = \Delta K \Rightarrow K + U$ : Constante: Conservación de energía.

La máxima compresión del resorte corresponde a la mínima separación entre B y C, es decir  $x_{BC} = x_B - x_C$  es mínima. O sea  $\frac{d x_{BC}}{d t} = 0 = v_{BC} = v_B - v_C$  y así, en la máxima compresión la velocidad relativa es nula y ambos bloques tienen en ese instante la misma velocidad.

Situación 1: instante después de la colisión A B.

Situación 2: máxima deformación del resorte.

Situación 3: resorte retorna de nuevo a la longitud natural.



La conservación del momentum en  $x$  y la conservación de la energía para el sistema B C permiten hallar con facilidad

$$V = \frac{v}{3}, \quad d = \frac{2}{3} v \sqrt{\frac{m}{k}},$$

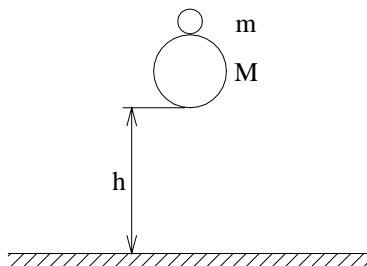
$$v_B = 0$$

$$v_C = \frac{2v}{3}.$$

De este modo B queda en reposo y no hay más colisiones con A.

Para el sistema mecánico de los tres bloques A B C, hay conservación de energía y momentum en  $x$ , como se comprueba fácilmente.

#### 4. EJERCICIO



Una pequeña bola de masa  $m$  se coloca sobre otra bola de masa mucho mayor  $M$ , y se dejan caer juntas desde una altura  $h$  sobre un piso duro. El impacto contra el piso puede estudiarse como la sucesión de dos colisiones que se siguen una inmediatamente después de la otra: primero choca  $M$  con el piso y luego choca  $M$  con  $m$ . Si ambas colisiones tienen el mismo coeficiente de restitución  $e$ , hallar la velocidad con que sale la bola pequeña  $m$ . Aplicar luego para el caso  $M = 10 m$ ,  $e = 0.9$ , y hallar la altura hasta la cual sube  $m$ .

Una bola pequeña, por ejemplo de ping-pong, y una bola maciza de caucho de buen rebote, proporcionan un juego sorprendente. No es fácil alinear las bolas y no es sencillo garantizar en la práctica la colisión frontal que asumimos, pero el experimento, aún aproximado, es ilustrativo.

El marco inercial es obviamente el piso.

Durante el descenso hay conservación de la energía y, como ya sabemos, ambas bolas llegan abajo con velocidad  $v = \sqrt{2 g h}$ .

Colisión  $M - \text{piso}$ :

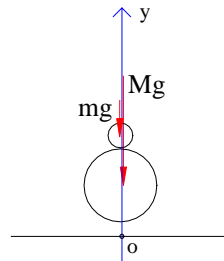
El sistema mecánico es  $M$ . El momentum de  $M$  no se conserva debido a la fuerza impulsiva del piso. La velocidad de salida del choque se estudia con el coeficiente de restitución, como ya habíamos visto.





## Colisión M – m:

El sistema mecánico es ahora el sistema de 2 partes: M y m. En situación general durante la colisión, el diagrama de fuerzas externas es



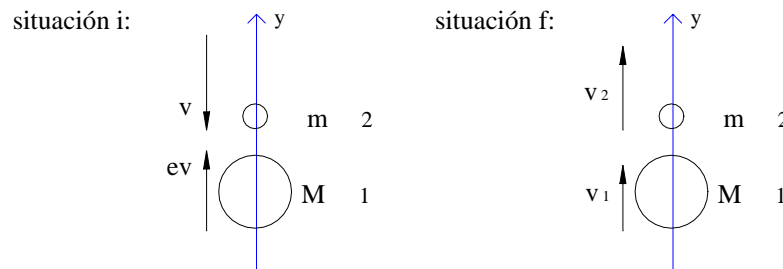
La componente y de la relación básica del momentum es

$$\sum F_{\text{ext } y} = \frac{d P_y}{d t},$$

$$- (M + m)g \int_i^f dt = \int_i^f d P_y$$

$$- (M + m)g \Delta t = \Delta P_y,$$

en donde hemos integrado desde la situación i, justo antes del choque, hasta la situación f, inmediatamente después del choque. Ya sabemos que en una colisión, la duración  $\Delta t$  es muy pequeña y entonces el impulso del peso,  $-(M + m)g \Delta t$  puede despreciarse y así  $\Delta P_y = 0$  y podemos considerar que el momentum en y del sistema durante la colisión se conserva.



$$P_y = \text{constante: } M e v + m (-v) = M v_1 + m v_2$$

$$\text{Coeficiente de restitución } e = \frac{v_{21f}}{v_{12i}} = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i} - v_{2i}}; \quad e = \frac{v_2 - v_1}{e v - (-v)}.$$

Hay que anotar que, al aplicar el coeficiente de restitución, es indiferente cual masa sea 1 y cual 2, puesto que

$$e = \frac{v_{21f}}{v_{12i}} = \frac{v_{12f}}{v_{21i}}.$$

Tenemos un sistema algebraico de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $v_1$  y  $v_2$ . Nos interesa  $v_2$ ,

$$v_2 = v \frac{(M e (2 + e) - m)}{M + m}.$$

Con  $M = 10 m$ ,  $e = 0.9$ ,

$$v_2 = 2.28 v.$$

$m$  sube hasta una altura  $h_2$  tal que  $v_2 = \sqrt{2 g h_2}$  y así

$$2 g h_2 = (2.28)^2 2 g h$$

$$h_2 = 5.21 h.$$

Si  $h$  es 1 m,  $h_2 = 5.21$  m. ¡El rebote de la bola pequeña es sorprendente!

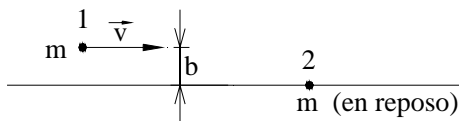
## 5. EJEMPLO

### Choque oblicuo

En una colisión unidimensional como las que hemos estudiado, las velocidades de las dos partículas o cuerpos involucrados están a lo largo de la misma línea recta. Examinemos ahora brevemente algunas colisiones bidimensionales, en las cuales las velocidades de las partículas respecto al marco inercial en el laboratorio están contenidas en un plano. Como no hay fuerzas externas sobre el sistema de ambas partículas, el momentum del sistema se conserva. Tomando dos componentes en el plano de la colisión se obtienen dos ecuaciones. Si la colisión es elástica hay una tercera ecuación. Sin embargo, las velocidades finales tienen cada una dos componentes, para un total de cuatro incógnitas y es entonces necesario proporcionar una nueva ecuación mediante características especiales de la interacción o bien conocer algún dato de las velocidades finales para resolver plenamente la colisión.

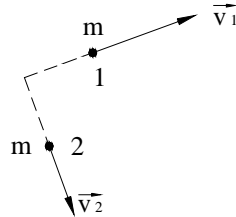
Hay, no obstante, casos especiales en los que, sin hallar completamente las velocidades finales, pueden encontrarse características notables de la colisión. Por ejemplo, consideremos la colisión elástica de dos partículas de igual masa, una de las cuales está en reposo antes de la colisión. El marco inercial es el laboratorio.

Antes de la colisión



b, llamado el parámetro de impacto, caracteriza la colisión oblicua. Si  $b = 0$ , la colisión sería frontal, unidimensional. Recordemos que, en general, una colisión no implica contacto sino una intensa interacción interna cuando hay proximidad, de modo que las velocidades individuales se modifican, pero el momentum del sistema se conserva. Más adelante veremos que  $m$  y  $m$  pueden ser los centros de dos esferas o discos que chocan oblicuamente.

Después de la colisión



El momentum del sistema se conserva. Vectorialmente,

$$m \vec{v} = m \vec{v}_1 + m \vec{v}_2,$$

es decir,  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

y, como la colisión es elástica, la energía cinética también se conserva,

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2,$$

expresión que puede escribirse como

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2,$$

que, reemplazando  $\vec{v}$ , queda

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2,$$

o sea,

$$2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0,$$

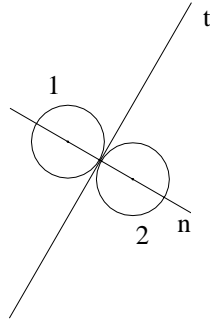
es decir,

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

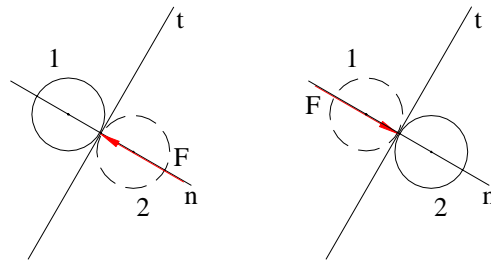
Excluyendo el caso de la colisión frontal, que ya conocemos y en cual  $\vec{v}_1 = 0$ , y el caso  $\vec{v}_2 = 0$ , en el cual no habría colisión, vemos que, para que el producto escalar se anule,  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  deben ser ortogonales: las velocidades después de una colisión elástica oblicua entre masas iguales con una de ellas en reposo, forman entre sí un ángulo recto.

Veamos ahora con cierto detalle una colisión elástica de dos esferas que se mueven sobre una superficie plana, considerando sólo sus movimientos de traslación, es decir, haciendo caso omiso de sus rotaciones. Podrían también ser dos discos que deslizan sobre una mesa.

En el momento del contacto, elijamos una dirección tangencial común a las superficies en contacto, y una dirección normal que pasa por los centros.



Asumamos que la colisión es elástica. En ese caso la energía cinética del sistema se conserva. Ahora, si hubiese fuerzas tangenciales de fricción por deslizamiento durante la colisión, esas fricciones disiparían energía y la colisión no sería elástica. El aceptar así que la colisión es elástica, conlleva la aceptación de que no hay fuerzas tangenciales, lo que equivale a asumir que las esferas son completamente lisas. La fuerza interna de impacto es entonces a lo largo de la dirección normal.



Así, la componente tangencial del momentum se conserva individualmente para cada esfera, es decir, las componentes tangenciales de las velocidades de ambas esferas permanecen inalteradas en la colisión. Si  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son las velocidades antes y  $\vec{v}'_1$ ,  $\vec{v}'_2$  después,

$$v_{1t} = v'_{1t}$$

$$v_{2t} = v'_{2t} .$$

La conservación de energía es

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1n}^2 + v_{1t}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2n}^2 + v_{2t}^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1n}'^2 + v_{1t}'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2n}'^2 + v_{2t}'^2) ,$$

que, dada la igualdad de las componentes tangenciales, queda

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1n}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2n}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1n}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2n}'^2 ,$$

y la componente normal del momentum del sistema es

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v_{1n}' + m_2 v_{2n}' .$$

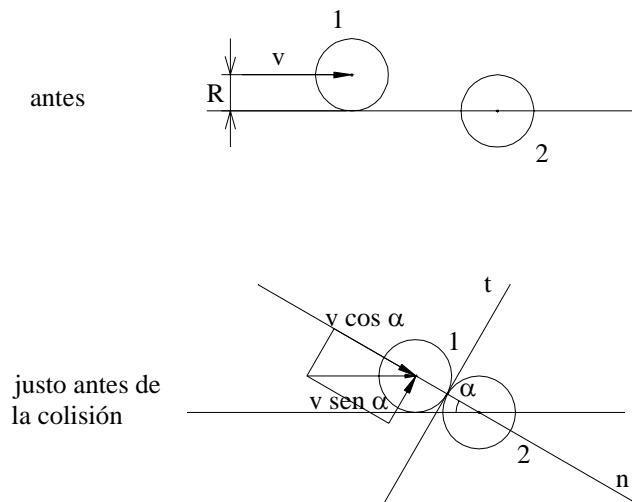
Las dos últimas ecuaciones son idénticas a las de un choque frontal, de modo que, introduciendo las velocidades relativas en el eje normal, se tiene

$$1 = \frac{v_{21n}'}{v_{12n}} .$$

Es más, si la colisión no es elástica puede introducirse el coeficiente de restitución en dirección normal:

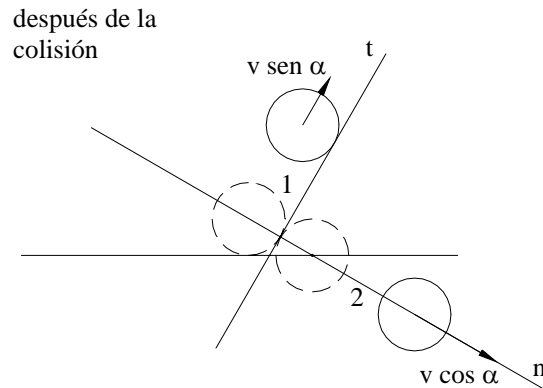
$$e = \frac{v_{21n}'}{v_{12n}} .$$

Así, para un choque oblicuo de esferas lisas, hay cuatro ecuaciones, las dos igualdades de las velocidades tangenciales y, en dirección normal, conservación del momentum del sistema y coeficiente de restitución, ecuaciones que permiten hallar plenamente las velocidades finales. Veamos un ejemplo simple. Dos esferas iguales, cada una de masa  $m$  y radio  $R$ , una de ellas en reposo



$$\sin \alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} , \quad \alpha = 30^\circ .$$

En el eje normal ya hemos estudiado esa colisión: 1 queda en reposo,  $v'_{1n} = 0$ , y 2 sale con  $v'_{2n} = v \cos 30^\circ$ . Tangencialmente,  $v'_{1t} = v \sin 30^\circ$ ,  $v'_{2t} = 0$ .



Las velocidades forman ángulo recto como ya habíamos demostrado en un caso más general.

## 6.8 MOVIMIENTO DE SISTEMAS DE MASA VARIABLE

En la mecánica clásica, la masa de una partícula es una constante que no varía con su movimiento. Un sistema de partículas es un conjunto bien determinado de partículas, es decir, cuando el tiempo transcurre y el sistema se mueve, las partículas son siempre las mismas y la masa del sistema permanece así invariable.

Pues bien, hay cuerpos cuya masa crece, por ejemplo un vagón que se va cargando de material al pasar bajo una tolva. Hay otros cuerpos cuya masa disminuye, como un cohete que va expulsando los gases producto de la combustión del combustible que lleva. Incluso hay cuerpos, como el codo de una tubería con el agua que fluye por él, a los que por un lado les ingresa masa y por otro les sale.

Esos cuerpos, vagón con su material, cohete con su combustible, codo con su agua, son los que llamamos cuerpos de masa variable. Se les dice también sistemas de masa variable. En sentido estricto, no son sistemas de partículas bien definidos. El “sistema” vagón con su material no tiene las mismas partículas en un instante  $t$  que en un instante  $t + \Delta t$ , puesto que nuevas partículas han ingresado a él, y no puede entonces aplicársele directamente la relación

fundamental  $\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$  para el movimiento de un auténtico sistema de partículas.

Para estudiar el movimiento de los cuerpos o sistemas de masa variable, es necesario precisar en primer lugar cuál es el cuerpo en un instante genérico  $t$  y en un instante próximo  $t + \Delta t$ . Luego, hay que tener adecuadamente en cuenta tanto la masa que ha salido desde el instante  $t$ , como la masa que va a ingresar hasta el instante  $t + \Delta t$ , para definir así un sistema auxiliar cuya masa sea constante, cuyas partículas sean las mismas, durante ese corto intervalo que va desde  $t$  hasta  $t + \Delta t$ . De ese modo, el sistema auxiliar es un auténtico sistema de partículas,

cuyo cambio de momentum dividido por  $\Delta t$ , teniendo en cuenta las masas que ingresan y salen, es

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t}$$

que, en el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , es la fuerza externa sobre el cuerpo o sistema de masa variable.

Mostraremos en los ejemplos como se diseña el sistema auxiliar para estudiar un cuerpo o sistema de masa variable y como se aplica la relación fundamental del momentum.

## 1. EJEMPLO

### Movimiento de un cohete

Un cohete es un vehículo dentro del cual está almacenada la masa que se va a expulsar durante su movimiento. El combustible que está dentro del cohete se enciende y sale en forma de gases expelidos a gran velocidad. El principio dinámico básico del movimiento, de la retropropulsión, es sencillo: el cohete ejerce una gran fuerza sobre los gases y éstos a su vez reaccionan, ejerciendo una fuerza de igual magnitud y sentido contrario sobre el cohete. Si no hubiese fuerzas externas, el sistema formado por el cohete y los gases expulsados sería un sistema aislado cuyo momentum se conserva. Ahora, como la masa se expulsa de forma continua y además, en general, hay fuerzas externas, el análisis detallado requiere un planteamiento cuidadoso.

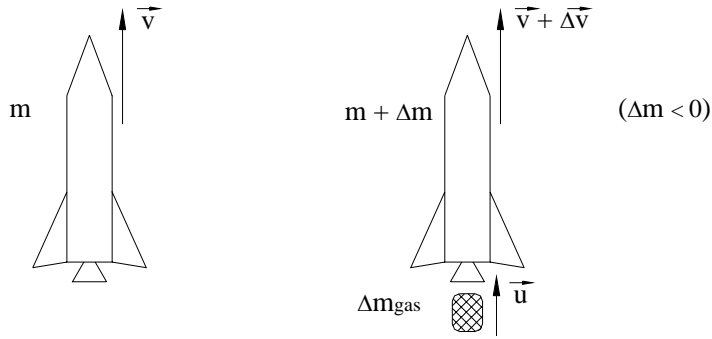
El cuerpo o sistema de masa variable es el cohete, cuerpo que incluye el combustible que tiene adentro. En situación general, en un instante cualquiera  $t$ , sea  $m$  la masa del cohete y  $\vec{v}$  su velocidad respecto a un marco inercial de referencia.  $m$  y  $\vec{v}$  son funciones del tiempo y en el instante muy próximo  $t + \Delta t$ ,

$$m(t + \Delta t) = m + \Delta m$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v} + \Delta \vec{v},$$

son masa y velocidad del cohete en  $t + \Delta t$ . Ahora, la masa de ese cuerpo, el cohete, en ese instante, no es la misma masa del cohete en  $t$ . La masa del cohete ha disminuido puesto que cierto combustible ha salido expulsado en forma de gases. Por esa razón  $\Delta m < 0$ . El cohete es pues un cuerpo o sistema de masa variable. Para garantizar que tenemos las mismas partículas durante ese pequeño intervalo  $\Delta t$ , definamos un sistema auxiliar: El sistema mecánico que vamos a estudiar desde el instante  $t$  hasta el  $t + \Delta t$  es el cohete más los gases expulsados desde el instante  $t$ . Ese sistema auxiliar así diseñado, tiene las mismas partículas que había en  $t$  y es por tanto un auténtico sistema de partículas.

Los esquemas de nuestro sistema auxiliar en  $t$  y  $t + \Delta t$  son así



$\vec{u}$  es la velocidad de los gases expulsados respecto al marco inercial, distinta de la del cohete. La masa de los gases que han sido expulsados durante  $\Delta t$  es precisamente la masa que ha perdido el cohete y así

$$\Delta m_{\text{gas}} = |\Delta m| = -\Delta m,$$

ya que, como dijimos,  $\Delta m < 0$ , y por tanto  $\Delta m_{\text{gas}}$  es, obviamente, positiva.

Calculemos el cambio de momentum durante el intervalo  $\Delta t$  del sistema de partículas cohete más gases expulsados:

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t) = [(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + (-\Delta m)\vec{u}] - m\vec{v}$$

$$\Delta \vec{P} = m \Delta \vec{v} - \Delta m (\vec{u} - \vec{v}) + \Delta m \Delta \vec{v}.$$

Halleemos ahora  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  como un límite

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{v}).$$

Obsérvese que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 0,$$

ya que el  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta m = 0$ .

El término  $\vec{u} - \vec{v}$  no es otra cosa que la velocidad relativa de los gases expulsados respecto al cohete,

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{u} - \vec{v},$$



y  $\frac{d\vec{P}}{dt}$  es la fuerza externa neta,  $\vec{F}_{\text{ext}}$ . Ahora bien, en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , nuestro sistema de partículas auxiliar, cohete más gases, es simplemente el cohete en el instante  $t$  y así, la ecuación de movimiento del cuerpo de masa variable, cohete, es, reorganizando los términos,

$$\vec{F}_{\text{ext}} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{rel}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

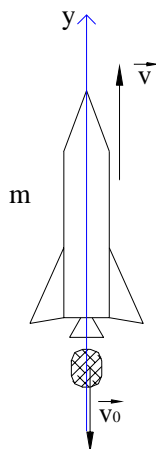
Las fuerzas externas sobre un cohete pueden ser la atracción gravitacional y la fricción, si se mueve en una región donde hay atmósfera. Pero, con el ánimo de comprender bien como la expulsión continua de masa acelera el cohete, consideremos el movimiento en una región en la que no hay fuerzas externas, por ejemplo, despegando de una plataforma espacial, de modo que podamos despreciar los efectos gravitacionales y de fricción. Así con  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ , la ecuación de movimiento del cohete queda

$$\frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{rel}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Un primer resultado se ve con claridad. Como se pierde masa,  $m$  es decreciente,  $\frac{dm}{dt} < 0$  y

entonces la aceleración  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  es opuesta a la velocidad relativa de la masa expulsada: en una dirección salen los gases expulsados y en la dirección contraria se acelera el cohete. Este es un aspecto esencial del cambio de velocidad en el espacio por expulsión continua de masa. La fuerza  $\frac{dm}{dt} \vec{v}_{\text{rel}}$  se llama a veces fuerza de reacción o empuje del chorro de gas.

Consideremos como caso particular un cohete que se mueve en línea recta en un eje  $y$ , despegando desde el reposo y cuya masa inicial, que incluye todo el combustible, es  $m_i$ . Tomemos como marco inercial la plataforma espacial.



Llamemos  $v_o$  la magnitud de la velocidad relativa de expulsión de los gases, que asumiremos constante. Así,  $v_{rel y} = -v_o$  y la componente  $y$  de la ecuación de movimiento puede escribirse

$$-v_o \, dm = m \, dv,$$

$$-\int_{m_i}^{m_f} \frac{dm}{m} = \frac{1}{v_o} \int_0^{v_f} dv,$$

en donde hemos planteado la integral hasta una velocidad final,  $v_f$ , cuando se ha expulsado todo el combustible y queda la masa final  $m_f$ . Integrando queda

$$-\ln \frac{m_f}{m_i} = \ln \frac{m_i}{m_f} = \frac{v_f}{v_o},$$

$$\frac{m_i}{m_f} = e^{v_f/v_o}.$$

La velocidad  $v_o$  de salida de los gases depende de factores como la naturaleza química del combustible, la temperatura, en fin, y puede estar por los lados de 2 a 3 km/s. Tomemos un valor de 2.5 km/s y supongamos que la velocidad final que debe adquirir el cohete es la velocidad necesaria para ir a la luna que, como ya calculamos, es aproximadamente la velocidad de escape de la tierra, de unos 11.2 km/s. En ese caso

$$\frac{m_i}{m_f} \approx 88.$$

Los efectos adversos de la gravedad y la fricción harían aún mayor esa relación entre la masa final útil y la masa inicial que incluye el combustible. Esto explica, al menos cualitativamente, el gran tamaño de los cohetes espaciales. Por supuesto que lo que hemos estudiado aquí son apenas los principios dinámicos básicos, eso si, de gran importancia. Hay que notar que la velocidad final que adquiere el cohete en nuestro caso simplificado sin fuerzas externas, no depende del tiempo, sino de la relación de masa  $m_i/m_f$ . Cuán rápido

se adquiriera esa velocidad dependerá de la tasa de emisión de masa  $\frac{dm}{dt}$ .

## 2. EJERCICIO

Un cohete se usa para impulsar una “carga útil” de masa  $m$  a la que, en última instancia, quiere dársele una velocidad final  $v_f$ .

Sea  $v_o$  la magnitud de la velocidad relativa de expulsión de los gases. El cohete parte del reposo en una región donde no hay fuerzas externas y su masa inicial total es  $M$ .

- a) Suponga que la diferencia  $m_i$  entre la masa inicial y la final es puro combustible que va a salir expulsado.

$$m_i = M - m.$$

Calcule la relación masa inicial/carga útil,  $M/m$ , si  $v_f = 2 v_o$ .

$$\frac{M}{m} = e^2 = 7.39$$

- b) Para ser un poco más realistas tengamos en cuenta el peso muerto del tanque de combustible, así: sólo el 90% de  $m_i$  es combustible aprovechable. El 10% restante es la masa del tanque que, una vez consumido el combustible, simplemente se desprende del resto sin ser expulsado. Calcule de nuevo la relación  $M/m$ , con  $v_f = 2 v_o$ .

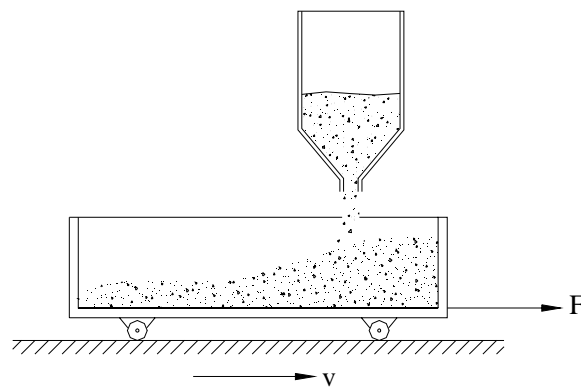
$$\frac{M}{m} = \frac{0.9 e^2}{1 - 0.1 e^2} = 25.47$$

La masa del tanque proporcional a la masa del combustible (en nuestro caso masa tanque =  $\frac{1}{9}$  masa combustible), impone una limitación severa a la velocidad máxima posible del cohete. Calcule esa velocidad máxima.

$$v_{\text{máx}} = v_o \ln 10 = 2.30 v_o.$$

Para remediar un poco esta situación se usan cohetes de varias etapas que permiten una mayor velocidad final.

### 3. EJEMPLO

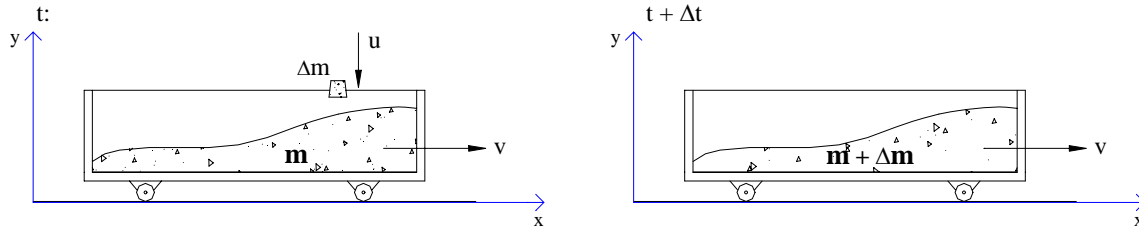


Desde una tolva estacionaria está cayendo material sobre un vagón que se mueve por rieles horizontales lisos. ¿Qué fuerza  $F$  es necesario hacer sobre el vagón para moverlo con velocidad constante y cuánto vale la reacción vertical de los rieles?

El marco inercial es el piso fijo a tierra, con los ejes indicados.

Elijamos como sistema o cuerpo de masa variable el vagón con el material que hay dentro de él. Sea  $m$  su masa en un instante cualquiera  $t$ . En un instante próximo  $t + \Delta t$ , su masa ha aumentado puesto que ha ingresado material, y será ahora  $m + \Delta m$ , siendo  $\Delta m$  la masa del material que ha ingresado desde  $t$ . Para el análisis desde el instante  $t$  hasta el  $t + \Delta t$ , consideremos como sistema de partículas el sistema auxiliar que comprende el vagón con el material dentro de él, más el material que va a ingresar hasta  $t + \Delta t$ , material que viene cayendo verticalmente desde la tolva. Obsérvese bien que este sistema auxiliar definido para el intervalo  $\Delta t$ , es un auténtico sistema de partículas: en todo momento desde el instante  $t$  hasta el  $t + \Delta t$ , ese sistema auxiliar tiene las mismas partículas.

Los esquemas de masas y velocidades para el sistema auxiliar en  $t$  y  $t + \Delta t$  son



La velocidad  $u$  de la masa que ingresa, respecto al marco inercial en el piso, es vertical puesto que la tolva es estacionaria y el material simplemente cae. En la situación  $t + \Delta t$  la velocidad del vagón es simplemente  $v$ , sin incremento, puesto que se mueve con velocidad constante. En otro caso, la velocidad sería allí  $v + \Delta v$ . El cambio de momentum en  $x$  es

$$\Delta P_x = P_x(t + \Delta t) - P_x(t) = (m + \Delta m)v - [mv + \Delta m \times 0] = \Delta m v,$$

en el que hemos insistido en que la componente  $x$  de la velocidad de  $\Delta m$  vale 0.

Podemos calcular también el cambio de momentum en  $y$

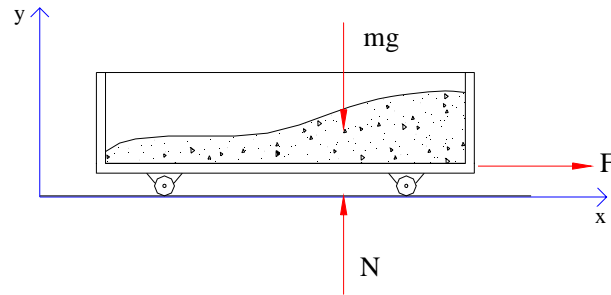
$$\Delta P_y = P_y(t + \Delta t) - P_y(t) = 0 - [\Delta m(-u)] = \Delta m u$$

En el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\frac{dP_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} v,$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} u.$$

En ese límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta m \rightarrow 0$ , el sistema de partículas auxiliar tiende al sistema de masa variable vagón con material dentro, cuyo diagrama de fuerzas externas es en  $t$



donde  $N$  es la fuerza normal neta hecha por el piso, Así

en  $x$  :

$$F = \frac{dm}{dt} v$$

en  $y$  :

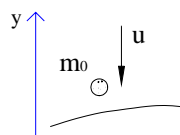
$$N - mg = \frac{dm}{dt} u ,$$

y así,

$$N = mg + \frac{dm}{dt} u .$$

El término  $\frac{dm}{dt} u$  es la fuerza vertical que ejerce el chorro de material, por ejemplo de arena, sobre el vagón, siendo  $u$  la velocidad con que llega al vagón. Miremos esa importante fuerza, desde un punto de vista complementario, como la fuerza media hecha por un chorro de partículas que impacta una superficie, esparciéndose por ella sin rebotar.

Digamos que  $m_o$  es la masa de cada grano de arena que llega con velocidad  $u$  a la superficie.



El grano queda embebido en la superficie, o, si se quiere, se dispersa lateralmente, de modo que el pequeño impulso producido por la superficie sobre el grano de arena es

$$J_{\text{grano}} = \Delta p_{\text{grano}} = 0 - m_o (-u) = m_o u ,$$

hacia arriba en  $y$ .

En un tiempo  $\Delta t$  llegan  $n$  granos, de modo que el impulso total, igual a la fuerza media por el tiempo  $\Delta t$ , es

$$J = n m_o u = F_{\text{media}} \Delta t$$

y así 
$$F_{\text{media}} = \frac{n m_o}{\Delta t} u .$$

Como la masa de arena, de material, que ha llegado en  $\Delta t$  es  $\Delta m = n m_o$  se tiene

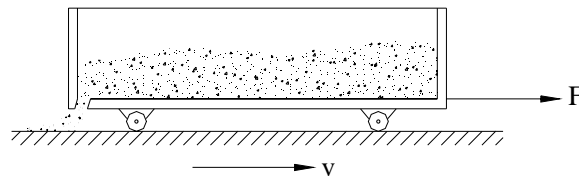
$$F_{\text{media}} = \frac{\Delta m}{\Delta t} u ,$$

que, en el caso de un flujo continuo, es

$$F = \frac{d m}{d t} u .$$

Esta es la fuerza, hacia arriba, hecha por la superficie sobre el chorro de material. Hay, por supuesto, una de igual magnitud, hacia abajo, hecha por el chorro sobre la superficie.

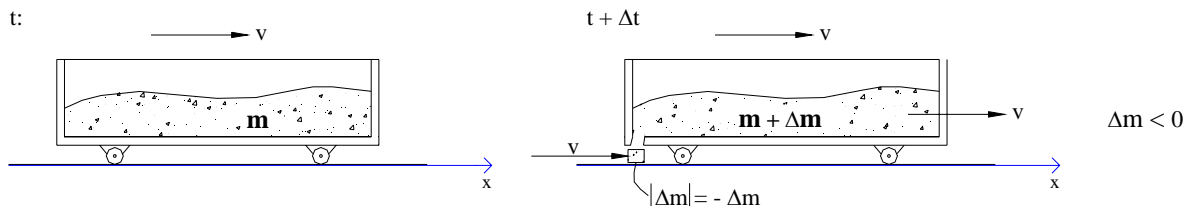
#### 4. EJERCICIO



Un vagón cargado de arena tiene un agujero en su parte inferior por el que está descargando material. ¿Qué fuerza se requiere para moverlo con velocidad constante sobre rieles horizontales lisos?

Marco inercial: el piso.

Sistema de masa variable: el vagón con la arena dentro de él . Sistema de partículas auxiliar entre los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ : vagón (con la arena dentro de él) más la arena que ha salido desde  $t$ . Esquema de masas y velocidades del sistema auxiliar en  $t$  y  $t + \Delta t$



Como la arena simplemente cae del vagón, en el momento en que sale del vagón tiene la misma velocidad que éste. Es decir, en  $x$ , velocidad del  $|\Delta m|$  respecto al piso es  $v$ .

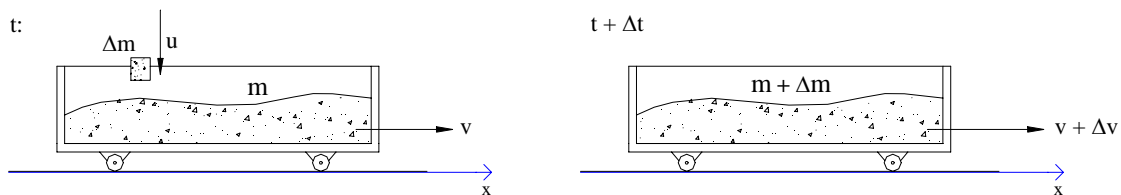
El análisis del momentum en  $x$  muestra inmediatamente que  $F = 0$ , el vagón continúa botando arena, moviéndose con velocidad constante sin necesidad de ninguna fuerza. ¿Cuál es la diferencia con el problema anterior? Cuando la arena cae de la tolva su velocidad

horizontal es nula. Al entrar al vagón sufre un cambio de momentum en  $x$  que requiere una fuerza. En cambio, cuando el grano de arena se desprende del vagón, no sufre ningún cambio de momentum en  $x$ , no se requiere fuerza.

## 5. EJERCICIO

Un vagón de 1000 kg se mueve libremente sobre rieles horizontales lisos a 2 m/s. Desde una tolva estacionaria comienza a caerle material a razón de 100 kg/s. A los 4 s, hallar la velocidad y la distancia recorrida por el vagón.

El marco inercial es el piso. El sistema o cuerpo de masa variable es el vagón con el material dentro de él. El sistema de partículas auxiliar, definido entre los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ , es el vagón con el material adentro más el material que va a ingresar hasta el instante  $t + \Delta t$ . Los esquemas del sistema auxiliar, verdadero sistema de partículas, son

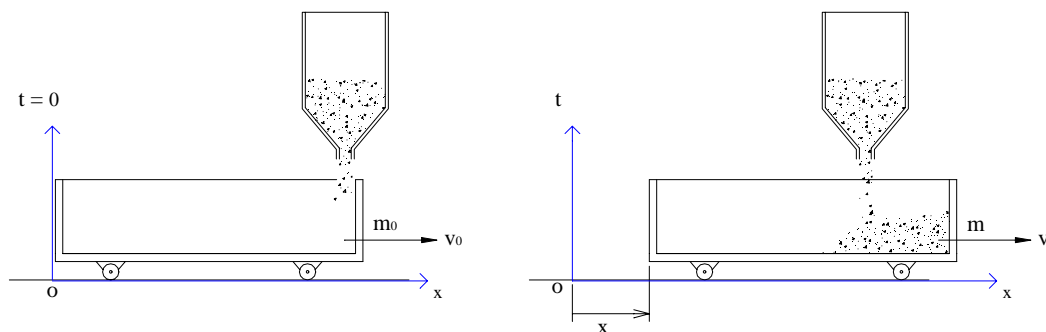


en donde  $m$  es la masa del vagón más el material adentro. Es importante señalar que el diseño y análisis del sistema auxiliar debe hacerse en situación general, desde un  $t$  cualquiera, hasta  $t + \Delta t$ . Como ya sabemos, se analiza el cambio de momentum del sistema auxiliar en  $x$ . En el límite, el sistema auxiliar se convierte en nuestro sistema objeto de interés, que es el sistema de masa variable, vagón con material, sobre el cual no hay fuerzas externas en  $x$  pues se mueve libremente, y así

$$0 = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

que es la ecuación de movimiento del vagón. Precisemos las condiciones iniciales.

En  $t = 0$  el vagón está vacío, su masa es  $m_0$ . Elijamos allí el origen,  $x = 0$ . Su velocidad es  $v_0$ .



Llamemos  $q$  la rata, constante, de ingreso de material,

$$q = \frac{dm}{dt},$$

$$\int_{m_0}^m dm = q \int_0^t dt,$$

$$m = m_0 + qt.$$

Para integrar la ecuación de movimiento hay dos alternativas. O bien remplazar esta  $m$  en función de  $t$  y además  $\frac{dm}{dt} = q$ , e integrar para hallar  $v$ , o bien escribirla así

$$0 = \frac{d(mv)}{dt},$$

y por tanto

$$\int_{m_0 v_0}^{mv} d(mv) = 0,$$

$$mv = m_0 v_0,$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + qt}.$$

Igualando a  $\frac{dx}{dt}$  e integrando, se obtiene

$$x = \frac{m_0 v_0}{q} \ln \frac{m_0 + qt}{m_0}$$

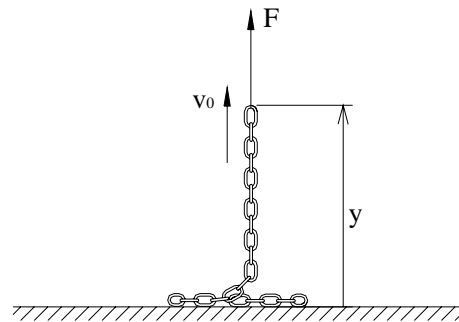
Remplazando los valores, tenemos, en unidades SI,

$$v(4) = 1.43 \text{ m/s}$$

$$x(4) = 6.73 \text{ m}.$$



## 6. EJEMPLO

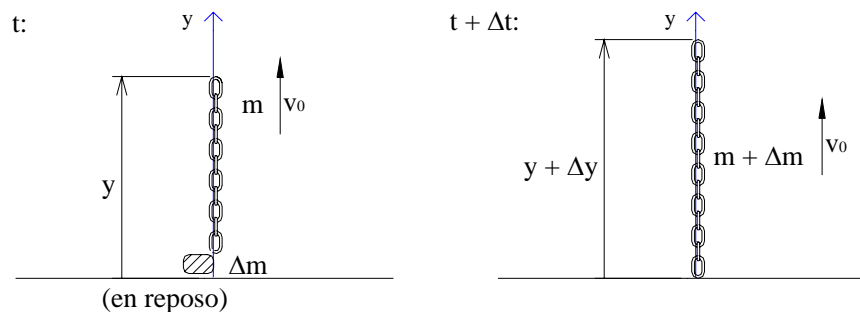


El extremo de una cadena de densidad lineal de masa  $\lambda$ , se levanta verticalmente con velocidad constante  $v_0$ . Hallar la fuerza  $F$  necesaria en función de la altura  $y$ . Calcular la potencia efectuada por  $F$  y compararla con la rata de cambio de la energía mecánica total de la cadena. Explicar la diferencia. Suponga que los eslabones están en reposo y adquieren bruscamente la velocidad  $v_0$ .

El marco inercial es obviamente el piso. Eje  $y$  hacia arriba. Tomemos como sistema mecánico de masa variable el trozo de cadena de masa  $m$  y longitud  $y$ , que en un instante cualquiera  $t$  se encuentra vertical y moviéndose con  $v_0$ .

El sistema auxiliar de partículas para estudiar desde  $t$  hasta  $t + \Delta t$ , está formado por el trozo vertical más el pequeño trozo, inicialmente en reposo, que va a ingresar al movimiento vertical hasta el instante  $t + \Delta t$ .

Los esquemas de masas y velocidades del sistema auxiliar en  $t$  y  $t + \Delta t$  son



El cambio de momentum en  $y$  por unidad de tiempo, del sistema de partículas auxiliar, es

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{(m + \Delta m)v_0 - [m v_0 + \Delta m \times 0]}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} v_0.$$

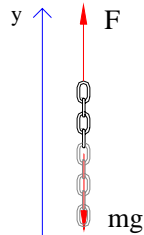
En el límite, cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y el sistema auxiliar tiende a ser el sistema de masa variable original,

$$\frac{d p_y}{d t} = \frac{d m}{d t} v_o ,$$

que con  $m = \lambda y$ , como  $v_o = \frac{dy}{dt}$ , queda

$$\frac{d p_y}{d t} = \lambda v_o^2 .$$

Las fuerzas externas sobre el trozo vertical de cadena son



Hay que anotar que la fuerza ejercida sobre los eslabones que están en el piso es una fuerza interna en el sistema auxiliar, con incidencia, como veremos, en el aspecto energético, pero no en el momentum. La fuerza externa neta en  $y$  es por lo tanto

$$F - mg = F - \lambda y g = \lambda v_o^2 ,$$

y entonces

$$F = \lambda v_o^2 + \lambda g y .$$

Examinemos el teorema del trabajo y la energía para el sistema de partículas auxiliar

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K .$$

Las fuerzas externas son  $F$  y el peso. Como el peso es fuerza conservativa,  $W^{\text{peso}} = -\Delta U$  y así

$$W^F + W_{\text{int}} = \Delta(K + U) .$$

Dividiendo por  $\Delta t$  y pasando al límite tendremos, como el trabajo por unidad de tiempo en el límite es la potencia instantánea,

$$\text{Potencia de } F + \text{Potencia interna} = \frac{d(K + U)}{d t} .$$

Veamos los diversos términos:

$$\text{Potencia de } F = F v_o = \lambda v_o^3 + \lambda g y v_o .$$

Tomando nivel de referencia en el piso, con el centro de masa a  $y/2$  ,

$$K + U = \frac{1}{2} m v_o^2 + m g \frac{y}{2} = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{\lambda g y^2}{2}$$

y entonces, con  $v_o$  constante ,

$$\begin{aligned} \frac{d(K + U)}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \frac{dm}{dt} \right) v_o^2 + \lambda g y \times \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \lambda v_o^3 + \lambda g y v_o . \end{aligned}$$

Así, la que hemos llamado potencia interna será

$$P_{\text{interna}} = -\frac{1}{2} \lambda v_o^3 .$$

Veamos que este resultado es completamente consistente con el cálculo directo de la rata de cambio del trabajo interno que se efectúa para tomar unos eslabones del piso, de masa  $\Delta m$  , y llevarlos a moverse con la velocidad de la parte vertical de cadena. Atención que, como ya sabemos, la velocidad esencial en el trabajo interno es la velocidad relativa. Miremos las cosas desde el punto de vista de los eslabones de masa  $\Delta m$  que están en el piso. La velocidad relativa inicial del eslabón móvil respecto a él es  $v_o$  y su velocidad relativa final es cero y así el trabajo interno necesario para producir el cambio de energía  $-\frac{1}{2} \Delta m v_o^2$  , será

$$W_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \Delta m v_o^2 ,$$

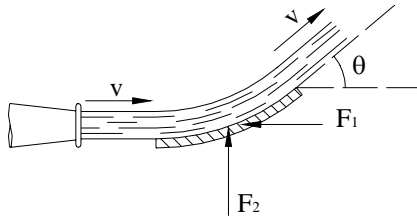
que por unidad de tiempo y en el límite es

$$P_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dm}{dt} \right) v_o^2 = -\frac{1}{2} \lambda v_o^3 ,$$

tal como habíamos calculado. Es importante comprender porqué el trabajo interno es negativo. Mirado desde el eslabón del piso, la velocidad relativa del eslabón ascendente es hacia arriba pero la fuerza interna sobre él es hacia abajo: fuerza interna y velocidad relativa se oponen, dando como resultado un trabajo negativo.

## 7. EJEMPLO

### Desviación de un flujo estacionario



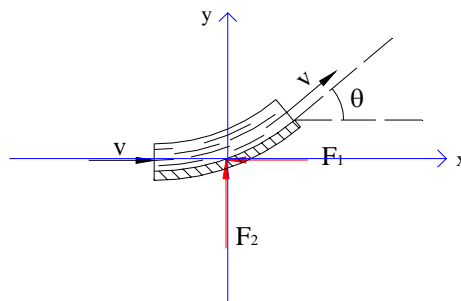
Un álabe o placa curva desvía un chorro de fluido en un plano horizontal. El fluido tiene densidad  $\rho$ , área de la sección transversal  $A$  y velocidad  $v$ . Hallar las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  necesarias para sostener fija la placa.

Un flujo es estacionario o permanente cuando, en un determinado punto, las características del flujo como la presión, densidad y velocidad, no cambian con el transcurso del tiempo. Asumiremos que el chorro de fluido es estacionario. Más aún, supondremos que la velocidad y el área de la sección transversal prácticamente no varían en el corto tramo en el que el fluido está en contacto con la placa.

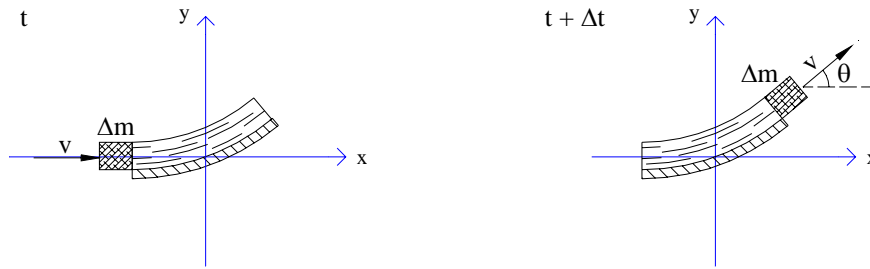
Consideremos que la placa está fija en un marco inercial ligado a tierra, con ejes  $x$ ,  $y$ , como se indican.

Elijamos como cuerpo o sistema de masa variable en un instante  $t$ , el sistema formado por la placa y por el fluido que en ese instante está en contacto con ella, es decir, por el fluido comprendido entre las secciones transversales a la entrada y a la salida de la placa. Ese sistema es, en efecto, un sistema de masa variable, puesto que en un instante posterior, han ingresado a él nuevas partículas de fluido por la sección transversal a la entrada y han salido otras partículas por la sección a la salida de la placa. En los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ , las partículas que están en el sistema como lo hemos definido no son las mismas.

Las fuerzas externas, despreciando el peso, que no está en el plano de la figura, sobre el sistema de masa variable, son



Ahora, para diseñar un sistema auxiliar que sea un auténtico sistema de partículas durante el corto intervalo de  $t$  a  $t + \Delta t$ , incluyamos tanto el fluido que ha salido desde  $t$ , como el que va a ingresar hasta  $t + \Delta t$ .



En el flujo estacionario o permanente, la masa de fluido contenida entre la sección inicial al ingreso de la placa y la sección final a la salida de la placa, es siempre la misma, pero las partículas no son las mismas, pues unas ingresan y otras salen. El nombre de sistema de masa variable no parece así, y no es, el más adecuado y podríamos mejor llamarlo sistema de partículas variable. El hecho es que ese sistema tiene la misma masa global pero no las mismas partículas. Ahora, si calculamos el momentum de ese fluido que hay desde el inicio hasta el fin de la placa, ese momentum es una suma,  $\sum m_i \vec{v}_i$ , de los productos de la masa de cada trocito de fluido por su velocidad, y esta suma es igual en todo instante en el flujo estacionario. De modo que la diferencia de momentum del sistema auxiliar, auténtico sistema de partículas, entre los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ , se debe exclusivamente a la diferencia de momentum de la masa que sale en  $\Delta t$ , con el momentum de la masa que ingresa en  $\Delta t$ .

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) = \Delta m (v \cos \theta \hat{i} + v \sin \theta \hat{j}) - \Delta m v \hat{i}$$

que, dividiendo por  $\Delta t$ , pasando al límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , con

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t},$$

y tomando componentes, queda, para el sistema de masa variable,

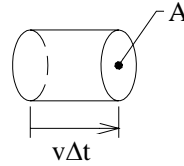
$$F_1 = \frac{dm}{dt} v (1 - \cos \theta)$$

$$F_2 = \frac{dm}{dt} v \sin \theta.$$

Estudiemos un poco el término  $\frac{dm}{dt}$ . Consideremos la masa  $\Delta m$  que ingresa durante  $\Delta t$ .

Si introducimos la densidad  $\rho$ ,  $\Delta m = \rho \Delta \text{vol}$ , siendo  $\Delta \text{vol}$  el volumen de fluido que ingresa durante  $\Delta t$ . Ahora, durante  $\Delta t$  la sección transversal, que se mueve con velocidad  $v$ , avanza  $v \Delta t$  y así

$$\Delta \text{vol} = A (v \Delta t)$$



con lo cual

$$\Delta m = \rho A v \Delta t ,$$

y así,

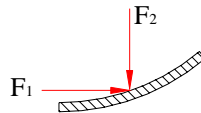
$$\frac{dm}{dt} = \rho A v ,$$

y las fuerzas  $F_1$  ,  $F_2$  , pueden escribirse como

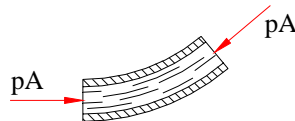
$$F_1 = \rho A v^2 (1 - \cos \theta)$$

$$F_2 = \rho A v^2 \sin \theta .$$

Estas fuerzas son hechas por un agente externo sobre la placa. Si hubiésemos tomado como sistema de masa variable únicamente el fluido, el análisis, idéntico, nos proporcionaría las fuerzas netas hechas por la placa sobre el fluido. Son las fuerzas necesarias para proporcionar la rata de cambio del momentum del chorro de fluido. Por acción y reacción, las fuerzas del fluido sobre la placa, son así



En este problema, el chorro de fluido está abierto a la atmósfera, y hemos hecho caso omiso de los efectos de la presión atmosférica que está por doquier. Si el fluido está confinado dentro de un tubo y tomamos como sistema variable de partículas el trozo de tubo con el fluido contenido entre dos secciones rectas determinadas de la tubería, habrá que tener en cuenta las fuerzas hechas por el resto de fluido, iguales a la presión por el área, de tipo estático y que existirían aún si no estuviese el fluido en movimiento.



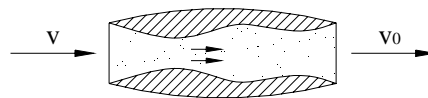
Pero la rata de cambio del momentum del fluido cuando hay movimiento es idéntica a la que estudiamos y las fuerzas netas de empuje del fluido sobre el tubo, debidas al movimiento del fluido, son las que calculamos.

## 8. EJEMPLO

### Motor a reacción

El principio básico de funcionamiento del motor a reacción de un avión es el siguiente: Entra aire por la parte delantera del motor y mediante la quema del combustible se proporciona a los gases de escape una gran velocidad de salida por la parte posterior. Los gases de escape contienen combustible quemado, pero la masa de combustible quemado por unidad de tiempo es muy pequeña comparada con la masa de aire por unidad de tiempo que pasa por el motor y puede despreciarse en una primera aproximación. Lo que tenemos pues básicamente en un motor a reacción, es un flujo de aire que entra con una cierta velocidad y sale con otra. Sea un avión que se mueve con velocidad  $v$  constante respecto a tierra. Sus motores toman aire, que consideramos en reposo respecto a tierra, y lo expulsan con velocidad relativa al avión, de magnitud  $v_o$ . Elijamos un marco inercial de referencia ligado al avión. Vamos a hallar la fuerza hacia adelante hecha por el aire que fluye, sobre un motor. En el marco de referencia elegido, el aire entra al motor con velocidad  $v$  y sale con  $v_o$ . El sistema de masa variable es el aire que en un instante dado está dentro del motor. El sistema auxiliar de partículas entre  $t$  y  $t + \Delta t$ , comprende además el aire que ha salido desde  $t$  y el que va a ingresar hasta  $t + \Delta t$ .

Sistema de masa variable:



Sistema de partículas auxiliar:



Asumiendo un flujo estacionario, el cambio de momentum del sistema auxiliar en  $x$  es

$$\Delta P_x = \Delta m v_o - (\Delta m v) = \Delta m (v_o - v),$$

dividiendo por  $\Delta t$  y en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , tendremos la fuerza externa en  $x$  hecha por el motor sobre el aire adentro de él, hacia atrás,

$$F = \frac{dm}{dt} (v_o - v).$$

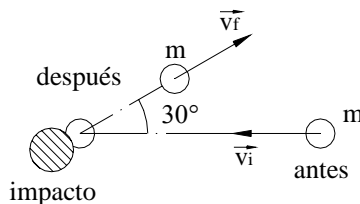
La fuerza, a veces llamada el empuje de propulsión, hecha por el aire sobre el motor, es de igual magnitud y hacia delante.

Calcúlese, por ejemplo, el empuje en un motor de un jet que viaja a 900 km/h si el motor toma aire a 60 kg/s y lo expele con 500 m/s respecto al avión.

$$15 \times 10^3 \text{ N}$$

## PROBLEMAS

1.



Una bola de béisbol, cuya masa es de 0.14 kg, se mueve horizontalmente con una velocidad inicial de 120 km/h. Después de ser golpeada por el bate, sale con una velocidad final de 150 km/h y un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Calcule el impulso de la fuerza neta sobre la bola durante el impacto, en magnitud y dirección. Si la duración del impacto es  $2 \times 10^{-3} \text{ s}$ , halle la fuerza neta media. Compare con el peso de la bola, ¿puede despreciarse el efecto del peso durante el impacto?

$$F_{\text{media}} = 5\,073 \text{ N}$$

2. Un hombre de 70 kg cae verticalmente desde una altura de 2 m sobre el piso. Desde el momento en que sus pies tocan el piso, su centro de masa desciende una distancia  $d$  hasta detenerse. Asumiendo que la fuerza hecha por el piso es constante, calcule dicha fuerza y su impulso durante el impacto con el piso. Tenga en cuenta el efecto del peso durante el impacto. Haga sus cálculos:

- suponiendo que el hombre cae muy rígidamente, de modo que su centro de masa sólo desciende 2 cm, y
- suponiendo que cae flexiblemente, de modo que su centro de masa desciende 50 cm.

Compare las fuerzas para que comprenda por qué lo prudente es caer flexiblemente.

$$\text{a) } 7\,070 \text{ kgf ; } 443 \text{ kg m s}^{-1}$$

$$\text{b) } 350 \text{ kgf ; } 549 \text{ kg m s}^{-1}$$

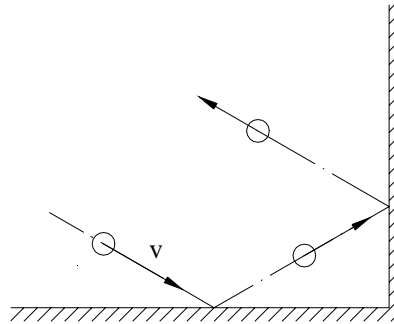
3. Una bola se suelta desde una altura  $h$  sobre el piso. El coeficiente de restitución de la colisión es  $e$ . Muestre que el tiempo total durante el cual la bola se mantiene rebotando

$$\text{es } \sqrt{\frac{2h}{g}} \left( \frac{1+e}{1-e} \right).$$



**Sugerencia:** El tiempo puede obtenerse como la suma de una serie infinita. Hay que anotar, sin embargo, que el problema es una ficción matemática, puesto que realmente después de unos cuantos rebotes la bola queda en reposo. Las hipótesis físicas del coeficiente de restitución constante, en fin, tienen sólo una validez limitada.

4.



En una esquina de una mesa horizontal lisa, los bordes elevados forman ángulo recto. Una bola se aproxima a la esquina con velocidad  $v$  como se muestra y choca sucesivamente con ambos bordes. Suponiendo que los bordes son lisos y que el coeficiente de restitución es  $e$ , muestre que la velocidad final es paralela a la velocidad de ingreso y su magnitud es  $e v$ .

5. Dos hombres, cada uno de masa  $m$ , están parados en una plataforma de masa  $10m$ , que descansa sobre un piso liso. Saltan horizontalmente por un extremo de la plataforma con velocidad relativa a ella de magnitud  $v_o$ . Calcular la velocidad final de la plataforma si:

- los dos hombres saltan juntos,
- salta primero uno y luego el otro

¿Cuál velocidad es mayor?

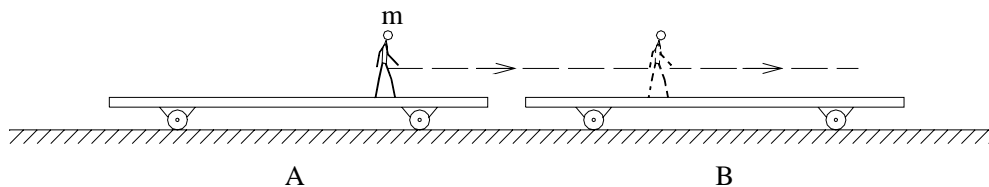
a)  $\frac{v_o}{6}$

b)  $\frac{23 v_o}{132}$

6. Un hombre de  $60 \text{ kg}$  está parado en el extremo de una barca de  $30 \text{ kg}$ . Ambos se encuentran en reposo en un lago. Si la barca tiene  $6 \text{ m}$  de largo y el hombre camina por ella hasta el otro extremo, ¿cuánto se mueven el hombre y la barca con respecto al agua? Desprecie la fricción entre la barca y el agua

Resultado: El hombre  $2 \text{ m}$  en una dirección y la barca  $4 \text{ m}$  en dirección contraria.

7.



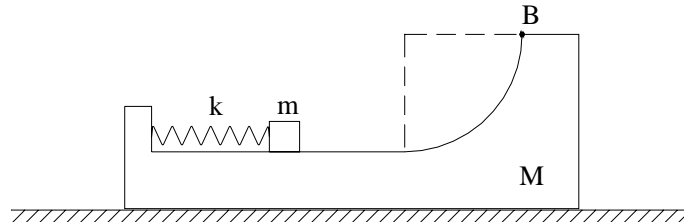
Dos plataformas A y B, cada una de masa  $M$ , están en reposo sobre rieles lisos. Sobre A está un muchacho de masa  $m$ , inicialmente en reposo. Empieza a correr por la plataforma A y salta horizontalmente con velocidad relativa a ella de magnitud  $v_o$ . Cae a la plataforma B, corre sobre ella en la misma dirección y salta de nuevo con velocidad relativa  $v_o$ . Hallar las velocidades finales de A y B. ¿Habría colisión entre ellas?

$$v_A = \frac{m}{M+m} v_o$$

$$v_B = \frac{m^2}{(M+m)^2} v_o$$

No

8.



La plataforma tiene un tramo recto y otro en forma de cuarto de círculo vertical y puede deslizarse sin fricción sobre el piso. El bloquecito  $m$  desliza sin fricción por la plataforma. Se apoya contra el resorte dándole una compresión inicial  $d$  y en esa situación se sueltan las masas desde el reposo. Cuando el resorte llega a su longitud natural, aún en el tramo recto, el bloquecito se desprende de él.

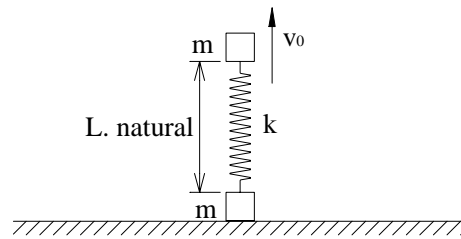
a) ¿Qué velocidad tiene  $M$  cuando  $m$  va en el punto B? Describa cualitativamente el movimiento de  $M$ .

b) ¿Hasta qué altura máxima sube  $m$ ?

a) 0

$$b) \frac{k d^2}{2 m g}$$

9.

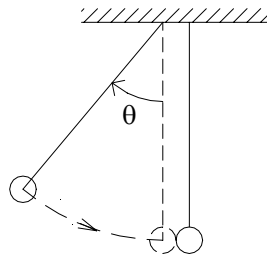


Dos bloques de igual masa  $m$  están unidos a un resorte de constante  $k$ . Con el resorte en su longitud natural, se le da al bloque superior una velocidad vertical hacia arriba  $v_0$ . ¿Cuál debe ser la mínima velocidad  $v_0$  para que el bloque inferior alcance justo a levantarse del piso? Suponga ahora que el bloque superior se lanza con una velocidad  $v_0$  igual al doble de la velocidad mínima. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el centro de masa de los bloques?

$$v_{0 \min} = \sqrt{\frac{3m}{k}} g$$

$$\text{Altura máxima: } \frac{\ell_0}{2} + \frac{13}{8} \frac{mg}{k}$$

10.



Para estudiar la colisión frontal de dos esferas iguales, se suspenden en forma de péndulos de igual longitud. Si la primera de ellas se suelta desde un ángulo  $\theta$  mientras la segunda está en reposo y después de la colisión la segunda sube hasta un ángulo  $\theta'$ , mostrar que el coeficiente de restitución de la colisión está dado por

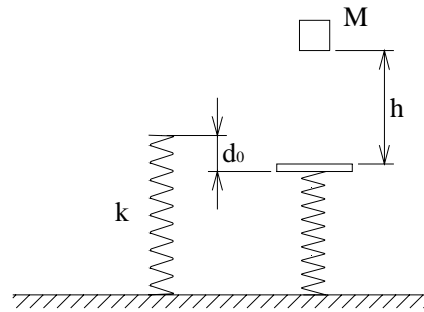
$$e = 2 \frac{\sin \frac{\theta'}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} - 1 .$$

11. Dos vehículos de masas 1000 kg y 2000 kg chocan en una intersección de ángulo recto quedando enganchados. Ya juntos, deslizan 8 m con un coeficiente de fricción de 0.6 antes de detenerse y en una dirección a  $45^\circ$  con las direcciones iniciales. Hallar las velocidades antes del choque.

$$\approx 74 \text{ km/h}$$

$$37 \text{ km/h}$$

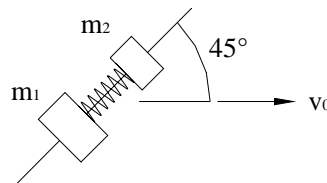
12.



Un bloque de masa  $M = 2 \text{ kg}$  se deja caer desde una altura  $h$  sobre el platillo, de masa  $m = 1 \text{ kg}$ , de una báscula de resorte de constante  $k = 200 \text{ N/m}$ . Después de una colisión plástica, platillo y bloque descienden una distancia  $h = 0.3 \text{ m}$ . Hallar numéricamente:

- La deformación  $d_0$  de equilibrio del resorte bajo la acción del platillo.  
0.05 m
- La velocidad con la cual salen platillo y bloque después de la colisión.  
1.46 m/s
- La velocidad con la cual el bloque  $M$  ingresa a la colisión ¿Porqué se conserva el momentum de  $M$  y  $m$  en la colisión?  
2.18 m/s
- La altura  $h$  desde la cual se dejó caer el bloque.  
0.24 m
- ¿Se conserva la energía durante todo el proceso? Explique. Si no se conserva, halle el cambio ¿Es ganancia o pérdida?

13.

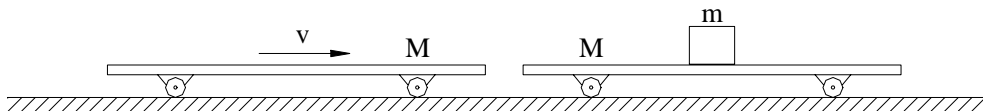


Las masas  $m_1 = 0.3 \text{ kg}$  y  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ , están apoyadas en un resorte de constante  $k = 100 \text{ N/m}$ , que tiene una compresión  $d = 0.1 \text{ m}$ , compresión que se mantiene gracias a un hilo que une las masas. El conjunto se mueve por una superficie horizontal lisa con velocidad  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  como se indica. En un cierto momento se rompe el hilo. Hallar las velocidades de las masas cuando el resorte vuelve a su longitud natural.

**Sugerencia:** Muestre que el centro de masa de  $m_1$  y  $m_2$  se mueve con velocidad constante y elija entonces un marco inercial que se traslade con el centro de masa. En ese marco de referencia el problema es ya conocido y pueden calcularse las velocidades  $\vec{v}'_1$  y  $\vec{v}'_2$  respecto a él, retornando luego al otro marco de referencia.

14. En un riel de aire comprimido, los carritos deslizadores provistos de buenos resortes en sus extremos, se mueven sobre un colchón de aire, minimizando los efectos de la fricción. En uno de esos rieles, un carrito de masa  $m$  se mueve con velocidad  $v$  hacia otro de masa  $M$  ( $M > m$ ) que se encuentra en reposo. Después de la colisión, ambos carros rebotan en los bordes del riel y se aproximan a una segunda colisión entre ellos. Asumiendo que todas las colisiones son elásticas, muestre que, después de la segunda colisión entre los carritos,  $M$  queda en reposo y  $m$  se mueve con  $v$  en dirección contraria a la inicial.

15.



Un vagón de masa  $M$  se aproxima con velocidad  $v$  a otro vagón de igual masa, inicialmente en reposo, y sobre el cual descansa un bloque de masa  $m$  que al comienzo está también en reposo, pero que puede deslizarse con fricción de coeficiente  $\mu$  por el vagón. Los vagones se acoplan y salen juntos. Suponiendo que el acople es de muy corta duración,

- ¿Cuáles son las velocidades de los vagones y del bloque inmediatamente después del acople? Recuerde que la fricción sobre el bloque no es impulsiva.
- ¿Con cuál velocidad se mueve el conjunto una vez que el bloque ha terminado de deslizarse respecto al vagón?
- ¿Cuánto se deslizó el bloque respecto al vagón?

**Sugerencia:** Sistema de 3 partes:  $M$ ,  $M$  y  $m$ . Estudio del momentum y del trabajo y la energía.

a)  $\frac{v}{2}, 0$

b)  $\frac{M v}{2 M + m}$

c)  $\frac{1}{4} \frac{M v^2}{(2 M + m) \mu g}, \leftarrow$

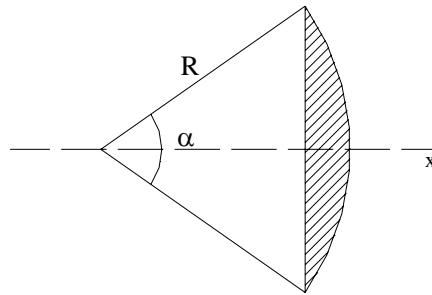
16. Una partícula de masa  $m$  se aproxima con velocidad  $\vec{v}_o$  a otra partícula de masa  $2m$  que se encuentra en reposo. Después de una colisión elástica, la partícula de masa  $2m$  sale con una velocidad que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la dirección de  $\vec{v}_o$ , ¿qué ángulo forma la velocidad de  $m$  con esa misma dirección de  $\vec{v}_o$ ? Hallar en términos de  $v_o$  las magnitudes de las velocidades de  $m$  y  $2m$  después de la colisión.

$$v_m = \frac{\sqrt{5} v_o}{3}$$

$$v_{2m} = \frac{\sqrt{2} v_o}{3}$$

$$\arctan 2$$

17.

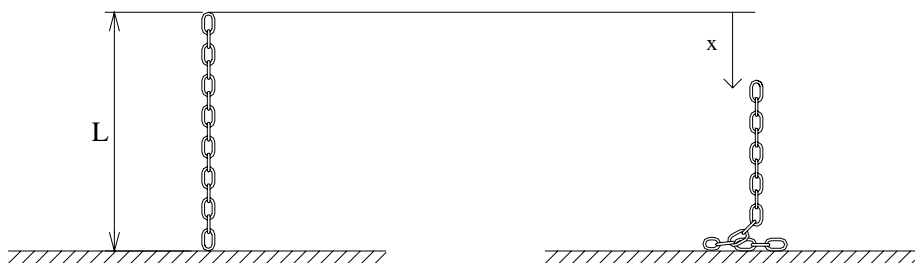


Hallar el centroide de un segmento circular de radio  $R$  y ángulo  $\alpha$ . Ese centroide coincide con el centro de masa de una placa homogénea en forma de segmento circular.

**Sugerencia:** Estudiar primero el centroide del sector circular  $\left( \frac{4R}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$  y luego hacer la composición: segmento más triángulo igual sector.

$$\bar{x} = \frac{4R}{3} \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{(\alpha - \sin \alpha)}$$

18.



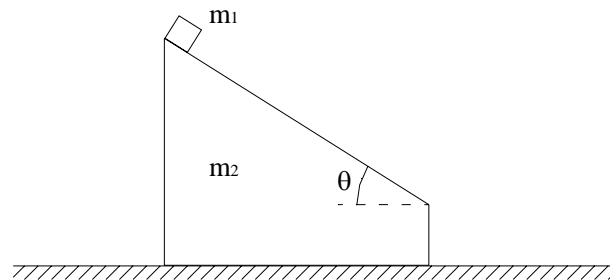
Una cadena de masa  $M$  y longitud  $L$  está suspendida verticalmente con su eslabón más bajo apenas tocando el piso. En esa situación se suelta la cadena. Hallar la fuerza hecha por el piso en función de la longitud  $x$  de cadena que ha caído.

**Sugerencia:** Sistema mecánico: toda la cadena. Suponga que los eslabones van quedando en reposo al llegar al piso.

$$F = \frac{3 M g x}{L}$$

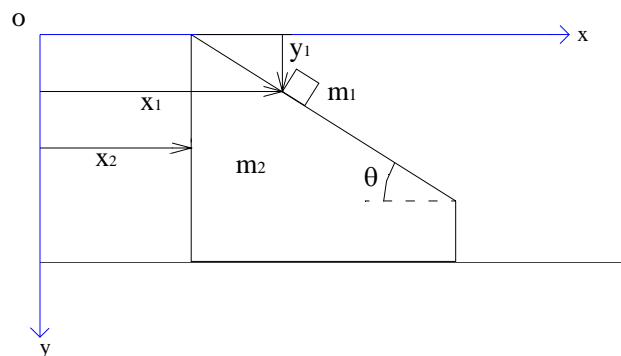
19. Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  presentan una colisión elástica unidimensional. Demuestre que respecto a un marco de referencia en traslación con origen en el centro de masa, las partículas simplemente invierten la dirección de sus velocidades, manteniendo sus magnitudes.

20.



Una cuña de masa  $m_2$  reposa sobre una superficie horizontal lisa. Un bloque de masa  $m_1$  puede deslizar por la cuña, igualmente lisa. Ambas masas se sueltan desde el reposo en la situación mostrada.

- a) El marco inercial es el piso horizontal.



Con los ejes  $x$ ,  $y$  indicados, fijos respecto al marco inercial, muestre que la relación entre las velocidades de  $m_1$  y  $m_2$  respecto a dicho marco de referencia, puede escribirse como

$$v_{1y} = (v_{1x} - v_2) \tan \theta.$$

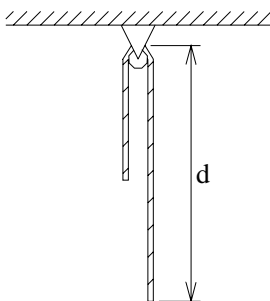
Esto puede obtenerse de dos formas, bien estudiando las relaciones entre las posiciones, bien estudiando la velocidad relativa de  $m_1$  respecto a  $m_2$ , que es hacia abajo por el plano inclinado.

- b) Ahora sí, encuentre la velocidad de  $m_2$  cuando  $m_1$  sale por el final del plano inclinado

$$v_2 = - \left[ \frac{2gh}{(1+\alpha)(\alpha + \sin^2 \theta)} \right]^{1/2} \cos \theta,$$

$$\text{con } \alpha = m_2/m_1$$

21.



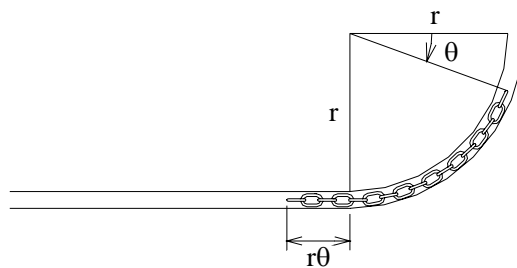
Una cuerda de longitud  $L$  se suspende verticalmente pasando por una polea ideal de radio muy pequeño. Si se suelta desde la posición mostrada, hallar la velocidad cuando el trozo de la derecha vale  $y$ .

**Sugerencia:** Tomar como sistema toda la cuerda. La polea pequeña indica que la longitud de cuerda en contacto con ella puede despreciarse y así, en general, el tramo izquierdo vale  $L - y$ .

$$v^2 = \frac{2g}{L} [b(L-b) - y(L-y)].$$

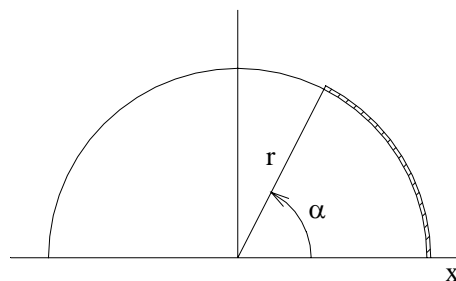


22.



Una cadena desliza por un tubo sin fricción que se encuentra en un plano vertical y tiene la forma mostrada. La cadena se suelta cuando  $\theta = 0$ . Hallar su velocidad en función de  $\theta$ .

**Sugerencia:**



El problema requiere hallar el centro de masa de una distribución lineal homogénea en arco, o bien el centroide de un arco de circunferencia. Muestre que  $\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ .

$$v = 2 \sqrt{\frac{g r}{\pi} (\theta + \cos \theta - 1)}.$$

23. Dos hombres, cada uno de masa  $M$ , están inicialmente en reposo sobre una pista lisa. Comienzan a intercambiar una bolita de masa  $m$ , lanzándola reiteradamente uno al otro, de modo que la velocidad relativa al lanzador tiene siempre magnitud  $v_o$ . Muestre que la velocidad después del lanzamiento  $n$  es

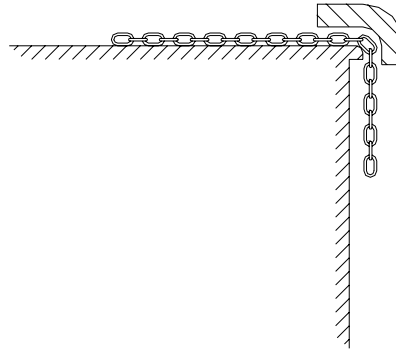
$$v_n = v_o (1 - \beta^n), \quad \text{con } \beta = \frac{M}{M + m}.$$

Muestre además que, si  $\frac{m}{M} \ll 1$ ,  $v_n \approx n \frac{m}{M} v_o$ .

En este caso, ¿hasta que valor de  $n$  habrá recepción de la bola?

**Sugerencia:** Sistema de 3 partes,  $M$ ,  $M$  y  $m$ . Estudie 3 o 4 lanzamientos para inferir la serie.

24.



El coeficiente de fricción, tanto estático como dinámico, entre la superficie horizontal y la cadena es  $\mu$ . Si la cadena tiene longitud  $L$  y el trozo que está suspendido verticalmente es justo el necesario para iniciar el movimiento, calcule la velocidad de la cadena cuando el último eslabón pasa por el borde. Desprecie la fricción en el borde.

**Sugerencias:**

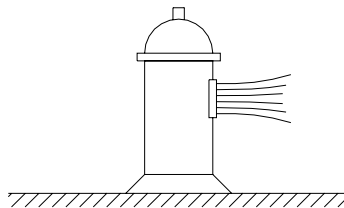
Halle el trozo que está inicialmente suspendido:  $\frac{\mu L}{1 + \mu}$ .

Halle el trabajo de la fricción:  $-\frac{\mu g \lambda}{2} \frac{L^2}{(1 + \mu)^2}$ .

Sistema mecánico: toda la cadena. Teorema del trabajo y la energía.

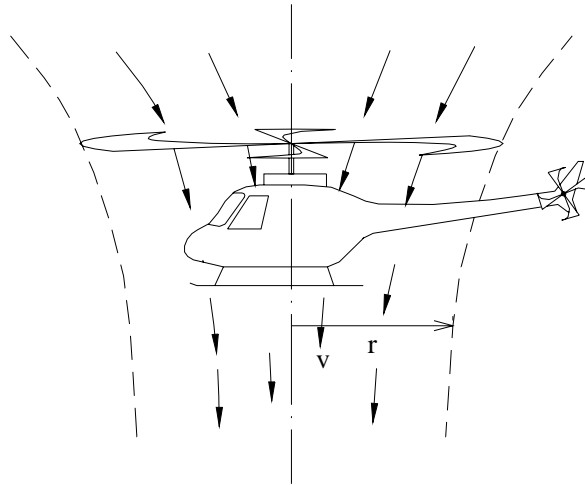
$$\sqrt{\frac{g L}{1 + \mu}}$$

25.



Calcule la fuerza horizontal hecha por el agua sobre un hidrante del cual sale un chorro de diámetro  $d$  y velocidad  $v$ .

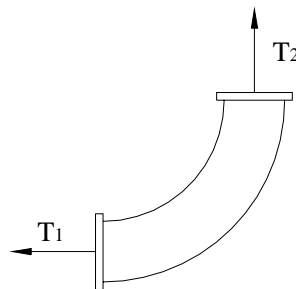
26.



Un helicóptero de masa  $M$  se mantiene suspendido en el aire al comunicarle un momentum hacia abajo a una columna de aire como se indica en la figura. Si la densidad del aire es  $\rho$ , asumida constante, calcular la velocidad  $v$  del aire en una sección de radio  $r$ .

$$v = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{Mg}{\pi \rho}}$$

27.

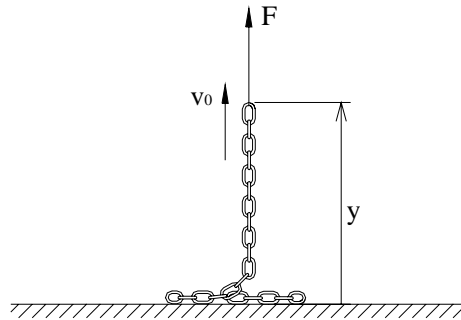


El codo recto de una tubería horizontal que conduce un líquido de densidad  $\rho$ , velocidad  $v$  y presión  $p$ , tiene una sección recta de área  $A$ . Calcule las fuerzas de tracción hechas sobre sus pestañas por los tramos de tubo adyacentes.

**Sugerencia:** Sistema variable de partículas: codo más líquido dentro de él. Las fuerzas hechas por el resto de líquido valen  $pA$ .

$$T_1 = T_2 = pA + \rho A v^2$$

28.



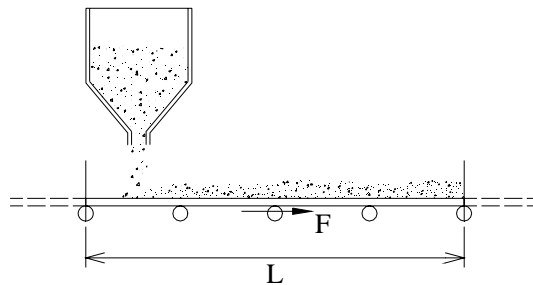
El extremo de una cadena de densidad lineal de masa  $\lambda$ , se levanta verticalmente con velocidad constante  $v_0$ .

- Hallar la fuerza  $F$  necesaria en función de la altura  $y$ .
- Calcular la potencia efectuada por  $F$  y compararla con la rata de cambio de la energía mecánica total de la cadena. Explicar la diferencia.

**Sugerencia:** Sistema de masa variable: Trozo de cadena de longitud  $y$ . Para la potencia tener en cuenta la potencia interna.

$$F = \lambda (g y + v_0^2).$$

29.



Desde una tolva estacionaria cae arena desde muy poca altura y a una rata constante  $q = \frac{dm}{dt}$ , sobre una banda transportadora que se mueve con velocidad constante  $v_0$ .

Calcular la fuerza  $F$  necesaria para mover la banda. Calcular también la potencia efectuada por  $F$  y compararla con la rata de cambio de la energía cinética de la banda y la arena. ¿A que se debe la diferencia?

**Sugerencia:** Sistema variable formado por el trozo de banda y la arena que hay sobre él, comprendido entre dos marcas fijas en el marco inercial. Para la potencia, tener en cuenta la potencia interna disipada.

$$F = q v_0$$

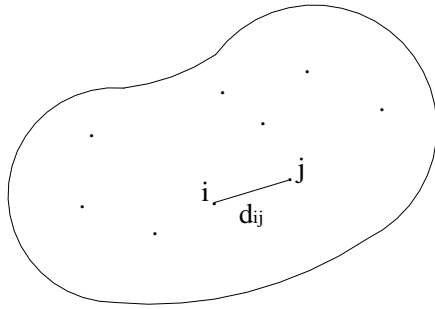
30. Desde un lugar en el que pueden despreciarse las fuerzas externas, se lanza un cohete de dos etapas con las siguientes características. La carga útil, a la que en última instancia quiere proporcionársele una velocidad final, tiene masa  $m$ . La masa inicial total del cohete cuando parte desde el reposo es  $625m$ . La masa total de la primera etapa, que incluye el tanque y su combustible, es  $600m$ . De esta masa, sólo el 90% es combustible y el 10% restante es la masa del tanque vacío de la primera etapa. Halle la velocidad  $v_1$  después de terminada la primera etapa. El tanque vacío de la primera etapa simplemente se desprende del resto, sin ser expulsado, y comienza la segunda etapa, de masa total  $24m$ , con la misma velocidad de expulsión de gases,  $v_o$ , y el mismo porcentaje de combustible del 90%. Hallar la velocidad final de la carga útil  $m$ . Si con la misma masa inicial y la misma relación entre tanque vacío y lleno, se diseñase un cohete de una sola etapa, ¿cuál sería la velocidad final de la carga útil?

$$2 v_o, \quad 4 v_o, \quad 2.29 v_o$$

## CAPÍTULO 7. EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

### 7.1 CONCEPTO DE CUERPO RÍGIDO

Podemos definir un cuerpo rígido como un sistema de partículas en el que las distancias entre parejas de partículas permanecen constantes.

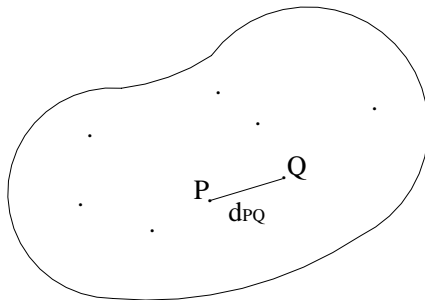


$d_{ij}$  : distancia entre las partículas  $i, j$

$d_{ij}$  : constante.

En esta descripción la partícula  $i$  tiene una masa  $m_i$  y la masa total es simplemente  $M = \sum m_i$ . Ahora, en la mecánica clásica esas partículas no son los átomos, sino trozos de materia, pequeños pero macroscópicos, asimilables a puntos materiales.

Podemos también tratar directamente el cuerpo rígido como un cuerpo continuo en el que la distancia entre dos puntos cualquiera del cuerpo es constante.



$d_{PQ}$  : distancia entre los puntos  $P, Q$

$d_{PQ}$  : constante

En un cuerpo continuo ya no hay partículas con masa, sino puntos con densidad de masa. Un punto de un cuerpo continuo no tiene masa: tiene densidad de masa  $\rho$ . Esta densidad en un punto no es otra cosa, recordémoslo, que la densidad macroscópica de un pequeño trozo de cuerpo, llevada al límite matemático cuando el volumen tiende a cero. A un elemento de volumen  $dV$  de un cuerpo continuo corresponde un elemento de masa  $dm = \rho dV$ . La masa total de un cuerpo continuo es así  $M = \int \rho dV$ , extendiéndose la integral a todo su volumen. Recordemos también que un cuerpo continuo puede verse como el límite de una sucesión de sistemas de partículas, con partículas cada vez de menor masa, más próximas y más numerosas.

Sea que lo consideremos como un sistema de partículas o como un cuerpo continuo, el cuerpo rígido presenta distancias invariables entre los puntos que lo forman, pese a la aplicación de

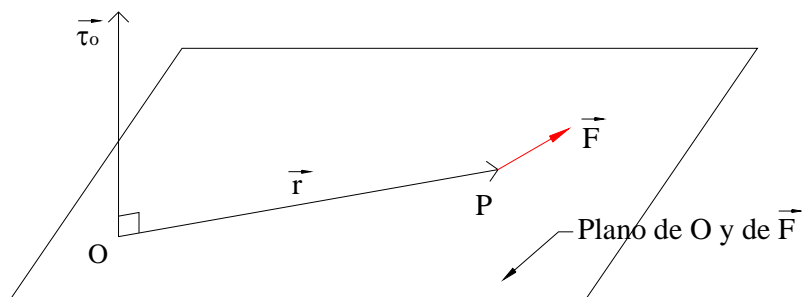
fuerzas sobre el cuerpo y a sus movimientos. Ahora, no hay en el mundo cuerpos absolutamente rígidos. Todos los cuerpos se deforman en mayor o menor grado bajo las acciones externas. Pero muchos cuerpos sólidos experimentan a menudo sólo muy pequeñas deformaciones que, dependiendo del propósito y objeto de estudio, pueden no ser relevantes. El modelo físico-matemático abstracto de cuerpo rígido puede ser entonces aplicado al estudio de esos sólidos. Así: un cristal; un trozo de metal; una pieza de una máquina; un miembro de una estructura, de concreto, acero o madera; un trompo de juguete o el refinado giróscopo de un piloto automático; un satélite de comunicaciones o la luna; el entero planeta tierra o una sencilla rueda, constituyen ejemplos de cuerpos, algunos de cuyos comportamientos pueden muy bien estudiarse idealizándolos como cuerpos rígidos. El cuerpo rígido es uno de los modelos fundamentales de la mecánica clásica. Recuérdese que, incluso, un marco de referencia es ya un cuerpo rígido.

Ahora bien, el modelo del cuerpo rígido no agota la descripción del comportamiento real de los cuerpos. Por ejemplo, el estudio de las pequeñísimas deformaciones de una viga en una estructura, resulta muchas veces esencial para la comprensión cabal de su equilibrio. Otras ramas de la física como la mecánica de medios continuos y la teoría de la elasticidad, proporcionan modelos para el estudio de los sólidos deformables. En el ámbito de la ingeniería algunos aspectos importantes de los cuerpos deformables se estudian en la llamada mecánica de materiales o resistencia de materiales.

Podemos aplicar al movimiento de un cuerpo rígido la relación fundamental  $\sum \vec{F} = \dot{\vec{P}} = M\vec{a}_c$ , que describe el movimiento del centro de masa de un sistema. Ahora, para estudiar las rotaciones del cuerpo es necesaria la introducción de dos nuevos conceptos, el torque o momento de una fuerza y el momentum angular de un sistema de partículas. Presentaremos primero el concepto de torque y lo aplicaremos al estudio del equilibrio de un cuerpo rígido, en el que, como no hay movimiento del centro de masa, la suma de fuerzas externas es nula, y, como no hay rotación, la suma de torques externos es también nula. En el próximo capítulo estudiaremos el momentum angular y su relación con los torques y con el movimiento de un cuerpo rígido.

## 7.2 TORQUE DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO

Sea O un punto cualquiera,  $\vec{F}$  una fuerza y P su punto de aplicación. El vector posición de P respecto a O es  $\vec{r}$ .



Se llama **torque de una fuerza  $\vec{F}$  respecto a un punto  $O$** , al producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$ , escrito  $\vec{\tau}$ ,

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}.$$

En ciertos casos es importante indicar explícitamente el punto  $O$  respecto al cual se toma el torque y se escribe  $\vec{\tau}_O$ . En algunos contextos se usa más la palabra momento y el símbolo  $\vec{M}$ .

El torque, definido como un producto vectorial, es pues un vector perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , es decir por  $O$  y  $\vec{F}$ , y según la regla de la mano derecha. Sus dimensiones son las de una fuerza por una longitud. Simbólicamente,

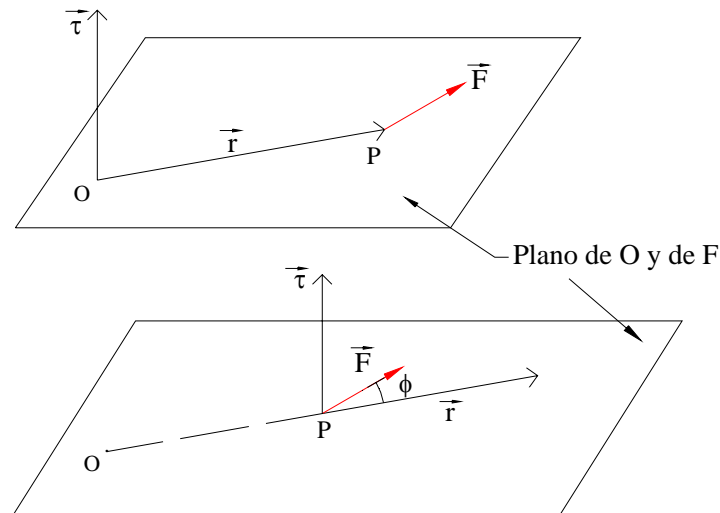
$$\text{Dimensión de } \tau = [\tau] = [F] L = M L^2 T^{-2},$$

Su unidad en el Sistema Internacional de Unidades, SI, es el N m.

La fuerza  $\vec{F}$  puede ser la fuerza que actúa sobre una partícula que en un cierto instante se encuentra en el punto  $P$ . O puede tratarse de una fuerza que actúa en un punto  $P$  de un cuerpo rígido. Estudiemos con detalle tanto la dirección como la magnitud del vector torque o momento.

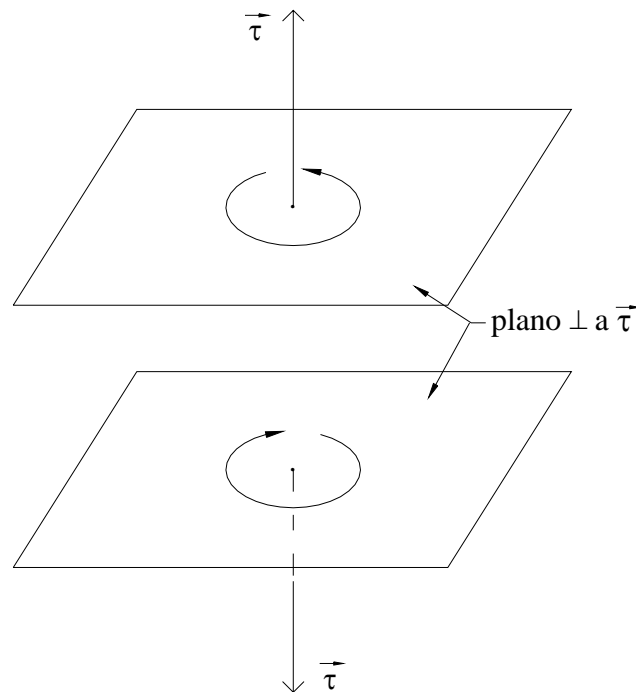
### Dirección del torque

El producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$  es, como vimos, un vector perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}$  y por  $\vec{F}$ , que es el mismo plano determinado por  $O$  y por  $\vec{F}$ , y cuyo sentido está determinado por la regla de la mano derecha.

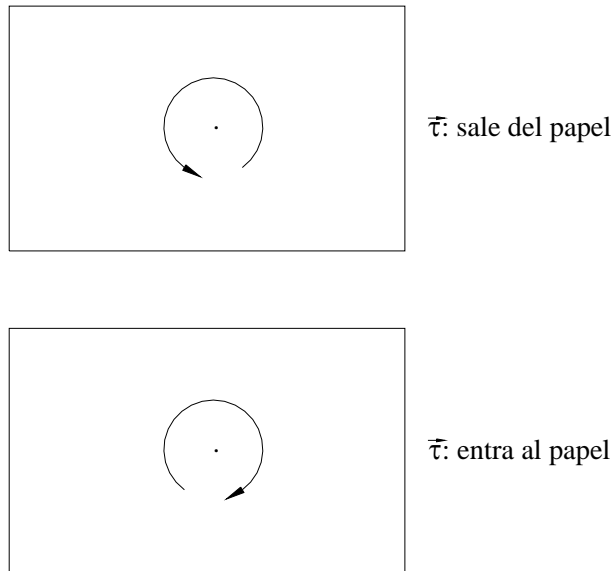




Recordemos brevemente la regla de la mano derecha. Situémonos en el plano de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  y llevemos ambos vectores a un origen común. El ángulo formado entre ellos es  $\phi$ . Hay, por supuesto, otro ángulo,  $2\pi - \phi$ , entre ellos, pero siempre nos referiremos al menor de ellos como  $\phi$ . Ahora, el pulgar de la mano derecha señala la dirección del producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$  cuando se hace dar un giro a los otros dedos desde la dirección de  $\vec{r}$ , en sentido del ángulo  $\phi$ , hasta la de  $\vec{F}$ . Si se hace el producto  $\vec{F} \times \vec{r}$  la dirección es la contraria, de modo que  $\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}$ . Ahora bien, esa dirección de giro “en arco” de los dedos de la mano derecha en el plano de  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  es precisamente la dirección del giro que tiende a producir la fuerza  $\vec{F}$  respecto al punto O. Así pues, con el vector torque  $\vec{\tau}$  hay asociada una dirección de giro en el plano perpendicular a  $\vec{\tau}$  y según la regla de la mano derecha, dirección de giro que indicaremos con una pequeña flecha circular en dicho plano perpendicular y alrededor del vector  $\vec{\tau}$ .



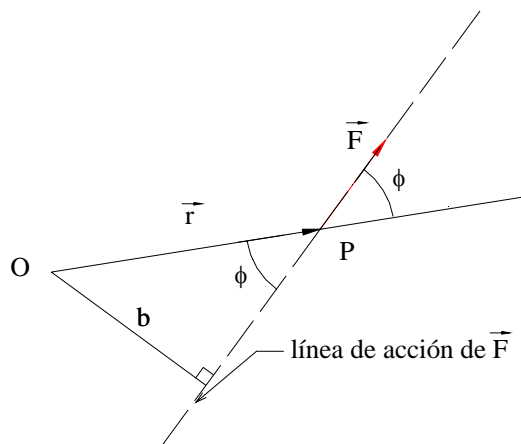
Si miramos de frente el plano de O y  $\vec{F}$ , el vector  $\vec{\tau}$  es un vector que entra o sale y su traza es un simple punto. Sin embargo la pequeña flecha circular de la dirección de giro asociada, nos sirve de representación del torque.



Insistamos en que esa dirección de giro asociada con el torque es precisamente la dirección del giro que tiende a producir la fuerza  $\vec{F}$  alrededor del punto  $O$ .

### Magnitud del torque

Miremos de frente el plano determinado por  $O$  y  $\vec{F}$ . Ese plano coincide entonces con el plano del papel. La recta que se obtiene prolongando el vector  $\vec{F}$  se llama la **línea de acción** de la fuerza  $\vec{F}$ . Sea  $\phi$  el ángulo entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ , es decir el menor ángulo entre sus direcciones positivas, ángulo que se ve fácilmente imaginándolos con un origen común en  $P$ .



Como el torque o momento de  $\vec{F}$  respecto a  $O$  es  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ , su magnitud es, recordando la definición geométrica del producto vectorial,

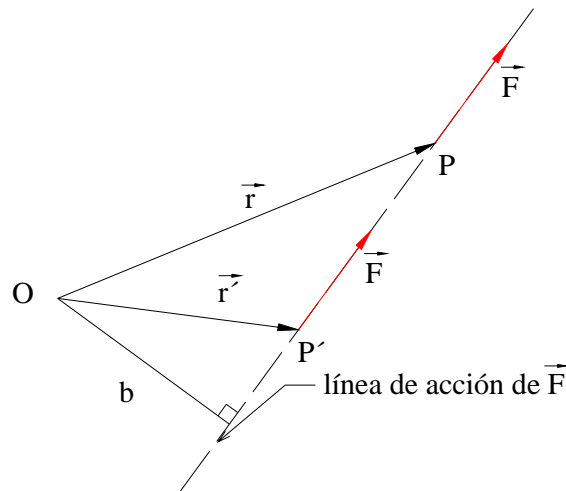
$$|\vec{\tau}| = \tau = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \phi = r F \sin \phi$$

Se llama **brazo** de la fuerza  $\vec{F}$  respecto al punto O, a la medida de la perpendicular bajada desde O hasta la línea de acción de  $\vec{F}$ , es decir, a la distancia de O a la línea de acción de  $\vec{F}$ , también llamada a veces brazo de palanca. Usando la igualdad de ángulos opuestos por el vértice y el triángulo rectángulo, se ve fácilmente que  $b = r \sin \phi$ , con lo que la magnitud del torque respecto a O es simplemente

$$\tau = F b ,$$

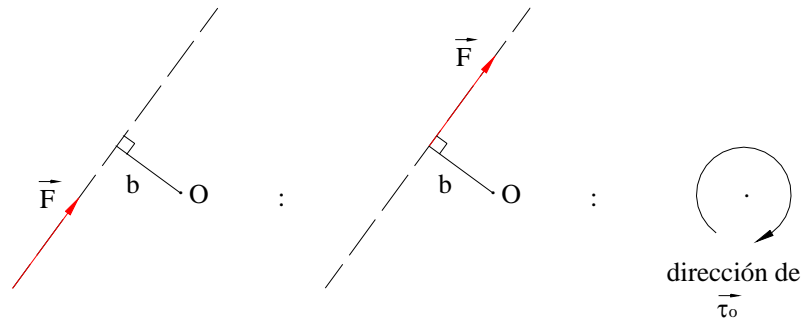
producto de la magnitud de la fuerza por su brazo respecto a O.

Supóngase que cambiamos el punto de aplicación de la fuerza  $\vec{F}$  de P a P', desplazándola a lo largo de su línea de acción.

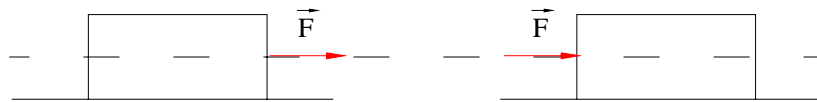


El brazo, perpendicular desde O a la línea de acción, es en ambos casos el mismo y por tanto la magnitud del torque no cambia. La dirección, saliendo del papel según la regla de la mano derecha, con igual dirección asociada de giro antihorario, es también la misma, y el vector torque respecto a O es idéntico, sea que la fuerza esté en P o en P'. Una fuerza puede pues deslizarse a lo largo de su línea de acción sin alterar su torque respecto a un punto O.

Si estamos mirando de frente el plano de O y  $\vec{F}$ , como hacemos a menudo, el resultado anterior proporciona una manera muy sencilla de determinar la dirección del vector torque, observando la dirección del giro que tiende a producir la fuerza  $\vec{F}$  alrededor de O: deslicemos la fuerza  $\vec{F}$  hasta la base de la perpendicular, es decir del brazo, y observemos simplemente en qué dirección tiende a rotar el brazo de palanca alrededor de O, por la acción de  $\vec{F}$ .

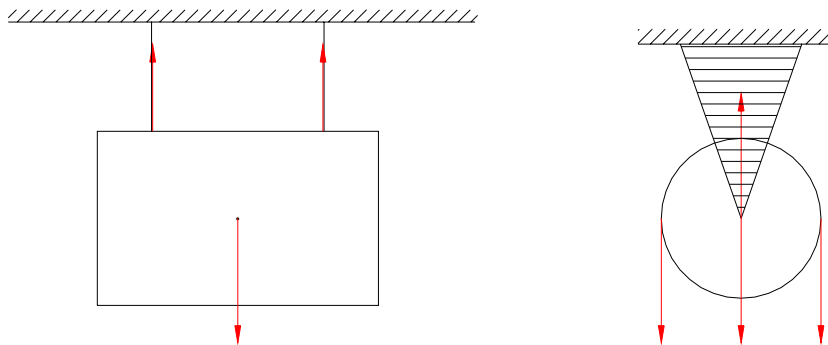


Si la fuerza  $\vec{F}$  actúa sobre una partícula, el deslizamiento por la línea de acción no es muy relevante. Ahora, si se trata de una fuerza aplicada sobre un cuerpo rígido, veremos luego con detalle que el movimiento está determinado completamente por las fuerzas y los torques, de manera que si efectivamente deslizamos la fuerza, aplicándola en diversos puntos del cuerpo rígido a lo largo de la línea de acción, como ni la fuerza ni su torque cambian, entonces ni el movimiento ni el equilibrio del cuerpo rígido se ven por ello afectados.



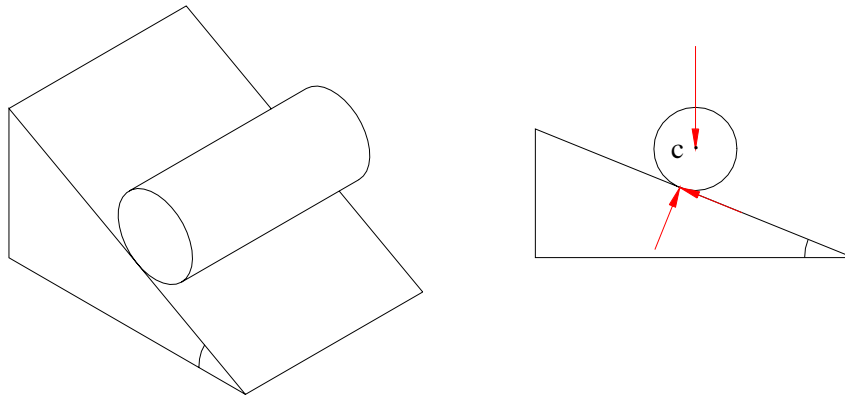
Para el movimiento de un bloque como cuerpo rígido son pues equivalentes las dos situaciones ilustradas. Si los cuerpos son en cambio deformables, las deformaciones locales inducidas por la fuerza pueden ser relevantes, el punto de aplicación se torna crucial y la fuerza ya no tiene ese carácter deslizante.

Retornemos a la definición de torque o momento de una fuerza respecto a un punto:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Muchos de los problemas de equilibrio y movimiento de cuerpos rígidos que estudiaremos son problemas bidimensionales, planos. Esto significa que el cuerpo y las fuerzas a que está sometido, están contenidos en un plano. Por ejemplo, una placa rectangular suspendida verticalmente de unos cables o bien una polea en forma de disco plano rotando alrededor de su eje, son problemas planos:

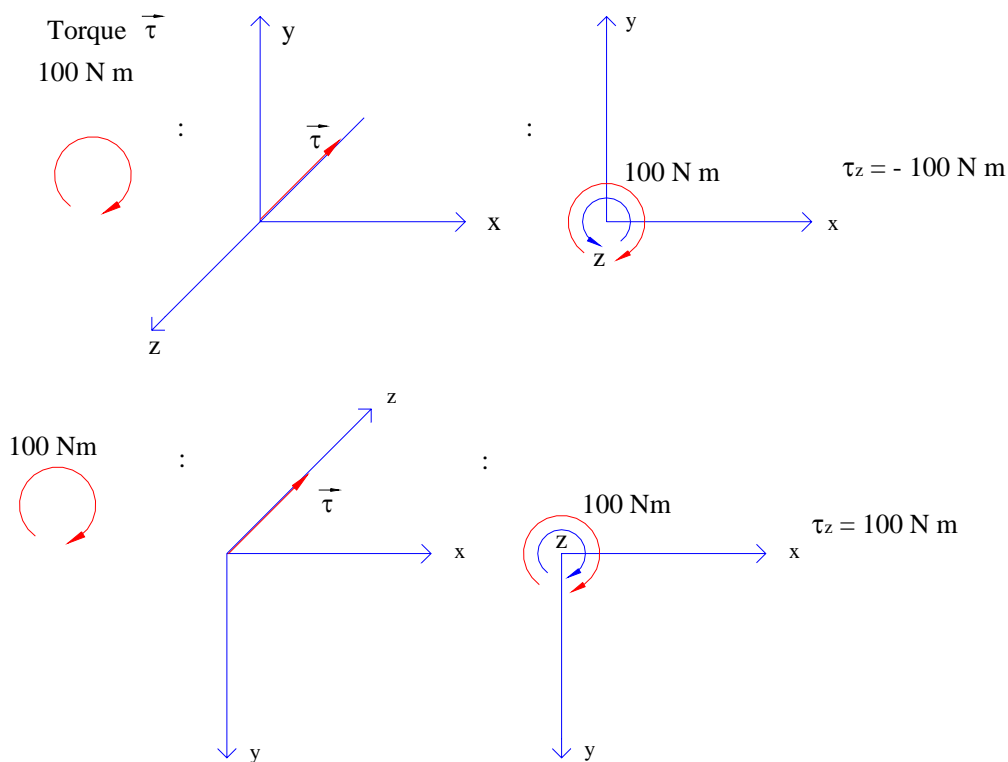


Puede también tratarse de un cuerpo sólido tridimensional, pero cuyo equilibrio o movimiento puede estudiarse en un plano representativo. Por ejemplo, un cilindro que rueda por un plano

inclinado de modo que su eje, aunque se desplaza, no varía de dirección, puede ser estudiado en un plano representativo por su centro de masa:



Pues bien, en este tipo de problemas bidimensionales, planos, tomaremos los torques de las diversas fuerzas respecto a puntos que están en el mismo plano de las fuerzas y entonces lo más sencillo es calcular la magnitud de los torques como productos de fuerza por brazo y determinar su dirección de giro como ya explicamos. Con frecuencia el plano elegido es el plano  $x,y$ , y entonces el vector torque estará en dirección  $z$ , positiva o negativa. Veamos por ejemplo como son las componentes de un determinado torque en dos sistemas de ejes, ambos derechos, es decir, tales que  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$  según la regla de la mano derecha.



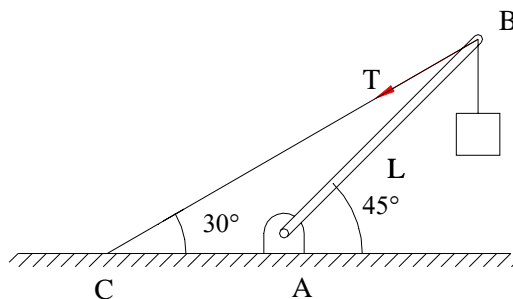
En las gráficas de la derecha hemos representado con una flecha circular la dirección de giro en el plano  $x,y$ , asociada con la dirección positiva  $z$  según la regla de la mano derecha. El signo de la componente  $z$  del torque,  $\tau_z$ , lo da inmediatamente la comparación en el plano  $x,y$ , entre la dirección de giro asociada con  $z$  positiva y la dirección de giro asociada con el torque.

Cuando se trata de problemas tridimensionales, en los cuales el cuerpo y las fuerzas actuantes no pueden reducirse a un plano, el cálculo de los torques suele hacerse más fácilmente apelando sistemáticamente a las componentes de los vectores,  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ,  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ , y usando la expresión del producto vectorial en componentes:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Se usa a veces el concepto de torque o momento de una fuerza respecto a un eje, que es simplemente la componente sobre dicho eje del vector torque respecto a un punto sobre el mismo eje.

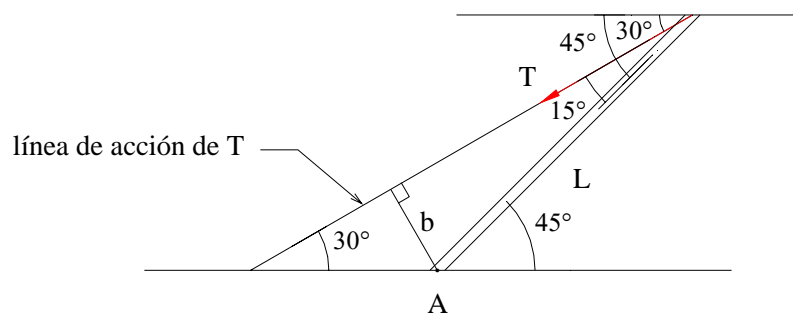
## 1. EJEMPLO



Una barra AB de longitud L está sostenida en parte por una cuerda BC. Después estudiaremos el equilibrio del sistema mecánico barra. Por ahora queremos hallar el torque de la tensión T hecha por la cuerda sobre el punto B, calculado respecto al punto A.

Aquí estamos claramente en un problema plano. Calcularemos el torque de T respecto a A de dos maneras diferentes, ambas muy importantes.

- a) Calculemos directamente la magnitud del torque  $\tau_A$  como fuerza por brazo.



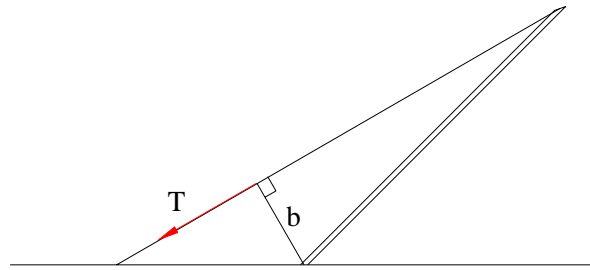
Prolonguemos la fuerza  $T$  para obtener su línea de acción. Tracemos una perpendicular desde  $A$  a dicha línea de acción para obtener el brazo  $b$  de la fuerza  $T$  respecto al punto  $A$ . Un poco de geometría, usando igualdad de ángulos alternos internos, permite ver que en el triángulo rectángulo de hipotenusa  $L$  y cateto  $b$ , el ángulo opuesto a  $b$  vale  $15^\circ$ . Así

$$b = L \sen 15^\circ ,$$

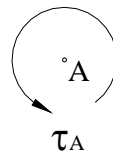
y entonces

$$\tau_A = T L \sen 15^\circ .$$

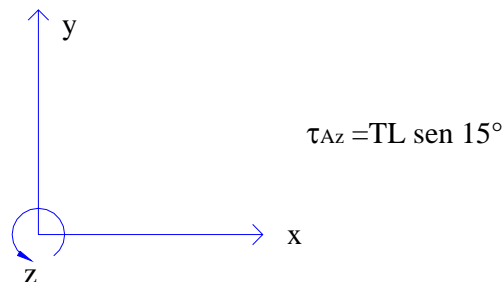
La dirección del torque puede verse del dibujo pero si quiere verse aún más claramente deslicemos a  $T$  hasta el brazo  $b$ :



La dirección en que  $b$  tiende a girar alrededor de  $A$  es la dirección de giro asociada en ese plano con el vector  $\vec{\tau}_A$  :

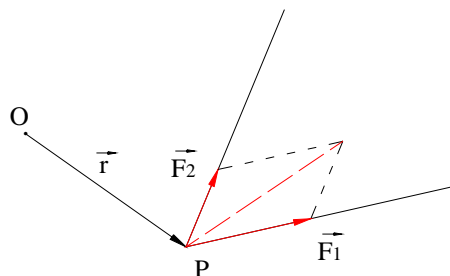
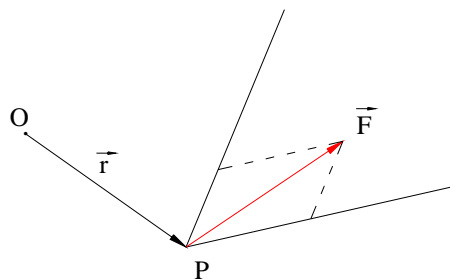


Este deslizamiento de la fuerza hasta el brazo para ver con toda nitidez la dirección de giro, suele hacerse mentalmente sin necesidad de un dibujo explícito. Si elegimos unos ejes  $x, y$  en el plano de la figura y representamos el eje  $z$  con la dirección de giro asociada con la regla de la mano derecha, para usar, por conveniencia, triedros derechos, tendremos



- b) La geometría necesaria para calcular directamente el brazo de una fuerza no siempre es sencilla, y en algunos casos es más fácil y conveniente descomponer la fuerza en

componentes y calcular los torques de esas componentes. Si una fuerza  $\vec{F}$  es la suma de dos fuerzas componentes  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ ,



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 ,$$

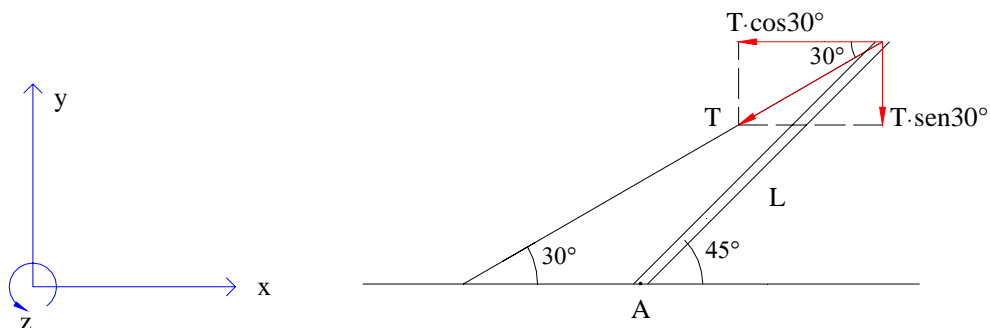
$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 ,$$

ya que el producto vectorial es distributivo. El resultado, el torque de una fuerza es igual a la suma de los torques de sus componentes, se conoce como teorema de Varignon y se extiende fácilmente a un número cualquiera de fuerzas con el mismo punto de aplicación P, o, como se dice, concurrentes. Veamos su aplicación en el problema concreto del cálculo del torque de T respecto al punto A. Con los ejes  $x, y, z$  ya indicados, los torques de las fuerzas en el plano  $x, y$  sólo tienen componente  $z$  de modo que al sumar los torques de las componentes basta tener en cuenta su signo.

Descompongamos a T en componentes horizontal y vertical.

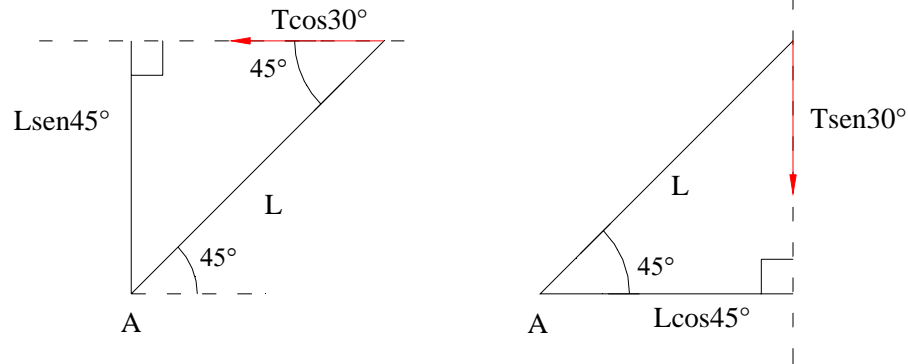
Dirección de los ejes





Aunque un origen conveniente de los ejes es el punto A, aquí lo esencial son las direcciones positivas y así, para no recargar la figura, los dibujamos aparte.

Calculemos los torques de las componentes  $T \cos 30^\circ$  y  $T \sin 30^\circ$  respecto a A.



$$\text{Torque: } (T \cos 30^\circ)(L \sin 45^\circ) \quad - (T \sin 30^\circ)(L \cos 45^\circ)$$

Así, el torque de T respecto a A es

$$\tau_{Az} = T L (\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ),$$

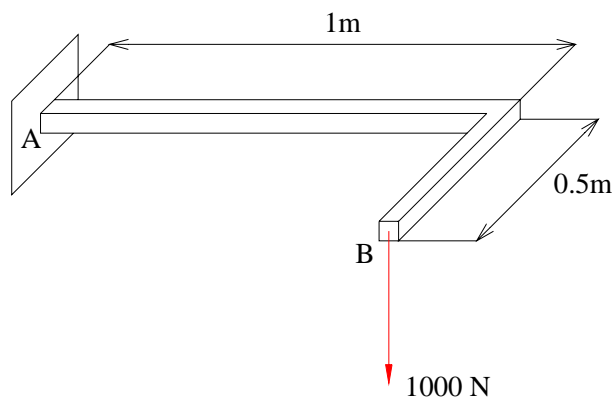
que, usando el seno de la diferencia de ángulos, queda

$$\tau_{Az} = T L \sin 15^\circ,$$

de acuerdo al resultado ya obtenido.

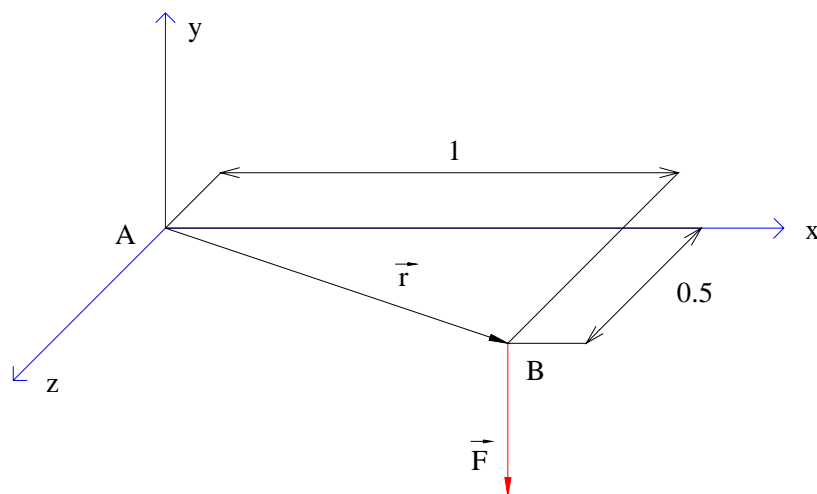
## 2. EJEMPLO

Miremos el siguiente problema tridimensional.



Una pequeña viga en forma de L, situada en un plano horizontal, está empotrada en un muro vertical en el punto A. En su extremo B actúa una fuerza vertical hacia abajo de 1000 N. Calcular el torque o momento de dicha fuerza respecto al punto A.

Elijamos unos ejes  $x, y, z$  con origen en A.



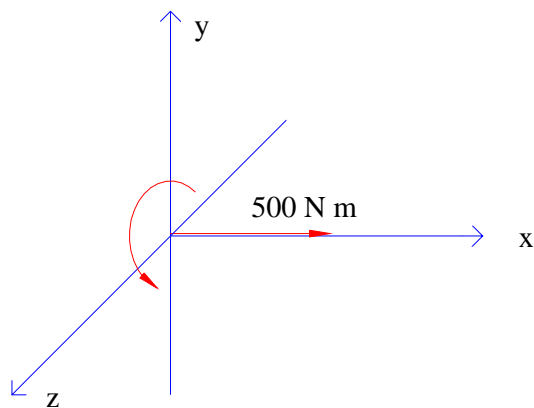
Unidades en SI. Las componentes de  $\vec{r}$  son  $(1, 0, 0.5)$  y las de  $\vec{F}$   $(0, -1000, 0)$ . El torque o momento respecto a A será

$$\vec{\tau}_A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\tau_A = \hat{i}(500) - \hat{j}(0) + \hat{k}(-1000)$$

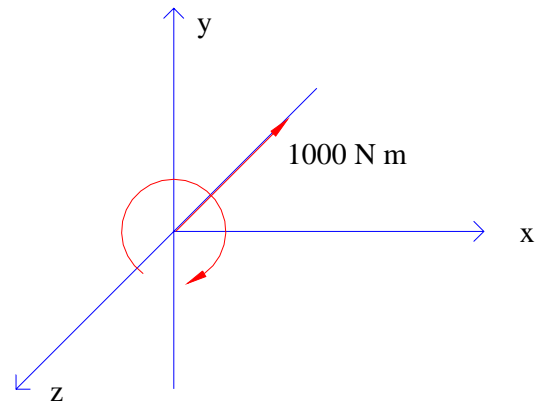
Las componentes de ese torque o momento tienen una interpretación simple e importante. Veamos:

$$\tau_{Ax} = 500 \text{ N m}$$



La dirección de giro asociada en el plano  $y, z$  muestra con claridad el efecto de la componente  $x$  del torque: tiende a producir una torsión de la viga y se llama momento de torsión o momento torsor.

$$\tau_{Az} = -1000 \text{ N m}$$

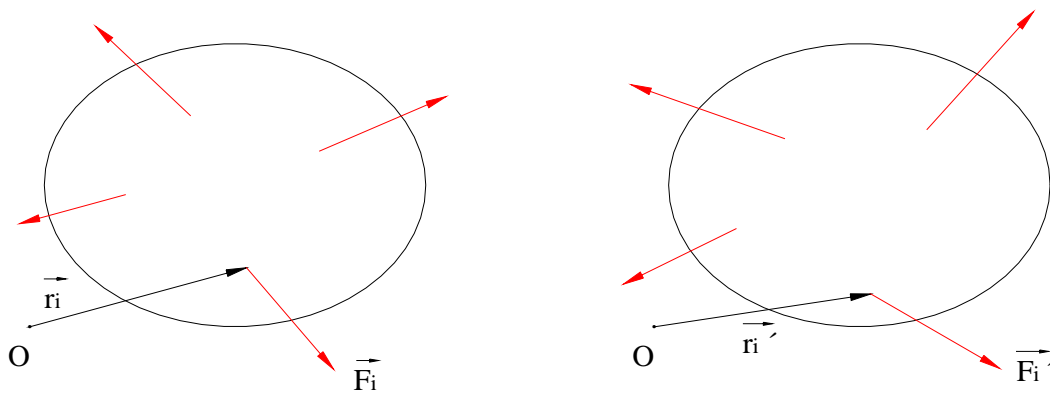


La dirección de giro asociada en el plano  $x,y$  muestra claramente que la componente  $z$  del torque tiende a producir una flexión de la viga en dicho plano  $x,y$ . Esa componente se llama momento de flexión o momento flector.

En este caso no hay componente  $y$  del torque, pero otra fuerza en B, con componente en el plano  $x,z$  producirá una componente  $\tau_y$  del torque, que corresponde también a un momento flector pero esta vez con flexión en ese plano  $x,z$ , como el lector puede comprobar fácilmente.

### 7.3 SISTEMAS DE FUERZAS EQUIVALENTES

En general el movimiento de un cuerpo rígido está determinado por la fuerza total y por el torque total que actúan sobre él. Se dice que dos sistemas o conjuntos de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son **equivalentes** si su fuerza total y su torque total respecto a cualquier punto son iguales.



Equivalentes :

$$\sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i'$$

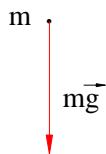
$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i'$$

Un poco más adelante mostraremos que la igualdad de fuerza total y torque total respecto a un punto implica la igualdad de torque total respecto a cualquier otro punto.

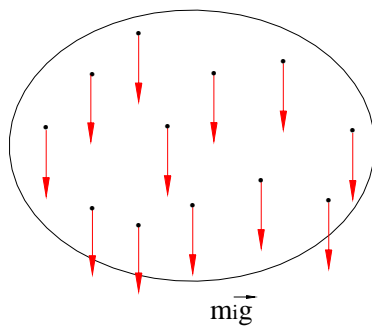
Dos sistemas de fuerzas equivalentes producen pues el mismo resultado en lo que concierne al movimiento o, como caso particular importante, al equilibrio, de un cuerpo rígido. Un estudio detallado de los sistemas de fuerzas equivalentes le compete a un curso de estática de cuerpos rígidos. Aquí sólo debemos estudiar su concepto general y algunos casos particulares notables.

### Peso de un cuerpo extenso. Centro de gravedad

El peso de una partícula de masa  $m$  es la fuerza de atracción gravitacional hecha sobre ella por el planeta tierra, cuando la partícula está muy cerca de la superficie terrestre. Esa fuerza tiene un punto de aplicación claro, la propia partícula, y es vertical hacia abajo. Si  $\vec{g}$  es el vector aceleración de la gravedad, el peso es  $m\vec{g}$ .

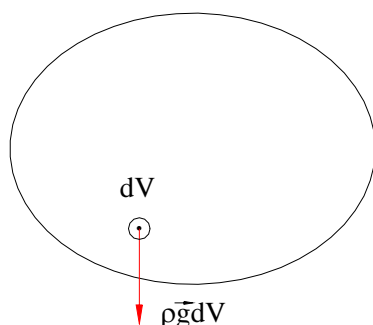


El peso de un cuerpo extenso es un concepto más complejo. Si consideramos el cuerpo como un sistema de partículas de masas  $m_i$ , el peso del cuerpo es un sistema de fuerzas  $m_i\vec{g}$ .



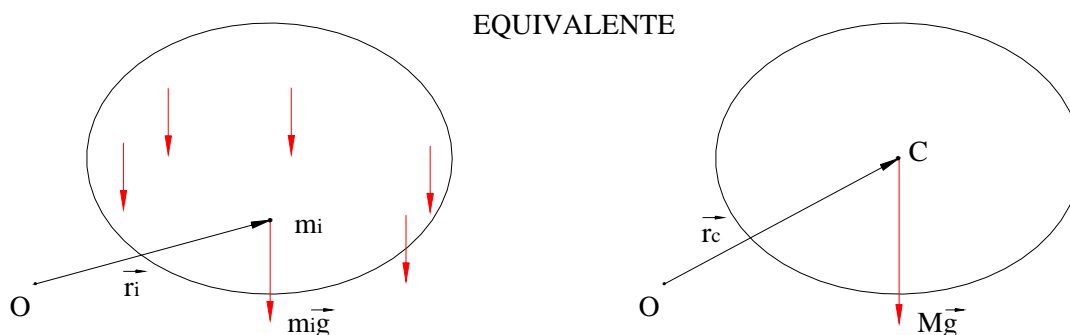
Estas fuerzas son paralelas entre sí ya que localmente podemos considerar constante la aceleración de la gravedad en magnitud y dirección. Es importante notar que el peso de un cuerpo extenso no es una fuerza única, sino un sistema de fuerzas actuantes en cada una de las partículas que conforman el cuerpo.

Si consideramos el cuerpo como un cuerpo continuo, el peso del cuerpo es lo que se llama una fuerza distribuida en todo su volumen. Esa fuerza distribuida es el límite del sistema de fuerzas cuando pasamos del sistema de partículas al cuerpo continuo. Si  $\rho$  es la densidad, la fuerza por unidad de volumen es  $\rho\vec{g}$ ,



Trataremos el cuerpo extenso como si fuese un sistema de numerosas partículas y su peso como un sistema de fuerzas. Los resultados pueden obtenerse de manera análoga para el caso límite del cuerpo continuo, cambiando las sumas por las correspondientes integrales.

El peso de un cuerpo extenso es entonces un sistema de fuerzas paralelas  $m_i \vec{g}$ . Ahora bien, existe un sistema equivalente formado por una única fuerza aplicada en un punto llamado centro de gravedad del cuerpo. Mostraremos que es el mismo centro de masa que ya conocemos. Recordemos que dos sistemas equivalentes tienen la misma fuerza total y el mismo torque total, y así



$$\begin{aligned}
 \sum m_i \vec{g} &= (\sum m_i) \vec{g} = M \vec{g} \\
 \sum \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) &= \vec{r}_c \times M \vec{g} \\
 = (\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} &= (M \vec{r}_c) \times \vec{g}.
 \end{aligned}$$

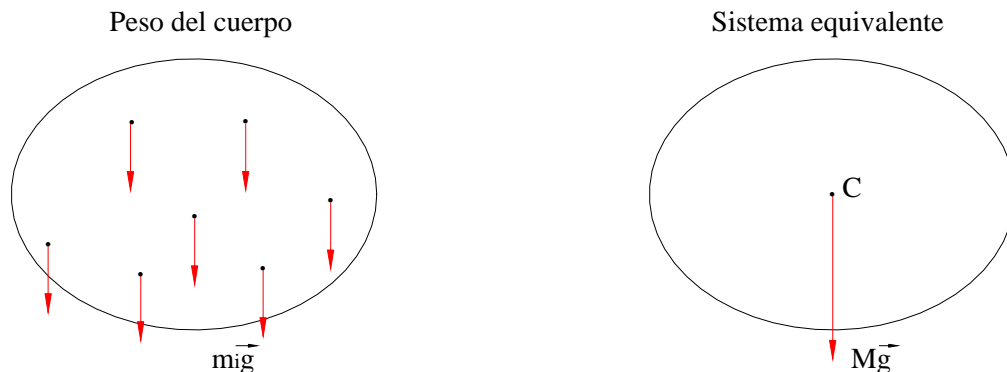
Es decir, para la equivalencia de los dos sistemas se requiere que

$$M \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i,$$

que es precisamente la definición de centro de masa del cuerpo.

Insistamos en los conceptos. El peso de un cuerpo extenso considerado como un sistema de numerosas partículas, es el sistema o conjunto de los pesos de todas y cada una de las partes

que la forman. Existe un sistema de fuerzas equivalente formado por una única fuerza igual al peso total y cuyo punto de aplicación es el centro de masa del cuerpo, también conocido como centro de gravedad.

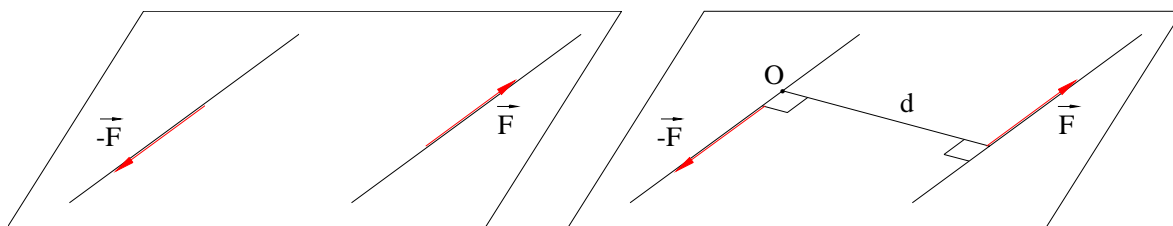


con  $M = \sum m_i$ .

Los dos conjuntos de fuerzas son equivalentes, no iguales. Pueden remplazarse uno por el otro siempre y cuando estemos interesados únicamente en la totalidad de las fuerzas y de los torques.

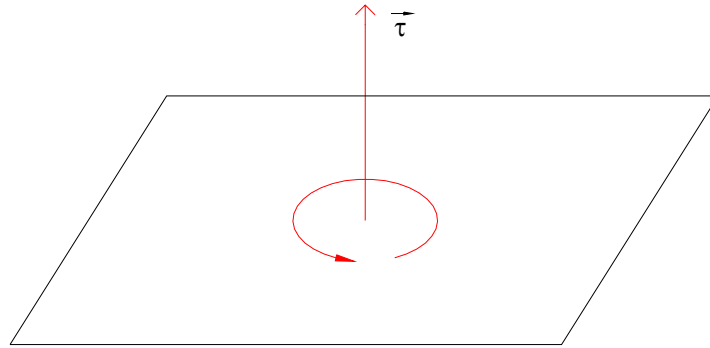
### Par

Uno de los sistemas de fuerzas más importantes es el formado por dos fuerzas de igual magnitud, dirección contraria y líneas de acción paralelas. Se llama un par de fuerzas o simplemente un par.

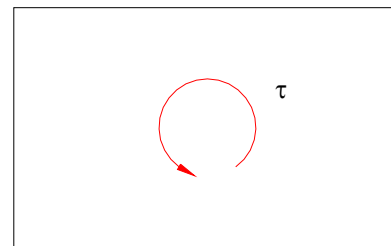
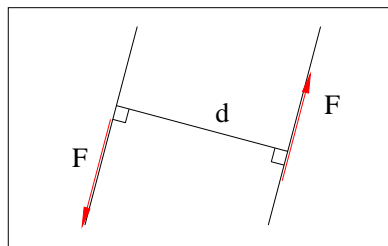


La fuerza total del sistema es cero. Puede mostrarse fácilmente que el torque total de ese sistema es el mismo sea cual sea el punto respecto al cual se calcule. Este resultado importante puede obtenerse, bien haciendo el cálculo directo del torque total respecto a un punto cualquiera o bien usando el resultado que demostraremos al final de este numeral. Teniendo en cuenta esa propiedad, calculemos el torque o momento total del par respecto a un punto fácil. Las paralelas determinan un plano. Sea  $O$  un punto sobre la línea de acción de  $-\vec{F}$ . El torque de  $-\vec{F}$  respecto a  $O$  es cero pues su brazo es cero. El torque de  $\vec{F}$  respecto a  $O$  es fuerza por brazo,  $Fd$ , siendo  $d$  la distancia entre las dos fuerzas y su dirección se determina según la regla de la mano derecha.

Es decir, ese sistema de fuerzas que hemos llamado par, está caracterizado por una fuerza total nula y por un torque o momento  $\vec{\tau}$ , perpendicular al plano de las dos fuerzas y con una dirección de giro asociada en ese plano que es, claramente, la dirección en la cual las dos fuerzas tienden a hacer girar el cuerpo sobre el que actúan.



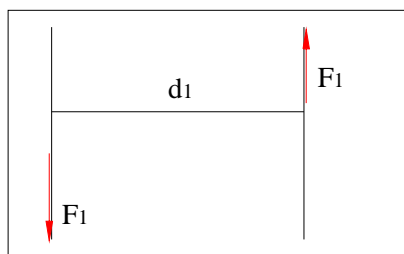
Mirando de frente el plano de las fuerzas:



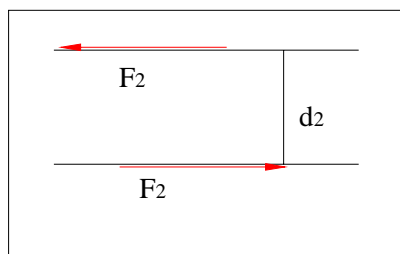
El efecto de un par de fuerzas es pues un torque o momento. Cuando se dice que sobre un determinado cuerpo rígido actúa un par con un determinado torque, se omiten las fuerzas que pueden dar origen a ese par, conservando únicamente su resultado neto: un puro torque. Es más, hay una infinidad de posibles sistemas de fuerzas cuyo resultado neto es un determinado torque. Para ser concretos y comprender cabalmente lo que es un par, pensemos en un cuerpo rígido simple: una tabla rectangular a la que vamos a someter a la acción de un torque perpendicular a ella y con la magnitud y dirección de giro indicados:



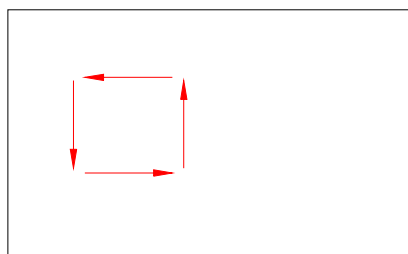
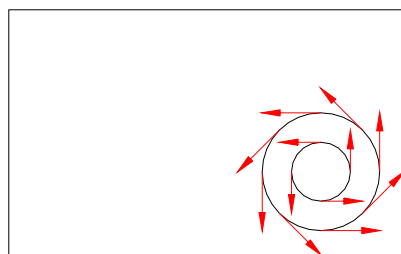
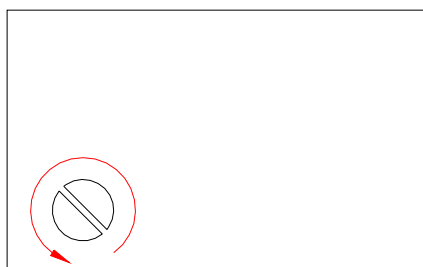
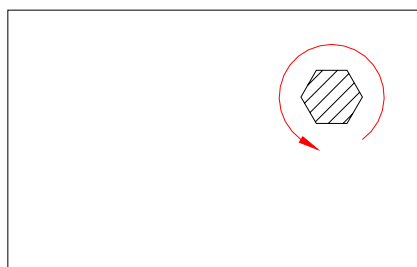
Ese puro torque sobre la tabla puede realizarse en concreto de muchas maneras. Por ejemplo, por una pareja de fuerzas paralelas. O por múltiples parejas actuando a la vez, con tal de que su fuerza total se anule y su torque total sea  $\tau$ . Es más, si con una llave apretamos una tuerca o perno, o con un destornillador ajustamos un tornillo, fijos a la tabla, estamos haciendo sobre ella un torque. Incluso, apoyando la mano y girándola hacemos un torque de fricción neto sobre la tabla, realizado a través de un complejo sistema de pequeñas fuerzas de resultante nula en el plano de la tabla.



$$\tau = F_1 d_1$$



$$\tau = F_2 d_2$$


 $\tau$ 

 $\tau$ 

 $\tau$ 

 $\tau$ 

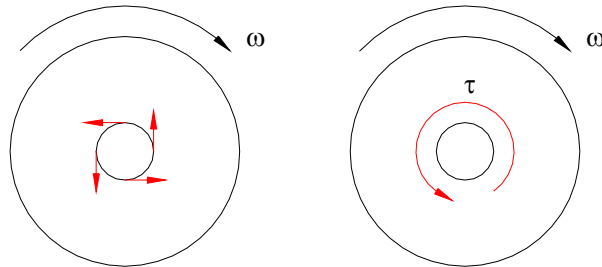
Todos esos sistemas de fuerzas son equivalentes: todos tienen resultante nula y el mismo torque. Si, por ejemplo, alguien soporta la tabla en equilibrio, no experimentará diferencia alguna sea cual sea el sistema concreto que esté actuando, todos son realizaciones del mismo torque, del mismo par. En sentido abstracto un par es pues simplemente un sistema de fuerzas cuya fuerza total es nula. El vector torque que caracteriza al par, no es un vector localizado en un punto. Es indiferente donde se considere. No importa en que punto esté el perno o el tornillo, su efecto global sobre la tabla como cuerpo perfectamente rígido es el mismo, siempre y cuando sólo se ejerza un torque, sin fuerzas netas.

Se ejercen pares cotidianamente en muchas circunstancias. Al girar una llave en la cerradura; al mover el pomo para abrir la puerta; al abrir la llave del grifo; al girar el timón de un vehículo; al rotar el botón del volumen del radio. Cuando se coge un lápiz o un libro con la mano, se ejercen pares, unas veces realizados por fuerzas normales, otras veces por fuerzas de fricción, como un poco de reflexión provechosa revelará al lector interesado.



Una rueda o una polea que giran alrededor de su eje; una barra que rota alrededor de un pin o pasador; una puerta que se abre o cierra girando sobre sus goznes, experimentan en mayor o menor grado complejas fuerzas de fricción hechas por el eje. Pero esas fuerzas tienen como sistema equivalente un par o torque de fricción.

Consideremos por ejemplo la fricción sobre una polea hecha por el eje:

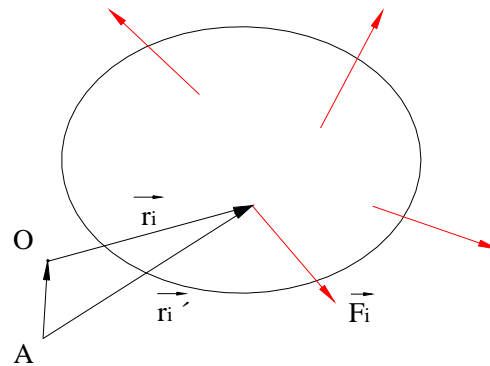


Fricción hecha por el eje

Equivalente: Torque o par de fricción  
hecho por el eje

La fricción con un eje se da pues, no como una fuerza, sino como un par o torque de fricción que se opone al movimiento de rotación del cuerpo, es decir a su velocidad angular.

Retornemos a las consideraciones generales sobre un sistema de fuerzas, para mostrar un resultado importante al que ya hemos aludido. Sea un sistema de fuerzas  $\vec{F}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Su fuerza total es  $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$  y su torque total respecto a un punto 0 es:  $\vec{\tau}_0 = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ . Hallemos el torque total del sistema de fuerzas respecto a otro punto A.



El torque de  $\vec{F}_i$  respecto a A es  $\vec{r}_i' \times \vec{F}_i$ , pero

$$\vec{r}_i' = \vec{AO} + \vec{r}_i,$$

de modo que, sumando para obtener el torque total del sistema respecto a A,

$$\vec{\tau}_A = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum \left( \vec{AO} + \vec{r}_i \right) \times \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{AO} \times \left( \sum \vec{F}_i \right) + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{\tau}_O + \vec{AO} \times \vec{F}.$$

Este resultado tiene varias consecuencias importantes. En primer lugar, si dos sistemas de fuerzas tienen igual fuerza total o resultante e igual torque total respecto a un punto O, su torque total respecto a cualquier otro punto será igual. En efecto, se ve inmediatamente que con la misma  $\vec{F}$  y el mismo  $\vec{\tau}_O$ ,  $\vec{\tau}_A$  es el mismo: los sistemas equivalentes tienen el mismo torque total respecto a cualquier punto.

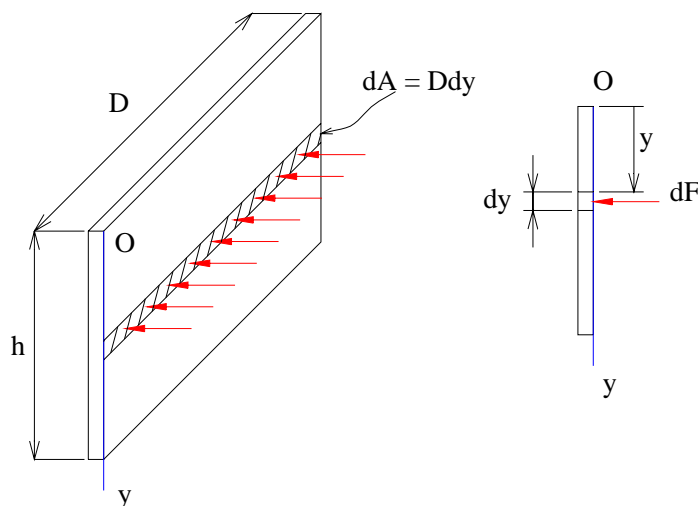
El caso particular que ya mencionamos al hablar del sistema de fuerzas llamado par, se ve con sencillez: como la fuerza total del par que, ¡atención!, ahora estamos llamando  $\vec{F}$ , es cero, entonces  $\vec{\tau}_A = \vec{\tau}_O$ , el torque del par es el mismo respecto a cualquier punto.

Hay todavía otro caso particular notable. Si la fuerza total es nula y el torque total respecto a un punto también lo es, el torque será igualmente nulo respecto a cualquier otro punto. En efecto, si  $\vec{F} = 0$  y  $\vec{\tau}_O = 0$ , entonces  $\vec{\tau}_A = 0$ . Este es, por supuesto, el caso del cuerpo rígido en equilibrio.

## EJEMPLO

### Fuerza distribuida triangular

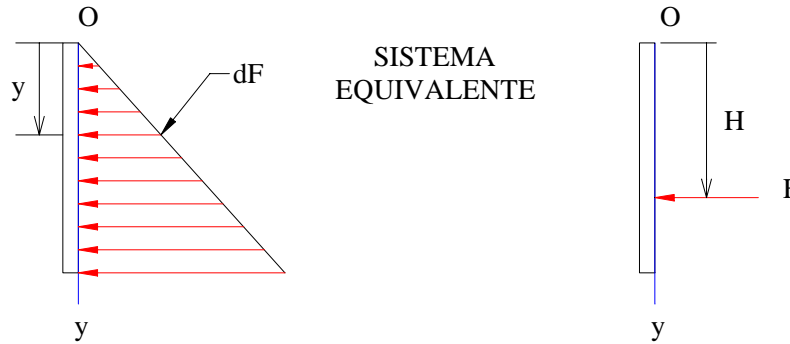
Un tanque rectangular se encuentra lleno de agua. Las fuerzas de contacto hechas por el agua sobre una pared vertical de anchura D y profundidad h, constituyen un sistema de fuerzas distribuidas por unidad de área, perpendiculares a la pared. Dicha fuerza por unidad de área es la presión del agua, que a una profundidad y vale  $\rho g y$ , siendo  $\rho$  la densidad del agua. Omitimos el efecto de la presión atmosférica que se encuentra también por fuera del tanque. Calcular la resultante del sistema de fuerzas distribuidas y su punto de aplicación.



La fuerza por unidad de área es  $\frac{dF}{dA} = \rho g y$ . La fuerza sobre un elemento rectangular de área  $dA = Ddy$ , será

$$dF = \rho g y D dy$$

El sistema de fuerzas, perpendiculares a la pared, es un sistema de fuerzas distribuidas paralelas, que varían linealmente con la profundidad  $y$ .



Ese sistema de fuerzas se puede tratar de manera análoga al peso de un cuerpo extenso. Recordemos que los sistemas equivalentes tienen la misma fuerza total o resultante y el mismo torque total. En este caso la fuerza resultante y el torque resultante se obtienen integrando y así, con torque respecto a O, tendremos

$$F = \int dF = \int_0^h \rho g y D dy = \frac{\rho g D h^2}{2} .$$

$$FH = \int d\tau = \int y dF = \int_0^h \rho g D y^2 dy = \frac{\rho g D h^3}{3} ,$$

con lo que  $H = \frac{2h}{3}$ . El sistema de fuerzas o fuerza distribuida hecha por el agua sobre la

pared vertical tiene pues un sistema equivalente de una sola fuerza actuando a  $\frac{2h}{3}$  de profundidad y en la mitad de su anchura. Insistamos en que ese sistema equivalente de fuerzas tiene la misma fuerza total y el mismo torque total y puede reemplazar al sistema original si se va a considerar toda la pared como un cuerpo rígido. Pero no es igual al sistema de fuerzas distribuidas. Sus efectos locales son diferentes. Si quiere estudiarse un determinado trozo de pared, el sistema equivalente global ya no es pertinente y hay que volver a la fuerza distribuida original.

#### 7.4 CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO. APLICACIONES

Si un cuerpo rígido se encuentra en reposo en un marco inercial de referencia, se cumple que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él se anula:

$$\sum \vec{F} = 0 ,$$

y la suma de torques externos, respecto a un punto cualquiera, se anula:

$$\sum \vec{\tau} = 0 .$$

Como ya mostramos, si la fuerza total es nula y el torque total es nulo respecto a un punto, lo será respecto a cualquier otro. El punto respecto al cual se tomen los torques es pues

arbitrario. En los ejemplos mostraremos como puede elegirse ese punto para simplificar los problemas.

Esas condiciones, llamadas condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido, son condiciones necesarias para que el cuerpo se encuentre en reposo en un marco inercial. Es decir, si un cuerpo está en reposo, con plena seguridad se cumplen dichas condiciones. Más aún, si inicialmente estaba en reposo y se cumplen esas condiciones, permanecerá en reposo. Pero las condiciones no son suficientes para garantizar que el cuerpo esté en reposo. O sea, perfectamente pueden cumplirse esas condiciones y sin embargo el cuerpo puede estarse moviendo con movimiento rectilíneo uniforme del centro de masa y con rotación de momentum angular constante. Pero ahora estamos interesados en el reposo de los cuerpos rígidos.

En problemas tridimensionales, cada una de las dos condiciones vectoriales de equilibrio tiene tres componentes y hay así un total de seis condiciones escalares de equilibrio, lo que torna complejos muchos problemas tridimensionales. Sin embargo, muchas aplicaciones importantes conllevan el estudio de problemas bidimensionales planos. Como ya señalamos al presentar el concepto de torque, muchos cuerpos y sus fuerzas están prácticamente en un plano, o bien hay cuerpos tridimensionales cuyo equilibrio, cuyo movimiento, puede estudiarse en un plano representativo en el cual pueden considerarse las fuerzas que actúan. Si el plano del cuerpo y de las fuerzas es el plano  $x,y$ , sólo hay, como vimos, torques en dirección  $z$ . No hay torques en  $x$ , ni torques en  $y$ , ni fuerzas en  $z$ , y las condiciones escalares de equilibrio se reducen a tres:

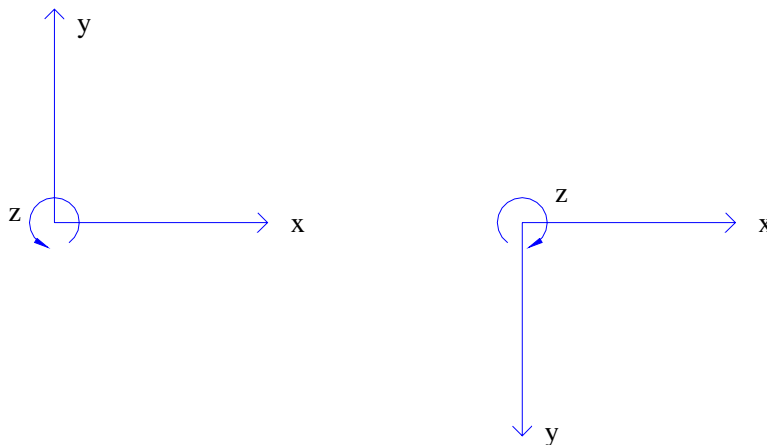
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum \tau_z = 0.$$

Con frecuencia suprimiremos el subíndice  $z$  y escribiremos simplemente  $\sum \tau = 0$ .

Recordemos, como ya explicamos detenidamente, que representaremos en el plano  $x,y$  la dirección positiva del eje  $z$  mediante la flecha circular que indica la dirección de giro asociada con la regla de la mano derecha. Dos elecciones posibles, en ambos casos con triedros derechos, son



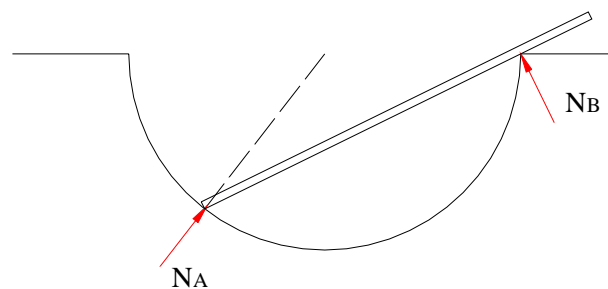
Un cuerpo en equilibrio, en reposo, se encuentra apoyado, bien sea en el piso, bien sea en un muro, en fin, mediante unos soportes que lo mantienen en su lugar. Las fuerzas y pares hechos sobre el cuerpo por los soportes se suelen llamar **reacciones**. En los problemas bidimensionales, hay algunos soportes comunes y es importante y fácil comprender cómo son las reacciones que pueden ejercer sobre un cuerpo. El criterio general es el siguiente: un cuerpo plano que se apoya en un punto podría tener en ese punto desplazamientos en dos direcciones y giros en una dirección. Pues bien, en las direcciones en que el soporte impide el movimiento, aparecen reacciones. Si se impide un desplazamiento, aparece una fuerza de reacción, si se impide un giro, aparece un par o torque de reacción.

En un soporte de pin o pasador, el soporte está fijo al piso y el cuerpo está unido al soporte mediante un pin o pasador liso. El soporte impide desplazamientos en las direcciones  $x, y$ . Aparecen entonces dos reacciones  $A_x, A_y$ , pero el soporte, con el pin liso, permite el giro en el plano  $x, y$ , y no hay entonces ningún torque o momento de reacción en  $z$ .



Este apoyo se llama también una articulación en el plano  $x, y$ .

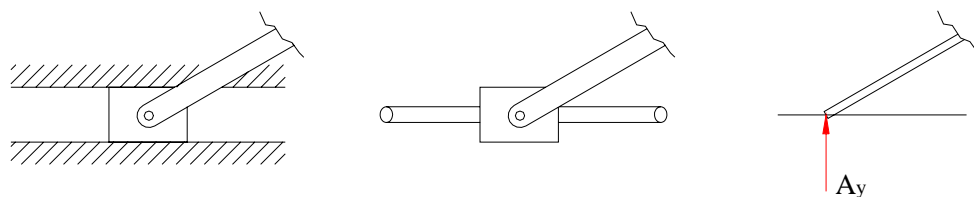
Una barra apoyada en un piso rugoso presenta también dos reacciones, una normal  $N$  y una fricción  $f$ , perpendicular y tangencial respectivamente a la superficie de deslizamiento posible y con la fricción oponiéndose a ese deslizamiento. Si el piso es liso, no hay fricción y sólo aparece la reacción normal. Por ejemplo, si una barra está apoyada en una superficie circular lisa, la superficie de deslizamiento es el círculo y la normal es normal al círculo. En cambio, si una barra está apoyada en una esquina lisa, la superficie de deslizamiento es la barra y la normal lo es a la barra, como se ilustra en la figura:



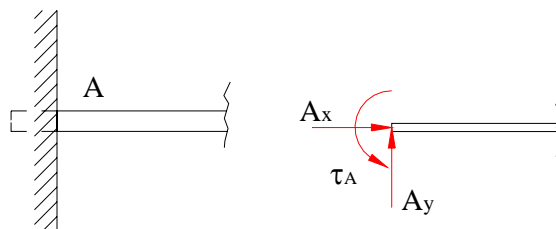
Un apoyo en un piso liso podría obtenerse también con un soporte de pin montado sobre ruedas, lo que se representa así:



En el caso anterior, la reacción  $A_y$  sólo puede ser hacia arriba, no hacia abajo, es decir  $A_y \geq 0$ . Pero puede haber un apoyo deslizante que permita reacción normal hacia arriba o hacia abajo, con  $A_y \geq 0$ , o  $A_y < 0$ :



En un empotramiento o soporte fijo, el cuerpo está firmemente incrustado en una pared, o también, fijo mediante platinas. En este apoyo se impiden los desplazamientos en dos direcciones y se impide además la rotación en el plano  $x,y$ . Hay entonces, además de dos componentes de la fuerza de reacción, un par de reacción hecho por el muro sobre el cuerpo. Este par tiene un torque  $\tau_A$ , o como se dice también con frecuencia, un momento  $M_A$ .

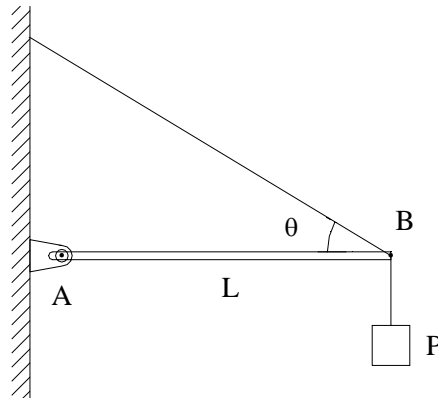


El muro ejerce pues un torque sobre el cuerpo empotrado. Este torque es, como ya sabemos, el resultado neto de un sistema de fuerzas llamado par de fuerzas y que, en un caso concreto, puede provenir de un sistema complejo de fuerzas distribuidas.

Veamos ahora algunos ejemplos variados de aplicación de la estática de los cuerpos rígidos, es decir, del equilibrio de dichos cuerpos. Aquí, como en general en todos los ámbitos de la mecánica elemental, la realización experimental es muy valiosa. No siempre es fácil realizar experimentos de medición, pero la mera realización cualitativa y la observación reflexiva de situaciones cotidianas, son de gran importancia.

En los diversos ejemplos y ejercicios el marco inercial es usualmente un marco ligado localmente a tierra. Sólo cuando se trate de otro marco inercial lo señalaremos explícitamente.

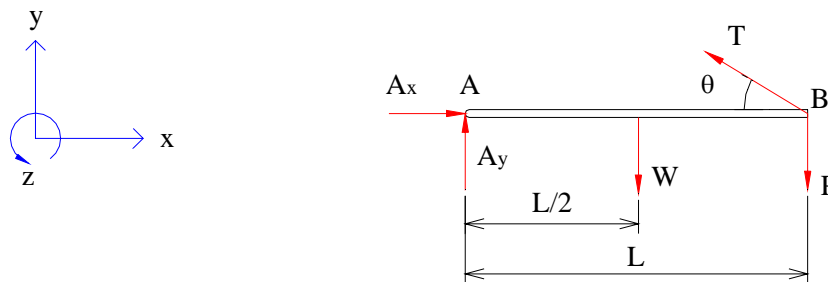
## 1. EJEMPLO



Una barra AB de longitud  $L$  y peso  $W$ , está soportada por un pasador en A y una cuerda en B. Sostiene una carga de peso  $P$  suspendida de su extremo. Hallar la tensión en la cuerda y las componentes de la reacción en A.

El sistema mecánico es la barra, cuerpo rígido en equilibrio.

En la articulación o pasador liso A hay, como sabemos, reacciones horizontal y vertical. Como ahora nos interesa el comportamiento de toda la barra, podemos remplazar el peso, fuerza distribuida en toda la barra, por su sistema equivalente, peso total aplicado en el centro de masa, que, asumiendo una barra homogénea, está en la mitad de ella. El diagrama de fuerzas es entonces



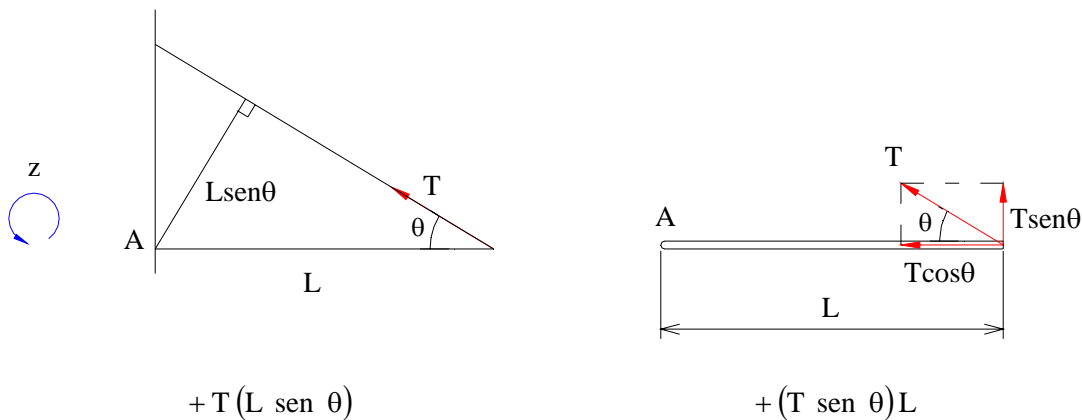
Como se trata de un cuerpo en reposo, el origen de los ejes puede elegirse en cualquier punto, no tiene mucha importancia, y por eso, para no recargar innecesariamente la figura, dibujaremos los ejes a un lado, indicando, eso sí, con precisión, las direcciones positivas. Asunto diferente, de mucha importancia, es la elección del punto respecto al cual se van a calcular los torques de las diversas fuerzas. Como vimos, ese punto es arbitrario. ¿Cómo elegirlo adecuadamente? Un buen criterio es elegir un punto por el que pasen varias reacciones incógnitas del problema. Así el torque de esas fuerzas será nulo y la ecuación que resulta tiene menos incógnitas y por ende un carácter algebraico más sencillo. De acuerdo a esto, tomaremos torques respecto al punto A.

Las condiciones de equilibrio son entonces

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x - T \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y - W - P + T \sen \theta = 0 . \quad (2)$$

Veamos con cuidado la suma de torques respecto al punto A.  $A_x$  y  $A_y$  tienen brazo cero y su torque se anula. El brazo de  $W$  es  $L/2$  y su dirección de giro es contraria a  $z$ . El brazo de  $P$  es  $L$  y su torque es también negativo. El torque de  $T$  respecto a A puede verse de dos maneras: directamente fuerza por brazo, o bien, tomando las componentes de  $T$ .



La ecuación de torques queda entonces

$$\sum \tau_A = 0 : \quad -W \frac{L}{2} - PL + TL \sen \theta = 0 . \quad (3)$$

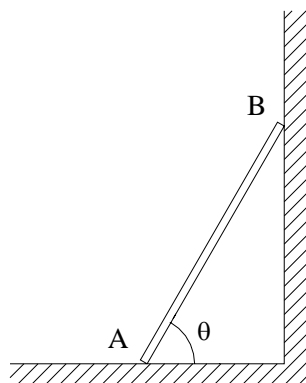
Hay 3 ecuaciones para las 3 incógnitas,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $T$ . Resolviendo:

$$T = \frac{W/2 + P}{\sen \theta}$$

$$A_x = \frac{W/2 + P}{\tan \theta}$$

$$A_y = \frac{W}{2} .$$

## 2. EJEMPLO



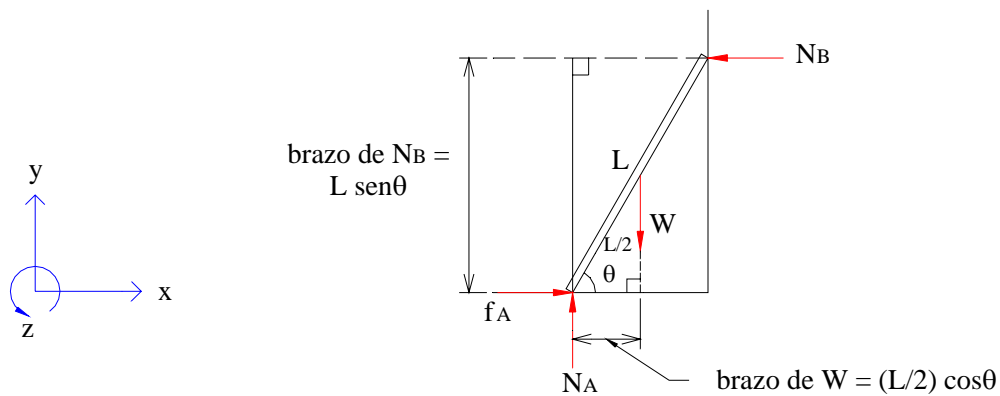


Una escalera está apoyada en un muro vertical liso y en un piso rugoso, con coeficiente estático de fricción  $\mu$ . Hallar el mínimo ángulo  $\theta$  para que la escalera pueda estar en equilibrio bajo la acción de su propio peso.

Sistema mecánico: toda la escalera.

Supongamos una escalera de peso total  $W$  y longitud  $L$ , homogénea, de modo que podemos considerar su centro de masa en  $L/2$  y actuando allí su peso total.

Elijamos los ejes como se indican. Diagrama de fuerzas en situación de equilibrio cualquiera:



Las condiciones de equilibrio, tomando torques respecto al punto A, son

$$\sum F_x = 0 : f_A - N_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 : N_A - W = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 : N_B L \sin \theta - W \frac{L}{2} \cos \theta = 0 .$$

Así,

$$N_A = W$$

$$f_A = N_B = \frac{W}{2 \tan \theta} .$$

Ahora, como  $f_A$  es fricción estática,

$$f_A \leq \mu N_A ,$$

$$\frac{W}{2 \tan \theta} \leq \mu W ,$$

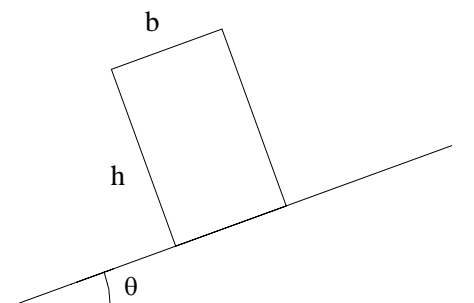
$$\tan \theta \geq \frac{1}{2 \mu} ,$$

y entonces

$$\theta_{\min} = \arctan \frac{1}{2\mu}.$$

Si  $\mu = 0$  el equilibrio es obviamente imposible. Mientras mayor sea  $\mu$ , menor es  $\theta_{\min}$ , es decir más “tendida” puede estar la escalera como fácilmente se puede intuir.

### 3. EJEMPLO



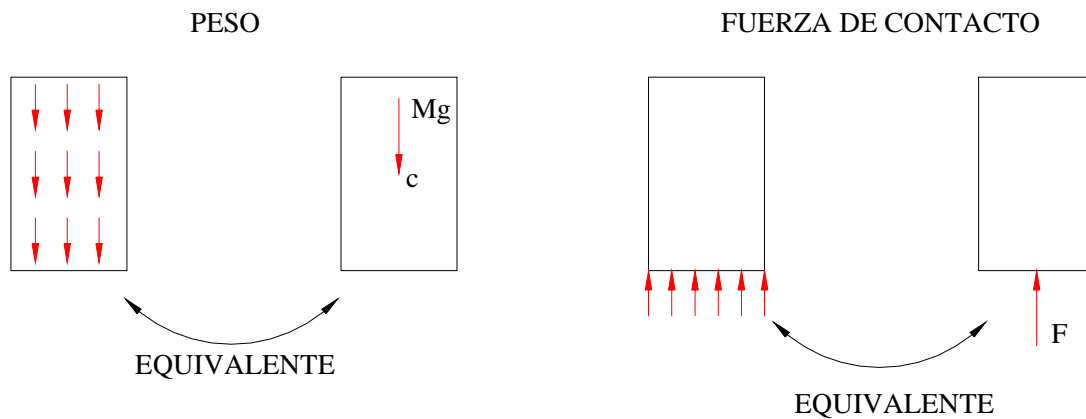
Se coloca un bloque rectangular sobre un plano inclinado rugoso. Sus dimensiones en dirección del plano y normal a él son  $b$  y  $h$ . El coeficiente estático de fricción con el plano es  $\mu$ . Si se aumenta gradualmente el ángulo  $\theta$ , ¿qué sucederá primero, el deslizamiento o el volcamiento del bloque?

Desde el punto de vista del deslizamiento podemos tratar el bloque como una partícula. Ese análisis, que ya hicimos al estudiar la fricción estática, muestra que

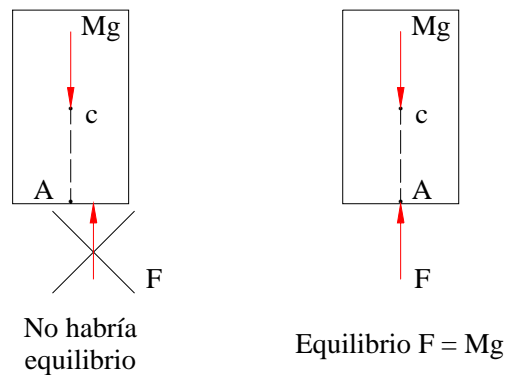
$\tan \theta \leq \mu$  : no hay deslizamiento

$\tan \theta > \mu$  : el cuerpo desliza .

Estudiemos ahora el volcamiento, para cuyo análisis debemos considerar el bloque como un cuerpo rígido. Comencemos por el caso  $\theta = 0$  para estudiar algunas facetas de las fuerzas distribuidas. El bloque tiene una interacción a distancia con el planeta tierra: el peso, que se manifiesta como una fuerza distribuida en todo el volumen, y una interacción de contacto con el piso, que se manifiesta como una fuerza distribuida en toda la superficie de contacto. Aquí el concepto de sistemas de fuerzas equivalentes muestra su importancia. En lo que a suma de fuerzas y torques concierne, que es lo que nos interesa para el equilibrio del bloque como cuerpo rígido, podemos remplazar esas fuerzas distribuidas por sus sistemas equivalentes: en el caso del peso, por el peso total actuando en el centro de masa y en el caso de la fuerza en la superficie, por una fuerza total  $F$  pero, ¿actuando en qué punto, aplicada dónde?

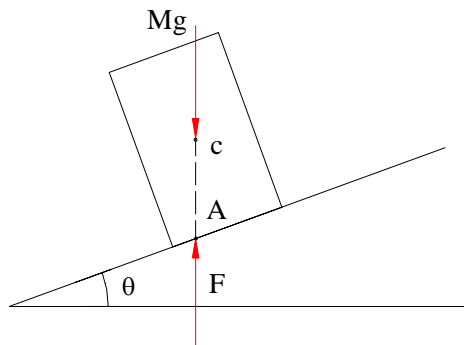


Para saber dónde se aplica la resultante de las fuerzas de contacto, tomemos torques respecto al punto A, en el cual la línea de acción del peso total corta la base del bloque.



Como la suma de torques debe ser cero para el equilibrio, y el torque del peso respecto al punto A es cero, la fuerza  $F$ , resultante de las fuerzas de contacto tiene que pasar por A.

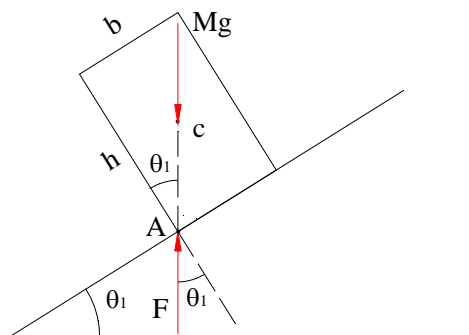
Ahora sí, examinemos el bloque en equilibrio en el plano inclinado un ángulo  $\theta$ .



Aplicando un razonamiento análogo podemos ver que la resultante de las fuerzas de contacto, que en este caso comprende fuerzas normales y tangenciales o de fricción, debe ser una fuerza

vertical, de magnitud igual a  $Mg$ , y que pasa por el punto A en el cual la prolongación del peso total corta la base del bloque. Esa fuerza  $F$  se puede descomponer en una normal  $N$  y una fricción estática  $f$ .

A medida que aumenta el ángulo  $\theta$ , el punto de aplicación A de la fuerza de contacto resultante  $F$ , se desplaza hacia el extremo inferior del bloque. El máximo ángulo  $\theta$  para que el equilibrio sea posible y el bloque no se vuelque corresponde pues al caso en el que el punto A coincide con el extremo del bloque.



Llamando  $\theta_1$  a ese ángulo crítico,

$$\tan \theta_1 = \frac{b}{h}.$$

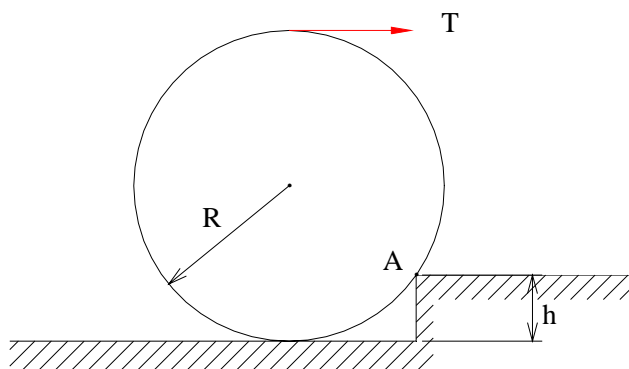
Entonces, habrá:

volcamiento si  $\theta > \tan^{-1} \frac{b}{h}$

deslizamiento si  $\theta > \tan^{-1} \mu$ ,

y es cuestión de saber cual ángulo crítico es menor para saber si el bloque primero desliza o vuelca.

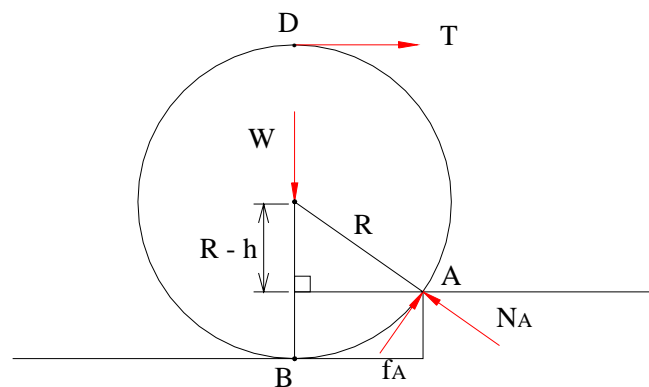
#### 4. EJERCICIO



Un cilindro de peso  $W$  y radio  $R$  tiene enrollada una cuerda a su alrededor.

- Hallar la mínima tensión horizontal  $T$ , necesaria para que el cilindro comience justo a subir el pequeño escalón de altura  $h$ .
- Hallar las fuerzas normal y de fricción en el borde A y el mínimo coeficiente estático de fricción necesario para que el cilindro comience a subir sin deslizar.
- Hallar la fuerza de contacto resultante en A y el ángulo que forma con la radial.

El sistema mecánico es el cilindro. Considerémoslo en equilibrio en el instante en que comienza apenas a subir el escalón, es decir cuando la fuerza de contacto hecha por el piso horizontal en B se hace cero. El diagrama de fuerzas es entonces, considerando las componentes normal, o sea radial, y tangencial o de fricción en A, y el peso remplazado por su sistema equivalente:



Obsérvese la dirección de la fuerza de fricción, que se opone a la velocidad relativa que tendría el punto de la rueda respecto a la esquina si ésta fuese lisa.

- Para hallar la tensión  $T$ , que es entonces la tensión mínima, tomemos torques respecto al punto A. Sea el eje  $z$  positivo asociado con giro antihorario

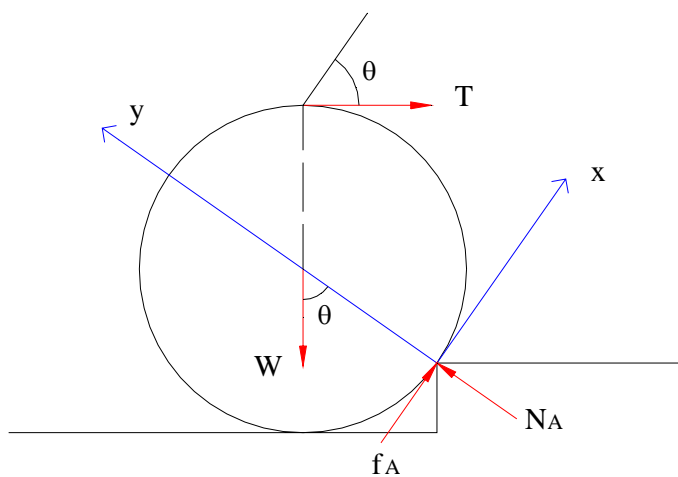


$$\sum \tau_A = 0 : W \sqrt{R^2 - (R-h)^2} - T(2R-h) = 0$$

Llamando  $\alpha$  el factor  $\sqrt{\frac{h}{2R-h}}$ ,

$$T = \alpha W.$$

- Conocida  $T$ , para hallar  $N_A$  y  $f_A$  hay que plantear la suma de fuerzas en dos ejes  $x, y$ , que pueden ser horizontal y vertical, lo que conlleva el planteamiento de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sin embargo, con los siguientes ejes, en direcciones de  $f_A$  y  $N_A$ , el álgebra es más simple, aunque hay que obtener las componentes de  $W$  y  $T$ :

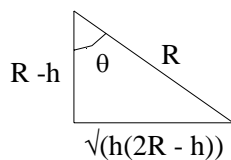


Estos ejes  $x, y$  conforman con el  $z$  ya elegido un triedro derecho.

$$\sum F_x = 0 : f_A - W \sin \theta + T \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 : N_A - W \cos \theta - T \sin \theta = 0 .$$

Con



y un poco de álgebra,

$$N_A = W$$

$$f_A = \alpha W .$$

Como  $f_A$  es fricción estática,

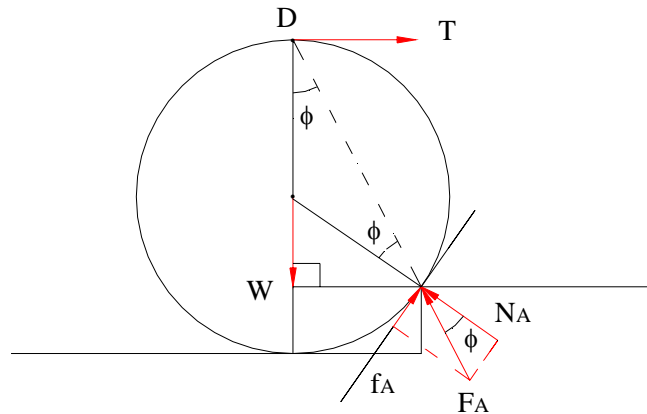
$$f_A \leq \mu N_A ,$$

o sea,

$$\mu \geq \alpha$$

y  $\mu$  mínimo =  $\alpha$  .

c)



La fuerza de contacto resultante en A es

$$F_A = \sqrt{N_A^2 + f_A^2} = \sqrt{\frac{2R}{2R-h}} W .$$

El ángulo  $\phi$  con la radial se halla así

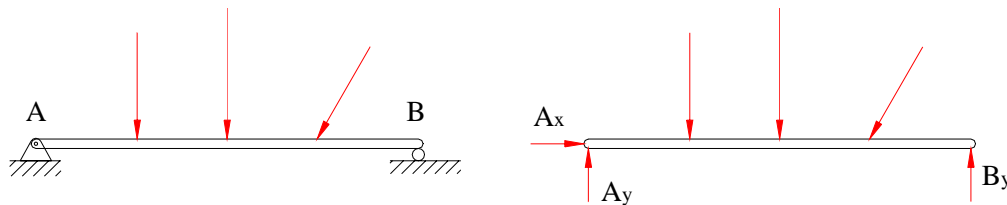
$$\tan \phi = \frac{f_A}{N_A} = \alpha .$$

Es importante notar que la prolongación de  $F_A$  tiene que pasar por el punto D ya que, si tomamos torques respecto a D, como los brazos de W y T son nulos, también tiene que ser nulo el brazo de  $F_A$ . En efecto, en el triángulo rectángulo puede chequearse fácilmente el valor obtenido de  $\tan \phi$ .

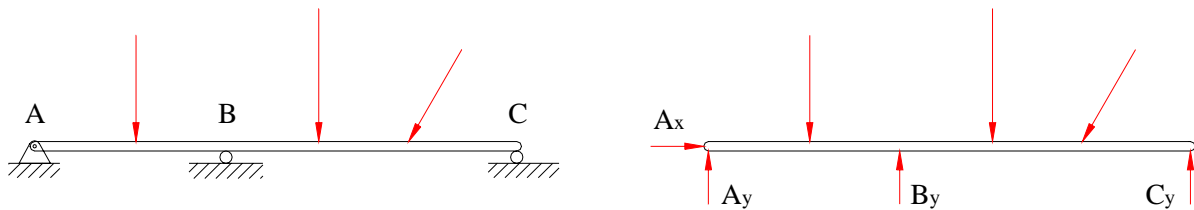
## 5. EJEMPLO

### Sistemas mecánicos estáticamente determinados e indeterminados

Consideremos una viga apoyada en un soporte de pasador en un extremo y en un soporte liso o de rodillos o ruedas en el otro extremo, sometida a cargas en el plano, tanto verticales como inclinadas.

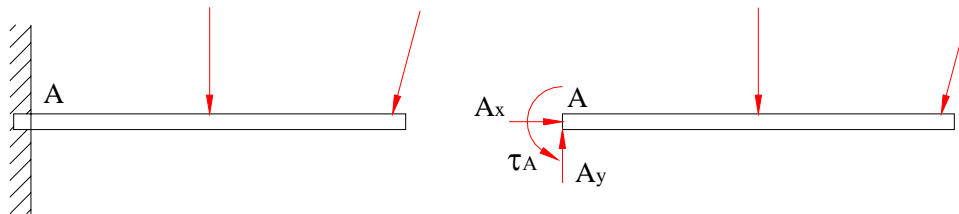


Como ya sabemos, el apoyo articulado da lugar a dos reacciones  $A_x$ ,  $A_y$ , y el apoyo liso a una,  $B_y$ . Hay así un total de 3 incógnitas para el equilibrio de la viga, incógnitas que pueden hallarse con las tres ecuaciones de equilibrio,  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum \tau = 0$ . Se dice que un sistema mecánico es estáticamente determinado cuando las ecuaciones de la estática, del equilibrio, permiten hallar las reacciones en los soportes que lo mantienen fijo. La viga anterior, llamada viga simplemente apoyada, es una estructura estáticamente determinada. Consideremos en cambio la siguiente viga de tres apoyos, articulación en A, y apoyos lisos en B y C.



En este caso hay 4 incógnitas y sólo 3 ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio, de la estática de los cuerpos rígidos, son válidas y se cumplen, pero no son suficientes para hallar las reacciones de los soportes. Un sistema mecánico en el cual no bastan las ecuaciones de la estática para hallar las reacciones en los soportes se llama estáticamente indeterminado. El modelo de un cuerpo absolutamente rígido no es pues suficiente para estudiar el equilibrio de una viga como la anterior. Es necesario considerar las propiedades elásticas de la viga y sus deformaciones, así sean muy pequeñas, para poder hallar completamente las reacciones. Es posible que algunas de las reacciones puedan hallarse con la estática. En el caso de la viga, por ejemplo,  $A_x$  puede hallarse con  $\sum F_x = 0$ . Pero la indeterminación subsiste, pues quedan apenas 2 ecuaciones de equilibrio para las 3 incógnitas  $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$ .

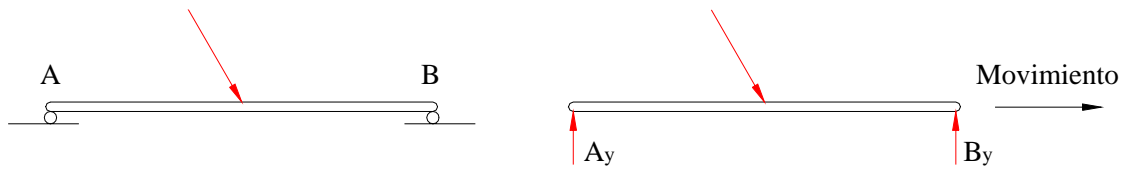
Una viga empotrada en un extremo es estáticamente determinada.



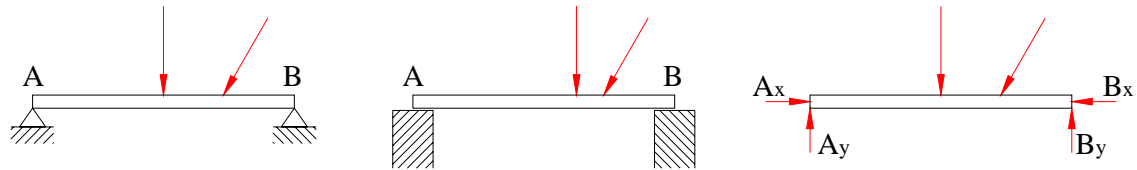
Hay, en efecto, 3 incógnitas, dos fuerzas y un par con un cierto torque, para las tres ecuaciones de equilibrio.

Ocasionalmente los soportes de un cuerpo pueden ser insuficientes para sostenerlo en equilibrio. Por ejemplo, una viga con apoyos lisos en los dos extremos se pondrá en movimiento con cargas horizontales, ya que no puede cumplirse la condición  $\sum F_x = 0$ :





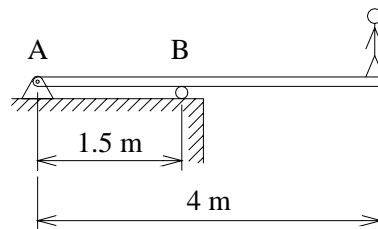
Si tenemos una viga soportada en dos articulaciones, o en dos pisos rugosos:



las reacciones verticales  $A_y$ ,  $B_y$ , pueden hallarse con las ecuaciones de equilibrio  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum \tau_A = 0$ , o también con las ecuaciones  $\sum \tau_A = 0$ ,  $\sum \tau_B = 0$ , que constituyen un sistema algebraico equivalente. Pero la indeterminación de las reacciones en  $x$  no puede resolverse. Incluso si sólo hubiese cargas verticales, quedaría simplemente  $A_x - B_x = 0$ , sin poder hallar el valor de cada una.

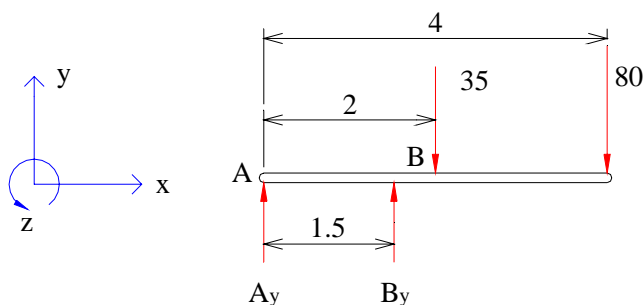
Hechas estas observaciones, sencillas pero importantes, sobre como se apoyan y soportan los cuerpos rígidos en equilibrio en problemas planos, propongamos dos ejercicios concretos de vigas estáticamente determinadas.

- a) Un hombre de 80 kg está parado en el extremo de un trampolín de 35 kg como se muestra en la figura.



Hallar las reacciones en el pasador A y en el rodillo B.

Sistema mecánico: La tabla del trampolín. En ese caso la fuerza en el extremo es la fuerza normal de contacto hecha por el hombre sobre la tabla. Como el hombre está en equilibrio, esa fuerza es igual en magnitud al peso del hombre. Como los datos son las masas en kg, hay dos alternativas para trabajar con el peso. Usar el peso como masa por aceleración de la gravedad  $g$ , bien sea remplazando numéricamente  $g$  para tener las fuerzas en newtons, bien sea llevando literalmente la  $g$ . En problemas de dinámica esa es la manera de trabajar con el peso de un cuerpo. Pero en estática, donde no hay aceleraciones, podría trabajarse también el peso en kgf. Hagámoslo así en este caso: longitudes en m, fuerzas en kgf.



Como  $\sum F_x = 0$ ,  $A_x = 0$  y no la hemos dibujado en el diagrama. Hemos reemplazado el peso por su sistema equivalente. Las dos condiciones de equilibrio que restan son

$$\sum \tau_A = 0 : \quad B_y \times 1.5 - 35 \times 2 - 80 \times 4 = 0$$

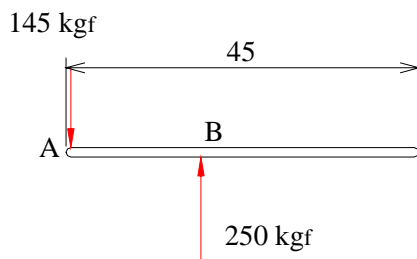
$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + B_y - 35 - 80 = 0.$$

Resolviendo,

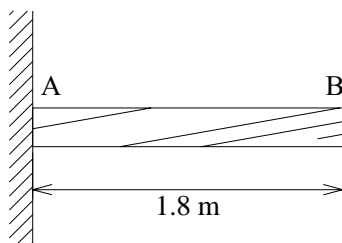
$$B_y = 260 \text{ kgf}$$

$$A_y = -145 \text{ kgf}.$$

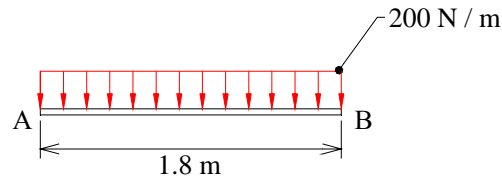
El signo menos de  $A_y$  indica que esa componente es de dirección contraria a la que asumimos: el pasador está ejerciendo una fuerza hacia abajo sobre la tabla. Las reacciones son pues



- b) Hallar las reacciones sobre una viga de madera empotrada en un extremo, con un peso propio de 200 N/m y una longitud de 1.8 m.

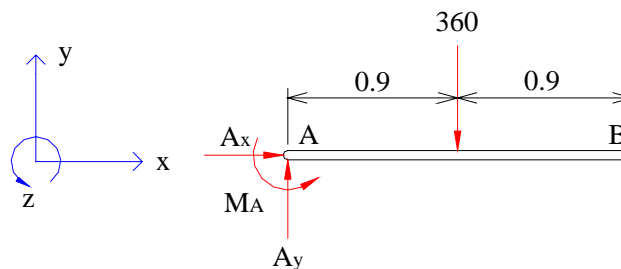


El peso de la viga es, como sabemos, una fuerza distribuida, que puede representarse así, esquematizando la viga como una línea,



El sistema mecánico que vamos a estudiar es toda la viga y podemos remplazar, para el efecto de fuerzas y torques, la fuerza distribuida por su sistema equivalente de una sola fuerza igual al peso total de  $200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 1.8 \text{ m} = 360 \text{ N}$ , aplicado en el centro de masa de la viga. Ahora

bien, si fuésemos a estudiar sólo un trozo de viga, habría que retornar a la fuerza distribuida que actúa sobre ese trozo. En el empotramiento hay, como ya vimos, fuerzas de reacción horizontal y vertical y hay además un par de reacción hecho por el muro sobre la viga, cuyo torque o momento escribiremos como  $M_A$ , usando la notación más común de este caso. En unidades SI, el diagrama de fuerzas de la viga AB es entonces



Las condiciones de equilibrio son

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A_y - 360 = 0$$

$$\sum \tau_A = 0 : M_A - 360 \times 0.9 = 0$$

y así

$$A_x = 0$$

$$A_y = 360 \text{ N}$$

$$M_A = 324 \text{ N m}.$$

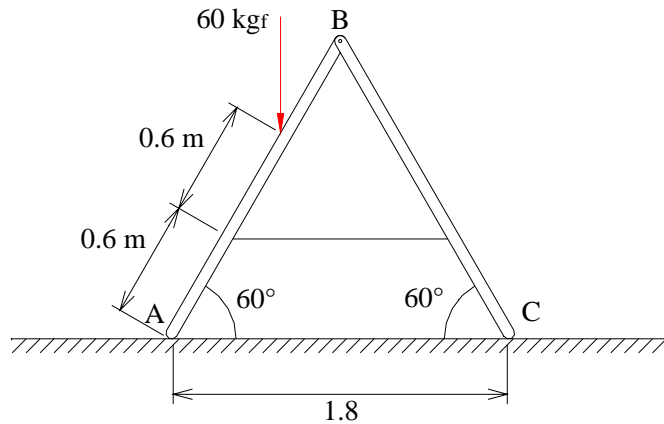
Recordemos que, como vimos al estudiar lo que es un par, el momento o torque de un par es el mismo respecto a cualquier punto. Entonces, si quisiésemos tomar los torques respecto al punto B, tendríamos

$$\sum \tau_B = 0 : M_A - A_y \times 1.8 + 360 \times 0.9 = 0,$$

con lo cual, remplazando  $A_y$ , obtenemos de nuevo

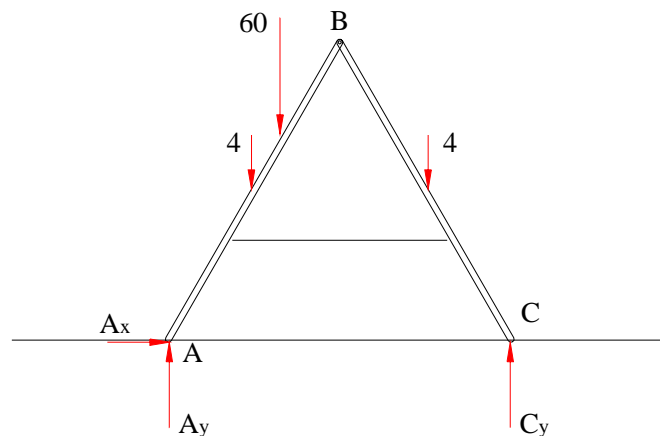
$$M_A = 324 \text{ N m}.$$

## 6. EJERCICIO



Una escalera de tijera está formada por dos tramos, cada uno de 4 kg, tramos que están unidos mediante una articulación de pasador en B y mediante una cuerda horizontal, como se indica en el dibujo. Una persona de 60 kg está parada en la escalera, como también se indica. Asumiendo que el apoyo A es rugoso y el apoyo C es liso, hallar:

- Las reacciones hechas por el piso sobre la escalera.
  - La tensión en la cuerda y las fuerzas de un tramo sobre el otro en la articulación B.
- a) Tomemos como sistema mecánico la escalera completa, es decir los dos tramos y la cuerda. Los pesos pueden calcularse en newtons o trabajarse como mg, pero aquí es más simple trabajar las fuerzas en kgf y las longitudes en m. Las fuerzas externas sobre la escalera son entonces



Las condiciones de equilibrio fácilmente conducen a

$$A_x = 0$$

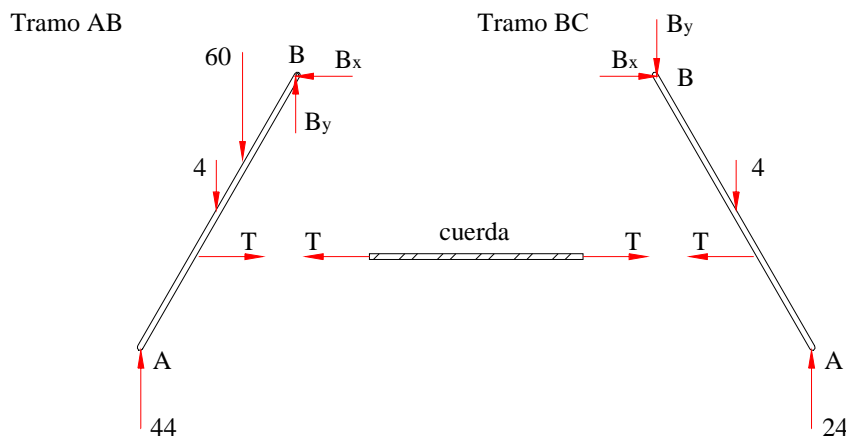
$$A_y = 44 \text{ kgf}$$

$$C_y = 24 \text{ kgf}.$$

Hay que comprender que, si hubiésemos supuesto un piso también rugoso en C, habría allí una fuerza horizontal  $C_x$  y, aunque los valores de  $A_y, C_y$  serían los mismos, habría una indeterminación en las fuerzas horizontales y no se podrían encontrar sus valores con las ecuaciones de la estática.

b) El análisis que hemos hecho de toda la escalera considerada como un sólo cuerpo rígido, no permite el conocimiento de fuerzas como la tensión en la cuerda o las fuerzas en B, que son fuerzas internas al sistema considerado. Para hallarlas es necesario considerar el equilibrio de partes o trozos de la estructura completa. Como ésta se encuentra en equilibrio, cualquiera de sus partes estará también en equilibrio. Este método es muy importante para encontrar las fuerzas y los torques o momentos en las diferentes partes que componen una estructura. Las fuerzas de contacto hechas por un trozo sobre otro obedecen la tercera ley de Newton y es necesario, al hacer los diagramas de los trozos separados, ser cuidadosos en la aplicación de dicha ley.

Veamos en nuestro caso los diagramas de los sistemas mecánicos: tramo AB, tramo BC y cuerda ideal de peso despreciable:



Como el pasador en B impide el movimiento en dos direcciones, hay dos componentes,  $B_x, B_y$ , de la fuerza en B hecha por un tramo sobre el otro. El sentido en que se eligen  $B_x, B_y$ , digamos sobre el tramo AB, es arbitrario. Pero una vez elegido, debe respetarse la ley de acción-reacción al representar las fuerzas sobre el tramo BC. Para hallar las fuerzas T,  $B_x, B_y$ , basta con estudiar el equilibrio de uno de los dos tramos. En este caso el tramo BC,

que tiene una fuerza menos, es preferible. Al aplicar las tres condiciones de equilibrio se obtiene fácilmente:

$$T = 19.05 \text{ kgf}$$

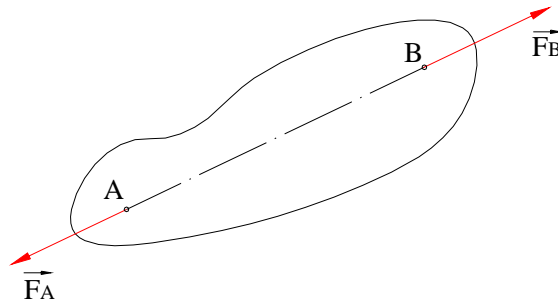
$$B_x = 19.05 \text{ kgf}$$

$$B_y = 20 \text{ kgf}.$$

## 7. EJEMPLO

### Cuerpos de dos fuerzas

a) Si un cuerpo rígido está sometido únicamente a la acción de dos fuerzas, éstas tienen que ser de igual magnitud, sentido contrario y colineales, es decir, tener la misma línea de acción.



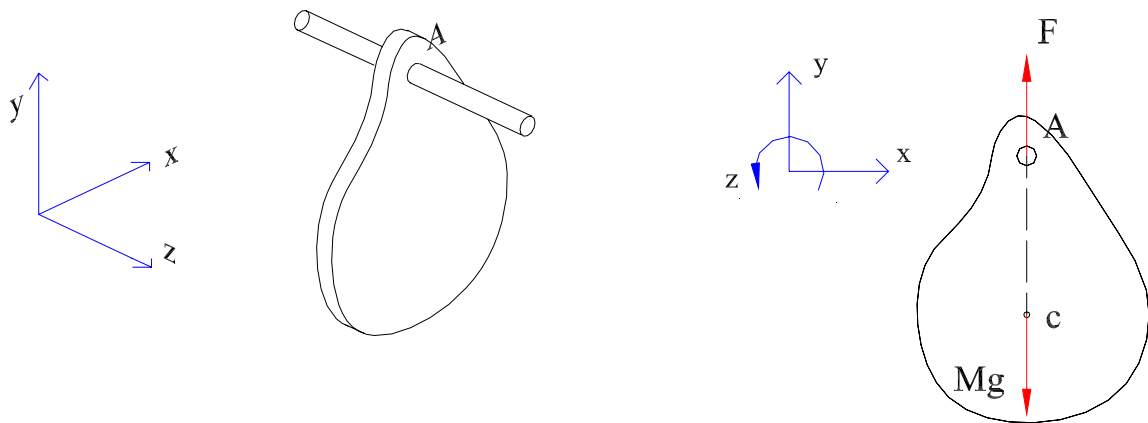
En efecto, como el cuerpo está en equilibrio,

$$\sum \vec{F} = 0 : \quad \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \Rightarrow \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

es decir son fuerzas de igual magnitud y sentido contrario.

Pero además la suma de torques respecto a un punto cualquiera debe ser cero. Tomando, por ejemplo, torques respecto al punto A, el torque de  $\vec{F}_A$  es inmediatamente cero. Para que el torque de  $\vec{F}_B$  respecto al punto A sea cero, la única posibilidad es que su brazo se anule, es decir que la línea de acción de  $\vec{F}_B$  pase por A.  $\vec{F}_A$  y  $\vec{F}_B$  son entonces colineales. Otra manera de verlo es la siguiente: si  $\vec{F}_A$  y  $\vec{F}_B$  no fuesen colineales, formarían un par y el torque total no se anularía.

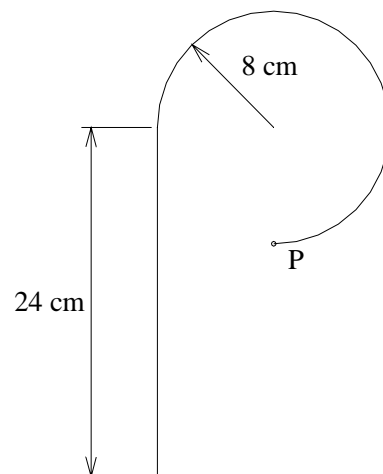
Podemos ver una aplicación interesante de esa proposición en un cuerpo que cuelga, suspendido en un plano vertical mediante un eje o pasador liso. El cuerpo puede ser una placa plana o bien una varilla o un alambre contenido en un plano.



En nuestro problema bidimensional, en el plano vertical  $x,y$  de la placa, las fuerzas son: el peso, que podemos remplazar por su sistema equivalente, que es el peso total aplicado en el centro de masa  $C$ , y la fuerza hecha por el eje. Si el cuerpo está en equilibrio, esas dos fuerzas son entonces de igual magnitud, sentido contrario y colineales. Por tanto el centro de masa  $C$  tiene que estar sobre la línea vertical que pasa por el punto de suspensión  $A$ . Esto proporciona una manera de obtener experimentalmente el centro de masa de una placa plana: se suspende de dos puntos diferentes y se trazan en cada caso las verticales correspondientes al equilibrio. Donde se cortan está el centro de masa.

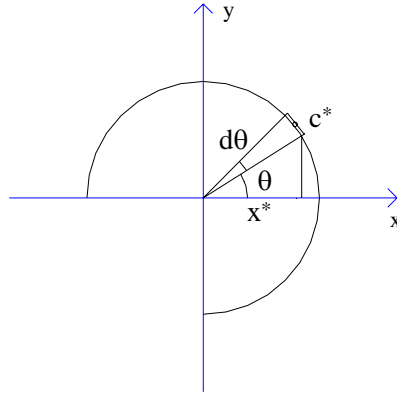
La posición de equilibrio que estamos considerando es una posición de equilibrio estable. En efecto, si el cuerpo se aparta de ella, el peso produce respecto al punto  $A$  un torque recuperador que tiende a llevar de nuevo el cuerpo a la posición de equilibrio. El cuerpo oscilará en el plano vertical alrededor del eje: es un péndulo, llamado péndulo físico. Por ahora estamos estudiando únicamente su posición de equilibrio.

Propongamos como ejercicio de aplicación el estudio de la posición de equilibrio de un alambre rígido, formado por un tramo de  $\frac{3}{4}$  de circunferencia y un tramo recto, y suspendido del punto  $P$ .



Este cuerpo se hace fácilmente con un alambre eléctrico rígido. En el punto de suspensión P no se requiere eje o pasador. Basta apoyarlo en el borde de una mesa o simplemente en un dedo. La posición de equilibrio y, como veremos luego, las pequeñas oscilaciones como péndulo físico, constituyen una práctica interesante.

Como la densidad lineal de masa del alambre es constante, el centro de masa del cuerpo coincide con el centroide de la figura geométrica. El centroide de un arco de  $3/4$  de circunferencia se halla fácilmente.



$$\frac{3\pi R}{2} \bar{x} = \int_{-\pi/2}^{\pi} (R \cos \theta) R d\theta$$

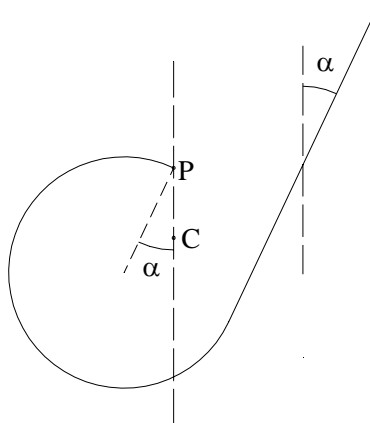
$$\bar{x} = \frac{2R}{3\pi} = \bar{y} \text{ (eje a } 45^\circ \text{ es de simetría).}$$

Llamando 1 al arco de circunferencia y 2 al tramo recto y considerando el cuerpo como compuesto, se obtiene para el centro de masa C de todo el alambre

$$x_c = -2.07 \text{ cm}$$

$$y_c = -3.63 \text{ cm.}$$

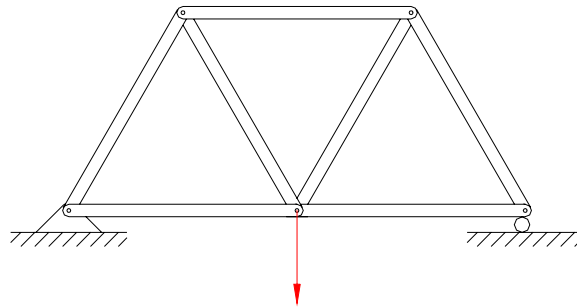
En la posición de equilibrio la línea PC es vertical.



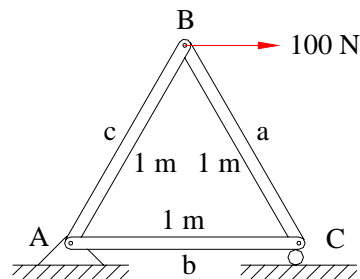


Un poco de geometría permite hallar el ángulo  $\alpha$  que el tramo recto forma con la vertical,  $\alpha = 25.35^\circ$ . Si el cuerpo suspendido es volumétrico, tridimensional, para que esté sometido únicamente a la acción de dos fuerzas, la fuerza en el punto de suspensión y el peso total, el cuerpo debe estar suspendido de una articulación esférica o articulación de bola y copa, o bien de una cuerda, que permiten giros en todas direcciones sin generar torques, como sí lo haría un eje o pasador en dirección  $z$ , que podría generar pares o torques bien en  $x$ , bien en  $y$ .

b) Otra aplicación importante de un cuerpo rígido sometido únicamente a la acción de dos fuerzas, se encuentra en las estructuras llamadas cerchas o armaduras, en las cuales los miembros, de peso despreciable, están articulados mediante pasadores. Si las cargas se aplican en los nudos, los diferentes miembros son cuerpos rígidos sometidos únicamente a dos fuerzas en sus extremos. Las fuerzas sobre las barras serán así a lo largo de ellas y podrán ser de tracción o compresión.

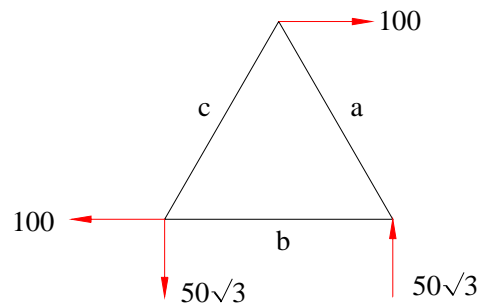


Estas estructuras se usan en puentes, techos, en fin. Aquí nos limitaremos a estudiar, como aplicación de la estática de los cuerpos rígidos, la armadura más elemental, en forma de triángulo:

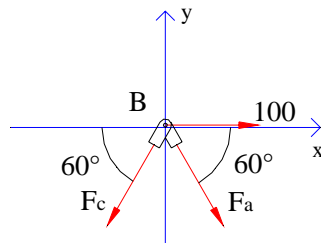


Hallar las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras.

Considerando la estructura como un todo se hallan las reacciones en A y C. Fuerzas en newtons.



Ahora, para hallar las fuerzas en las barras, los sistemas mecánicos adecuados son los nudos. Imagínese una superficie cerrada alrededor del punto B que delimita el sistema. Asumiendo que las fuerzas en las barras son a tracción, el nudo B será

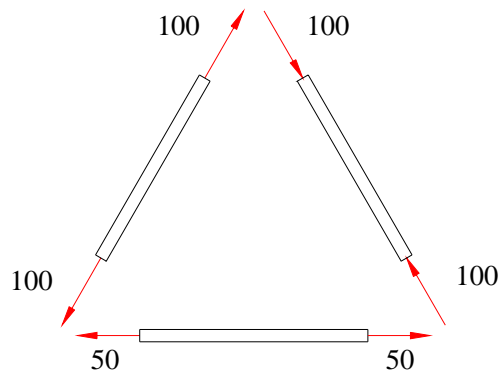


Las fuerzas son concurrentes, de modo que el nudo se trata como una partícula cuyas dos condiciones de equilibrio conducen a

$$F_a = -100 \text{ N}$$

$$F_c = 100 \text{ N.}$$

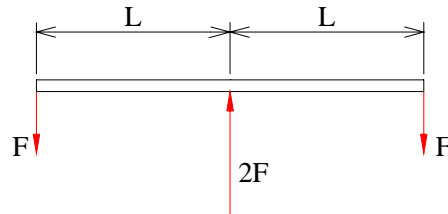
Análogo trabajo con uno de los nudos A o C permite hallar  $F_b = 50$ . Así, las fuerzas en las barras son, en newtons:



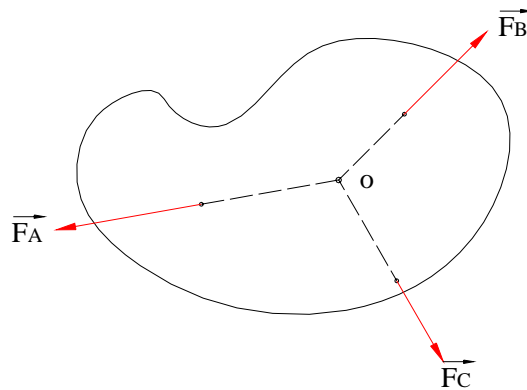
## 8. EJEMPLO

### Cuerpos de tres fuerzas

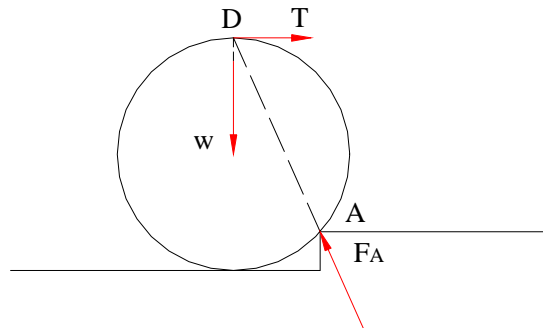
Reviste también interés el cuerpo rígido en equilibrio sometido únicamente a tres fuerzas. En primer lugar, si un cuerpo está en equilibrio bajo la acción de sólo tres fuerzas, no colineales, las fuerzas tienen que ser coplanares, es decir estar en el mismo plano. Mas adelante demostraremos esta proposición. Veamos ahora qué sucede con las fuerzas, ya en un plano. Hay la posibilidad de que las fuerzas sean paralelas. Tal es el caso, por ejemplo, de una balanza de brazos iguales.



Ahora, si las fuerzas no son paralelas, tienen que ser concurrentes, es decir las tres líneas de acción se cortan en un punto. Ya sabemos que las tres fuerzas están en un plano. Como no son paralelas, las líneas de acción de dos de ellas se cortan en un punto  $O$ . Al tomar torques respecto a ese punto, para que la suma de torques se anule, el torque de la tercera fuerza respecto a  $O$  debe ser cero, es decir, su línea de acción debe también pasar por  $O$ .

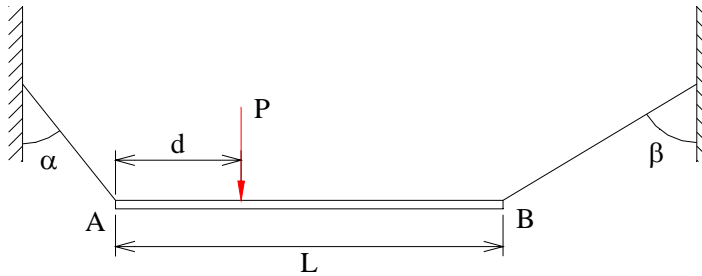


En el problema que ya estudiamos de un cilindro que comienza a subir un escalón, el cilindro es un cuerpo de tres fuerzas.



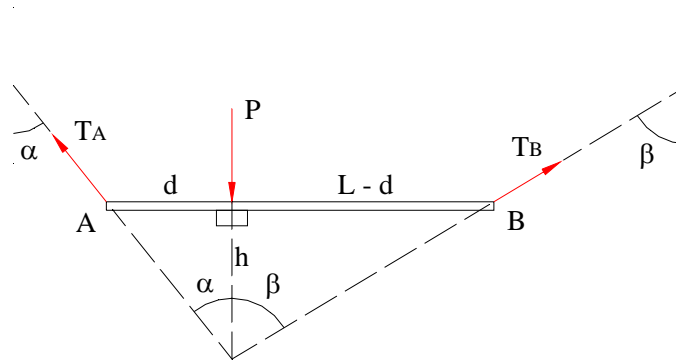
Por esa razón, la línea de acción de la fuerza de contacto en A,  $F_A$ , pasa por el punto D, punto de corte de la tensión T y el peso W.

El uso adecuado de la concurrencia de las tres fuerzas simplifica la solución de diversos problemas. Veamos un ejemplo:



Calcular la distancia d a la cual debe colocarse una carga P sobre una barra de peso propio despreciable, para que esté en equilibrio en posición horizontal, sostenida por dos cuerdas como se muestra en la figura.

La barra AB es un cuerpo de tres fuerzas, la carga P y las tensiones de las cuerdas en los extremos. Esas tres fuerzas son por tanto concurrentes. Así, la línea de acción de la carga P pasa por el punto de corte de las prolongaciones de las cuerdas.



Estudiando los dos triángulos rectángulos vemos que

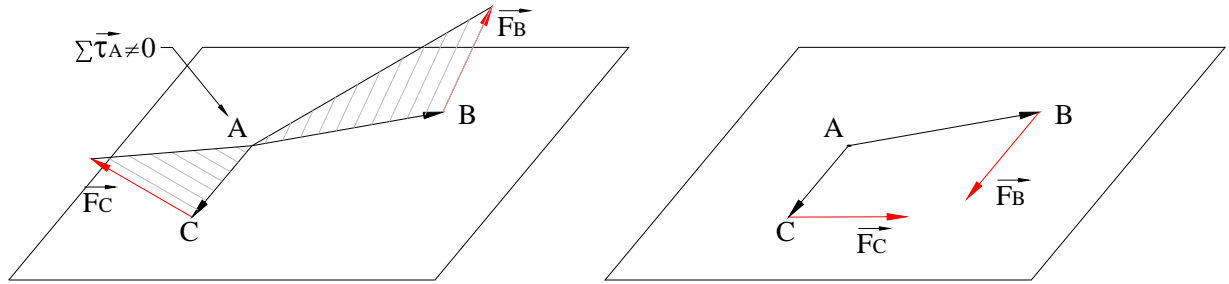
$$h = \frac{d}{\tan \alpha} = \frac{L-d}{\tan \beta},$$

con lo cual,

$$d = \frac{L \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

Dijimos que si sobre un cuerpo en equilibrio actúan sólo tres fuerzas no colineales, las fuerzas son coplanares. En efecto, elijamos tres puntos, cada uno sobre la línea de acción de una

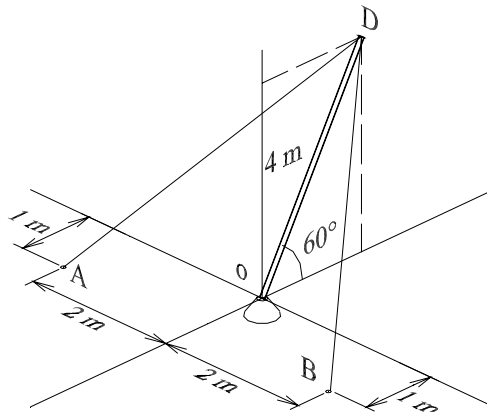
fuerza pero no sobre las líneas de acción de las otras dos. Sean A, B y C esos puntos, correspondientes respectivamente a las líneas de acción de  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$ . Ya que las fuerzas no son colineales, los puntos A, B y C pueden siempre elegirse de modo que determinen un plano. Tomemos torques respecto al punto A. El torque de  $\vec{F}_A$  es nulo y por tanto los torques de  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$  respecto a A tienen igual magnitud y dirección contraria y por ende el plano de A y  $\vec{F}_B$  y el plano de A y  $\vec{F}_C$  deben coincidir.



Si  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$  no están en el plano ABC, esos dos planos no coinciden y la suma de sus torques respecto a A no puede ser cero. Para que esta suma de torques sea cero, la única posibilidad es que  $\vec{F}_B$  y  $\vec{F}_C$  estén en el plano ABC. Para que la suma de fuerzas se anule,  $\vec{F}_A$  debe estar en ese mismo plano ABC, y las fuerzas son por tanto coplanares.

## 9. EJEMPLO

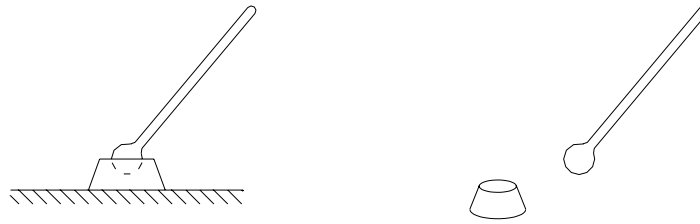
### Un problema tridimensional



La barra OD tiene un peso de 400 N y está apoyada en una articulación esférica en O y sostenida por las dos cuerdas DA y DB. Hallar las tensiones y las componentes de la reacción en O.

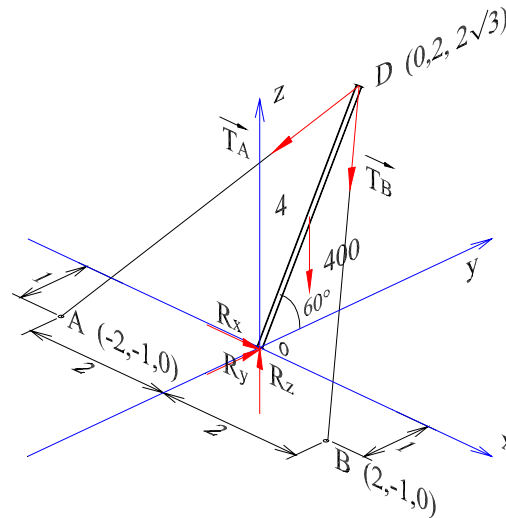
En primer lugar, una articulación esférica permite que la barra gire libremente pero impide que su extremo se traslade. Si el extremo de la barra termina en una pequeña esfera encerrada

en una cuenca esférica lisa, se obtiene una articulación esférica, llamada por esa razón soporte de bola y copa o bola y cuenca



Hay entonces tres componentes de la fuerza de reacción en O pero no hay pares.

El sistema mecánico es la barra. El diagrama de fuerzas y los ejes son, con unidades SI,



Lo conveniente en un problema tridimensional es expresar las fuerzas como vectores, con sus componentes en  $x, y, z$ . Para expresar la tensión  $\vec{T}_A$  se hallan primero las coordenadas de los puntos D y A. Luego se halla el vector unitario  $\hat{u}_{DA}$

$$\hat{u}_{DA} = \frac{\vec{DA}}{|\vec{DA}|} = \frac{-2\hat{i} - 3\hat{j} - 2\sqrt{3}\hat{k}}{5}.$$

El vector  $\vec{T}_A$  es simplemente

$$\vec{T}_A = T_A \hat{u}_{DA} = T_A \left( \frac{-2\hat{i} - 3\hat{j} - 2\sqrt{3}\hat{k}}{5} \right)$$

en donde  $T_A$  es la magnitud de la tensión. De manera análoga se obtiene  $\vec{T}_B$ ,

$$\vec{T}_B = T_B \hat{u}_{DB} = T_B \left( \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} - 2\sqrt{3}\hat{k}}{5} \right).$$

Las ecuaciones vectoriales de equilibrio son

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{\tau} = 0.$$

Comencemos con la suma de torques respecto al punto O. El vector posición de D respecto a O,  $\vec{OD}$  es

$$\vec{OD} = 0\hat{i} + 2\hat{j} + 2\sqrt{3}\hat{k}$$

El peso total está aplicado en el centro de masa C de la barra, con  $\vec{OC} = \frac{\vec{OD}}{2}$ . Así, la suma de torques respecto a O queda

$$\sum \vec{\tau}_o = 0 : \quad \vec{OC} \times \vec{T}_A + \vec{OC} \times \vec{T}_B + \frac{\vec{OC}}{2} \times (-400\hat{k}) = 0,$$

o sea 
$$\vec{OC} \times (\vec{T}_A + \vec{T}_B - 200\hat{k}) = 0,$$

y entonces

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ \frac{2}{5}(T_B - T_A) & -\frac{3}{5}(T_A + T_B) & -\frac{2\sqrt{3}}{5}(T_A + T_B) - 200 \end{vmatrix} = 0.$$

Resultan así tres ecuaciones escalares, pero una de ellas es redundante debido a la simetría del problema. Resulta entonces

$$T_A = T_B = \frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ N}.$$

Con  $\sum \vec{F} = 0$ , se obtienen las reacciones

$$R_x = 0$$

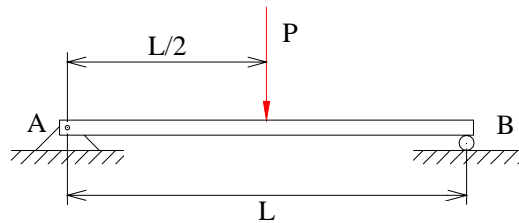
$$R_y = 200\sqrt{3} \text{ N}$$

$$R_z = 800 \text{ N}.$$

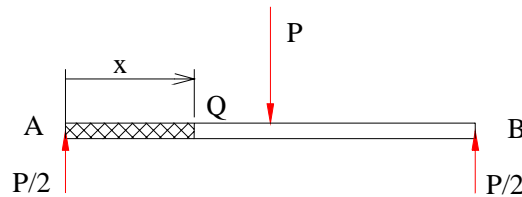
## 10 EJEMPLO

### Equilibrio de un trozo de viga

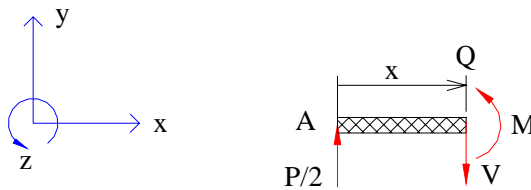
Consideremos una viga simplemente apoyada, de peso propio despreciable, sometida a la acción de una carga vertical  $P$  en su centro.



Las reacciones en A y B valen cada una  $P/2$ , dada la simetría de la viga y de las fuerzas, lo que se comprueba fácilmente tomando torques. De modo que las fuerzas externas sobre el sistema mecánico viga AB, son



Al estar la viga en equilibrio, cualquiera de sus partes estará también en equilibrio. Tomemos un punto Q sobre la viga, a una distancia  $x$  de A. Imaginemos una superficie que corta transversalmente la viga en ese punto y elijamos como sistema mecánico el trozo de viga AQ. En la sección por el punto Q deben existir entonces fuerzas y pares, hechos en la superficie de contacto por el trozo de viga a la derecha de dicho punto y sobre el trozo a la izquierda, que garanticen el equilibrio de AQ.



Se llama fuerza cortante o cizalladura,  $V$ , a la fuerza paralela a la sección de la viga. La condición de equilibrio

$$\sum F_y = 0 : \quad \frac{P}{2} - V = 0$$



muestra que  $V = \frac{P}{2}$ . Ahora, para garantizar el equilibrio del trozo, no basta la cizalladura.

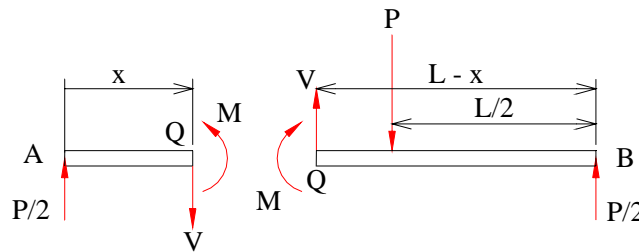
Es necesario un par que equilibre el par formado por  $P/2$  y  $V$ . Dicho par en la sección Q tiene un momento  $M$ , llamado momento flector. La condición de equilibrio,

$$\sum \tau_Q = 0 : \quad M - \frac{P}{2} x = 0,$$

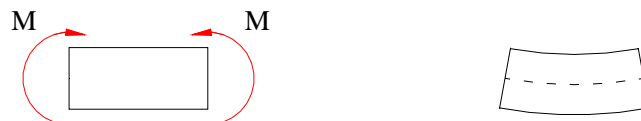
permite ver que

$$M = \frac{Px}{2}.$$

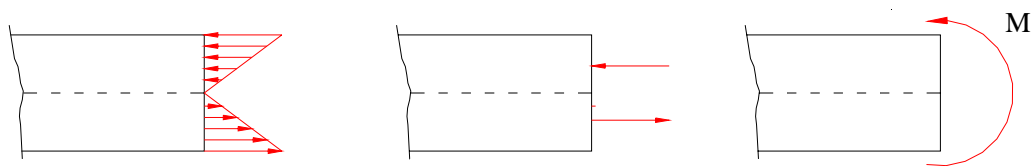
De la tercera ley de Newton, ley de acción y reacción, sabemos que las fuerzas de interacción entre dos cuerpos son de igual magnitud y dirección contraria. Ahora, los pares de interacción, que no son otra cosa que sistemas de fuerzas, obedecen también a la ley de acción y reacción: a un par con un determinado torque o momento, hecho por un cuerpo sobre otro, le corresponde un par con un momento de igual magnitud y dirección contraria hecho por el segundo cuerpo sobre el primero. Así, las fuerzas y pares sobre el trozo de viga QB son



Los valores ya obtenidos de  $V$  y  $M$  pueden cotejarse fácilmente con el equilibrio de QB. Ahora bien, la cizalladura y el par, de torque o momento  $M$ , necesarios para el equilibrio de un trozo de viga, no son otra cosa que el sistema equivalente de un sistema de fuerzas distribuidas de contacto, hechas por un trozo de viga sobre el otro. El estudio detallado de esas fuerzas distribuidas requiere del análisis de las deformaciones de los cuerpos y le corresponde a la mecánica de los cuerpos deformables o de los cuerpos elásticos, pero algunas consideraciones cualitativas son de interés. La cizalladura es la resultante de un sistema de fuerzas paralelas o tangenciales a la sección. Para ver el origen del momento flector, notemos que un pequeño trozo de viga, comprendido entre  $x$  y  $x + \Delta x$ , se deforma bajo la acción del momento flector así:



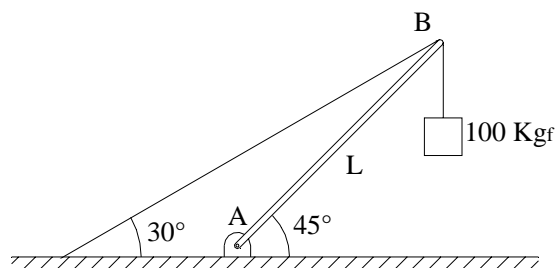
de modo que las fibras superiores de la viga están sometidas a compresión y se acortan, mientras que las fibras inferiores están sometidas a tracción y se alargan.



Esas fuerzas distribuidas normales a la sección, con una zona de compresión y otra de tracción y que pueden ser análogas a las que se ilustran esquemáticamente, tienen como sistema equivalente un par cuyo torque es precisamente el momento flector requerido para el equilibrio del trozo de viga. Digamos también, de modo cualitativo, que una viga de concreto, material con muy pobre resistencia a la tracción, deberá reforzarse con acero precisamente en la zona inferior de tracción. En vigas en voladizo el momento flector tiene dirección contraria y la zona de tracción y el consiguiente refuerzo están en la parte superior.

## PROBLEMAS

1.



Una barra que pesa 30 kgf está articulada en A y sostenida por una cuerda en B. La carga suspendida en B es de 100 kgf. Hallar la tensión en la cuerda y las componentes de la reacción en A. Hallar también el ángulo que forma la reacción resultante en A con la barra.

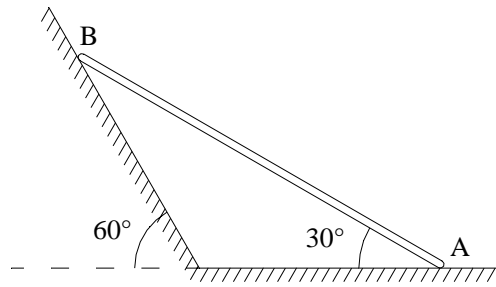
$$T = 314.19 \text{ kgf}$$

$$A_x = 272.09 \text{ kgf}$$

$$A_y = 287.10 \text{ kgf}$$

$$1.54^\circ$$

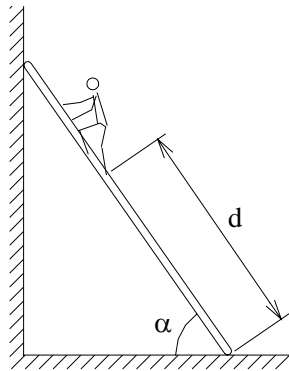
2. Una tabla AB de peso W y longitud L reposa con su extremo B apoyado en una pared inclinada lisa y su extremo A en un piso horizontal rugoso.



Hallar las reacciones necesarias para el equilibrio y el mínimo coeficiente estático de fricción requerido para ello en A.

$$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

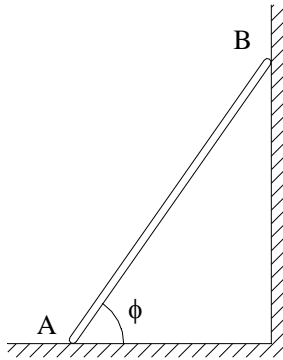
3.



Una escalera de longitud  $L$  está apoyada en una pared vertical lisa y en un piso horizontal rugoso (coeficiente estático de fricción  $\mu$ ). Considerando despreciable el peso de la escalera, halle la máxima distancia  $d$  a la que puede estar el hombre sin que la escalera se deslice.

$$d_{\max} = \mu L \tan \alpha$$

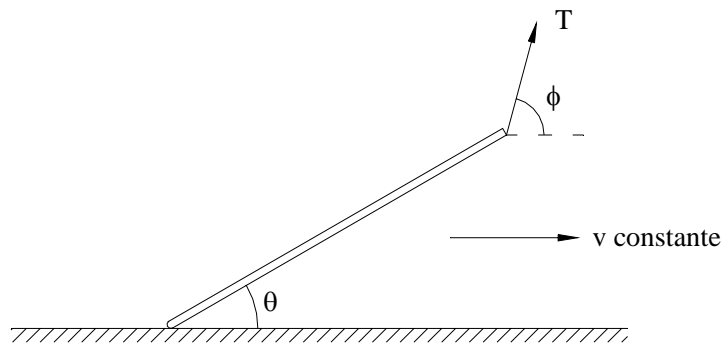
4. Una barra homogénea está apoyada en superficies horizontal y vertical rugosas, con coeficientes estáticos de fricción  $\mu_A$  y  $\mu_B$  respectivamente.



Muestre que la barra está a punto de deslizarse para un ángulo  $\phi$  tal que

$$\tan \phi = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2 \mu_A}.$$

5.

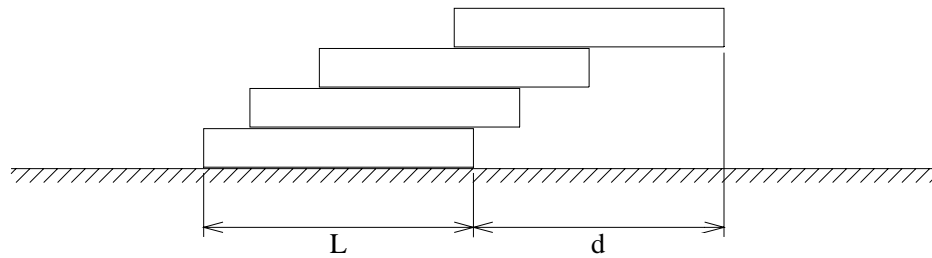


Una varilla de masa  $M$  y longitud  $L$  se mueve con velocidad constante, jalada de un extremo por una cuerda y con el otro extremo deslizando por un piso horizontal rugoso, con coeficiente de fricción  $\mu$ . Mostrar que los ángulos de varilla y cuerda con la horizontal se relacionan así

$$\tan \phi = \frac{1 + 2 \mu \tan \theta}{\mu}.$$

**Sugerencia:** Marco inercial moviéndose respecto al piso con  $v$ , respecto al cual la varilla está en reposo.

6.

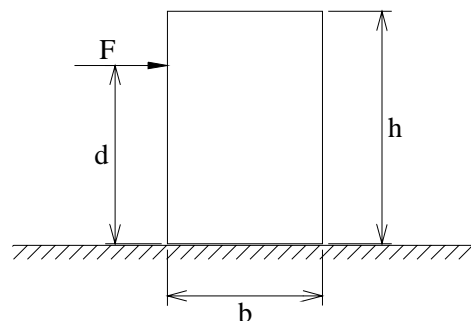


Cuatro bloques rectangulares iguales se colocan uno encima del otro, de modo que cada bloque sobresale la máxima distancia posible respecto al inferior, sin perder el equilibrio. Hallar  $d$ .

**Sugerencia:** Estudiar el centro de gravedad del bloque superior. Luego el de dos bloques y así.

$$d = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11L}{12}$$

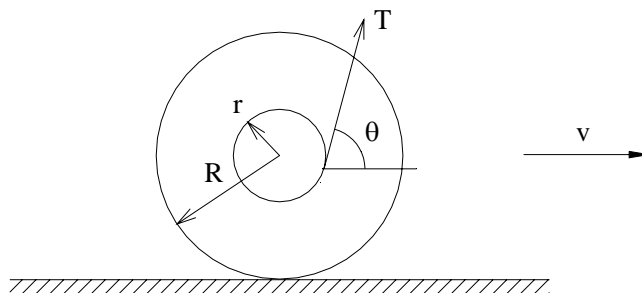
7.



Un bloque rectangular descansa sobre una superficie horizontal rugosa. A una altura  $d$  se le aplica una fuerza horizontal  $F$  que comienza a aumentar gradualmente desde cero. Si el coeficiente estático de fricción es  $1/2$ , ¿el bloque comienza primero a deslizar o a volcar?

Desliza si  $d > b$

8.

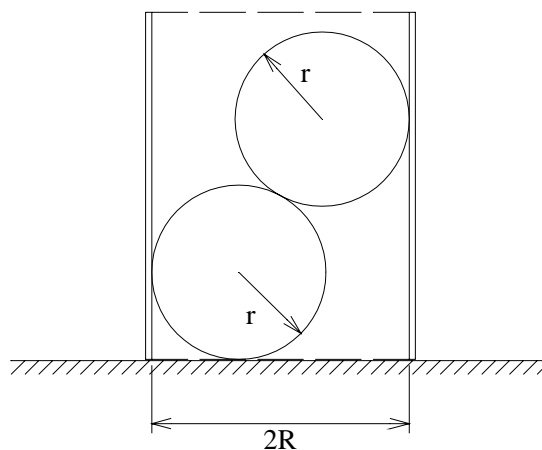


Mediante la cuerda enrollada en su eje interior de radio  $r$ , se jala un yo-yo de radio exterior  $R$ , de modo que desliza con velocidad constante y sin rotación, por un piso horizontal rugoso. Hallar el ángulo  $\theta$  que forma la cuerda con la horizontal.

**Sugerencia:** Marco inercial moviéndose con  $v$ . Torques respecto al punto de contacto. Geometría.

$$\cos \theta = \frac{r}{R}$$

9.



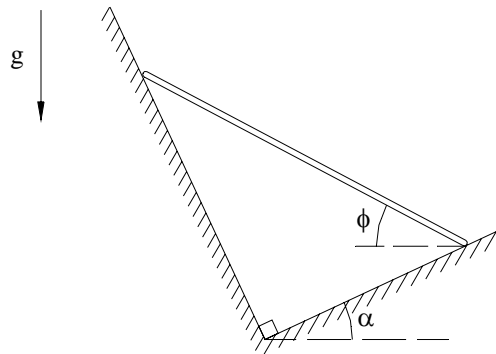
Dentro de un tubo cilíndrico de radio  $R$  y peso  $P$ , se colocan dos esferas iguales, cada una de peso  $W$  y radio  $r = \frac{2R}{3}$ , como se muestra en la figura. Asumiendo superficies lisas hallar:

- las fuerzas hechas por el cilindro sobre las esferas,
- la fuerza entre las esferas,
- el peso mínimo del cilindro para no volcarse.

**Sugerencia:** Sistemas: las dos esferas como un solo cuerpo; una de las esferas; el cilindro.

- a)  $\frac{W\sqrt{3}}{3}$   
 b)  $\frac{2W\sqrt{3}}{3}$   
 c)  $\frac{2W}{3}$

10.



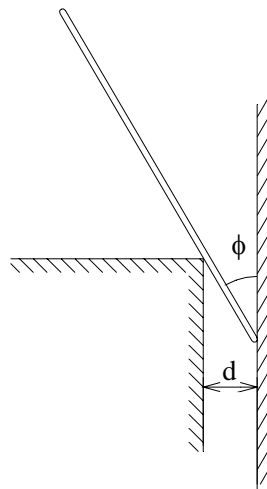
Hallar el ángulo de equilibrio,  $\phi$ , de una tabla homogénea apoyada en dos superficies lisas que forman ángulo recto entre sí, y situadas como indica la figura.

**Sugerencia:** el uso de  $\sin 2\alpha$  y  $\cos 2\alpha$  al final del álgebra puede facilitar las cosas.

Resultado:  $\phi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ , que cumple bien el caso simétrico de chequeo,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,

$\phi = 0$ , como debe ser.

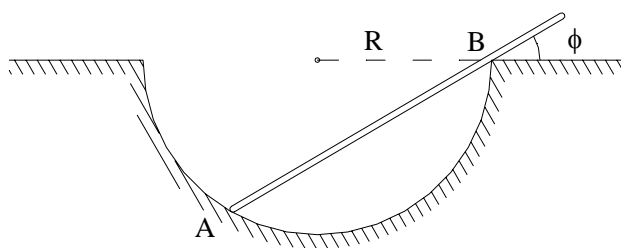
11.



Una varilla de longitud  $L$  está apoyada en una pared vertical y en la esquina de una mesa a una distancia  $d$  de la pared. Si los apoyos son completamente lisos, hallar el ángulo  $\phi$  de equilibrio.

$$\sin^3 \phi = \frac{2d}{L}$$

12.



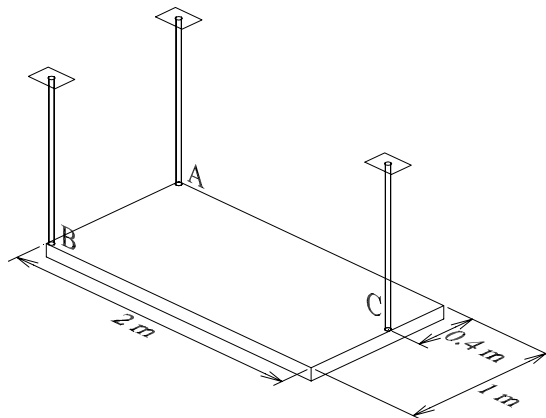
Hallar el ángulo  $\phi$  en el que una varilla de longitud  $L$  reposa en equilibrio en una cuenca semiesférica de radio  $R$ , si las superficies son completamente lisas. Hallar las longitudes máxima y mínima para que un equilibrio así sea posible, ¿a qué valores de  $\phi$  corresponden?

**Sugerencia:** Muestre que el ángulo de  $N_A$  con la horizontal es  $2\phi$ .

Resultado: con  $\lambda = \frac{L}{4R}$ ,  $\cos \phi = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8}}{4}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} < \lambda < 1, \quad 35.26^\circ > \phi > 0.$$

13.

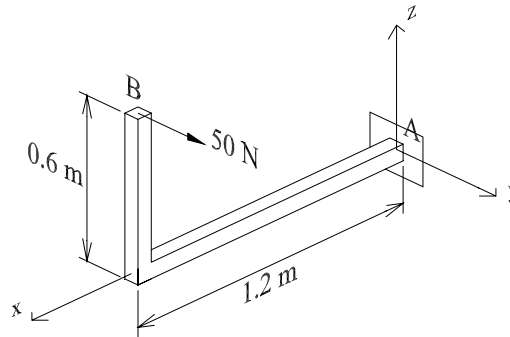




Una lámina de 500 N de peso se encuentra en un plano horizontal, sostenida por tres cuerdas verticales como se indica. Hallar las tensiones en las cuerdas.

$$T_A = 100 \text{ N}, T_B = 150 \text{ N}, T_C = 250 \text{ N}$$

14.

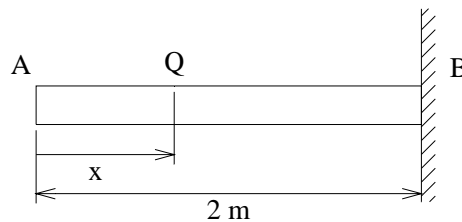


Una barra en forma de L, de 100 N de peso, está empotrada en un muro vertical en A como se muestra. Hallar las reacciones en A.

**Sugerencia:** Hallar el centro de masa de la barra en L. En el empotramiento hay tres fuerzas y tres pares.

$$A_x = 0, A_y = -50 \text{ N}, A_z = 100 \text{ N}, M_{Ax} = 30 \text{ N m}, M_{Ay} = -80 \text{ N m}, M_{Az} = -60 \text{ N m}$$

15.



Una viga en voladizo, empotrada en B, tiene una longitud de 2 m y un peso propio de 500 N/m. Hallar las reacciones en B. Hacer los diagramas de fuerzas de los trozos AQ y QB. Hallar la cizalladura y el momento flector en la sección Q.

$$V = 500 x$$

$$M = 250 x^2$$

## CAPITULO 8. MOMENTUM ANGULAR. ROTACIÓN CON EJE FIJO

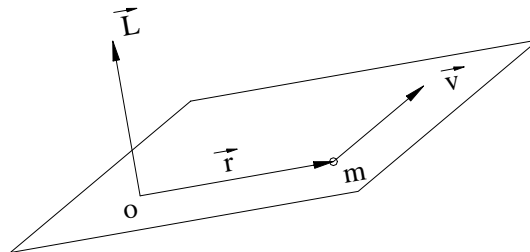
### 8.1 MOMENTUM ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Consideremos una partícula de masa  $m$  que se mueve respecto a un determinado marco de referencia. Respecto a dicho marco, la partícula tiene una velocidad  $\vec{v}$  y un momentum o cantidad de movimiento  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Elijamos también un punto  $O$ , fijo en el marco de referencia, y respecto al cual la posición de la partícula es  $\vec{r}$ . Se llama **momentum angular** de una partícula respecto a un punto  $O$ , fijo en un determinado marco de referencia, al producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{p}$ , escrito  $\vec{L}$ .

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}}.$$

En ocasiones es importante indicar explícitamente el punto  $O$  respecto al cual se calcula el momentum angular y se escribe entonces  $\vec{L}_O$ . Así como el torque de una fuerza respecto a un punto, producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{F}$ , es el momento de la fuerza, el momentum angular,  $\vec{r} \times \vec{p}$ , es el momento del momentum respecto al punto  $O$ . A veces se dice entonces momento de la cantidad de movimiento, o también momento angular o momento cinético.

En cada instante los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  determinan un plano y el momentum angular es un vector perpendicular a ese plano según la regla de la mano derecha.



Las dimensiones del momentum angular son

$$[L] = ML^2 T^{-1},$$

y su unidad en el Sistema Internacional, SI, que no tiene nombre especial, es el  $kg m^2 s^{-1}$ .

La razón por la cual se introduce el momentum angular está en la relación que tiene con el torque. Veamos. Consideremos el momentum angular respecto a un marco, ahora inercial, de referencia. Derivemos respecto al tiempo como un producto, con  $m$  constante:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m \vec{v} \times \vec{v} + m \vec{r} \times \vec{a}. \end{aligned}$$

Ahora, el producto vectorial  $\vec{v} \times \vec{v}$  se anula, ya que el ángulo que forman sus vectores es cero. Como, de acuerdo a la segunda ley de Newton,  $\vec{F} = m \vec{a}$ , siendo  $\vec{F}$  la fuerza neta o total que actúa sobre la partícula, tendremos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F},$$

pero  $\vec{r} \times \vec{F}$  es el torque de la fuerza neta respecto al punto O, y así,

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}.$$

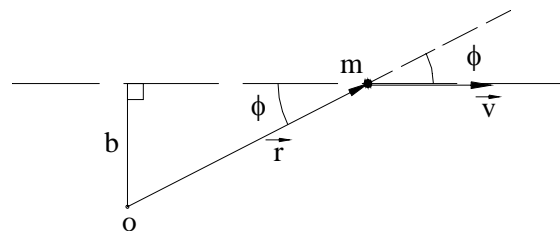
La derivada temporal del momentum angular de una partícula respecto a un punto O fijo en un marco inercial, es igual al torque de la fuerza neta que actúa sobre la partícula, respecto al mismo punto O.

Una aplicación importante del momentum angular de una partícula está en el estudio del movimiento bajo la acción de una fuerza central. Sin embargo, nuestro propósito fundamental ahora es el estudio de las rotaciones más sencillas de un cuerpo rígido, para lo cual debemos presentar primero el momentum angular de un sistema de partículas. Antes de ello, ilustraremos en los ejemplos el cálculo del momentum angular de una partícula en casos de importancia para dicho propósito. No obstante, consideraremos en un ejemplo algunas características notables del momentum angular en el movimiento bajo fuerzas centrales, posponiendo, eso sí, su estudio más detallado.

## 1. EJEMPLO

### Momentum angular de una partícula en movimiento rectilíneo

Como la definición de momentum angular es análoga a la de torque, hay en su cálculo analogías con el cálculo del torque. Podemos también asociar una dirección de giro en el plano perpendicular a  $\vec{L}$ , según la regla de la mano derecha. Situémonos en el plano determinado por O y por la recta de la trayectoria.



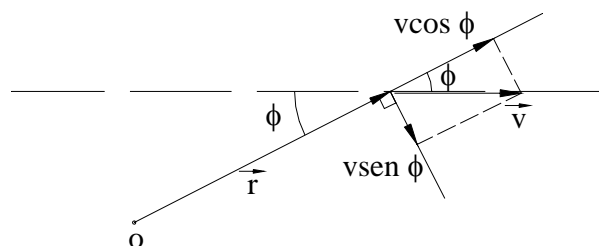
Veamos primero la magnitud de  $\vec{L}_O$ . Según la definición geométrica del producto vectorial,

$$|\vec{L}_o| = L_o = m r v \sin \phi ,$$

siendo  $\phi$  el ángulo formado entre  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ , ángulo que se ve fácilmente llevando los vectores a un origen común, por ejemplo en el punto en el cual está  $m$ . Ahora, si trazamos la perpendicular desde  $O$  hasta la recta de la trayectoria, obtenemos una distancia  $b$ , análoga al brazo en el caso del torque, de modo que, como se ve fácilmente en el triángulo rectángulo,  $b = r \sin \phi$ , y así la magnitud del momentum angular es

$$L_o = m b v .$$

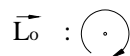
Otra manera importante de calcular  $L_o$  se obtiene descomponiendo el vector velocidad en dirección de  $\vec{r}$ , llamada componente radial, y en dirección perpendicular a  $\vec{r}$ , llamada componente transversal.



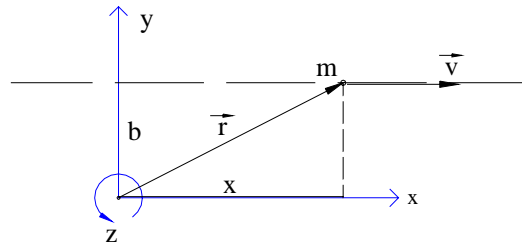
La componente radial,  $v \cos \phi$ , pasa por  $O$  y no contribuye al momentum angular. La magnitud de  $L_o$  es simplemente  $m r$  por la velocidad transversal  $v \sin \phi$

$$L_o = m r (v \sin \phi) .$$

La dirección de  $\vec{L}_o$ , vector perpendicular al plano de  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  que hemos representado, se determina con la regla de la mano derecha. Llévense los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  a un origen común y hágase el consabido giro de los dedos de la mano derecha para que el pulgar determine la dirección de  $\vec{L}_o$ . En este caso  $\vec{L}_o$  es un vector que entra al papel, vector al cual podemos asociarle una dirección de giro representada en el plano, según la mano derecha:



Esta dirección de giro asociada se ve con claridad, en analogía con la dirección del momento de una fuerza, en los dos enfoques que dimos al cálculo de  $L_o$ . Aún otra manera, potente, de calcular  $\vec{L}_o$ , se obtiene mediante la elección de unos ejes y la expresión de los vectores en componentes.

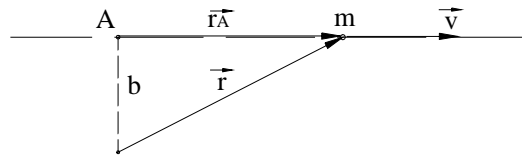


$$\vec{r} = x \hat{i} + b \hat{j}$$

$$\vec{v} = v \hat{i}$$

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & b & 0 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = -m v b \hat{k},$$

que es, obviamente, el mismo resultado que ya obtuvimos. El momentum angular depende del punto respecto al cual se calcule. Si, en el mismo marco de referencia, calculamos el momentum angular respecto al punto fijo A,



$$\vec{L}_A = m \vec{r}_A \times \vec{v} = 0$$

pues los vectores  $\vec{r}_A$  y  $\vec{v}$  son colineales. Nótese que la velocidad es la misma, pues el marco de referencia es el mismo:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A,$$

ya que

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{r}_A$$

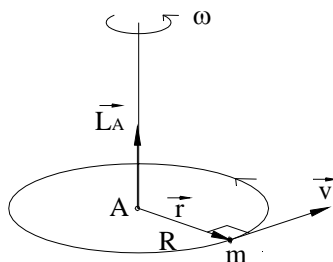
y el vector  $\vec{OA}$  es constante.

## 2. EJEMPLO

### Partícula en movimiento circular

Sea una partícula de masa  $m$  que se mueve en un círculo de radio  $R$ .

- Calculemos en primer lugar el momentum angular de la partícula respecto al centro del círculo, A.

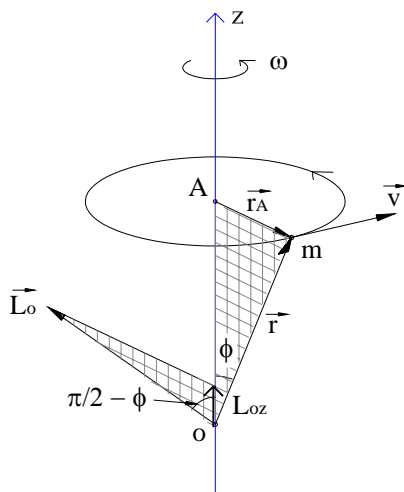


Recordemos que si  $\omega$  es la velocidad angular,  $v = \omega R$ . Como  $\vec{r}$  es perpendicular a  $\vec{v}$  y además  $|\vec{r}| = R$ , la magnitud del momentum angular respecto al punto A, fijo en un marco de referencia ligado al círculo, es

$$L_A = m R v \sin \frac{\pi}{2} = m R^2 \omega.$$

La dirección de  $\vec{L}_A$  es perpendicular al plano determinado por  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ , es decir al plano del círculo, según la regla de la mano derecha.  $\vec{L}_A$  es por tanto un vector de dirección constante, como se muestra en la figura.

- b) Calculemos ahora el momentum angular de la misma partícula en movimiento circular, pero ahora respecto a un origen O situado sobre el eje perpendicular al plano del círculo por su centro.

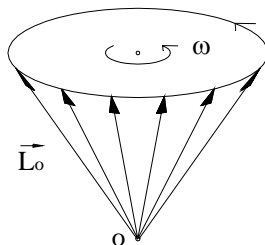


Como  $\vec{r} \perp \vec{v}$ , la magnitud de  $\vec{L}_O$  es

$$|\vec{L}_O| = L_O = m r v \sin \frac{\pi}{2} = m r \omega R.$$

En cuanto a la dirección,  $\vec{L}_O$ , al ser perpendicular al plano de  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ , se encuentra entonces en el plano de  $\vec{r}$  y OA, plano sombreado en la figura, y dentro del cual forma un ángulo de

$\pi/2$  con  $\vec{r}$ . Así, el ángulo de  $\vec{L}_O$  con el eje OA es de  $\frac{\pi}{2} - \phi$ . Como el plano sombreado en el que se encuentra  $\vec{L}_O$  va rotando a medida que la partícula describe su movimiento circular, el momentum angular es un vector de dirección variable, que rota manteniéndose sobre un cono de ángulo  $\frac{\pi}{2} - \phi$ . Si tomamos el caso particular  $\omega$  constante, la magnitud de  $\vec{L}_O$  es constante y el movimiento de  $\vec{L}_O$  puede representarse así



La componente de  $\vec{L}_O$  sobre el eje de rotación OA, que llamaremos eje  $z$ , es

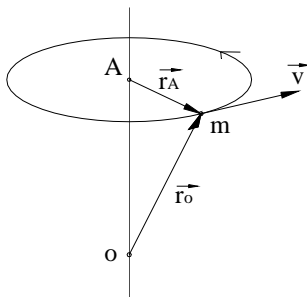
$$L_{oz} = L_o \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = m r \omega R \sin \phi ,$$

que, con  $r \sin \phi = R$ , es entonces

$$L_{oz} = m R^2 \omega .$$

Aunque el momentum angular  $\vec{L}_O$  es de cierta complejidad, su componente sobre el eje de rotación se obtiene mediante una expresión sencilla que no depende de la localización precisa del punto O sobre el eje. Esta componente del momentum angular nos servirá de base para el estudio de la rotación de un sistema de partículas y en especial de un cuerpo rígido, respecto a un eje fijo.

Como puede verse comparando los cálculos de  $\vec{L}_A$  y  $\vec{L}_O$ , el momentum angular depende drásticamente de la localización del punto respecto al cual se calcula. Ambos puntos, A y O, son puntos fijos en el mismo marco de referencia, que puede ser, por ejemplo, el laboratorio, marco inercial localmente ligado a tierra.



Es importante comprender que si establecemos un marco de referencia y elegimos en él dos puntos fijos, como A y O, los vectores posición de la partícula m,  $\vec{r}_A$  y  $\vec{r}_O$ , son diferentes, pero la velocidad de la partícula respecto al marco de referencia es la misma, es única. En efecto,

$$\vec{r}_O = \vec{OA} + \vec{r}_A ,$$

y, como  $\vec{OA}$  es constante, el derivar respecto al tiempo,

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_O = \dot{\vec{r}}_A .$$

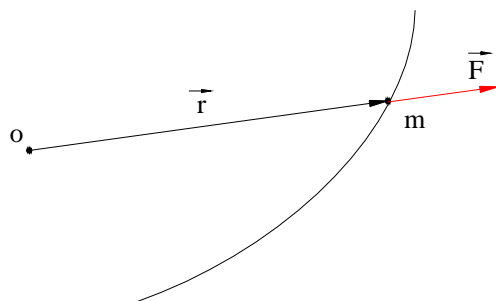
En nuestro ejemplo, la variación en el momentum angular  $\vec{L}_O$  respecto a  $\vec{L}_A$  se debe pues, dentro del mismo marco de referencia, a la variación de  $\vec{r}$ , ya que  $\vec{v}$  es la misma.

Así pues, para calcular el momentum angular, se requiere la determinación precisa del marco de referencia, respecto al cual se da la velocidad, y, dentro de ese marco de referencia, del punto respecto al cual se da el vector posición.

### 3. EJEMPLO

#### Fuerzas centrales

Recordemos que una fuerza central es una fuerza dirigida siempre a un punto fijo, que elegiremos como origen O, y cuya magnitud sólo depende de la distancia radial r desde dicho punto O.



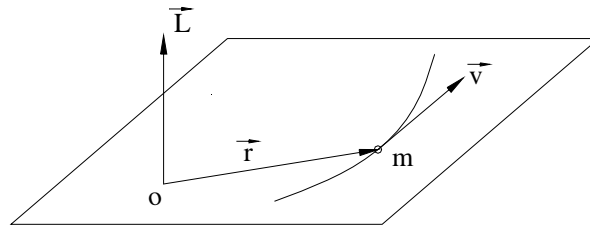
Si la única fuerza que actúa sobre una partícula es una fuerza central, como el ángulo formado entre  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  es cero en cualquier instante, el torque de  $\vec{F}$  respecto a O se anula y así

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 ,$$

y por tanto el momentum angular  $\vec{L}$  es constante durante el movimiento de la partícula. Esta es una primera aplicación de la **conservación del momentum angular**, que, junto a las conservaciones del momentum y la energía, ocupa lugar eminente en la física. El vector momentum angular es constante tanto en magnitud como en dirección. El hecho de que la

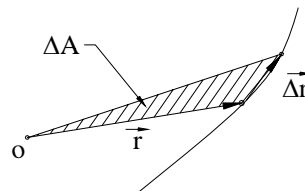


dirección de  $\vec{L}$  sea constante, tiene una consecuencia sencilla y notable. Veamos:  $\vec{L}$  es siempre perpendicular al plano formado por  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ . Como la dirección de  $\vec{L}$  es constante, dicho plano es entonces un plano fijo por el punto O y en el cual el extremo del vector  $\vec{r}$  describe la trayectoria.



La trayectoria es así una curva plana, enteramente contenida en un plano que pasa por el centro de fuerzas O y que es perpendicular a la dirección constante de  $\vec{L}$ .

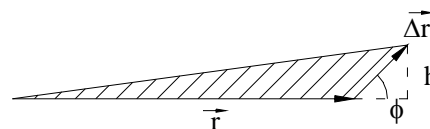
Miremos de frente ese plano para estudiar un poco la magnitud del momentum angular.



Consideremos el pequeño triángulo formado por  $\vec{r}$  y por el desplazamiento  $\Delta\vec{r}$  a un punto próximo por la trayectoria. El área  $\Delta A$  de ese triángulo puede expresarse como

$$\Delta A = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \Delta\vec{r} \right|.$$

En efecto, si  $\phi$  es el ángulo entre  $\vec{r}$  y  $\Delta\vec{r}$



$$\frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \Delta\vec{r} \right| = \frac{1}{2} r \Delta r \sin \phi = \frac{1}{2} r h,$$

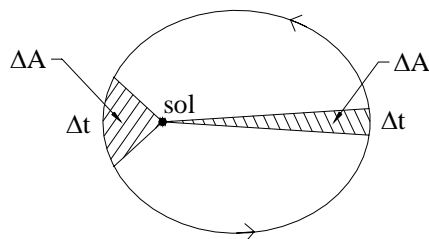
un medio de base por altura, área del triángulo. Si ahora dividimos por  $\Delta t$ , en el límite tendremos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \frac{|\vec{L}|}{m},$$

y así, como la magnitud del momentum angular es constante,

$$\frac{dA}{dt} = \text{constante}.$$

Esta es la Ley de las Áreas: “En tiempos iguales el radio vector barre áreas iguales”, ley que fue originalmente enunciada por Kepler como la segunda ley del movimiento planetario y cuya validez hemos mostrado para cualquier movimiento bajo una fuerza central. El movimiento en un planeta sometido a la fuerza de atracción gravitacional del sol es un caso muy importante de movimiento bajo una fuerza central.



La primera ley de Kepler establece que la órbita es elíptica con el sol en un foco. La segunda determina una característica importante de la manera como se recorre en el tiempo dicha órbita: en intervalos de tiempo iguales, el radio vector que va del sol al planeta “barre” áreas iguales, matemáticamente:  $\Delta A = \text{constante} \times \Delta t$ .

Desde nuestro punto de vista, la ley de las áreas es una consecuencia de la conservación del momentum angular en el movimiento de una partícula sometida a una fuerza central.

## 8.2 MOMENTUM ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Una partícula de masa  $m$  que se mueve respecto a un marco inercial de referencia, está caracterizada por tres cantidades dinámicas fundamentales, momentum, momentum angular y energía cinética.

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m \vec{v} \\ \vec{L} &= m \vec{r} \times \vec{v} \\ K &= \frac{1}{2} m v^2. \end{aligned}$$

Ahora, una partícula tiene interacciones con su entorno y las acciones sobre ella se manifiestan como la fuerza, el torque y el trabajo netos. Las relaciones fundamentales de la

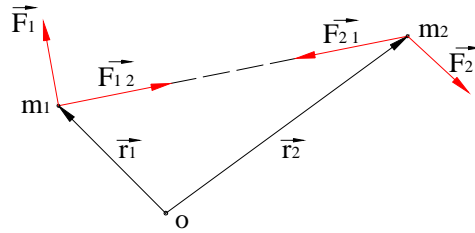
dinámica de una partícula vinculan esas magnitudes dinámicas que caracterizan su movimiento, con estas magnitudes que cuantifican las acciones ejercidas sobre ella.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \dot{\vec{p}} = m \vec{a} \\ \vec{\tau} &= \dot{\vec{L}} \\ W &= \Delta K.\end{aligned}$$

$\vec{\tau}$  y  $\vec{L}$  se calculan respecto al mismo punto, fijo en el marco inercial de referencia.

La primera de estas relaciones,  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ , segunda ley de Newton, ha sido la relación básica de la que hemos derivado las otras dos, pero en esta síntesis de la dinámica las presentamos en un pie de igualdad.

Ya conocemos el momentum y la energía cinética de un sistema de partículas. Para completar el panorama de la dinámica, nos resta presentar el momentum angular. Consideremos un sistema de dos partículas, de modo análogo al que planteamos al estudiar el momentum y la energía cinética, con  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ , fuerzas externas y  $\vec{F}_{12}$ ,  $\vec{F}_{21}$ , fuerzas internas.



Aplicaremos a cada partícula la relación básica del momentum angular, respecto a un marco inercial de referencia con un punto  $O$  fijo en él.

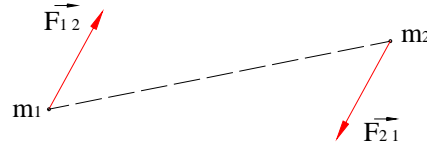
$$\vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$$

$$\vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \frac{d\vec{L}_2}{dt}.$$

Sumando, teniendo en cuenta que, de acuerdo a la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  y con  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , tenemos

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{21} \times \vec{F}_{21} = \frac{d}{dt} (\vec{L}_1 + \vec{L}_2).$$

El torque externo total sobre el sistema,  $\vec{\tau}_{\text{ext}}$ , suma de los torques de las diversas fuerzas externas, es  $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$ . El momentum angular del sistema es  $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ . Miremos con detalle el término  $\vec{r}_{21} \times \vec{F}_{21}$ . La tercera ley de Newton establece que las fuerzas de interacción entre  $m_1$  y  $m_2$  son de igual magnitud y dirección contraria. Ahora bien, esto podría perfectamente cumplirse sin que esas fuerzas tuviesen que estar a lo largo de la línea que une  $m_1$  a  $m_2$ . Es decir, en principio esas fuerzas podrían ser así



Aún con las fuerzas así, en la ecuación del momentum del sistema se cancelarían las fuerzas internas. Pero el torque interno no se cancelaría: esas dos fuerzas formarían un par interno. Ahora bien, lo usual, lo que haremos, es asumir una versión más restrictiva, más fuerte, de la tercera ley, suponiendo que esas fuerzas de interacción entre las dos partículas no sólo son de igual magnitud y dirección contraria, sino que están a lo largo de la línea que une las partículas. Es decir, son fuerzas centrales. En ese caso, los vectores  $\vec{r}_{21}$  y  $\vec{F}_{21}$  son colineales y el torque de las fuerzas internas,  $\vec{r}_{21} \times \vec{F}_{21}$ , se cancela. La suma que habíamos planteado para el sistema queda entonces

$$\boxed{\vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}},$$

relación válida respecto a un marco inercial de referencia, en el cual hay fijo un punto O para el cálculo tanto del torque como del momentum angular.

Esa relación que hemos demostrado para un sistema de dos partículas, se cumple también en general para un sistema de N partículas, ya que, con la tercera ley como la hemos asumido, los torques de las fuerzas internas se anulan por parejas de fuerzas. El momentum angular del sistema será

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.$$

En las relaciones fundamentales para el momentum y el momentum angular de un sistema de partículas sólo figuran las fuerzas externas y los torques externos. Esto lo hemos recalado escribiendo  $\vec{F}_{\text{ext}}$  y  $\vec{\tau}_{\text{ext}}$ . En lo sucesivo omitiremos usualmente esos subíndices, de modo que esas relaciones básicas se escriben, de modo muy compacto, así:

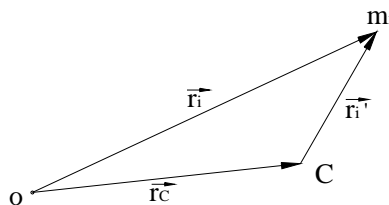
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= \dot{\vec{P}} \\ \vec{\tau} &= \dot{\vec{L}}. \end{aligned}}$$

Esas relaciones, que se escriben de manea tan simple y simétrica, son de gran alcance y de un contenido enorme. Son aplicables tanto a sistemas discretos de partículas como a cuerpos continuos, rígidos o deformables. Fueron enunciadas por Euler y bien podrían llamarse las leyes eulerianas de la mecánica. En la presentación introductoria que estamos haciendo de ellas, hemos demostrado que las fuerzas internas y los torques internos del sistema se anulan, basándonos en la tercera ley de Newton y mostrando que se anulan por parejas. Pero, pensemos por ejemplo en el caso de un cuerpo rígido continuo, ¿cuáles son esas parejas y qué tipo de interacción tienen? Eso no es claro. Por ello, la anulación de fuerzas y torques internos se estudia a la luz de otras consideraciones, notablemente de la homogeneidad e isotropía del espacio. En diversos estudios de mecánica, simplemente se toman esas relaciones básicas del momentum y el momentum angular como postulados, como punto de partida.

Como vimos antes, si la suma de fuerzas externas se anula, el momentum del sistema se conserva. Análogamente, si la suma de torques externos respecto a un punto es cero, el momentum angular del sistema respecto a dicho punto es constante, lo que constituye la importante **ley de conservación del momentum angular**, que, con las leyes de conservación del momentum y de la energía, es uno de los principios básicos de la física, principios que trascienden el ámbito de la mecánica clásica y que tienen validez en toda la física. Como el momentum angular es un vector, puede conservarse su componente respecto a un determinado eje si la componente del torque externo neto respecto a dicho eje se anula.

Cuando estudiamos el momentum y la energía cinética de un sistema de partículas, presentamos un marco de referencia llamado el marco de referencia del centro de masa. Es un marco que se traslada, sin rotar, respecto a un marco inercial, con la velocidad del centro de masa. El centro de masa  $C$  es entonces un punto fijo en ese marco en traslación. Este marco de referencia del centro de masa es de gran importancia y en el estudio de las rotaciones adquiere particular relieve. Si el centro de masa se mueve con vector velocidad constante respecto a un marco inercial, el marco del centro de masa será también inercial. Pero no lo será si  $C$  tiene aceleración.

Consideremos un marco inercial de referencia y un punto  $O$  fijo en él. Consideremos además el marco del centro de masa en el cual  $C$  es un punto fijo, marco que, insistamos, se traslada sin rotar respecto al inercial, con velocidad  $\vec{v}_c$ . En un sistema de partículas, la partícula de masa  $m_i$  tiene una posición y una velocidad dadas por



$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i',$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'.$$

Habíamos mostrado en el numeral 6.5, al estudiar el momentum y la energía de un sistema de partículas, que  $\vec{P}$ , momentum del sistema, es

$$\vec{P} = M \vec{v}_c + \vec{P}' = M \vec{v}_c$$

ya que  $\vec{P}' = \sum m_i \vec{v}_i = 0$ , siendo  $\vec{P}'$  momentum del sistema respecto al marco del centro de masa, y que  $K$ , energía cinética del sistema, es

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K',$$

con  $K' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ , energía cinética del sistema respecto al marco del centro de masa.

Análogamente se obtiene

$$\vec{L} = M \vec{r}_c \times \vec{v}_c + \vec{L}',$$

donde  $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$  es el momentum angular respecto al marco inercial, en el cual 0 es un punto fijo, y  $\vec{L}' = \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i'$  es el momentum angular respecto al marco en traslación del centro de masa, en el cual C es un punto fijo. Basta en efecto remplazar  $\vec{r}_i$  y  $\vec{v}_i$  en  $\vec{L}$ , desarrollar los productos, y tener en cuenta que la posición y velocidad del punto C respecto al marco C son nulas,  $M \vec{r}'_c = 0 = \sum m_i \vec{r}_i'$ ,  $M \vec{v}'_c = 0 = \sum m_i \vec{v}_i'$ .

Consideremos el conjunto o sistema de fuerzas externas que actúa sobre el sistema de partículas. Sea  $\vec{\tau}$  el torque neto de esas fuerzas externas respecto al punto 0 y sea  $\vec{\tau}'$  el torque neto de esas mismas fuerzas externas pero respecto al centro de masa C. Al estudiar los sistemas equivalentes de fuerzas, numeral 7.3, mostramos como se relacionan los torques de un conjunto o sistema de fuerzas respecto a dos puntos diversos:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}' + \vec{r}_c \times \vec{F},$$

siendo  $\vec{F}$  la fuerza neta o resultante del sistema de fuerzas externas, es decir, en este caso,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_c,$$

con lo cual

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}' + M \vec{r}_c \times \vec{a}_c.$$

La relación fundamental del momentum angular respecto a un marco inercial y a un punto O fijo en él es

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Remplazando a  $\vec{\tau}$  y a  $\vec{L}$ ,

$$\vec{\tau}' + M \vec{r}_c \times \vec{a}_c = \frac{d}{dt} (M \vec{r}_c \times \vec{v}_c + \vec{L}'),$$

teniendo en cuenta que  $\vec{v}_c \times \vec{v}_c = 0$ , se llega inmediatamente a

$$\vec{\tau}' = \frac{d\vec{L}'}{dt}.$$

Es decir, la relación fundamental del momentum angular y los torques para un sistema de partículas es válida respecto al marco de referencia del centro de masa, tomando tanto el torque como el momentum angular respecto al centro de masa C fijo en dicho marco. Y esa relación fundamental es válida independientemente de que dicho marco se traslade con velocidad  $\vec{v}_c$  constante y sea inercial, o se traslade con aceleración  $\vec{a}_c$  y no sea inercial. En

eso hay una diferencia importante con la relación  $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ , únicamente válida respecto a un marco inercial y un punto O fijo en él. En el resultado que hemos mostrado radica la importancia del marco C para el estudio de las rotaciones, en particular de un cuerpo rígido, como luego veremos.

Estamos ahora en condiciones de hacer una síntesis de la dinámica de un sistema de partículas. Sea un marco inercial de referencia y un punto O fijo en él. Un sistema de partículas en movimiento respecto a dicho marco, está caracterizado por tres magnitudes dinámicas, el momentum  $\vec{P}$ , el momentum angular  $\vec{L}$  y la energía cinética K. Si se trata de un sistema discreto de partículas:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum m_i \vec{v}_i \\ \vec{L} &= \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ K &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2. \end{aligned}$$

Si es un cuerpo continuo:

$$\vec{P} = \int \vec{v} \, dm$$

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} \, dm$$

$$K = \int \frac{1}{2} v^2 \, dm.$$

Desde el punto de vista de las interacciones, hay en un sistema de partículas interacciones internas y externas. Los cambios del momentum y del momentum angular, sólo tienen que ver con la fuerza externa total,  $\vec{F}$ , y el torque externo total,  $\vec{\tau}$ , calculado respecto al mismo punto 0 que  $\vec{L}$ . En cambio, en la energía cinética, en general, importan tanto el trabajo de las fuerzas externas,  $W_{\text{ext}}$ , como el de las internas,  $W_{\text{int}}$ . Las relaciones básicas para el estudio del movimiento de un sistema de partículas, válidas respecto a un marco inercial, son

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \dot{\vec{P}} \\ \vec{\tau} &= \dot{\vec{L}} \\ W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} &= \Delta K .\end{aligned}$$

Gracias a que  $\vec{P} = M \vec{v}_c$ , la primera relación se escribe también

$$\vec{F} = M \vec{a}_c .$$

La segunda relación es, como vimos, también válida respecto al punto C, fijo en el marco de referencia del centro de masa.

La presencia de las interacciones internas le da a la tercera relación un carácter diferente a las otras. Un caso en el que dicha relación adopta una forma simple es el de los cuerpos rígidos. Ya habíamos visto en el numeral 6.5 al discutir el trabajo interno en un sistema de partículas, que si el sistema es un cuerpo rígido,  $W_{\text{int}} = 0$  y así la relación fundamental es

$$W_{\text{ext}} = \Delta K .$$

Cuando se trata de sistemas con unas cuantas partículas cuyas fuerzas internas son, por ejemplo, centrales, el trabajo interno se puede calcular en términos de energías potenciales entre parejas de partículas. En otros casos, un sistema está formado por unos cuantos subsistemas que son, por ejemplo, cuerpos rígidos, y el trabajo de las fuerzas internas entre los subsistemas es calculable explícitamente. En este tipo de situaciones y otras análogas, la relación de energía y trabajo como la hemos expresado es muy importante y útil. Sin embargo, como ya lo hemos dicho en varias ocasiones, cuando los sistemas son cuerpos extensos, deformables, hay una energía interna, termodinámica, que tiene otro carácter. Además del trabajo externo, el calor se vuelve una forma fundamental de modificación de la energía interna. En estos casos, la relación básica del trabajo y la energía se replantea para formularse como un principio de la termodinámica.

La aplicación más relevante que analizaremos del momentum angular de un sistema, está en el estudio de las rotaciones elementales de un cuerpo rígido. El movimiento general de rotación de un cuerpo rígido es realmente complejo y rebasa los límites de lo que pretende esta introducción. Hay, sin embargo, rotaciones cuyo estudio es sencillo y muy importante y a cuyo análisis nos dedicaremos, con ocasional mención de movimientos más generales. Antes de estudiar la dinámica, es decir las relaciones entre fuerzas, torques, trabajos y movimientos,

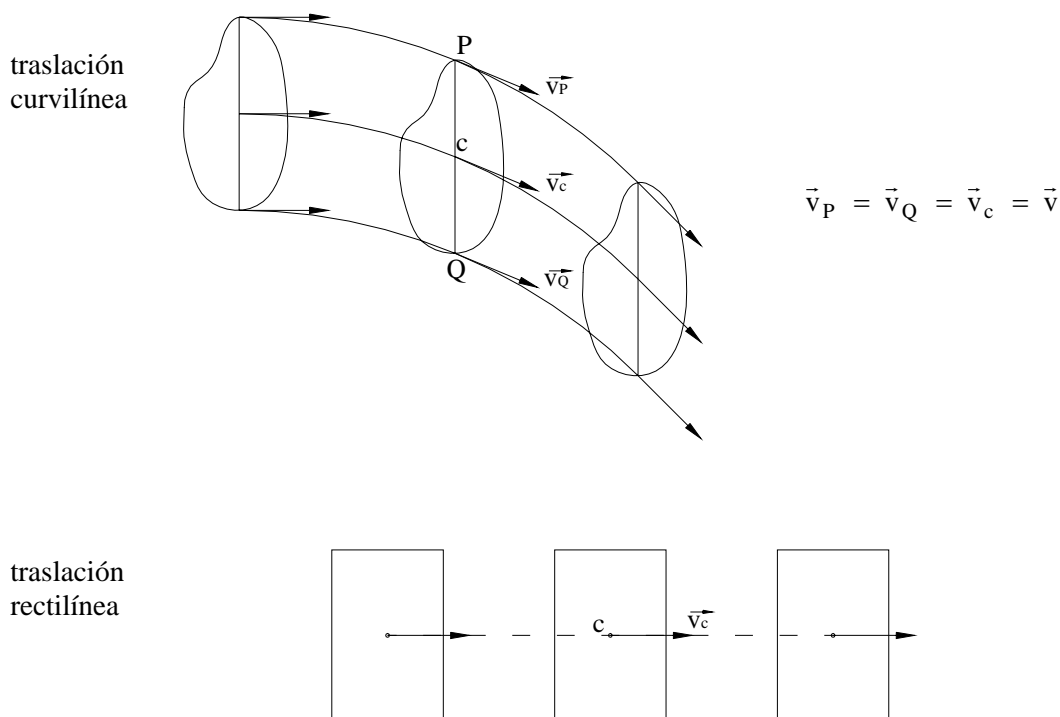


es necesario tener claridad en la descripción de los movimientos de un cuerpo rígido, en su cinemática.

## 8.3 CINEMÁTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

### 8.3.1 Traslación

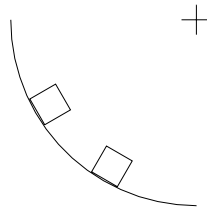
Un primer movimiento sencillo de un cuerpo rígido, que hay que comprender cabalmente, es el movimiento de traslación. Un cuerpo rígido tiene un movimiento de traslación respecto a un marco de referencia, cuando en un instante cualquiera todos los puntos del cuerpo tienen el mismo vector velocidad  $\vec{v}$ . Las trayectorias de los diferentes puntos del cuerpo son entonces curvas iguales, sólo que desplazadas unas respecto a otras. En general, la traslación será curvilínea. Si las trayectorias son rectas, tendremos una traslación rectilínea. Siendo iguales las velocidades de todos los puntos, podemos tomar la velocidad de un punto representativo y hablar de ella simplemente como de la velocidad del cuerpo en el instante  $t$ . Pensando en consideraciones dinámicas es usual y útil tomar el centro de masa  $C$  como punto representativo. Ilustremos las velocidades de  $C$  y de otros dos puntos  $P$  y  $Q$  de un cuerpo rígido en traslación.



Como en cualquier  $t$  las velocidades de dos puntos  $P$  y  $Q$  son iguales,  $\vec{v}_{PQ} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q = 0$

y por tanto  $\vec{r}_{PQ} = \vec{QP} = \text{constante}$ . La magnitud del segmento de recta que une a  $Q$  con  $P$  es obviamente constante pues se trata de un cuerpo rígido, pero además la dirección de ese

segmento permanece invariable durante la traslación, es decir, los segmentos  $\vec{QP}$  en diferentes instantes son siempre paralelos entre sí: durante una traslación de un cuerpo rígido toda línea del cuerpo se desplaza paralelamente a sí misma. Esta característica proporciona un criterio simple y fácil de visualizar para saber si un movimiento es una traslación. La traslación puede tener trayectorias espaciales, tridimensionales, pero usualmente estudiaremos traslaciones planas, bidimensionales, cuyas trayectorias son curvas planas. En muchos casos, los movimientos de cuerpos que hemos idealizado como partículas, no son otra cosa que traslaciones de cuerpos rígidos: un bloque que desliza por un plano inclinado, un bloque que oscila verticalmente sujeto a un resorte o que asciende atado a una cuerda. Pero un bloque que desliza por una pista circular no tiene un movimiento de traslación:



En efecto, una línea del cuerpo no permanece paralela a sí misma sino que rota. Ese movimiento del bloque no es un movimiento de traslación, o, como se dice a veces para enfatizar, no es una traslación pura.

Hay todavía un aspecto de la traslación que es necesario subrayar. Un marco de referencia es un cuerpo rígido, que comprende además unos relojes para la determinación del tiempo. Así, en el estudio del movimiento relativo, cuando hablábamos del movimiento de un marco de referencia respecto a otro, nos referíamos realmente al movimiento de traslación de un cuerpo rígido respecto a otro. En general, el movimiento de un marco de referencia respecto a otro, no es otra cosa que el movimiento de un cuerpo rígido respecto a otro, con un cariz más abstracto, pues el marco de referencia se supone prolongado indefinidamente en todas las direcciones.

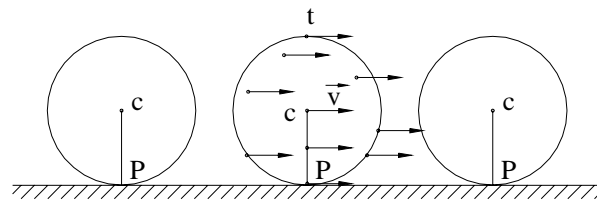
El movimiento de traslación de un cuerpo rígido queda caracterizado entonces por una velocidad  $\vec{v}$  y una aceleración  $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ , comunes a todos los puntos del cuerpo.

El número de **grados de libertad** de un sistema es el número mínimo de coordenadas necesarias para especificar completamente su configuración, es decir la posición de todas sus partes. En una traslación, basta especificar la posición de un punto, por ejemplo del centro de masa, para determinar completamente la posición del cuerpo. Por ello, un cuerpo rígido en traslación es un sistema de 3 grados de libertad. Si se traslada sólo en un plano, será de 2 grados de libertad: se requieren 2 coordenadas para especificar la posición del centro de masa.

El movimiento de traslación es un movimiento sencillo y fundamental de los cuerpos rígidos. Para comprenderlo bien es muy importante tomar cualquier cuerpo rígido a mano, como un bloque, una escuadra o un disco, y realizar, pensando, diversos movimientos de traslación: rectilínea, circular, en fin.

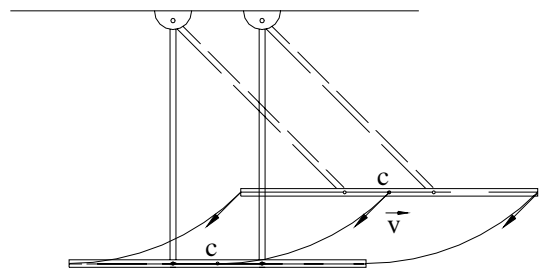
Un campo vectorial, concepto importantísimo en la física, en las matemáticas, es una función que a cada punto de una región del espacio le asigna un vector. El campo de velocidades de

un cuerpo rígido en un determinado instante, es simplemente la velocidad que tiene cada punto del cuerpo en ese instante. El campo de velocidades de un cuerpo rígido en traslación es uniforme, todos los puntos tienen la misma velocidad. Ilustremos ese campo de velocidades mostrando el vector velocidad de diversos puntos de un disco situado en un plano vertical y que tiene un movimiento de traslación sobre una superficie horizontal.



Hay que notar que el punto  $P$  del disco que se encuentra en contacto con la superficie, tiene una velocidad  $\vec{v}$  respecto a dicha superficie y está por lo tanto deslizando sobre ella. Obsérvese que la línea  $CP$  del cuerpo se mantiene paralela a sí misma en los diversos instantes.

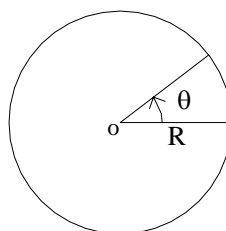
Veamos también la traslación circular de una tabla horizontal sostenida por dos varillas articuladas, tal como se usa en ciertos columpios:



Un albañil que pasa un ladrillo a su ayudante, lanzándolo con cuidado, trata de que su movimiento sea una traslación parabólica ya que, ¿quién lo recibiría animado de una buena rotación?

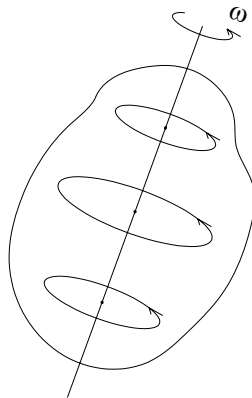
### 8.3.2 Rotación respecto a un eje fijo

Cuando presentamos la cinemática de un punto en movimiento circular, mencionamos la rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo. Vamos a estudiar ahora con más detalle ese importante movimiento. Recordemos en primer lugar la descripción en variable angulares del movimiento circular de un punto.



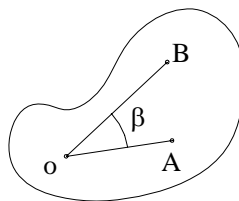
Un punto que se mueve en un círculo de radio  $R$ , tiene una posición angular  $\theta$  medida respecto a una línea fija en el marco de referencia, una velocidad angular  $\omega = \dot{\theta}$  y una aceleración angular  $\alpha = \dot{\omega}$ .

Consideremos un eje fijo en un determinado marco de referencia. Cuando un cuerpo rígido tiene un movimiento de rotación respecto a un eje fijo, todos los puntos del cuerpo se mueven en círculos cuyos centros están sobre dicho eje, llamado el eje de rotación, salvo los puntos que están en el eje, que no se mueven.



Como el cuerpo es rígido todos los puntos describen sus movimientos circulares con la misma velocidad angular. En un cuerpo deformable, como por ejemplo un fluido en un torbellino, puntos diversos del fluido pueden rotar con velocidades angulares diferentes.

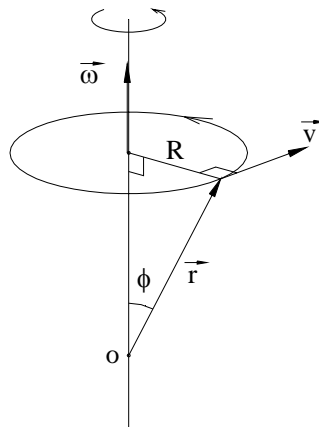
Si miramos una sección del cuerpo rígido, perpendicular al eje de rotación, podemos ver porqué todos los puntos tienen la misma velocidad angular. El punto  $O$  es la traza del eje.



$\beta$ : constante

Como el ángulo entre las líneas  $OA$  y  $OB$  es fijo por ser rígido el cuerpo, en un desplazamiento angular, tanto  $OA$  como  $OB$  giran al mismo ángulo  $\Delta\theta$  y así sus velocidades angulares son iguales. Esa velocidad angular  $\omega$  común a todos los puntos del cuerpo se llama entonces la velocidad angular de rotación del cuerpo rígido y su derivada temporal,  $\alpha = \dot{\omega}$ , es la aceleración angular del cuerpo rígido.

Se llama vector velocidad angular  $\vec{\omega}$ , el vector cuya magnitud es la velocidad angular  $\omega$  que ya hemos definido, y cuya dirección es la del eje de rotación, según el sentido asociado con el giro por la regla de la mano derecha.



Si un punto se mueve en un círculo de radio  $R$  y damos su vector posición  $\vec{r}$  respecto a un punto  $O$  en el eje, su velocidad se puede expresar como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

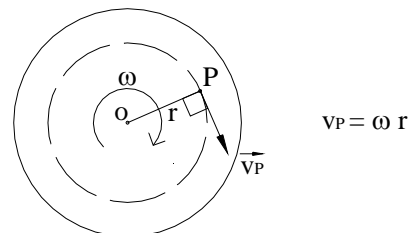
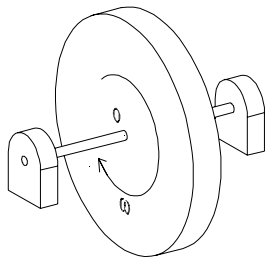
En efecto, la dirección de  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  coincide con la de  $\vec{v}$ , y su magnitud,

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \phi = \omega R = v,$$

es también la de  $\vec{v}$ .

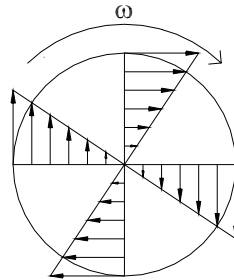
La velocidad angular de un cuerpo rígido como vector es un concepto importante, particularmente en los movimientos generales de rotación de un cuerpo rígido. Pero en los movimientos bidimensionales, planos, a los que en buena medida nos limitaremos, la magnitud de la velocidad angular y su dirección de giro indicada en el plano suelen ser suficientes.

Una polea que gira alrededor de un eje, las diversas partes de un motor eléctrico como rotores, volantes, ejes, constituyen ejemplos de rotación respecto a un eje fijo en un determinado marco de referencia. Tomemos por ejemplo un disco que rota respecto a un eje perpendicular a su plano y por su centro



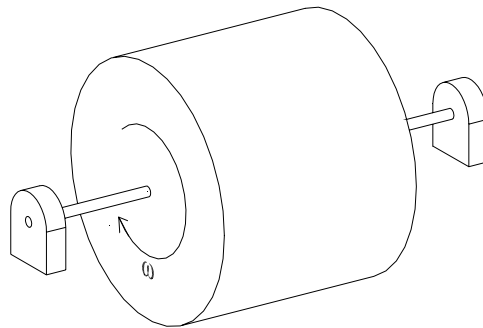
Miremos de frente el plano del disco rotante. Las trayectorias de todos los puntos del disco son círculos concéntricos con centro en  $O$ , punto que es la traza del eje sobre ese plano. Un

punto P, que describe un círculo de radio  $r$ , tiene, en un cierto instante, una velocidad de magnitud  $\omega r$  y es tangente a su círculo. Un panorama del campo de velocidades sería así



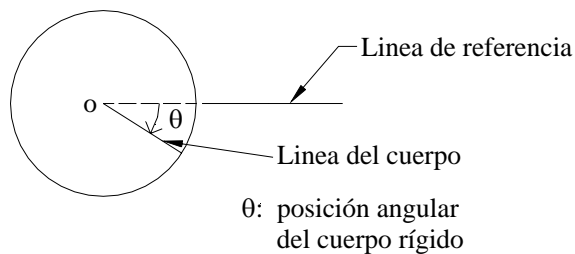
Obsérvese que no hay dos puntos del disco que tengan el mismo vector velocidad.

Si el cuerpo rotante fuese, no un disco plano sino un cilindro rotando respecto a su eje,



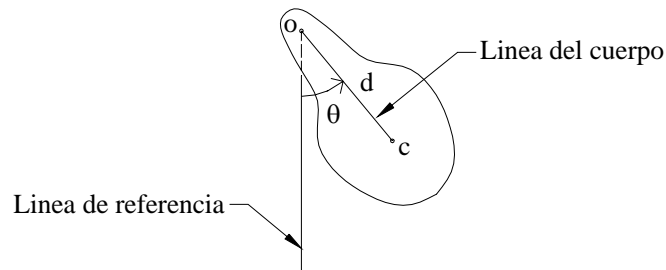
la sección perpendicular al eje de rotación sería la misma que en el caso del disco plano. Llamaremos en general sección representativa de un cuerpo en rotación a la sección perpendicular al eje y que pasa por el centro de masa del cuerpo. Con la sección representada antes, podría también tratarse de la rotación de una esfera respecto a un eje diametral fijo. Compréndase bien que los puntos del cuerpo se mueven en planos perpendiculares al eje, planos que son por tanto paralelos entre sí. Trataremos usualmente con cuerpos simétricos respecto al plano representativo.

La posición angular de un cuerpo rígido en un instante cualquiera se determina mediante el ángulo formado entre dos líneas radiales en el plano representativo: una de ellas fija en el marco de referencia y a partir de la cual se mide el ángulo, y otra fija en el cuerpo.



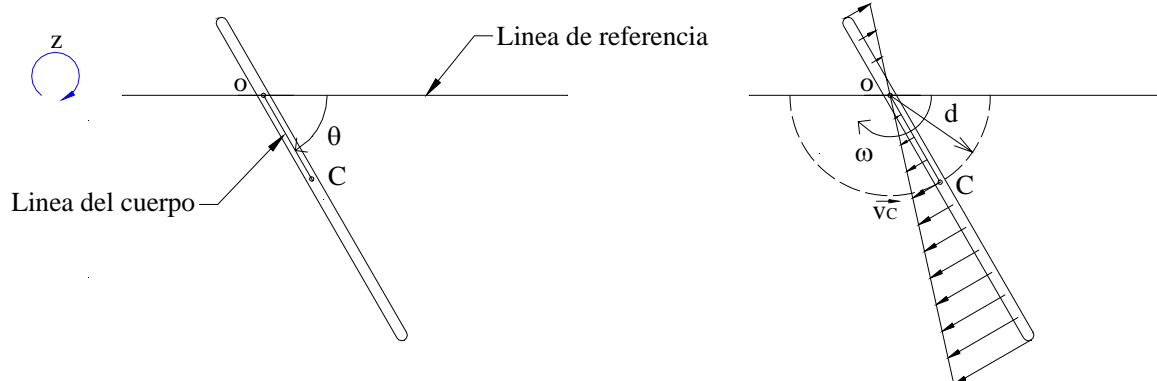
En el movimiento de rotación con eje fijo de un cuerpo rígido basta la especificación de una variable,  $\theta$ , llamada coordenada generalizada, para especificar completamente la posición del cuerpo y por eso es un sistema de 1 grado de libertad.

Un péndulo físico es un cuerpo rígido que puede oscilar alrededor de un eje horizontal que no pasa por su centro de masa:



El eje pasa por O, perpendicularmente al plano representativo. La línea fija en el marco de referencia puede ser la vertical por O. Es conveniente elegir como línea del cuerpo para la posición angular, la línea OC que pasa por el centro de masa. En el movimiento de oscilación, los puntos del cuerpo describen arcos de círculo. El centro de masa C describe un arco de círculo de radio d. Si  $\omega$  es la velocidad angular en un momento dado, la velocidad de C tendrá una magnitud  $\omega d$  y será tangente al círculo.

Consideremos la rotación en un plano vertical de una varilla alrededor de un eje horizontal que la cruza por un punto O. Dicho eje puede ser un pin o pasador liso, debidamente apoyado en un soporte que lo mantenga fijo. Elijamos esta vez como línea de referencia la horizontal. Recuerdese que el ángulo  $\theta$  para la posición angular se mide siempre desde la línea de referencia, línea fija, fuera del cuerpo, en el marco de referencia. Cuál sea la elección más conveniente de la línea de referencia y de la dirección positiva para medir  $\theta$ , y por ende  $\omega = \dot{\theta}$  y  $\alpha = \ddot{\theta}$ , dependerá del movimiento concreto que vaya a estudiarse.



Aunque no hay una manera conveniente de definir la posición angular o el desplazamiento angular como un vector, con el sentido positivo de giro de  $\theta$  en el plano hay asociada una dirección, perpendicular a dicho plano y según la regla de la mano derecha, dirección que usualmente tomaremos como la dirección positiva del eje z. La velocidad angular sí es un vector y en ese caso, si  $\dot{\theta} > 0$ , el vector velocidad angular apunta en la dirección positiva de

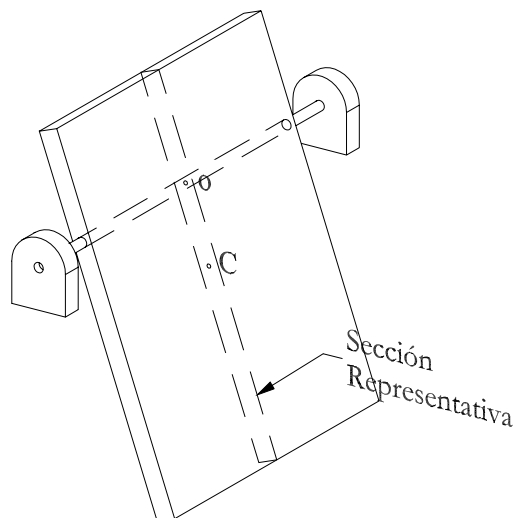
$z$ . Es muy importante fijar explícitamente la dirección de  $z$ , pues según esa dirección se determinan los signos de  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\tau_z$  y  $L_z$ . Incluso, la elección de la dirección  $z$  debe preceder a las de  $x, y$ , que no son cruciales para las rotaciones en el plano  $xy$ , y que se determinan luego, en caso de que se requieran, de modo que el triedro sea derecho.

Hemos representado también el campo de velocidades de la varilla en una situación general así como la trayectoria del centro de masa, arco de círculo de radio  $d$ . El centro de masa tendrá por tanto una aceleración con componentes normal y tangencial,

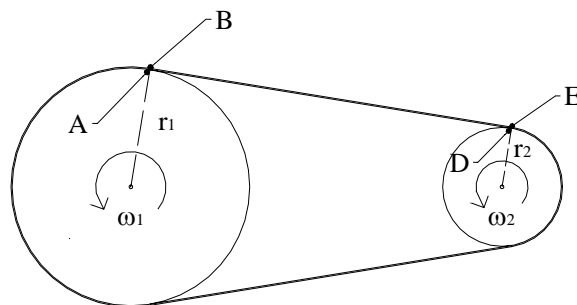
$$a_n = \omega^2 d$$

$$a_t = \alpha d.$$

El esquema de la varilla que hemos dibujado, corresponde también al plano representativo de una compuerta que rota respecto a un eje horizontal:



Los movimientos de rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje, están con frecuencia ligados a los movimientos de otros cuerpos, bien sea directamente como en un sistema de engranajes, bien a través de bandas o cuerdas como en las poleas. Consideremos por ejemplo el movimiento de dos poleas de radios  $r_1$  y  $r_2$ , conectadas por una banda o correa de transmisión. Estudiemos la relación entre sus movimientos:





En una situación general en el instante  $t$  consideremos los siguientes 4 puntos:

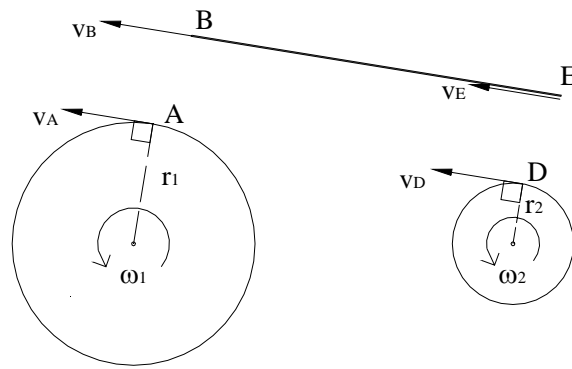
Contacto polea 1 - banda: A : punto de la polea 1

B : punto de la banda

Contacto polea 2 – banda: D : punto de la polea 2

E : punto de la banda.

Referiremos las velocidades a un marco de referencia en el cual están fijos los ejes de las poleas. Como puntos de las poleas rotantes, las velocidades de A y D, tangentes a sus círculos, tienen magnitudes  $v_A = \omega_1 r_1$ ,  $v_D = \omega_2 r_2$ .



Como puntos de una banda inextensible, todos los puntos entre B y E, incluidos éstos, tienen el mismo vector velocidad y así  $v_B = v_E$ . El asunto es, ¿qué relación existe entre las velocidades de A y B por un lado y de D y E por el otro? No hay forzosamente una relación entre las velocidades de A y de B. Puede suceder -y sucede- que la banda esté deslizando o patinando respecto a la polea, en cuyo caso existe una velocidad relativa de B respecto a A, con la consiguiente fricción dinámica entre banda y polea. Ahora, esto no es lo que se pretende con el mecanismo. Lo deseable, asumamos que así se realiza, es que la banda no deslice respecto a la polea. En este caso la velocidad relativa de B respecto a A es cero, la fricción entre banda y polea es estática y así  $v_A = v_B$ . De modo análogo  $v_D = v_E$ . Sinteticemos la cadena de argumentaciones, que corresponde también al encadenamiento de los movimientos:

$$\omega_1 r_1 = v_A : \quad \text{polea 1 en rotación}$$

$$v_A = v_B : \quad \text{polea 1 - banda, sin deslizar}$$

$$v_B = v_E : \quad \text{banda inextensible}$$

$$v_E = v_D : \quad \text{banda - polea 2, sin deslizar}$$

$$v_D = \omega_2 r_2 : \quad \text{polea 2 en rotación}$$

por tanto

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 ,$$

que es la relación entre los movimientos de las poleas. Si derivamos respecto al tiempo,

$$\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2 ,$$

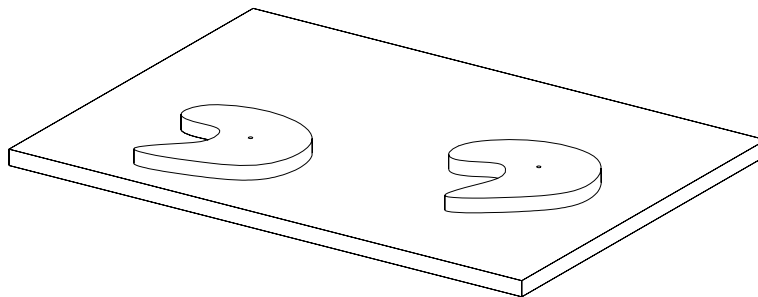
siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  las aceleraciones angulares.

En algunos casos, para evitar el deslizamiento, se usan ruedas dentadas y cadenas, como en la transmisión de una bicicleta. El mecanismo de transmisión permite aumentar o disminuir la velocidad angular: en una bicicleta, el torque motor se aplica al disco grande y la transmisión aumenta la velocidad angular en el pequeño; en muchos motores, el par se aplica al disco pequeño y el mecanismo reduce la velocidad angular en el grande.

### 8.3.3 Movimiento plano

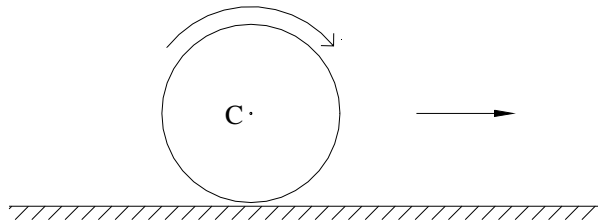
Un cuerpo rígido tiene un movimiento plano cuando todos sus puntos se mueven en planos paralelos a un plano fijo. Llamaremos plano del movimiento al plano que contiene el centro de masa. El corte de ese plano con el cuerpo rígido es la sección representativa. Veamos diversas situaciones en las que se presenta un movimiento plano de un cuerpo rígido.

Imaginemos una superficie horizontal sobre la que desliza un cuerpo rígido en forma de placa o lámina plana, también horizontal.



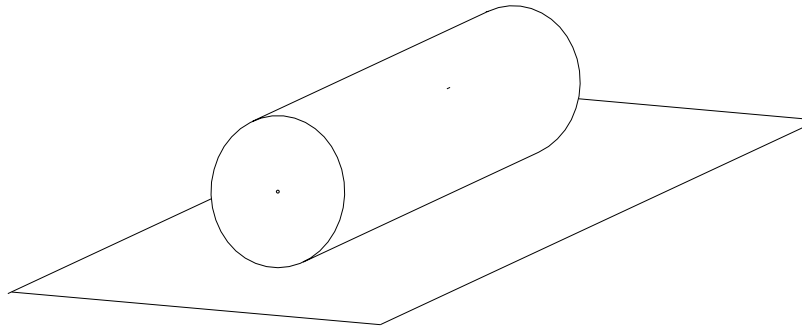
Un caso particular podría ser el de una varilla moviéndose sobre la superficie horizontal. En estos casos el cuerpo está completamente contenido en el plano fijo que sirve de marco de referencia. El movimiento general en el plano reviste una cierta complejidad. A la observación de la varilla lanzada sobre la superficie en diversas condiciones, se presentan movimientos que, dicho de forma aún cualitativa e imprecisa, combinan un avance o algún tipo de “traslación” de la varilla, con una “rotación”. Más adelante veremos como puede describirse con precisión y estudiarse ese movimiento.

Un disco delgado que se mueve, manteniéndose en un plano vertical fijo, rodando sobre una superficie horizontal, es también ejemplo de un cuerpo rígido en movimiento plano:



Pero es esencial, para que el movimiento sea plano, que el eje geométrico de la rueda, del disco, mantenga siempre la misma dirección, es decir se desplace paralelamente a sí mismo. Si la rueda “voltea”, si el eje gira en el plano horizontal, el movimiento cesa de ser un movimiento plano y estamos en el caso de un movimiento espacial, tridimensional, aunque el cuerpo rígido sea un cuerpo plano. El peculiar movimiento de balanceo que describe una moneda sobre una mesa antes de caer, no es un movimiento plano. Una rueda de bicicleta que se mueve en línea recta, manteniéndose en un plano vertical fijo, describe un movimiento plano, pero al dar una curva el eje de la rueda cambia de dirección y el movimiento ya no es plano.

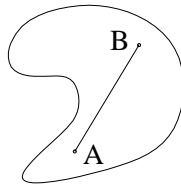
Un cuerpo volumétrico, tridimensional, puede describir movimientos planos. Por ejemplo un cilindro que rueda sobre una superficie horizontal de modo que su eje geométrico mantiene una dirección fija, describe un movimiento plano:



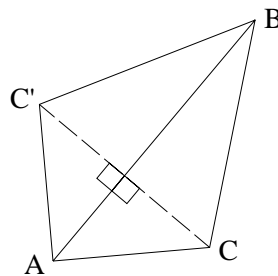
Podría tratarse también de una esfera rodando, con tal de que el eje de rotación mantenga su dirección constante, es decir que no tenga además rotaciones respecto a un eje vertical. Tanto en el caso del cilindro como el de la esfera, su sección representativa coincide con la del disco que habíamos dibujado. Estudiaremos movimientos planos de cuerpos que son simétricos respecto a su plano o sección representativa por el centro de masa, como en los ejemplos anteriores.

Un caso particular importante del movimiento plano es el movimiento de traslación plana, en el cual todos los puntos del cuerpo tienen en un instante dado la misma velocidad. El movimiento de rotación respecto a un eje fijo es también un caso particular de movimiento plano, como puede verse fácilmente.

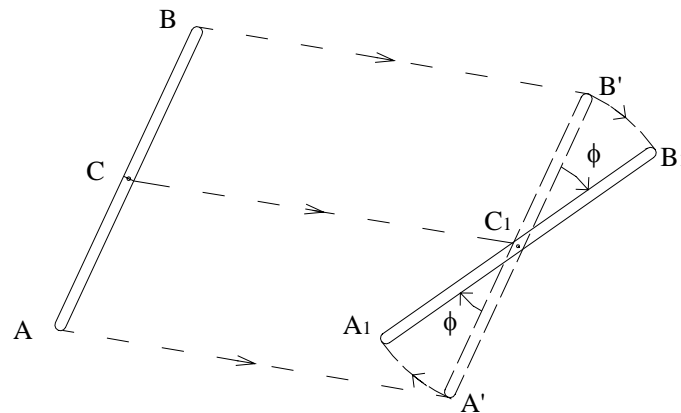
Para comprender como puede moverse un cuerpo rígido en un plano, pensemos qué se requiere para determinar completamente una posición del cuerpo.



Una manera de hacerlo sería: fijar un determinado punto del cuerpo, digamos el punto A, para lo cual se requiere la especificación de 2 coordenadas. Una vez fijo un punto A, la única posibilidad de movimiento del cuerpo rígido es la de una rotación respecto a un eje por A perpendicular al plano del movimiento. En efecto, cualquier otro punto B del cuerpo lo único que puede hacer es moverse en círculo alrededor de A, puesto que AB es constante ya que el cuerpo es rígido. Para especificar esa rotación se requiere, como ya sabemos, la especificación de una posición angular. Así, para determinar completamente la posición del cuerpo, se requiere entonces la especificación de tres variables, por eso el movimiento plano tiene tres grados de libertad. Nótese que para la determinación inequívoca de la posición de un cuerpo rígido en un plano, basta con especificar la posición de una recta AB del cuerpo. Cualquier otro punto C, a distancia fijas de A y B queda completamente determinado. En rigor, habría en el plano dos puntos C y C', a distancia fija de A y B, simétricos respecto a la línea AB.

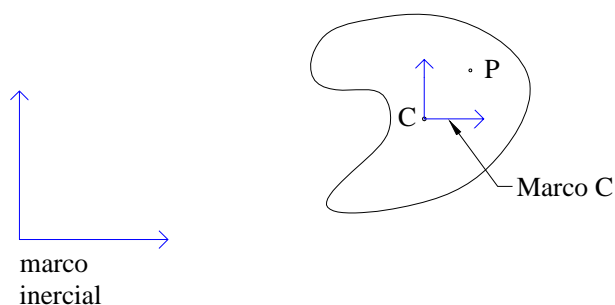


Ahora, ningún movimiento del cuerpo rígido ABC, manteniéndose en el plano, lo llevará a coincidir con ABC', así como ningún movimiento de la mano derecha, manteniéndose en un plano, la llevará a coincidir con su simétrica, la mano izquierda. Para que ABC coincida con su simétrico ABC', se requiere una rotación, fuera del plano del movimiento, respecto al eje AB. Dejando pues de lado el punto C', que conlleva un movimiento inalcanzable en el plano, vemos que basta con determinar una recta AB para determinar completamente un cuerpo rígido en el plano. Así, para comprender como son los desplazamientos, los movimientos de un cuerpo rígido cualquiera en un plano, basta con comprender cómo son los movimientos de una varilla AB. Estudiemos primero cómo es el desplazamiento de una varilla de una posición inicial AB a una posición final cualquiera,  $A_1 B_1$ .



Una manera de llevar la varilla desde  $AB$  hasta  $A_1 B_1$  es la siguiente: Sea  $C$  el centro de masa en la situación inicial y  $C_1$  en la final. Realicemos una traslación rectilínea que lleva  $C$  a  $C_1$ . Es decir, la varilla se traslada, paralelamente, desde  $ACB$  hasta  $A'C_1 B'$ . Realicemos luego una rotación de ángulo  $\phi$  respecto a un eje perpendicular por  $C_1$ , hasta la situación final  $A_1 C_1 B_1$ . Todo desplazamiento de un cuerpo rígido en un plano puede obtenerse como una traslación de su centro de masa más una rotación respecto a un eje, perpendicular al plano, por el centro de masa. Este resultado es un caso particular en el plano, de un teorema general de los desplazamientos de un cuerpo rígido en el espacio, llamado teorema de Chasles. Aunque las pruebas analíticas, formales, son importantes y tendrán su ocasión, nos interesa más ahora una comprensión geométrica como la propuesta. Es más, la experimentación y el juego reflexivo con cuerpos rígidos desplazándose, moviéndose, de diversa manera, son una ayuda invaluable, imprescindible, para la comprensión de sus movimientos. Ahora, el resultado no afirma que la manera propuesta sea la única manera de obtener ese desplazamiento. Por ejemplo puede hacerse una traslación de  $A$  hasta  $A_1$  y luego una rotación respecto a un eje por  $A_1$ , rotación con el mismo ángulo  $\phi$  como puede comprobarse. Pero nos interesa el centro de masa, pensando en la dinámica, en la que conocemos la ecuación de movimiento precisamente del centro de masa,  $\vec{F} = M \vec{a}_c$ . Puede mostrarse incluso que cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido en un plano puede obtenerse como una pura rotación respecto a un eje que pasa por un cierto punto.

Hemos hecho un análisis para un desplazamiento cualquiera, finito, de un cuerpo rígido en el plano. Queremos ahora estudiar cuál es la velocidad de un punto  $P$  de un cuerpo rígido en movimiento plano. Pensemos en un pequeño desplazamiento entre los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ . Dicho desplazamiento puede verse como una traslación del centro de masa más una rotación respecto a un eje por dicho centro de masa. Precisemos los conceptos. Consideremos como marco de referencia el plano en el que se efectúa el movimiento. En la dinámica ese plano será un marco inercial de referencia. Sea también el marco de referencia del centro de masa, marco que se traslada con la velocidad del centro de masa,  $\vec{v}_c$ . Sea  $\vec{v}_{pc}$  la velocidad relativa del punto  $P$  respecto al marco  $C$ .



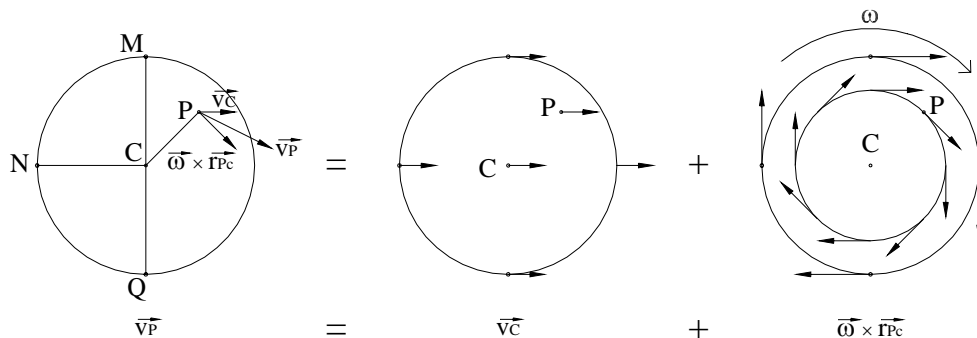
La velocidad del punto P respecto al marco inercial,  $\vec{v}_p$ , será, según sabemos del movimiento relativo respecto a marcos en traslación,

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_{pc}.$$

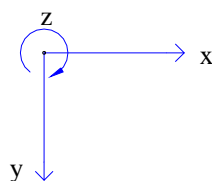
Ahora bien, el movimiento de P respecto al marco C es un movimiento de rotación. Si  $\vec{\omega}$  es el vector velocidad angular, perpendicular al plano,

$$\vec{v}_{pc} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{pc}.$$

En un instante cualquiera de su movimiento plano, el campo de velocidades de un cuerpo rígido se obtiene como la suma de dos campos, uno uniforme, correspondiente a una traslación con velocidad  $\vec{v}_c$ , más el campo correspondiente a una rotación respecto a un eje por C. Por ejemplo, imagínese un disco que se lanza moviéndose sobre una mesa horizontal.



La velocidad instantánea de un punto cualquiera P es la suma vectorial de la velocidad de traslación del marco C más la velocidad de P respecto a ese marco C, debida a la rotación del cuerpo respecto a un eje por C. Eligiendo ejes así,



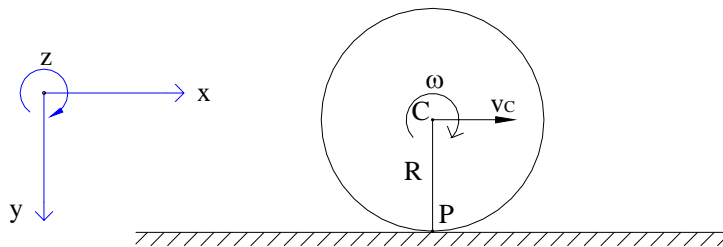
tendríamos, por ejemplo,

$$\vec{v}_N = v_c \hat{i} - \omega R \hat{j}$$

$$\vec{v}_Q = (v_c - \omega R) \hat{i}$$

$$\vec{v}_M = (v_c + \omega R) \hat{i}.$$

Como aplicación importante estudiemos un cuerpo que rueda sobre una superficie horizontal. Como cuerpo rodante consideremos un sólido de revolución respecto a su eje geométrico por C. Podría ser un cuerpo volumétrico, tridimensional, como una esfera o un cilindro, huecos o macizos, o un cuerpo plano como un disco o un anillo. Su sección representativa será, en todo caso, así



Consideremos el piso como marco de referencia. El movimiento de la rueda en un instante cualquiera puede verse, ya lo sabemos, como un movimiento de traslación con  $\vec{v}_c$  más una rotación con  $\vec{\omega}$  respecto al eje por C. Sea P el punto de la rueda que en un instante dado está en contacto con el piso. En ese instante la velocidad de P respecto al piso será

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_{p/c},$$

cuya componente x es

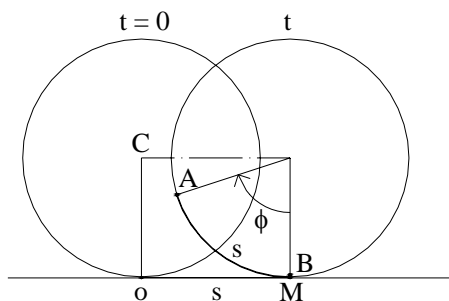
$$v_p = v_c - \omega R.$$

Se dice que el cuerpo rueda sobre la superficie, cuando la velocidad del punto de contacto es nula. Este movimiento es el que habitualmente se designa con la palabra rodar, sin más. Buscando mayor precisión se le dice también rodar sin deslizar, rodar sin patinar, rodar sin resbalar. Se habla también de rodamiento puro. Todo ello porque es perfectamente posible, y sucede a menudo, que la velocidad instantánea de P respecto al piso,  $v_p$ , sea diferente de cero, en cuyo caso el punto P está instantáneamente deslizando respecto al piso y se dice que el cuerpo rueda deslizando o rueda patinando. Un ejemplo de este rodar deslizando puede presentarse en las ruedas de un automóvil en las siguientes circunstancias: al arrancar bruscamente sobre un piso con poca fricción, la velocidad angular  $\omega$  es grande y la velocidad de avance  $v_c$  es pequeña y así  $v_p < 0$ , con lo que la rueda patina con el punto P deslizando hacia atrás; en cambio, en un automóvil que va a gran velocidad y bruscamente aplica los frenos, la velocidad  $v_c$  es grande y la velocidad angular  $\omega$  es pequeña, con lo que  $v_p > 0$ , y la rueda patina, pero esta vez con el punto de contacto deslizando hacia adelante. Pero el

movimiento más importante, realmente notable, es el rodamiento puro, en el cual entonces la velocidad del centro de masa y la velocidad angular están relacionadas así:

$$\text{Rodar (sin deslizar): } v_p = 0 = v_c - \omega R \Rightarrow v_c = \omega R .$$

Es importante mirar desde otro punto de vista lo que significa rodar. Consideremos el cuerpo que va rodando (sin deslizar) por la superficie.



Elijamos un punto determinado del borde de la rueda, que llamaremos el punto A y que podríamos distinguir físicamente, por ejemplo pintándolo con un color. Llamaremos  $t = 0$  el instante en el que A está en contacto con la superficie. El correspondiente punto de la superficie, que también podremos señalar, es el punto O. El cuerpo avanza y rota y en un instante  $t$  habrá un nuevo punto del borde de la rueda, punto B, en contacto con un nuevo punto de la superficie, punto M. Se dice que el cuerpo rueda sin deslizar sobre la superficie, cuando el arco recorrido sobre la superficie, OM, es igual al arco recorrido sobre la rueda, AM:

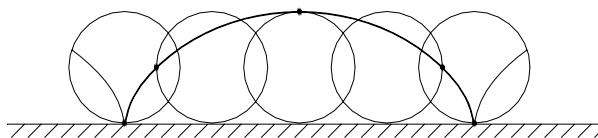
$$OM = s = R \phi .$$

Pero OM es lo que ha avanzado el centro de masa durante  $t$ , de modo que, derivando respecto al tiempo, con  $\omega = \dot{\phi}$ ,

$$v_c = \omega R ,$$

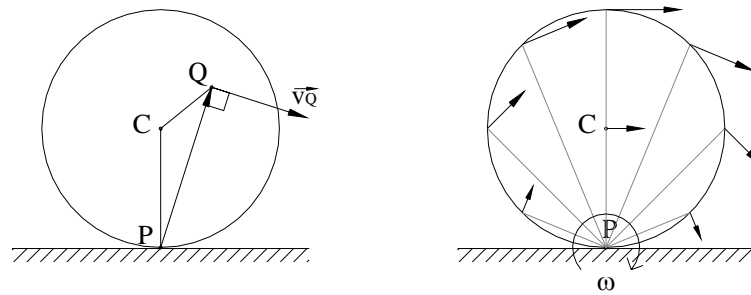
que es, claro está, la condición que ya habíamos hallado y que implica que la velocidad instantánea del punto de contacto es cero.

La trayectoria que describe el punto A del borde de la rueda a medida que ésta va rodando, es una curva notable, llamada la cicloide:



Consideremos de nuevo el cuerpo que rueda sin deslizar, en un instante cualquiera  $t$ .





P es el punto de la rueda que está en contacto con el piso. Su velocidad es cero y así

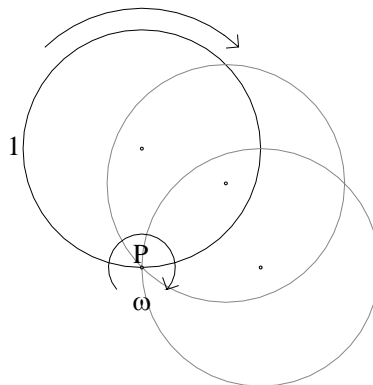
$$\vec{v}_P = 0 = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP} \Rightarrow \vec{v}_C = -\vec{\omega} \times \vec{CP} = \vec{\omega} \times \vec{PC}.$$

Q es un punto cualquiera de la rueda y entonces, usando el resultado anterior, su velocidad puede escribirse como

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CQ} = \vec{\omega} \times \vec{PC} + \vec{\omega} \times \vec{CQ} = \vec{\omega} \times \vec{PQ}$$

que es exactamente la velocidad que tendría el punto Q si el cuerpo estuviese rotando respecto a un eje que pasase por el punto P. En el instante considerado, el campo instantáneo de velocidades del cuerpo es el mismo que tendría ese cuerpo si estuviese rotando respecto a un eje por P. Este movimiento se llama movimiento de rotación instantánea. El eje por P es el eje instantáneo de rotación y el correspondiente punto P se denomina centro instantáneo de rotación.

Para comprender bien el concepto de eje instantáneo de rotación, consideremos el mismo cuerpo rotando alrededor de un eje fijo por P.



Los movimientos del cuerpo rodando y del mismo cuerpo rotando alrededor de un eje fijo por P son movimientos muy diferentes. Pero el cuerpo rodante en el instante en que P es el punto de contacto, y el cuerpo que rota con eje fijo en el instante en que está en la situación correspondiente 1, tienen campos de velocidades idénticos. Si la única información que tuviésemos del movimiento fuese una instantánea, en ese momento t, de las velocidades de los diversos puntos del cuerpo, no habría manera de decidir de cuál de los dos movimientos se trata. Pero esa coincidencia entre las velocidades de los dos movimientos, insistamos, sólo es válida en un instante. A medida que el tiempo transcurre, en el movimiento de rotación con

eje fijo, el punto P es un punto fijo, tanto desde el punto de vista del marco de referencia, como desde el punto de vista del cuerpo: siempre es el mismo punto del cuerpo y puede marcarse, señalarse. En cambio al rodar, en el movimiento instantáneo de rotación, el punto P, centro instantáneo de rotación, es un punto que, a medida que el tiempo avanza, se mueve tanto desde el punto de vista del marco de referencia, como desde el punto de vista del cuerpo: en efecto, el centro instantáneo es cada vez un punto distinto del piso y un punto distinto de la rueda.

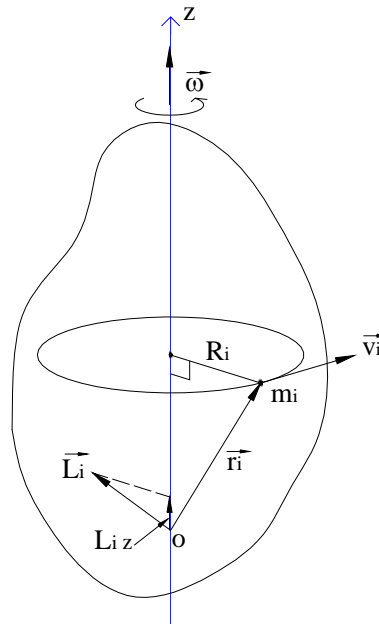
Es importante comprender que el centro instantáneo de rotación es útil para describir el campo de velocidades del cuerpo, es decir, para conocer las velocidades de los diversos puntos del cuerpo, pero no sirve para describir el campo de aceleraciones. En efecto, para conocer las aceleraciones no basta con conocer las velocidades en un solo instante, es necesario conocer como esas velocidades cambian en el tiempo. Las velocidades de los puntos de una rueda coinciden en un instante con las de un cuerpo que rota, pero no las aceleraciones.

Aunque la descripción del movimiento en términos de una rotación instantánea es importante, preferiremos, desde el punto de vista de la dinámica, la descripción en términos de una traslación del marco C y una rotación respecto a un eje por C.

## 8.4 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN RESPECTO A UN EJE FIJO

### 8.4.1 Momentum angular y energía cinética de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido, como ya sabemos, es un sistema de partículas en el cual las distancias entre las partículas permanecen constantes. Puede considerarse también como un cuerpo continuo en el que las distancias entre puntos son invariables. Dicho cuerpo continuo puede verse como el límite de una sucesión de sistemas de partículas. Para presentar el momentum angular y la energía cinética de un cuerpo rígido que rota respecto a un eje fijo, lo consideraremos como un sistema de partículas y más adelante veremos como se calculan esas cantidades cuando se trata de un cuerpo continuo.



Consideremos un cuerpo rígido que rota respecto a un eje fijo en un determinado marco de referencia. Sea  $z$  dicho eje.

Calculemos el momentum angular, respecto a un punto  $O$  del eje, del cuerpo rígido que rota con velocidad angular  $\omega$ . La partícula  $m_i$  que se encuentra a una distancia  $R_i$  del eje, describe un círculo con centro en el eje y radio  $R_i$ . Como ya vimos, el momentum angular de esa partícula respecto al punto  $O$ ,  $\vec{L}_i$ , forma un cierto ángulo con el eje  $z$ . Su componente sobre dicho eje es

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega.$$

La componente sobre el eje  $z$  del momentum angular del sistema, es decir del cuerpo rígido, será

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i R_i^2 \omega = \left( \sum m_i R_i^2 \right) \omega.$$

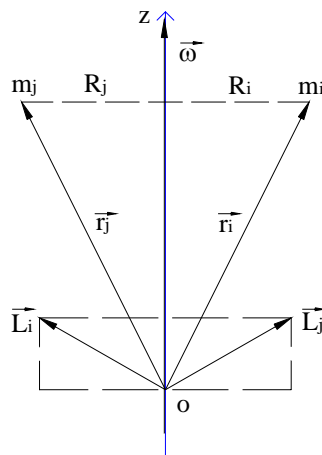
La cantidad  $\sum m_i R_i^2$  juega un papel esencial en el estudio de la rotación, análogo al que desempeña la masa inercial en el movimiento de traslación, y se llama el momento de inercia respecto a un eje, en este caso respecto al eje  $z$ , escrito  $I_z$ .

$$I_z = \sum m_i R_i^2.$$

La componente del momentum angular del cuerpo respecto al eje de rotación se escribe entonces

$$L_z = I_z \omega.$$

Como en general el momentum angular  $\vec{L}_i$  de la partícula de masa  $m_i$ , respecto a  $O$ , no está en dirección del eje de rotación, al sumar para todas las partículas podemos afirmar que, en el caso general, el momentum angular  $\vec{L}$  de un cuerpo rígido respecto a un punto del eje de rotación no tiene la misma dirección del vector velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Hay, sin embargo, ejes particulares de rotación, llamados ejes principales de inercia, respecto a los cuales el momentum angular  $\vec{L}$  tiene la misma dirección de  $\vec{\omega}$ .

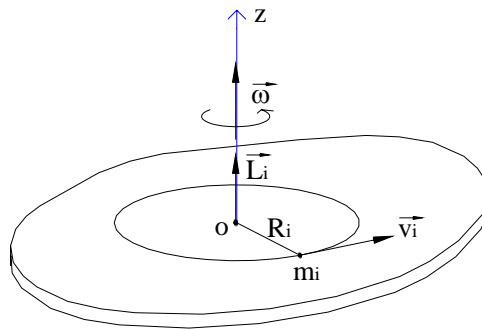


En efecto, veamos por ejemplo el caso de un cuerpo que rota alrededor de un eje de simetría. A cada partícula  $i$ , de masa  $m_i$ , situada a una distancia  $R_i$  del eje, le corresponde una partícula  $j$ , diametralmente opuesta y tal que  $m_i = m_j$ ,  $R_i = R_j$ .

Al ser las partículas diametralmente opuestas,  $\vec{L}_i$  y  $\vec{L}_j$  están en el mismo plano y forman el mismo ángulo con el eje  $z$ , de modo que sus componentes perpendiculares al eje se cancelan y las componentes sobre el eje  $z$  se suman. Como esto sucede para todas las parejas de partículas, el momentum angular total respecto a cualquier punto del eje tiene la dirección del eje  $z$ , es decir de  $\vec{\omega}$ , y así

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} ,$$

donde  $I_z$  es el momento de inercia respecto al eje de rotación. Si el cuerpo es una placa o lámina plana que rota respecto a un eje cualquiera perpendicular a la placa por un punto  $O$ , el momentum angular respecto a  $O$  está también en una dirección de  $\vec{\omega}$ , es decir dicho eje es, en el punto  $O$ , un eje principal de inercia.



En efecto, como ya vimos, el momentum angular  $\vec{L}_i$  de una partícula en movimiento circular respecto al centro del círculo, que en este caso es el punto  $O$ , está en dirección de  $\vec{\omega}$  y esto es válido para todas las partículas de la placa.

Las rotaciones de cuerpos rígidos respecto a ejes fijos que estudiaremos son, salvo si se advierte lo contrario, rotaciones respecto a ejes principales de inercia. En estos casos, el momentum angular del cuerpo rígido respecto al punto de corte del eje con el plano representativo puede escribirse entonces vectorialmente como

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} ,$$

o, en magnitud,

$$L = I_z \omega .$$

Si el eje de rotación no es un eje principal de inercia,  $\vec{L}$  no tiene la misma dirección de  $\vec{\omega}$  y la relación anterior no es válida para el momentum angular total sino únicamente para la componente sobre el eje,

$$L_z = I_z \omega .$$

En este caso existen otras componentes del momentum angular perpendiculares al eje.

La energía cinética del cuerpo rígido que rota respecto al eje fijo  $z$  con velocidad angular  $\omega$ , es la suma de las energías cinéticas de las diversas partículas,

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 ,$$

y como

$$v_i = \omega R_i ,$$

puede escribirse como

$$K = \frac{1}{2} \left( \sum m_i R_i^2 \right) \omega^2 ,$$

expresión en la que aparece nuevamente el momento de inercia  $I_z$  respecto al eje de rotación, y así

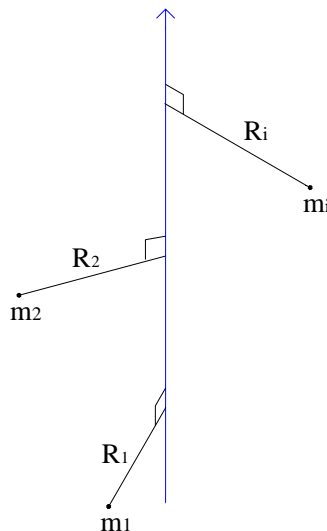
$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 .$$

Antes de estudiar las relaciones dinámicas básicas para la rotación del cuerpo rígido y el significado físico del momento de inercia, miremos como se calcula dicha cantidad.

#### 8.4.2 El momento de inercia

El momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje, considerado el cuerpo como un sistema de partículas, es

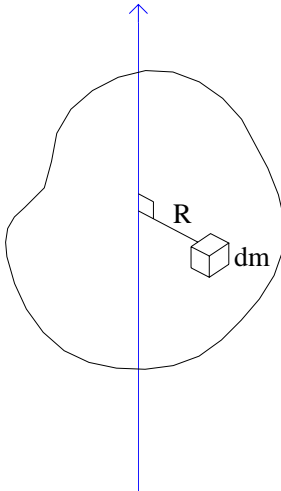
$$I = \sum m_i R_i^2 ,$$



con  $R_i$  : distancia de la partícula de masa  $m_i$  al eje.

Si se trata de un cuerpo continuo, el momento de inercia del cuerpo respecto a un eje será

$$I = \int R^2 dm ,$$



siendo  $R$  la distancia del elemento de masa  $dm$  al eje.

Las dimensiones del momento de inercia son

$$[I] = ML^2 ,$$

y su unidad en el sistema internacional SI es el  $kg\ m^2$ .

Se usa a veces el radio de giro del cuerpo con respecto a un eje, definido como la longitud  $k$  tal que

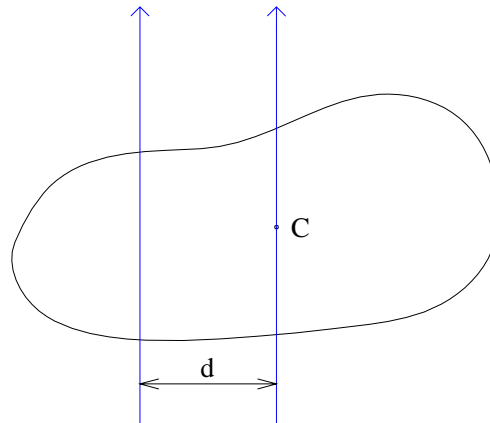
$$I = Mk^2 .$$

El momento de inercia respecto a un eje de un cuerpo compuesto es la suma de los momentos de inercia de las diferentes partes, todos calculados respecto al mismo eje. En efecto, la integral sobre todo el cuerpo puede calcularse como una suma de integrales sobre las diversas partes. Como una aplicación de este resultado podemos estudiar el cálculo del momento de inercia cuando el elemento de masa,  $dm$ , es “extenso”, por ejemplo un disco delgado, y no hay una única distancia  $R$  de ese elemento al eje. En ese caso hay que calcular primero  $dI$ , momento de inercia del  $dm$  respecto al eje, y luego el momento de inercia del cuerpo, como

$$I = \int dI .$$

Un resultado muy importante en el cálculo de los momentos de inercia es el llamado **teorema de los ejes paralelos** o teorema de Steiner, que puede enunciarse así: el momento de inercia de un cuerpo respecto a un determinado eje es igual al momento de inercia respecto a un eje

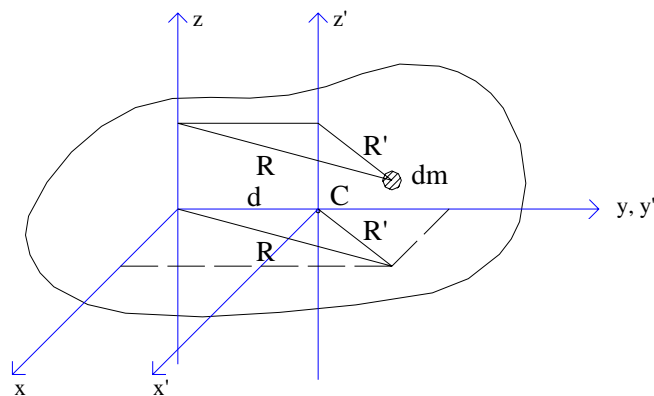
paralelo que pasa por el centro de masa, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre los ejes. Sea  $I$  el momento de inercia respecto a un eje,  $I_c$  el momento de inercia respecto a un eje paralelo y que pasa por el centro de masa  $C$ ,  $M$  la masa del cuerpo y  $d$  la distancia entre los ejes.



El teorema de los ejes paralelos establece que

$$I = I_c + M d^2 .$$

La demostración no es difícil. Veamos. Sean  $z$  y  $z'$  los ejes paralelos y  $z'$  el que pasa por  $C$ . Elijamos el eje común  $y, y'$ , pasando por  $C$  y en el plano determinado por las paralelas  $z, z'$ .



$R'$  es la distancia del  $dm$  al eje  $z'$ .  $R$  la distancia al eje  $z$ . Según se ve de la figura

$$R'^2 = x'^2 + y'^2$$

$$R^2 = x'^2 + (y' + d)^2 = x'^2 + y'^2 + d^2 + 2 y' d .$$

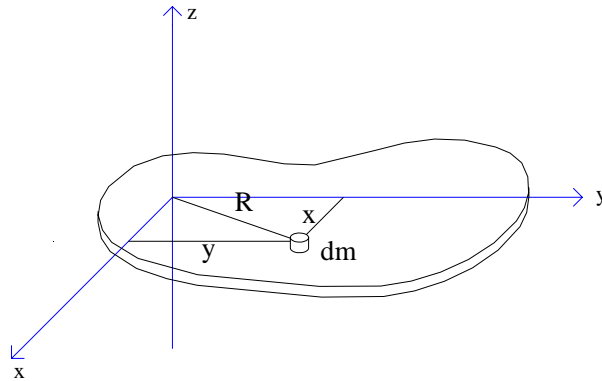
Así,

$$I = \int R^2 dm = \int R'^2 dm + M d^2 + 2 d \int y' dm .$$

Pero la última integral es igual a  $M y'_c$ , posición en  $y$  del centro de masa respecto a sí mismo, igual a cero, y así

$$I = I_c + M d^2 .$$

Otro resultado importante, que esta vez concierne únicamente a láminas o placas planas, es el llamado **teorema de los ejes perpendiculares** para cuerpos planos, que puede enunciarse así: el momento de inercia de una placa plana respecto a un eje perpendicular a ella por un punto O, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes cualquiera por O, en el plano de la placa y perpendiculares entre sí.



Es decir,

$$I_z = I_x + I_y .$$

En efecto,

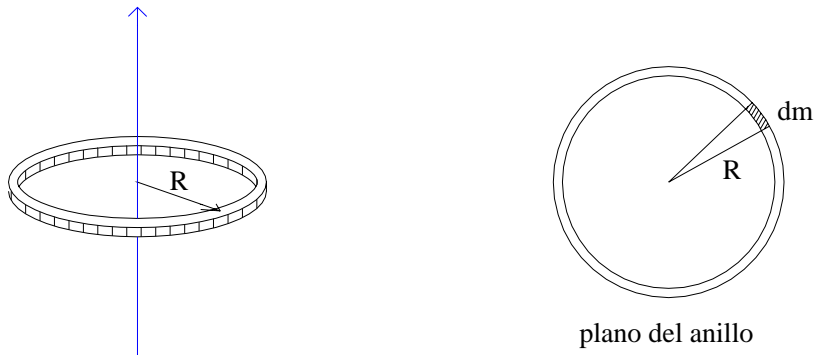
$$I_z = \int R^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int y^2 dm + \int x^2 dm = I_x + I_y .$$

El momento de inercia de un cuerpo rígido respecto a un eje es esencial para el estudio de la rotación respecto a dicho eje. Ahora bien, vamos a estudiar fundamentalmente las rotaciones de cuerpos muy simétricos como cilindros, esferas, o cuerpos planos como discos, anillos, placas rectangulares o barras, respecto a algunos de sus ejes de simetría, o a ejes perpendiculares a su plano, y vamos entonces a calcular algunos momentos de inercia de esos cuerpos respecto a dichos ejes.

Veamos entonces los momentos de inercia de algunos cuerpos homogéneos indicando el cuerpo y el eje.



**Anillo delgado de masa  $M$  y radio  $R$  respecto a eje perpendicular al plano del anillo y por su centro.**

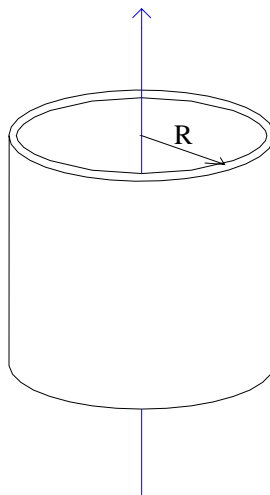


$$I = \int R^2 dm,$$

como  $R$ , distancia del  $dm$  al eje, es constante, sale de la integral y por tanto,

$$I = MR^2.$$

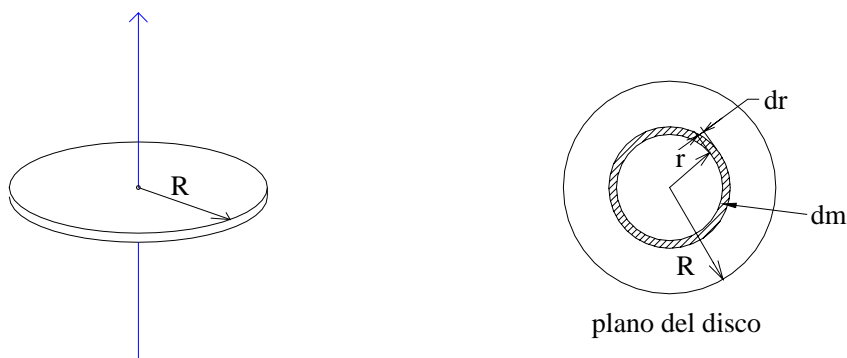
**Un cilindro hueco de paredes delgadas o tubo cilíndrico, de masa  $M$  y radio  $R$ , respecto a su eje.**



El corte perpendicular al eje es idéntico al del anillo y así

$$I = MR^2.$$

**Disco de masa  $M$  y radio  $R$  respecto a eje perpendicular al disco y por su centro.**



Tomemos como elemento de masa  $dm$ , un anillo delgado de radio interior  $r$  y exterior  $r + dr$ . El área interior es  $A = \pi r^2$  y por tanto el elemento de área es  $dA = 2\pi r dr$ . Si  $\sigma$  es la densidad superficial de masa, el elemento de masa es  $dm = \sigma dA$ . El momento de inercia del anillo de masa  $dm$  y radio  $r$  respecto al eje es

$$dI = r^2 dm.$$

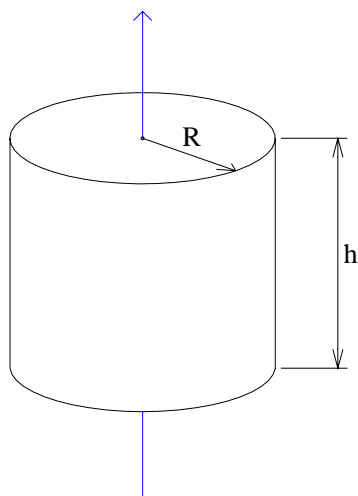
Integrando, el momento de inercia del disco respecto al eje indicado será entonces,

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 dr = 2\pi \sigma \frac{R^4}{4},$$

que, con  $M = \sigma (\pi R^2)$ , queda

$$I = \frac{1}{2} M R^2.$$

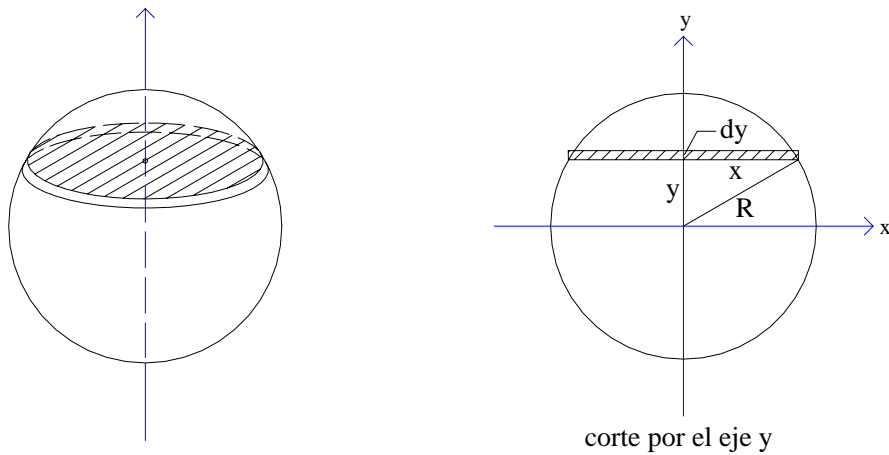
**Cilindro macizo de masa  $M$  y radio  $R$  respecto a su eje.**



El corte perpendicular al eje es idéntico al del disco. El elemento de masa es ahora un tubo cilíndrico delgado con masa  $dm = \rho dV = \rho h dA$ , siendo  $h$  la altura del cilindro. Pero  $\rho$ , densidad volumétrica, es  $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h} = \frac{\sigma}{h}$ , y entonces  $dm = \sigma dA$ , y el momento de inercia se calcula de idéntica manera al del disco. Por lo tanto,

$$I = \frac{1}{2} M R^2 .$$

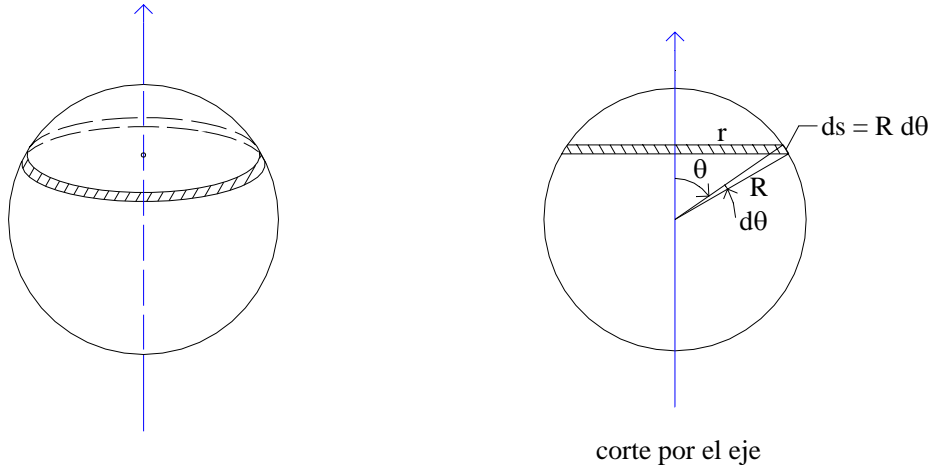
**Esfera maciza de masa  $M$  y radio  $R$  respecto a eje diametral.**



Queremos calcular el momento de inercia respecto al eje  $y$ . Tomemos como elemento de volumen un disco de radio  $x$  y espesor  $dy$ , perpendicular al eje  $y$ . Así  $dV = \pi x^2 dy$ . Si  $\rho$  es la densidad, su masa será  $dm = \rho dV$  y su momento de inercia respecto al eje  $y$ ,  $dI = \frac{dm x^2}{2}$ . Con  $x^2 = R^2 - y^2$ , e integrando para  $y$  desde  $-R$  hasta  $R$ , se obtiene fácilmente, dejamos al lector los detalles,

$$I = \frac{2}{5} M R^2 .$$

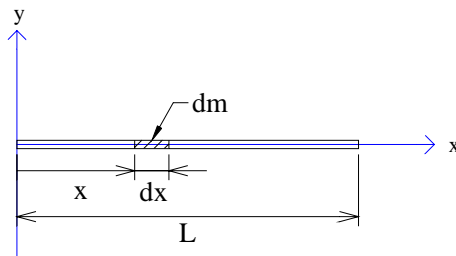
**Esfera hueca de paredes delgadas, o cascarón esférico, de masa  $M$  y radio  $R$ , respecto a eje diametral.**



El elemento de área es un anillo de cascarón esférico, de área  $dA = 2\pi r ds$ , que, con  $\sigma$  densidad superficial, tiene una masa  $dm = \sigma dA$  y un momento de inercia respecto al eje indicado,  $dI = dm r^2$ . Con  $ds = R d\theta$ ,  $r = R \sin \theta$ ,  $M = \sigma (4\pi R^2)$  e integrando para  $\theta$  desde 0 hasta  $\pi$ , se obtiene, después de un poco de cálculo,

$$I = \frac{2}{3} M R^2 .$$

**Varilla recta y delgada de masa  $M$  y longitud  $L$  respecto a eje perpendicular a la varilla y por un extremo.**

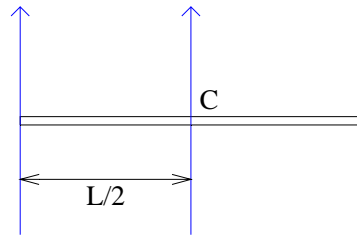


Queremos calcular el momento de inercia respecto al eje  $y$ . El elemento de masa es  $dm = \lambda dx$ , con  $\lambda = \frac{M}{L}$ , densidad lineal, y el momento de inercia respecto al eje  $y$  es

$$I = \int_0^L x^2 \lambda dx ,$$

$$I = \frac{1}{3} M L^2 .$$

**Respecto a eje perpendicular a la varilla por su centro de masa.**

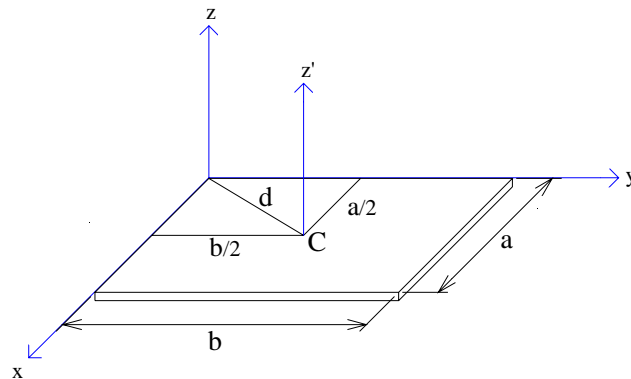


Según el teorema de los ejes paralelos,

$$I = \frac{M L^2}{3} = I_c + M \left( \frac{L}{2} \right)^2 ,$$

$$I_c = \frac{M L^2}{12} .$$

**Placa rectangular de masa M y lados a y b.**



Damos los resultados y dejamos como ejercicio el cálculo.

$$I_y = \frac{1}{3} M a^2 \quad (\text{Integración, franjas paralelas a } y)$$

$$I_x = \frac{1}{3} M b^2 \quad (\text{Analogía con } I_y)$$

$$I_z = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \quad (\text{Teorema ejes perpendiculares})$$

$$I_{z'} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \quad (\text{Teorema ejes paralelos}).$$

### 8.4.3 Relaciones fundamentales y aplicaciones

Las relaciones fundamentales del momentum, el momentum angular y la energía cinética para un sistema de partículas, son aplicables al movimiento de un cuerpo rígido, que es un sistema de partículas con la condición especial de que las distancias entre ellas permanecen constantes. Como ya vimos al estudiar el trabajo y la energía de un sistema de partículas, numeral 6.5, el trabajo interno en un cuerpo rígido es cero. Así, las relaciones fundamentales para el estudio del movimiento de un cuerpo rígido son

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = M \vec{a}_c$$

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$$

$$W = \Delta K,$$

donde  $\vec{F}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $W$  son la fuerza, el torque, el trabajo, externos, totales. Esas relaciones son válidas respecto a un marco inercial de referencia, con el momentum angular y el torque calculados respecto al mismo punto fijo en dicho marco. La relación del momentum angular es también válida respecto al marco de referencia del centro de masa, con el torque y el momentum angular evaluados respecto a dicho centro de masa.

Vamos a estudiar ahora el movimiento de un cuerpo rígido que rota respecto a un eje fijo en un marco inercial de referencia. Más aún, como ya dijimos, vamos a considerar rotaciones respecto a un eje principal de inercia, es decir, un eje en el que el momentum angular, calculado respecto a un determinado punto del eje, tiene la dirección del eje de rotación, o sea la misma dirección que el vector velocidad angular. Como ya vimos al analizar el momentum angular de un cuerpo rígido, hay varios casos importantes y comunes en los que el vector momentum angular está en dirección del eje de rotación. Esto se cumple respecto a los puntos de un eje de simetría del cuerpo o bien, si se trata de una placa plana, respecto a un punto del plano y un eje por ese punto y perpendicular a dicho plano. En estudios más avanzados de la rotación, se muestra que por un punto cualquiera de un cuerpo rígido hay al menos tres ejes mutuamente ortogonales que son ejes principales de inercia. Pero no requerimos ahora ese estudio detallado, pues las aplicaciones elementales más importantes quedan comprendidas en los casos de simetría que mencionamos.

Si el eje fijo de rotación es pues un eje principal de inercia por un determinado punto  $O$ , el momentum angular del cuerpo respecto a  $O$  será, con  $\vec{\omega}$  en dirección del eje de rotación,

$$\vec{L} = I \vec{\omega},$$

y por tanto

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I \vec{\omega})}{dt}.$$

Como las distancias de las diversas partículas al eje de rotación fijo permanecen constantes en el transcurso del tiempo, por ser rígido el cuerpo,  $I$  es constante y entonces

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Si la velocidad angular es constante,  $\vec{\tau} = 0$ , y un cuerpo rígido puede mantener su rotación con velocidad angular constante respecto a un eje principal de inercia por O, sin ningún torque externo, estableciéndose así para esa rotación una analogía con la ley de inercia para traslación.

Si el eje de rotación es  $z$ ,  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  y entonces

$$\vec{\tau} = I \frac{d\omega}{dt} \hat{k},$$

y así el torque externo total respecto al punto O del eje tiene la dirección del eje de rotación.

Si  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  es la aceleración angular del cuerpo, escribiremos entonces, en forma escalar, la

ecuación fundamental para la rotación respecto a un eje fijo, que es un eje principal de inercia del cuerpo, como

$$\boxed{\sum \tau = I \alpha}.$$

La suma de torques externos respecto al punto O del eje es igual al momento de inercia del cuerpo respecto a dicho eje, por la aceleración angular.

Si el eje fijo de rotación no es un eje principal de inercia en el punto O,  $\vec{L}$  no tiene la dirección de  $\vec{\omega}$ , pero aún así la componente  $z$  sobre el eje de rotación cumple que

$$L_z = I \omega$$

y por tanto

$$\tau_z = I \alpha,$$

donde  $\tau_z$  es la componente del torque externo total sobre el eje de rotación. Pero en este caso hay componentes del momentum angular perpendiculares al eje de rotación, que rotan con el cuerpo, y existen por tanto componentes del torque externo perpendiculares al eje de rotación. Incluso para mantener una rotación con velocidad angular constante, aunque  $\tau_z = 0$ , se requieren componentes del torque externo perpendiculares al eje, lo que diferencia esta rotación de la rotación respecto a un eje principal de inercia.

La energía cinética del cuerpo rígido que rota respecto a un eje fijo con velocidad angular  $\omega$  es, como vimos,

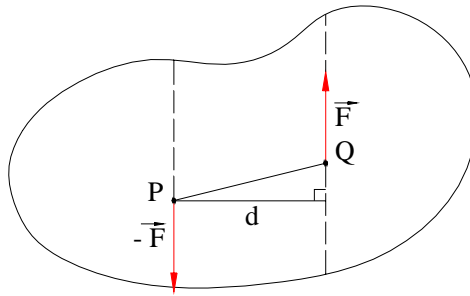
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

siendo  $I$  el momento de inercia respecto al eje de rotación. El teorema del trabajo y la energía entre situaciones a y b es entonces

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{1}{2} I \omega_b^2 - \frac{1}{2} I \omega_a^2 ,$$

con  $W_{a \rightarrow b}$ : trabajo total de las fuerzas externas. Si hay fuerzas conservativas, su trabajo puede evaluarse en términos de las energías potenciales asociadas.

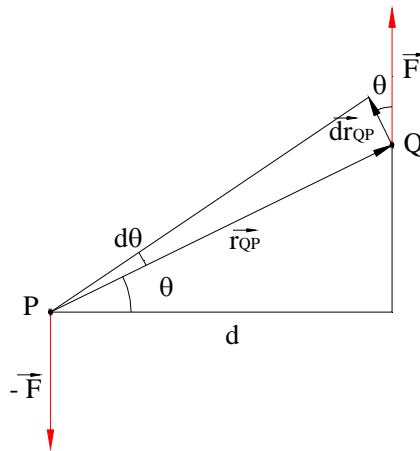
Veamos como se calcula el trabajo realizado por un par cuyo torque vale  $\tau$  y que actúa sobre un cuerpo rígido. Un par puede representarse por dos fuerzas de igual magnitud  $F$ , dirección contraria y líneas de acción paralelas separadas una distancia  $d$ , tales que  $\tau = F d$ .



El trabajo del par es

$$W = \int (-\vec{F}) \cdot d\vec{r}_P + \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_Q = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_{QP} .$$

Como  $\vec{r}_{QP}$  tiene magnitud constante, el movimiento de Q respecto a P es una rotación de ángulo  $d\theta$ ,  $d\vec{r}_{QP} = r_{QP} d\theta$  y  $d\vec{r}_{QP}$  es ortogonal a  $\vec{r}_{QP}$ .



Así,



$$\vec{F} \cdot d\vec{r}_{QP} = F dr_{QP} \cos \theta = Fr_{QP} \cos \theta d\theta = Fd d\theta = \tau d\theta,$$

y entonces el trabajo efectuado por un par de torque  $\tau$  se calcula como

$$W = \int \tau d\theta.$$

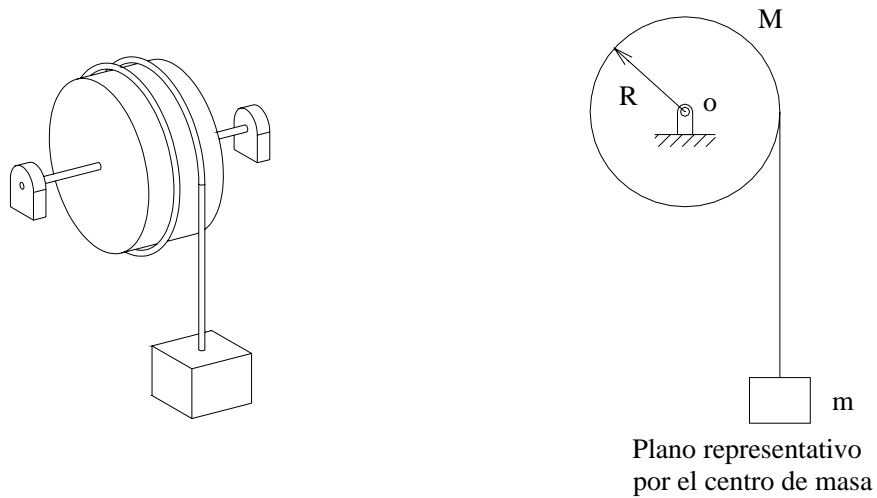
La potencia desarrollada por un par, será entonces  $P = \tau \omega$ . La rotación respecto a un eje fijo se estudia, bien con la ecuación de torques, bien con el teorema de la energía. La ecuación de movimiento del centro de masa sirve para hallar las fuerzas de reacción hechas por el eje sobre el cuerpo. Como esas fuerzas pasan por el eje fijo, su torque respecto al eje es cero e igualmente es nulo su trabajo efectuado, y no participan en las ecuaciones de rotación. Si el centro de masa está sobre el eje, será un punto fijo y así  $a_c = 0$ . Si está fuera del eje, describe un movimiento circular de radio  $d$  y lo más sencillo es plantear sus ecuaciones de movimiento en componentes normal y tangencial, con  $a_{ct} = \alpha d$  y  $a_{cn} = \omega^2 d$ . En este caso es conveniente descomponer la reacción del eje en las direcciones normal y tangencial del movimiento de C.

Hay una estrecha analogía entre el movimiento de rotación de un cuerpo rígido respecto a un eje fijo y el movimiento rectilíneo de una partícula, como lo pone de manifiesto el siguiente cuadro.

Movimiento Rectilíneo		Rotación respecto a eje fijo	
Posición :	$x$	Posición angular :	$\theta$
Velocidad :	$v = \dot{x}$	Velocidad angular :	$\omega = \dot{\theta}$
Aceleración :	$a = \ddot{x}$	Aceleración angular :	$\alpha = \ddot{\theta}$
Masa :	$m$	Momento de inercia :	$I$
Fuerza :	$F$	Torque :	$\tau$
Ley básica :	$F = ma$	Ley básica :	$\tau = I \alpha$
Momentum :	$p = mv$	Momentum angular :	$L = I \omega$
Energía Cinética :	$K = \frac{1}{2} m v^2$	Energía cinética :	$K = \frac{1}{2} I \omega^2$
Trabajo :	$\int F dx$	Trabajo :	$\int \tau d\theta$
Teorema de Energía :	$W = \Delta K$	Teorema de energía :	$W = \Delta K$
Potencia :	$Fv$	Potencia :	$\tau \omega$

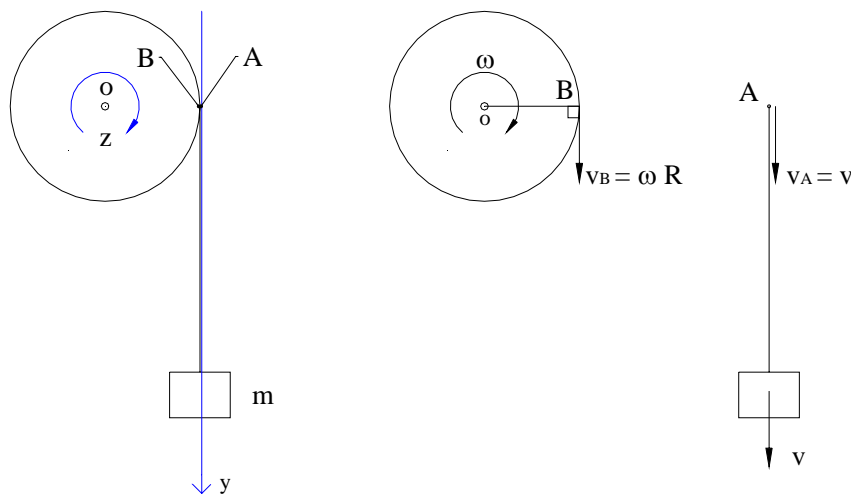
Hay una diferencia en el hecho de que la masa no depende de la posición de la partícula pero el momento de inercia depende de la localización del eje en el cuerpo, pero esta característica no afecta la gran analogía entre las dos clases de movimientos.

## 1. EJEMPLO



Un cilindro homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  puede rotar sin fricción alrededor de un eje horizontal. Tiene una cuerda enrollada de la que se suspende un bloque de masa  $m$ . Hallar la aceleración con que desciende el bloque.

Vamos a abordar la solución de este problema por varios métodos diferentes. El marco inercial de referencia es un marco localmente ligado a la tierra, en el cual está fijo el eje de rotación. Antes de proceder al análisis dinámico del problema, es decir al estudio de fuerzas, torques, energías, estudiemos la relación, puramente cinemática, entre los movimientos del disco y el bloque.



En una situación general en un instante cualquiera  $t$ , en el punto donde termina el contacto entre cuerda y cilindro, sea  $A$  el punto de la cuerda y  $B$  el punto correspondiente del cilindro. Lo más sencillo para estudiar el movimiento del cilindro es elegir un eje  $z$  de modo que la velocidad angular sea positiva. La dirección positiva del eje se indica con la dirección de giro asociada en el plano perpendicular al eje, según la regla de la mano derecha. Sea  $\omega$  la

velocidad angular del disco en el instante  $t$ . Para el estudio del movimiento del bloque elijamos un eje  $y$ , en la dirección del movimiento del bloque, es decir positivo hacia abajo y con origen fijo en algún punto del marco inercial. Ese eje  $y$  para el bloque es completamente independiente del eje  $z$  para el cilindro. Sea  $v$  la velocidad del bloque en el instante  $t$ . El bloque es un cuerpo rígido en movimiento de traslación, que puede ser considerado entonces como una partícula. El punto  $B$  del borde del cilindro en rotación tiene una velocidad  $v_B = \omega R$ , como se indica en el gráfico. Ahora, como la cuerda es inextensible, todos los puntos de ella desde el bloque hasta el punto  $A$  tienen la misma velocidad y por tanto  $v_A = v$ . Si no hay deslizamiento entre la cuerda y el cilindro, la velocidad relativa entre un punto de la cuerda y el correspondiente punto de contacto del cilindro es cero y así  $v_A = v_B$  y por tanto

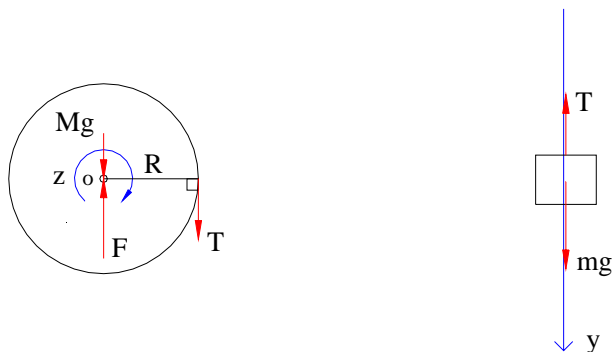
$$v = \omega R,$$

que es la relación entre los movimientos de bloque y cilindro, en los ejes elegidos. Derivando respecto al tiempo, con  $a = \dot{v}$  = aceleración del bloque y  $\alpha = \dot{\omega}$ , aceleración angular del cilindro, se obtiene

$$a = \alpha R.$$

Anotemos que el análisis del movimiento relativo entre puntos de contacto, como el que hemos hecho, y que se presenta en diversos problemas, debe hacerse en términos de velocidades, o también de desplazamientos elementales, pero no en términos de aceleraciones, ya que la condición de deslizamiento o no deslizamiento es una condición entre velocidades. Las relaciones entre aceleraciones vienen después del estudio de las velocidades.

Ahora sí abordemos el problema dinámico. Elijamos en primer lugar dos sistemas mecánicos. Por una parte el cilindro, cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo de simetría, y por otra el bloque, que, como dijimos, puede considerarse como una partícula. En este primer método vamos a estudiar sus movimientos con las ecuaciones básicas,  $\sum \tau = I \alpha$ ,  $\sum \vec{F} = m \vec{a}$ . Los diagramas de fuerzas en situación general, con los ejes que ya habíamos elegido, y las ecuaciones de movimiento, son



$$\begin{aligned} \text{en } z: \quad \sum \tau_o &= I \alpha \\ T R &= I \alpha \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en } y: \quad \sum F &= m a \\ mg - T &= m a \quad (2) \end{aligned}$$

La fuerza sobre el cilindro es  $T$  pues, como ya explicamos al tratar las poleas, consideramos el trozo de cuerda en contacto como parte de ese sistema. Hemos tomado los torques respecto al punto fijo  $O$  del eje.  $F$  es la fuerza resultante hecha por el eje sobre el cilindro. Llamando (3) a la relación que obtuvimos  $a = \alpha R$ , tenemos tres ecuaciones para las tres incógnitas

$a, \alpha, T$ . El momento de inercia del cilindro respecto al eje por  $O$  es  $I = \frac{MR^2}{2}$  y entonces, la aceleración del bloque que nos interesa ahora es

$$a = \frac{mg}{m + M/2}.$$

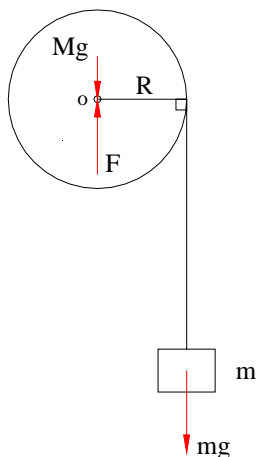
Si la masa del cilindro es despreciable,  $M = 0$ , su momento de inercia es nulo,  $T = 0$  y  $a = g$ , el bloque cae libremente, como era de esperarse.

Conocido  $T$  del sistema de ecuaciones,  $T = \frac{1}{2} \frac{Mmg}{m + M/2}$ , puede hallarse la fuerza del eje,  $F$ , mediante la ecuación de movimiento del centro de masa. En este caso  $C$  está en el eje y por tanto  $v_c = 0$ ,  $a_c = 0$ . Tomando un eje vertical hacia abajo para el cilindro,

$$\sum F = Ma_c: \quad Mg + T - F = 0.$$

Si hubiese fricción con el eje, habría que añadir un par de fricción de torque  $\tau_f$  y dirección contraria a  $\omega$ , en la ecuación de torques.

Como un segundo método dinámico estudiemos el problema desde el punto de vista del trabajo y la energía. Elijamos esta vez como sistema mecánico un sistema compuesto por dos partes: un cuerpo rígido: el cilindro, y una partícula: el bloque. Ese sistema mecánico no es un cuerpo rígido, es un sistema de partículas con dos subsistemas, uno de los cuales es un cuerpo rígido. La cuerda forma parte del sistema mecánico, pero participa en él de un modo diferente puesto que no tiene masa, es ideal, y no tiene entonces energía cinética. Las interacciones entre cuerda y cilindro, cuerda y bloque y entre trozos de cuerda, son internas. Las fuerzas externas sobre el sistema compuesto son



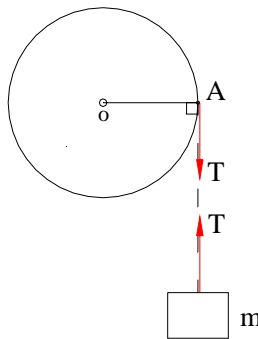
Los trabajos de  $F$  y  $Mg$  son nulos puesto que su punto de aplicación,  $O$ , es fijo, su velocidad es cero.  $mg$  es conservativa y entonces, para el sistema compuesto, el trabajo externo es

$$W_{\text{ext}} = W^{\text{mg}} = -\Delta U^{\text{mg}}.$$

Examinemos ahora el trabajo interno entre las partes del sistema compuesto. En la región de contacto entre la cuerda y el cilindro, la velocidad relativa entre un punto de la cuerda y el punto correspondiente del cilindro es nula puesto que no hay deslizamiento y entonces el trabajo interno realizado por la fuerza de fricción estática entre cuerda y cilindro es cero. Recordemos que el trabajo interno entre dos partes de un sistema es

$$W_{\text{int}} = \int \vec{F}_{\text{interna}} \cdot \vec{v}_{\text{relativa}} dt.$$

El trabajo de la tensión de la cuerda como fuerza interna que vincula el movimiento del cilindro con el del bloque,



es entonces cero, ya que la velocidad relativa de dos puntos de la cuerda inextensible en el tramo  $A - m$ , es cero. En síntesis, en el sistema compuesto cilindro - cuerda - bloque:

$$W_{\text{int}} = 0.$$

El teorema del trabajo y la energía para dicho sistema es entonces

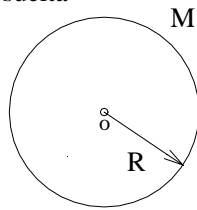
$$W_{\text{ext}} = -\Delta U^{\text{mg}} = \Delta K_{\text{sistema}} = \Delta K_{\text{cilindro}} + \Delta K_{\text{bloque}},$$

y la energía mecánica total se conserva,

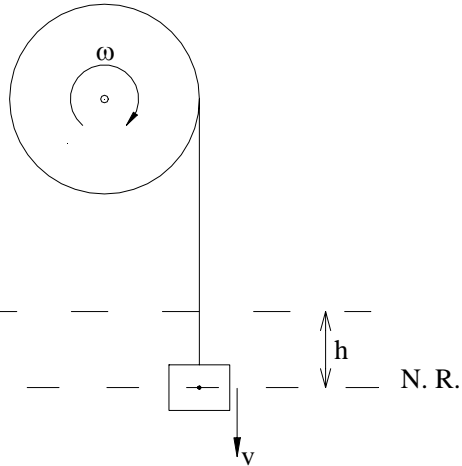
$$K_{\text{cilindro}} + K_{\text{bloque}} + U^{\text{mg}} = \text{constante}.$$

Como el cilindro rota respecto a un eje fijo,  $K_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ . En situación inicial el sistema se suelta. En situación final, que puede ser una situación cualquiera, el bloque ha descendido  $h$ .

i: se suelta



f:



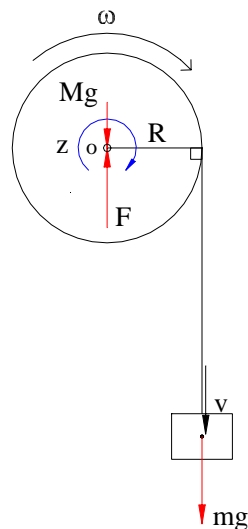
$$mg h = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 ,$$

que, con  $v = \omega R$  y remplazando  $I$ , lleva a

$$v = \left( \frac{2 m g h}{m + M/2} \right)^{1/2} ,$$

en completo acuerdo con  $v = \sqrt{2 a h}$ , que corresponde a un descenso  $h$  con la aceleración constante que habíamos hallado por el método anterior.

Situaciones análogas a las que hemos analizado aquí con tanto detalle y tan pausadamente, se presentan en diversos problemas. Una vez comprendidos los análisis y los argumentos, la exposición se abrevia, los ritmos se agilizan. Pero el análisis cuidadoso es imprescindible, es el que permite abordar con cierta confianza, con orden, problemas más complejos.



Veamos aún por otro método el análisis del movimiento, esta vez apelando directamente al momentum angular del sistema compuesto por el cilindro y el bloque, cuyas fuerzas externas se muestran en la figura anterior. Sólo hay componente  $z$  tanto del torque externo como del momentum angular del sistema compuesto, ambos respecto al punto fijo  $O$ .

El momentum angular del cilindro, cuerpo rígido que rota respecto a un eje de simetría, eje principal de inercia, está en dirección  $z$  y vale  $I\omega$ . El momentum angular del bloque respecto a  $O$ , partícula en movimiento rectilíneo, es, como ya sabemos, en dirección  $z$  y vale  $mRv$ . El torque externo respecto a  $O$ , también en  $z$ , es  $mgR$  y así, en dicho eje,

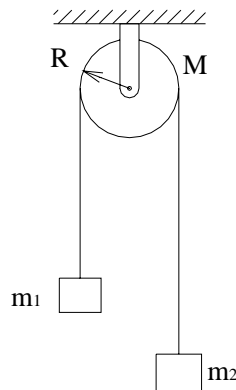
$$\tau = \frac{dL}{dt}: \quad mgR = \frac{d}{dt} (I\omega + mRv) = I\alpha + mRa.$$

Con  $a = \alpha R$ , queda

$$a = \frac{mg}{m + M/2}.$$

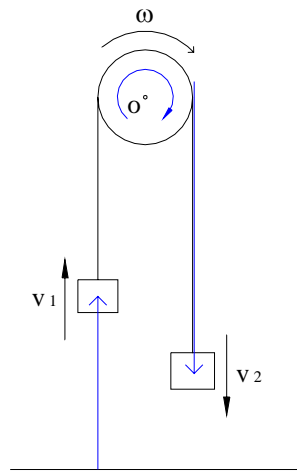
## 2. EJERCICIO

### La máquina de Atwood



En esta ocasión vamos a tener en cuenta la inercia de la polea, asumiendo que es un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$ , pero suponiendo que la fricción con el eje es despreciable, lo que en una polea real con un buen rodamiento es una buena hipótesis. Debido a la inercia de la polea, las tensiones en los trozos de cuerda a ambos lados de ella son diferentes.

El marco inercial es el usual ligado a tierra, del cual forman parte el piso, el techo, el eje de rotación fijo. Asumiendo una dirección de movimiento y eligiendo los ejes en consecuencia, según los movimientos de  $m_1$ , del disco y de  $m_2$ :



- Hallar las relaciones entre los movimientos de  $m_1$ ,  $m_2$  y el disco. Los argumentos: cuerda inextensible y no deslizamiento cuerda - disco.
- Estudiar tres sistemas mecánicos por separado: dos partículas y un cuerpo rígido rotando alrededor de eje fijo, con las relaciones dinámicas básicas, fuerza - aceleración, torque - aceleración angular, para hallar las aceleraciones de los bloques.

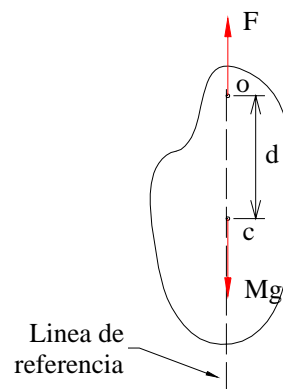
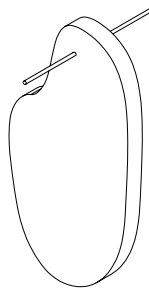
$$a_1 = a_2 = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + M/2}.$$

- Corroborar el resultado estudiando tanto el trabajo y la energía como el momentum angular del sistema mecánico formado por  $m_1$ ,  $m_2$  y la polea.

### 3. EJEMPLO

#### El péndulo físico

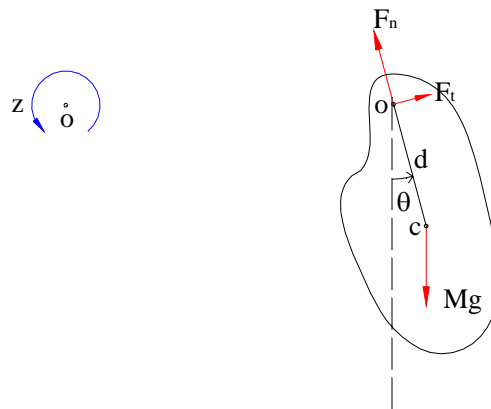
Un cuerpo rígido que puede oscilar alrededor de un eje horizontal fijo que no pase por su centro de masa, constituye el llamado péndulo físico o péndulo compuesto, en contraste con el péndulo matemático o péndulo simple, constituido por una masa puntual suspendida de un hilo sin masa.





El dibujo de la derecha muestra el plano representativo que pasa por el centro de masa  $C$  y es perpendicular al eje de rotación por  $O$ . El dibujo ilustra la posición de equilibrio. Para medir la posición angular en situación general, elegimos como línea fija en el marco inercial ligado a tierra la vertical por  $O$  y como línea del cuerpo la línea que pasa por  $O$  y por el centro de masa  $C$ . Sea  $d$  la distancia  $OC$  y  $M$  la masa del cuerpo. El sistema mecánico es evidentemente el cuerpo rígido, que rota respecto a un eje fijo por  $O$ . El diagrama de fuerzas en posición general incluye el peso del cuerpo, fuerza distribuida cuyo sistema equivalente es el peso total ubicado en el centro de masa  $C$ , y la fuerza hecha por el eje sobre el cuerpo, esencial para mantener inmóvil el punto  $O$ . El torque de esta fuerza respecto al punto fijo  $O$  es cero y entonces esa fuerza no participa en la ecuación fundamental de la rotación  $\sum \tau_o = I \alpha$ .

Como el centro de masa tiene un movimiento circular, lo más conveniente es descomponer la fuerza hecha por el eje según las direcciones normal y tangencial del movimiento del centro de masa. Pues bien, en el estudio del péndulo lo esencial es la rotación, la oscilación, de modo que no estamos ahora interesados en esas componentes y simplemente las incluimos para que el diagrama de fuerzas quede completo.



Dibujamos aparte, para no recargar la figura, la dirección de giro asociada con el eje positivo  $z$ , elegido en dirección de  $\theta$  creciente. La ecuación fundamental de la rotación, donde  $I$  es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje por  $O$ , es

$$\sum \tau_o = I \alpha: \quad -Mg d \sin \theta = I \alpha.$$

En el péndulo de pequeñas amplitudes, el máximo valor del ángulo  $\theta$ , llamado amplitud del movimiento, es un ángulo pequeño y entonces  $\sin \theta \approx \theta$ . La aceleración angular es así

$$\alpha = \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta,$$

con  $\omega^2 = \frac{Mg d}{I}$ , siendo  $\omega$  la frecuencia angular de oscilación, que no debe confundirse con la velocidad angular  $\dot{\theta}$ . Si soltamos el cuerpo con condiciones iniciales

$$\text{en } t = 0, \quad \left| \begin{array}{l} \theta = \theta_o \\ \dot{\theta}_o = 0 \end{array} \right.,$$

tenemos un problema matemáticamente idéntico al que ya estudiamos en el péndulo simple. La posición angular, oscilante, en función del tiempo, es entonces

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t ,$$

cuyo período es

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} .$$

Recordemos que el período de un péndulo simple de longitud  $\ell$  es

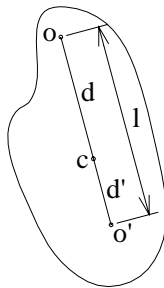
$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} .$$

Si tenemos un péndulo físico determinado y lo comparamos con un péndulo simple cuya longitud sea

$$\ell = \frac{I}{Md} ,$$

vemos que las frecuencias angulares de ambos son idénticas y por tanto tienen exactamente el mismo período. Es más, si se sueltan con las mismas condiciones iniciales sus movimientos angulares son idénticos. Dicha longitud se llama la longitud del péndulo simple equivalente a un determinado péndulo físico.

Dado un punto de suspensión  $O$  de un péndulo físico, prolonguemos la línea  $OC$  hasta un punto  $O'$ , tal que  $OO' = \ell = \frac{I}{Md}$ .



El punto  $O'$  se llama el centro de oscilación relativa al punto de suspensión  $O$ .  $O'$  es el punto en el que habría que concentrar toda la masa del cuerpo para que la oscilación fuese idéntica a la del cuerpo rígido. La distancia de  $C$  a  $O'$ ,  $d' = \ell - d$ , es

$$d' = \frac{I}{Md} - d .$$

Sea  $I_c$  el momento de inercia respecto a un eje paralelo al eje de rotación y que pasa por el centro de masa. Según el teorema de los ejes paralelos,  $I = I_c + M d^2$ , y así

$$d' = \frac{I_c + M d^2}{M d} - d = \frac{I_c}{M d} ,$$

con lo cual,

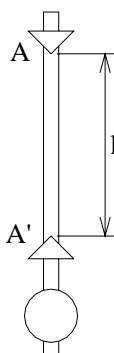
$$d d' = \frac{I_c}{M} .$$

Debido a esta relación, si el punto de suspensión es ahora  $O'$ , su centro de oscilación será precisamente el punto  $O$ . En efecto, si el cuerpo se suspende de  $O'$  la longitud del péndulo simple equivalente  $\ell'$  será

$$\ell' = \frac{I'}{M d'} = \frac{I_c + M d'^2}{M d'} = \frac{I_c}{M d'} + d' = d + d' ,$$

idéntica a  $\ell$ . El punto de suspensión y el centro de oscilación son puntos recíprocos: si uno es punto de suspensión, el otro es centro de oscilación y viceversa, resultado conocido como el teorema de Huygens.

Podemos ver una aplicación de este resultado en el péndulo reversible o péndulo de Kater, usado para determinaciones de precisión de la aceleración de la gravedad.



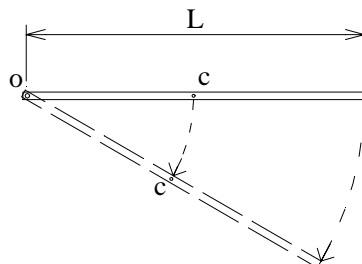
Esquemáticamente un péndulo reversible es una varilla con dos cuchillas de suspensión  $A$  y  $A'$ , y un contrapeso que puede moverse a voluntad. Graduando la posición de este contrapeso puede lograrse que los períodos de oscilación, suspendido el cuerpo de  $A$  y de  $A'$ , sean iguales. Así,  $A$  y  $A'$  son una pareja punto de suspensión – centro de oscilación y el período es

$$P = 2 \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} .$$

La buena precisión con que pueden determinarse tanto la distancia  $\ell$  entre los puntos fijos  $A$  y  $A'$  como el período, determinan la notable precisión con que puede obtenerse  $g$ , precisión

inalcanzable en péndulos hechos con hilos y esferas, en los cuales ni las esferas son partículas ni los hilos son inextensibles.

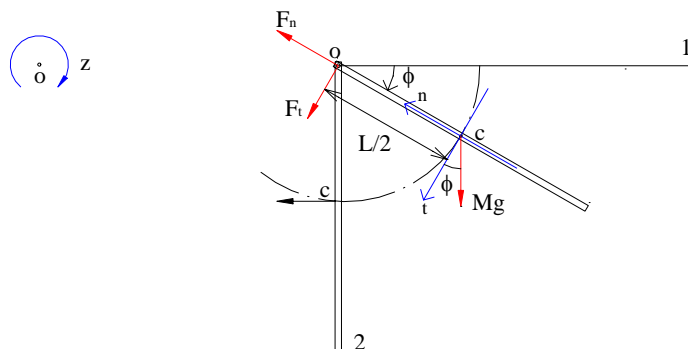
#### 4. EJERCICIO



Una barra de masa  $M$  y longitud  $L$  puede rotar en un plano vertical alrededor de un eje que pasa por su extremo  $O$ .

- a) La barra se suelta desde la posición horizontal. Hallar su aceleración angular y su velocidad angular en una situación general. Cuando pasa por la posición vertical determinar la velocidad angular y la velocidad del centro de masa.

El sistema mecánico es por supuesto la barra, cuerpo rígido que rota respecto a un eje fijo en el marco inercial del laboratorio. El diagrama de fuerzas en situación general y el eje  $z$  son:



$F_n$  y  $F_t$  son las componentes de la fuerza hecha por el eje. La ecuación para la rotación es

$$\sum \tau_o = I \alpha : \quad M g \times \frac{L}{2} \cos \phi = \frac{M L^2}{3} \alpha .$$

Así,

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \cos \phi ,$$

e integrando, con la regla de la cadena,

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \phi}{L}} .$$

En la situación particular 2,  $\phi_2 = \pi/2$ ,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{L}} ,$$

$$v_{c2} = \omega_2 \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{3gL} .$$

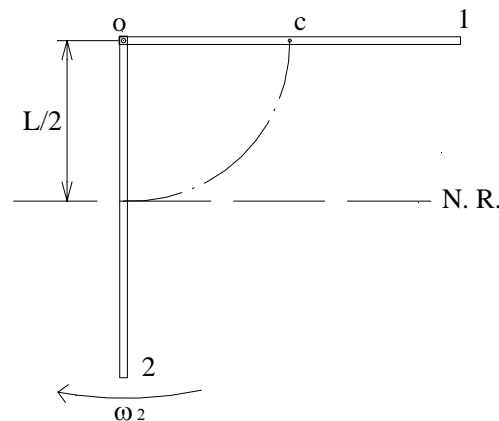
b) Hallar en situación general las componentes de la reacción en el eje.

El centro de masa describe un movimiento circular de radio  $\frac{L}{2}$ . Planteando las ecuaciones de movimiento en las direcciones t y n mostradas, se obtiene

$$F_t = -\frac{1}{4} Mg \cos \phi ,$$

$$F_n = \frac{5}{2} Mg \sin \phi .$$

c) Corroborar el resultado de la velocidad angular cuando pasa por la vertical, por el método del trabajo y la energía.



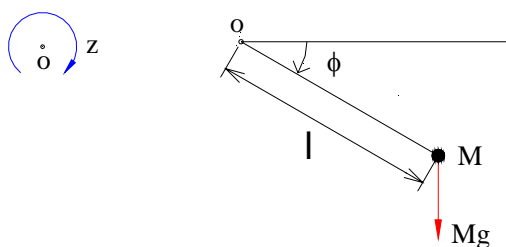
$F_t$  y  $F_n$  no realizan trabajo puesto que la velocidad de su punto de aplicación es cero.  $Mg$  es conservativa y entonces se conserva la energía mecánica de la barra

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 .$$

Para el cálculo de la energía potencial,  $Mgh$ ,  $h$  es la altura de  $C$  respecto al nivel de referencia. La energía cinética de la barra, cuerpo rígido que rota respecto a un eje fijo por  $O$  es  $\frac{1}{2} I \omega^2$ . Fácilmente se obtiene

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

- d) Hallar la distancia  $CO'$  al centro de oscilación  $O'$  respecto al punto de suspensión  $O$ , es decir al punto  $O'$  en el que habría que concentrar toda la masa de la barra para que, como péndulo simple, tuviese idéntico movimiento angular a la barra.



El péndulo simple puede verse bien como una partícula unida a una cuerda, bien como la partícula unida a una varilla rígida de masa despreciable. Para que su movimiento sea igual al de la barra, la aceleración angular en situación general debe ser la misma.

Partícula:  $\sum \tau_o = I \alpha : M g \ell \cos \phi = M \ell^2 \alpha ,$

$$\alpha = \frac{g}{\ell} \cos \phi .$$

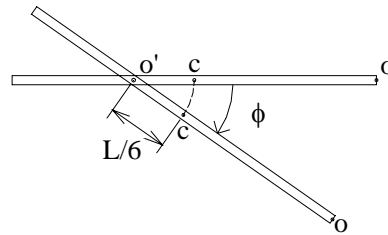
Igualando a la aceleración angular de la barra se obtiene

$$\ell = \frac{2L}{3}$$

y entonces  $CO'$  es  $\ell - \frac{L}{2} = \frac{L}{6}$ . Esta distancia  $d'$  corresponde a la que ya estudiamos,

$$dd' = \frac{I_c}{M} = \frac{L^2}{12}, \text{ con } d = \frac{L}{2}.$$

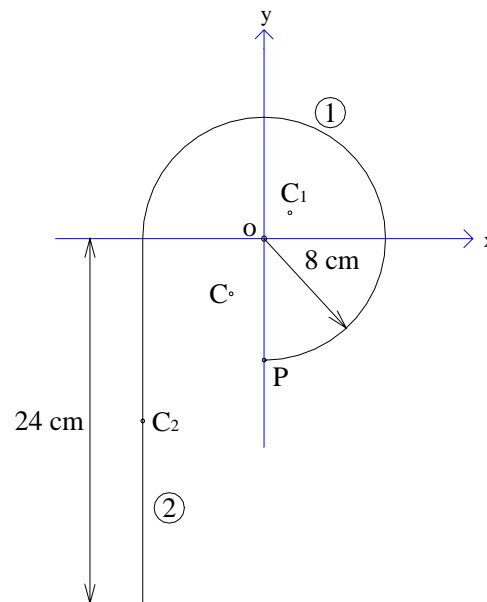
- e) Compruebe que si la barra rota respecto a un eje por  $O'$  el movimiento angular es efectivamente idéntico al de la rotación respecto a  $O$ .



Con el teorema de los ejes paralelos se halla  $I' = \frac{ML^2}{9}$ . Luego con  $\sum \tau_o' = I' \alpha'$ , se obtiene  $\alpha' = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos \phi$ , idéntica a  $\alpha$ .

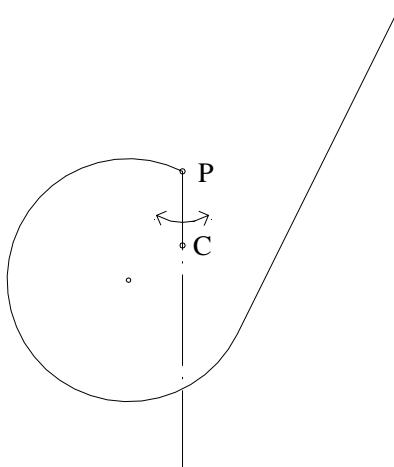
## 5. EJERCICIO

En el estudio del equilibrio de los cuerpos rígidos, numeral 7.4, ejemplo 7, estudiamos la posición de equilibrio de un alambre rígido compuesto, de las siguientes características:



El cuerpo está compuesto por dos partes: una parte (1) en forma de arco de circunferencia, cuyo centro de masa tiene coordenadas  $C_1 \left( \frac{2R}{3\pi}, \frac{2R}{3\pi} \right)$ , y una parte (2), tramo recto con centro de masa  $C_2$ . El cuerpo completo tiene un centro de masa  $C$  cuyas coordenadas según hallamos son  $C (-2.07, -3.63)$  en centímetros.

Queremos ahora hallar el período de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, cuando el cuerpo oscila en un plano vertical, rotando respecto a un eje horizontal, perpendicular al plano del cuerpo, por el punto P.



El alambre es entonces un péndulo físico y para hallar su período debemos encontrar el momento de inercia respecto al eje por P.

Este ejercicio adquiere relevancia cuando se realiza experimentalmente y puede cotejarse el período hallado teóricamente con el período medido experimentalmente. El cuerpo se construye fácilmente, como lo dijimos en la estática, y con precisión razonable, con un alambre eléctrico rígido. Es gratificante encontrar, con precisión que frisa en las centésimas de segundo, y después de un cálculo numérico un tanto laborioso, la coincidencia entre lo predicho y lo medido.

El momento de inercia del cuerpo compuesto respecto al eje por P es la suma de los momentos de inercia de las partes, respecto al mismo eje.

$$I_p = I_p^1 + I_p^2$$

El superíndice indica la parte del cuerpo (1) ó (2), y el subíndice indica el punto por el cual cruza el eje, perpendicular siempre al plano del cuerpo. El teorema de los ejes paralelos es esencial para los cálculos. Indicaremos los resultados parciales de los cálculos, dejando como ejercicio su detalle.  $\lambda$  es la densidad lineal. Longitudes en cm.

$$I_0^1 = M_1 R^2 = 2412.7488 \lambda \quad \text{distancia al eje constante}$$

$$I_{c_1}^1 = 2195.4498 \lambda \quad \text{ejes paralelos}$$

$$I_p^1 = 5849.4976 \lambda \quad \text{ejes paralelos}$$



$$I_{c_2}^2 = \frac{M_2 L_2^2}{12} = 1152 \lambda$$

$$I_p^2 = 3072 \lambda \quad \text{ejes paralelos}$$

$$I_p = 8921.4976 \lambda .$$

El período de las pequeñas oscilaciones es

$$P = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{M g d}} ,$$

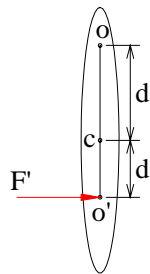
con  $d = CP$ ,  $g \approx 978 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$  (aproximado a  $6^\circ$  de latitud),

$$P = 1.18 \text{ s} .$$

## 6. EJEMPLO

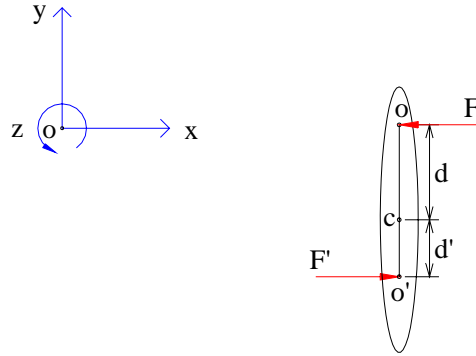
### El centro de percusión

Consideremos un cuerpo rígido de masa  $M$  que se encuentra en reposo, suspendido de un eje perpendicular al plano de la figura por el punto  $O$ .



En el punto  $O'$ , sobre la prolongación de  $OC$ , se le da al cuerpo un golpe, cuya fuerza impulsiva  $F'$  es perpendicular a  $OCO'$ . Dicha fuerza impulsiva  $F'$  actúa durante un tiempo muy breve  $\Delta t$  y su impulso es  $J' = F' \Delta t$ . Como resultado del golpe, el cuerpo comienza a rotar alrededor del eje por  $O$ . Sea  $\omega$  la velocidad angular inmediatamente después del golpe. Como  $\Delta t$  es tan pequeño, durante el golpe la velocidad angular del cuerpo cambia ostensiblemente, pero su posición angular prácticamente no se altera, comportándose de modo análogo a una partícula bajo impacto, como estudiamos antes. La velocidad del centro de masa inmediatamente después del golpe es  $v_c = \omega d$ . Como resultado del golpe, el cuerpo ejerce sobre el eje, en general, una fuerza también impulsiva, de magnitud  $F$  e impulso  $J$ . De

acuerdo a la ley de acción-reacción, hay una fuerza de igual magnitud y dirección contraria hecha por el eje sobre el cuerpo.



Si el cuerpo está suspendido verticalmente actuarían también el peso y una reacción vertical en el eje, pero esas fuerzas no producen torques respecto a O ni tienen componente en la dirección del golpe. El cuerpo también podría estar sobre una superficie horizontal en cuyo caso la normal de la superficie equilibra el peso. Esas fuerzas no son relevantes para el estudio del golpe.

La ecuación fundamental de la rotación respecto al eje por O es, en dirección z,

$$\sum \tau_o = \frac{d L_o}{dt},$$

que, en el breve  $\Delta t$ , podemos escribir

$$F' (d + d') \Delta t = \Delta L_o,$$

$$J' (d + d') = \Delta L_o = I_o \omega, \quad (1)$$

impulso angular igual cambio en momentum angular. La ecuación fundamental para el centro de masa es, en x,

$$\sum F = \frac{d P}{dt},$$

$$(F' - F) \Delta t = \Delta P$$

$$J' - J = \Delta P = M v_c = M \omega d, \quad (2)$$

impulso neto igual cambio en momentum.

Si queremos que no se presente fuerza impulsiva en el eje, es decir  $F = 0$ ,  $J = 0$ , tendremos, de (2)

$$\omega = \frac{J'}{M d}.$$

Remplazando en (1) se obtiene, usando el teorema de los ejes paralelos,

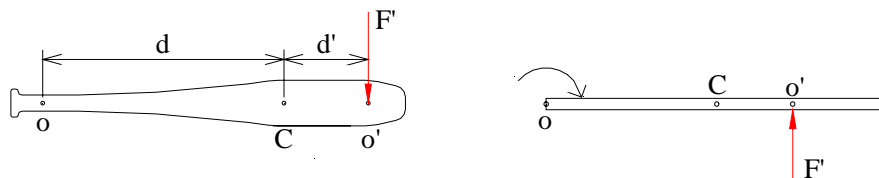
$$d + d' = \frac{I_o}{M d} = \frac{I_c + M d^2}{M d} = \frac{I_c}{M d} + d ,$$

y así,

$$d d' = \frac{I_c}{M} .$$

El punto  $O'$  que cumple esta relación es pues el punto en el cual puede golpearse el cuerpo sin que se presente fuerza impulsiva en el eje por  $O$ . Se dice que  $O'$  es el centro de percusión relativo al punto de suspensión  $O$ . La relación es recíproca de modo que  $O$  es el centro de percusión respecto a  $O'$ . Obsérvese que el centro de percusión coincide con el centro de oscilación que habíamos definido al estudiar el péndulo físico.

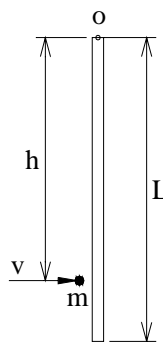
El bateador procura que el impacto con la bola sea en el centro de percusión, pues de lo contrario la fuerza impulsiva hecha por el bate hará cimbrar sus brazos de manera molesta. Seguramente es común el haber experimentado la penosa sensación de dar un golpe con una vara en punto diverso al centro de percusión.



El tope para detener una puerta que se abre, localizado en el centro de percusión, evitará fuerzas dañinas en los goznes.

Para afianzar el análisis del momentum y el momentum angular, propongamos un ejercicio vinculado con este clásico problema del centro de percusión:

## 7. EJERCICIO

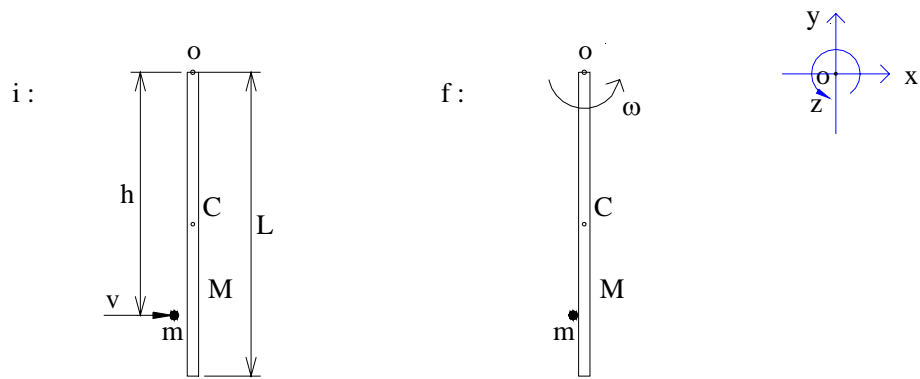


Una varilla homogénea de masa  $M$  y longitud  $L$  se encuentra en reposo suspendida verticalmente de un eje por  $O$ , perpendicular al plano de la figura. Una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $v$  choca plásticamente con la varilla, es decir, queda adherida a ella. El eje está fijo en el marco inercial del laboratorio. Tome como sistema mecánico el sistema de dos partes, la partícula y la varilla. Estudie el momentum angular del sistema compuesto y obtenga la velocidad angular inmediatamente después de la colisión.

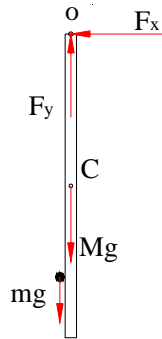
Situación inicial: instante antes de la colisión.

Situación final: instante después de la colisión, es decir en el momento en que la partícula tiene la misma velocidad que el punto de contacto en la barra.

Esquema de velocidades:



Las fuerzas externas sobre el sistema compuesto durante la colisión son



Debido al impacto sobre la varilla, hay, en general, una fuerza impulsiva  $F_x$  hecha por el eje, fuerza necesaria para mantener fijo el punto  $O$ . Como  $\sum \tau_o = 0$ , el momentum angular del sistema conjunto se conserva. Planteando la igualdad en dirección  $z$ , se obtiene

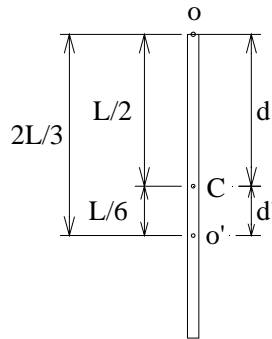
$$\omega = \frac{m v h}{\frac{M L^2}{3} + m h^2}.$$

Calcule el cambio en la componente  $x$  del momentum lineal del sistema durante la colisión y muestre que

$$\Delta P_x = \frac{M m v L (h - 2L/3)}{2 \left( \frac{M L^2}{3} + m h^2 \right)}.$$

En general el momentum en  $x$  del sistema no se conserva debido a la presencia de la fuerza externa, impulsiva,  $F_x$ . Para que el momentum en  $x$  se conserve, lo que equivale a decir que la fuerza impulsiva  $F_x$  se anula, se requiere

$$h = \frac{2L}{3}.$$



Esto sucede precisamente cuando la partícula golpea en  $O'$ , centro de percusión relativo a  $O$ . En efecto,

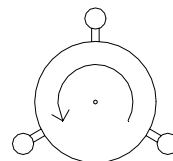
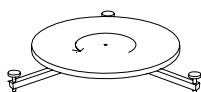
$$d' = \frac{I_c}{M d} = \frac{M L^2}{12} \cdot \frac{1}{M \left( \frac{L}{2} \right)} = \frac{L}{6}.$$

El punto  $O'$  corresponde también al centro de oscilación relativo a  $O$ , como lo estudiamos en el ejercicio 4.

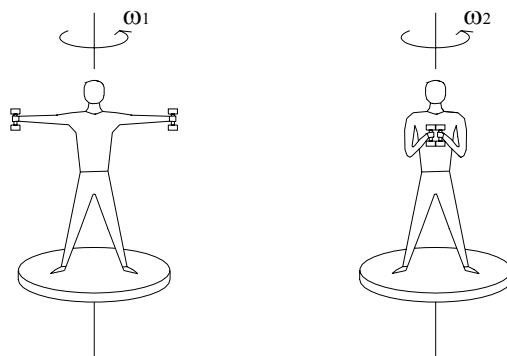
## 8. EJEMPLO

### Conservación del momentum angular

Mediante la ayuda de un banco rotatorio pueden realizarse experiencias demostrativas muy interesantes, que ilustran la conservación del momentum angular de un sistema.



El banco no es otra cosa que un disco horizontal, debidamente soportado sobre el piso para que pueda rotar libremente alrededor de un eje vertical. Un buen rodamiento garantiza que el torque de fricción con el eje es despreciable. Una persona se pone en pie sobre el disco, o podría sentarse en un banco apoyado en el disco.



Consideremos el sistema mecánico formado por el disco y la persona. El sistema conjunto puede rotar respecto a un eje vertical fijo. El disco es un cuerpo rígido, con un momento de inercia constante respecto al eje de rotación. La persona en cambio es un sistema flexible, cuyo momento de inercia respecto al eje de rotación puede variar un poco. En efecto, si tiene los brazos cruzados en el pecho, la masa se encuentra muy próxima al eje y el momento de inercia es mínimo. En cambio, si extiende los brazos hacia los lados, una parte de la masa está más alejada del eje y el momento de inercia global aumenta un poco. Para hacer más drástica esta variación del momento de inercia, el experimentador toma en sus manos un par de objetos masivos, por ejemplo un par de pesas o mancuernas. Así, la masa que se acerca y se aleja del eje es mayor y aumenta la diferencia entre el momento de inercia total del sistema compuesto persona-disco con brazos extendidos,  $I_1$ , y con brazos cruzados,  $I_2$ .

Las fuerzas externas sobre el sistema compuesto son: el peso del disco, el peso combinado de la persona con sus pesas, cuyo centro de gravedad está sobre el eje de rotación, y la fuerza vertical hecha por el soporte. Estas fuerzas no producen torque respecto al eje de rotación. Las únicas fuerzas que pueden producir un torque respecto al eje de rotación son fuerzas con una componente en un plano horizontal. Tampoco hay en el eje torque de fricción y entonces, como la suma de torques externos respecto al eje de rotación es cero, el momentum angular del sistema en dirección del eje se conserva.

En dirección del eje:  $\sum \tau = 0 = \frac{dL}{dt} \Rightarrow L : \text{constante.}$

Sin la intervención de torques externos en dirección del eje no puede entonces modificarse el momentum angular del sistema. Supongamos que el experimentador está inicialmente con sus brazos extendidos. Mediante la aplicación de un torque externo se pone el sistema en rotación. Esto puede obtenerse, bien por el propio experimentador apoyando uno de sus pies en el piso, bien por una persona externa que mediante una fuerza lateral lo ponga en rotación. Llamemos  $\omega_1$  la velocidad angular de rotación del sistema. Mientras el momento de inercia permanezca constante, dicha velocidad angular será constante. Pero si la persona lleva las

pesas hacia el centro, el momento de inercia disminuye hasta su valor  $I_2$  y en consecuencia la velocidad angular de rotación aumenta hasta  $\omega_2$ .

$$L = \text{constante} = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Si vuelve a extender sus brazos, la velocidad angular disminuye de nuevo.

Un patinador o una bailarina que describen rápidos giros respecto a un eje vertical, constituyen un ejemplo análogo de la conservación del momento angular. Alejando los brazos y la pierna que no es de apoyo, se maximiza el momento de inercia y en esta situación, apoyándose adecuadamente en el piso, se produce la rotación inicial, proporcionándose un momentum angular en dirección del eje vertical de rotación. Para aumentar la velocidad angular de rotación, los brazos y piernas se acercan lo más posible al eje, disminuyendo así el momento de inercia. Para disminuir la velocidad, la bailarina aleja sus brazos y su pierna libre. Un gimnasta que hace giros respecto a una barra horizontal utiliza el mismo principio.

La ecuación  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  es también válida respecto al marco de referencia del centro de masa.

Cuando un clavadista está en el aire, despreciando la fricción, la fuerza externa es el peso cuyo torque respecto al centro de masa es cero. El momentum angular respecto al centro de masa es entonces constante. Inicialmente, al apoyarse en el trampolín, el clavadista se proporciona un momentum angular respecto a un eje horizontal por su centro de masa. Si tiene el cuerpo muy extendido, la velocidad de rotación respecto a dicho eje es baja. Si recoge su cuerpo, la velocidad de rotación aumenta al disminuir el momento de inercia. Antes de caer al agua extiende de nuevo el cuerpo para disminuir la velocidad angular.

Retornemos al experimentador con sus pesas, girando en el banco rotatorio. En la situación 1, brazos extendidos, y en la situación 2, brazos recogidos, las energías cinéticas del sistema son,

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2.$$

Como  $\omega_2 > \omega_1$ ,  $K_2 > K_1$  y la energía cinética del sistema aumenta. El teorema del trabajo y la energía afirma que  $W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K$ . En nuestro caso no hay trabajo de las fuerzas externas de modo que el aumento de la energía cinética del sistema al acercar al eje las mancuernas, se debe enteramente al trabajo, positivo, de las fuerzas internas.

$$W_{\text{int}} = \Delta K > 0.$$

En efecto, el experimentador ejerce sobre las masas que tiene en sus manos una fuerza centrípeta, necesaria para mantenerlas en movimiento circular. Al acercarlas al eje, fuerza interna y desplazamiento relativo están en la misma dirección y el trabajo interno es positivo.

## 8.5 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO PLANO

Consideremos un cuerpo rígido que se mueve con movimiento plano respecto a un marco inercial de referencia. Como vimos en la descripción cinemática, dicho movimiento puede ser visto como una superposición de una traslación del centro de masa y una rotación respecto a un eje por el centro de masa y perpendicular al plano del movimiento. Este eje tiene pues una dirección constante. Desde el punto de vista del marco inercial es un eje que se traslada, manteniéndose paralelo a sí mismo. Desde el punto de vista del marco del centro de masa es un eje fijo. Como dijimos, los cuerpos que vamos a estudiar tienen ejes de simetría por C, o bien son cuerpos contenidos en un plano y así, dinámicamente, el eje de rotación por C es un eje principal de inercia, de modo que el momentum angular del cuerpo respecto a C, que llamamos antes  $\vec{L}'$  pero escribiremos ahora como  $\vec{L}_c$ , es un vector con la misma dirección de la velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Si llamamos  $I_c$  al momento de inercia respecto al eje de rotación por C,  $\vec{L}_c = I_c \vec{\omega}$ , relación que podemos escribir simplemente como

$$L_c = I_c \omega ,$$

en la dirección del eje de rotación.

La relación fundamental para un sistema de partículas, torque igual derivada del momentum angular, es válida, como mostramos, respecto al marco de referencia del centro de masa, tomando el torque y el momentum angular respecto a C, independientemente de que el centro de masa tenga o no aceleración. La relación es aplicable a un cuerpo rígido, caso especial de un sistema de partículas, y entonces el movimiento de rotación del cuerpo respecto al eje por C, eje principal de inercia fijo en el marco C, es simplemente

$$\sum \tau_c = \frac{d L_c}{d t} = \frac{d (I_c \omega)}{d t}$$

$$\boxed{\sum \tau_c = I_c \alpha} .$$

El movimiento del centro de masa se estudia con la ecuación básica

$$\boxed{\sum \vec{F} = M \vec{a}_c} ,$$

eligiendo componentes en direcciones adecuadas, según la trayectoria de C.

La energía cinética de un sistema de partículas, según el teorema de König, es

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + K' ,$$

donde  $K'$  es la energía cinética respecto al marco de referencia del centro de masa. En el caso del movimiento plano del cuerpo rígido, como el movimiento respecto al marco C es una rotación respecto a un eje fijo en ese marco y por C,



$$K' = \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

y la energía cinética total del cuerpo rígido respecto al marco inercial es

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 .$$

Si el cuerpo rígido tiene un movimiento de pura traslación,  $\omega = 0$ ,  $\alpha = 0$ , su energía cinética es simplemente  $K = \frac{1}{2} M v_c^2$  y además  $\sum \tau_c = 0$ . La rotación respecto a un eje fijo por O en un marco inercial es un caso particular del movimiento plano. Si el eje no pasa por C, la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} I_o \omega^2 .$$

Llamando  $d$  a la distancia OC, con  $v_c = \omega d$ , y usando el teorema de los ejes paralelos, tendremos

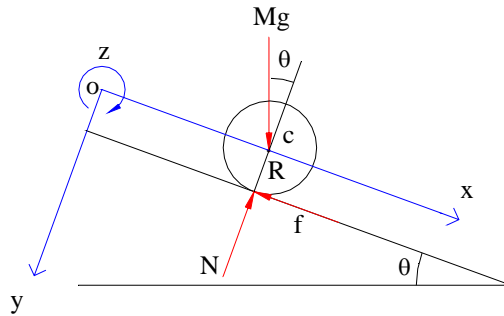
$$K = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} (I_c + M d^2) \omega^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 ,$$

y la energía de rotación respecto al eje fijo puede verse también como la suma de una energía correspondiente a la traslación de C más otra energía correspondiente a la rotación respecto a un eje paralelo por C, con la misma velocidad angular  $\omega$ , tal como corresponde a un movimiento plano cualquiera.

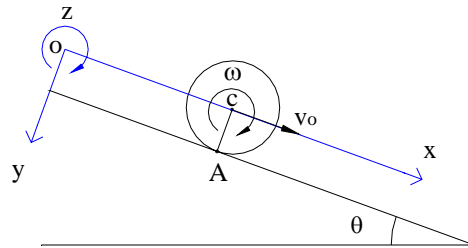
## 1. EJEMPLO

### Cuerpos que ruedan por un plano inclinado

El movimiento de un sólido de revolución que baja rodando por un plano inclinado es un problema clásico que vamos a estudiar tanto desde el punto de vista de las fuerzas y los torques como del trabajo y la energía. El cuerpo, simétrico respecto al plano representativo, tiene un momento de inercia  $I_c$  respecto al eje de rotación por el centro de masa. Son especialmente importantes 4 cuerpos: un cilindro macizo, un cilindro hueco o tubo cilíndrico de pared delgada, una esfera maciza y una esfera hueca o cascarón esférico, también de pared delgada. Sea  $R$  el radio. Supongamos, en primera instancia, que el cuerpo rueda sin deslizar, hacia abajo por el plano inclinado. El sistema mecánico es el cuerpo rodante, cuerpo rígido con movimiento plano. El marco inercial es el propio plano inclinado. Respecto a él la velocidad y la aceleración del centro de masa son  $v_c$  y  $a_c$ . El marco de referencia del centro de masa, no inercial, se traslada hacia abajo por el plano inclinado. Respecto a un eje fijo en este marco, por C y perpendicular al plano del movimiento, el cuerpo rota con velocidad y aceleración angulares  $\omega$  y  $\alpha$ . El diagrama de fuerzas en situación general es



Los ejes dibujados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , están fijos respecto al marco inercial, es decir al plano inclinado. Los ejes del marco  $C$  en traslación son paralelos a esos y con origen en  $C$  y no es necesario dibujarlos. La fuerza de contacto hecha por el plano sobre el cuerpo tiene una componente normal  $N$  y una componente tangencial que es la fuerza de fricción  $f$ .



Sea  $A$  el punto de la rueda que en un instante  $t$  está en contacto con el plano. Como rueda sin deslizar, la velocidad de  $A$  respecto al plano inclinado es nula. La componente  $x$  es

$$v_A = 0 = v_{A/C} + v_C = -\omega R + v_C$$

y obtenemos así la relación ya conocida

$$v_C = \omega R,$$

que, derivando respecto al tiempo, queda

$$a_C = \alpha R. \quad (1)$$

Obsérvese que la velocidad angular  $\omega$  es positiva con la elección del eje  $z$  que hemos hecho, precisamente por esa razón. De manera análoga se ha elegido el eje  $x$  para tener  $v_C$  positiva. El eje  $y$ , cuya dirección no es tan relevante aquí, se elige de modo que el triedro sea derecho.

Como es nula la velocidad del punto  $A$  en el cual está aplicada la fricción en el instante  $t$ , esta fricción es estática.

Las componentes de la velocidad y aceleración de  $C$  en el eje  $y$  son cero y así las ecuaciones del movimiento del centro de masa son

$$\sum F_x = M a_{cx} : M g \sin \theta - f = M a_c \quad (2)$$

$$\sum F_y = M a_{cy} : M g \cos \theta - N = 0 .$$

La ecuación de rotación respecto al eje por C, fijo en el marco de referencia C, es, en dirección  $z'$ , eje paralelo a  $z$  y por C,

$$\sum \tau_c = I_c \alpha : f R = I_c \alpha . \quad (3)$$

Como la fuerza de fricción estática está regida por una desigualdad,  $f \leq \mu_e N$ , el valor exacto que toma no es conocido y por eso es una incógnita en el problema. De la ecuación de  $\sum F_y$  se halla directamente  $N$  y por eso no la hemos numerado. Tenemos así un problema con las tres ecuaciones numeradas, para las incógnitas  $a_c$ ,  $\alpha$  y  $f$ . Al resolverlo se obtiene

$$a_c = \alpha R = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_c}{M R^2}}$$

$$f = \frac{M g \sin \theta}{\frac{M R^2}{I_c} + 1} .$$

Para el caso de una esfera maciza,  $I_c = \frac{2}{5} M R^2$  y entonces,

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin \theta = \alpha R$$

$$f = \frac{2}{7} M g \sin \theta .$$

Obsérvese que la aceleración del centro de masa es independiente del tamaño de la esfera maciza. Como, de  $\sum F_y = 0$ ,  $N = M g \cos \theta$ , si  $\mu_e$  es el coeficiente estático de fricción entre la esfera y el plano,

$$f \leq \mu_e N ,$$

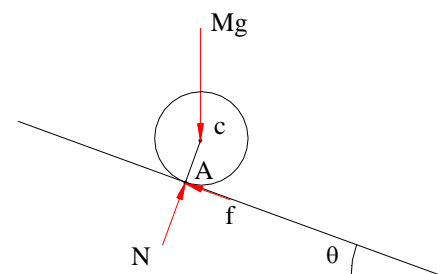
$$\frac{2}{7} M g \sin \theta \leq \mu_e M g \cos \theta ,$$

y así  $\tan \theta \leq \frac{7}{2} \mu_e .$

Sólo con esta condición será posible que la esfera maciza ruede sin deslizar. Si el ángulo  $\theta$  es mayor, la esfera rueda y desliza como estudiaremos en otro problema.

Dejamos al lector los cálculos de  $a_c$  y de  $f$  correspondientes a la esfera hueca, al cilindro macizo y al cilindro hueco, así como la respuesta a este interrogante: ¿Cuál es el orden de llegada a la base de un plano inclinado, si los cuatro cuerpos se sueltan desde el reposo y sus centros recorren la misma distancia?

Miremos ahora el problema desde el punto de vista del trabajo y la energía. Volvamos al diagrama de fuerzas externas para analizar sus trabajos.



El peso  $Mg$  no ofrece dificultad, es una fuerza conservativa, y su trabajo se calcula como  $-\Delta U$ , siendo  $U$  la energía potencial,  $U = Mgh$ , y  $h$  la altura hasta el centro de masa desde el nivel de referencia.

Pero en el trabajo de las fuerzas de contacto hay un asunto novedoso. Como el cuerpo rueda, en cada instante las fuerzas  $N$  y  $f$  están aplicadas en puntos diversos del cuerpo. ¿Cómo calcular entonces el trabajo realizado? Recordemos que una de las expresiones que hemos presentado para el trabajo efectuado por una fuerza es

$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt .$$

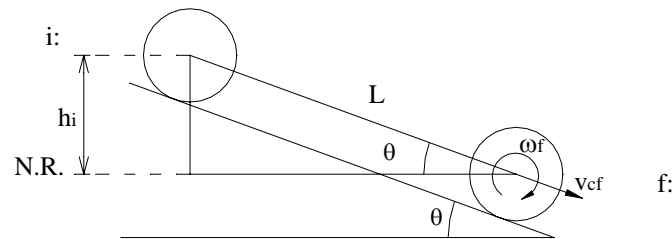
Esta es la expresión que requerimos, en la cual  $\vec{v}$  es la velocidad instantánea, respecto al marco inercial, del punto del cuerpo sobre el cual está aplicada la fuerza. En este caso, para los trabajos de  $N$  y  $f$ , el punto de aplicación es  $A$ , cuya velocidad instantánea es nula,  $\vec{v}_A = 0$ , pues el cuerpo rueda sin deslizar, y así  $W^N = 0$ ,  $W^f = 0$ . La fuerza de fricción estática en el rodamiento no efectúa trabajo. El teorema del trabajo y la energía queda entonces

$$W^{Mg} = -\Delta U = \Delta K ,$$

y hay conservación de la energía mecánica, pese a la existencia de esa fricción estática. La energía cinética tiene dos partes y entonces

$$K + U = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + Mgh = \text{constante} .$$

En la situación inicial el cuerpo se suelta, en la final el centro de masa ha recorrido  $L$ .



$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

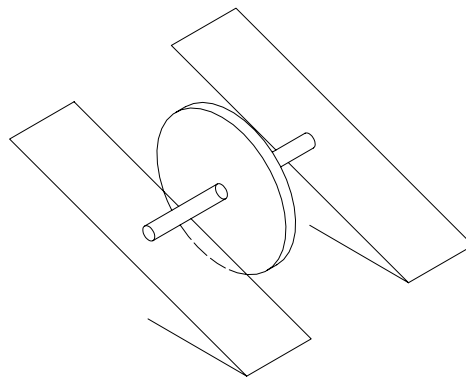
$$M g L \sin \theta = \frac{1}{2} M v_{cf}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_f^2,$$

con  $v_c = \omega R$ , particularizando en la situación f,  $v_{cf} = \omega_f R$ ,

$$v_{cf} = \left[ \frac{2 g L \sin \theta}{1 + \frac{I_c}{M R^2}} \right]^{1/2},$$

que podemos escribir como  $v_{cf} = \sqrt{2 a_c L}$ , expresión bien conocida de la cinemática, que concuerda con la aceleración que hallamos antes.

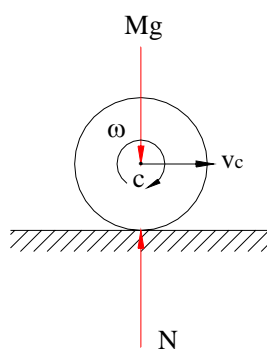
Si dos cuerpos de la misma forma geométrica e igual masa, uno hueco y otro macizo, se sueltan desde la misma posición sobre un plano inclinado y bajan rodando, tienen ambos la misma energía potencial en la situación inicial, pero la energía cinética no se reparte de igual forma entre energía de traslación y de rotación, pues el cuerpo hueco, al tener la masa más alejada del eje tiene mayor momento de inercia y una mayor proporción de la energía cinética es energía de rotación por lo cual su traslación es más lenta.



Una volante con gran momento de inercia que rueda sobre un eje de radio pequeño, bajará muy lentamente. Dejamos como ejercicio el comprobarlo, suponiendo una volante como un disco de masa  $m$ , de radio  $5r$  y un eje de masa despreciable y radio  $r$ , en cuyo caso

$$a_c = \frac{2}{27} g \sin \theta.$$

El análisis que hemos hecho de un cuerpo que rueda sin deslizar por un plano inclinado muestra que el cuerpo tiene una aceleración del centro de masa, un aceleración angular respecto al eje por  $C$  y una fuerza de fricción, que son proporcionales a  $\sin \theta$ . Si el ángulo de inclinación del plano se hace cero y la superficie de rodamiento es horizontal, la aceleración, la aceleración angular y la fuerza de fricción se anulan.



En este caso el cuerpo podría rodar indefinidamente con  $v_c$  y  $\omega$  constantes,  $v_c = \omega R$ , sin presencia de ninguna fricción y sin disipación de energía. Pero este movimiento indefinido es contrario a la experiencia, que muestra que una rueda poco a poco va atenuando su movimiento hasta detenerse. Lo que sucede es que, en nuestro problema ideal, hemos supuesto que tanto el cuerpo rodante como la superficie son absolutamente rígidos y que su contacto se limita a un punto y hemos entonces simplificado la interacción entre ellos. Realmente los cuerpos son en mayor o menor medida deformables y el contacto entre rueda y piso no es un punto sino una zona de contacto. La interacción en esa zona de contacto es más compleja que la interacción idealizada que hemos estudiado. Las fuerzas distribuidas en la zona de contacto no sólo tienen en general una resultante normal y de fricción, sino también un par que se opone a la rotación y cuyo torque es una resistencia al rodamiento, responsable de la detención de la rueda en el piso horizontal. Pero esa resistencia al rodamiento es usualmente muy pequeña y en muchas ocasiones puede despreciarse, como haremos en este estudio introductorio.

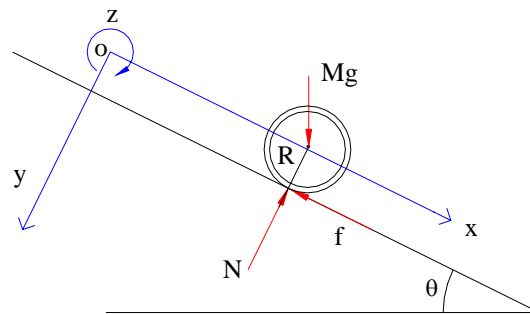
## 2. EJERCICIO

Un cilindro hueco de masa  $M$  y radio  $R$  baja por un plano inclinado un ángulo  $\theta$  con la horizontal. El coeficiente de fricción, tanto estático como dinámico, vale 0.25.

- a) Hallar el máximo ángulo para el cual puede bajar rodando sin deslizar.

- b) Si  $\theta = 45^\circ$ , ángulo mayor que dicho máximo, hallar la fuerza de fricción, ahora dinámica, la aceleración del centro de masa y la aceleración angular. Calcular además la velocidad del punto de contacto del cilindro con el plano inclinado, un segundo después de haberse soltado desde el reposo.

Sistema mecánico: El cilindro, cuerpo rígido en movimiento plano. Marco inercial: el plano inclinado. Ejes: fijos en un punto O del marco inercial. Los ejes del marco en traslación del centro de masa son paralelos. El eje  $x$  en dirección de  $v_c$ , el  $z$  en dirección de  $\omega$  y el  $y$  para triedro derecho. Diagrama de fuerzas en situación general:



- a) Como puede fácilmente verificarse, para rodar sin deslizar se requiere

$$\tan \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{y así, } \theta_{\text{máx}} = \arctan \frac{1}{2} = 26.56^\circ.$$

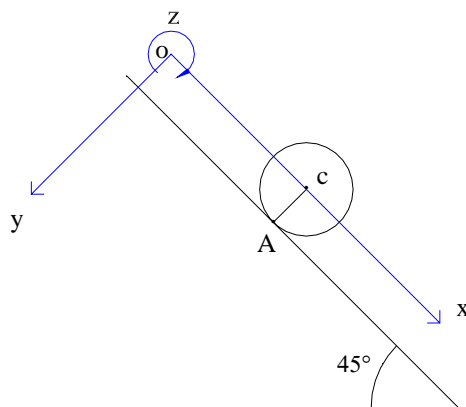
- b) Si  $\theta = 45^\circ > 26.56^\circ$ , el cuerpo rueda y desliza, habrá velocidad del punto de contacto, ya no se cumple que  $v_c = \omega R$ , y por tanto  $\alpha$  y  $a_c$  son independientes. En ese caso

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = \frac{\sqrt{2}}{2} Mg$$

$$f_{\text{dinámica}} = \frac{\sqrt{2}}{8} Mg$$

$$\sum F_x = M a_c \Rightarrow a_c = \frac{3\sqrt{2}}{8} g$$

$$\sum \tau_c = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g}{R}.$$



A : punto de la rueda en contacto con el piso.

En  $x$ :  $v_A = -\omega R + v_c$ .

Condiciones iniciales,  $t = 0$   $\left| \begin{array}{l} x_c = 0 \\ v_c = 0 \end{array} \right.$ ,  $\left| \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \omega = 0 \end{array} \right.$

Así,  $v_c = a_c t$ ,  $\omega = \alpha t$ , reemplazando  $a_c$  y  $\alpha$ , se obtiene

$$v_A = \frac{\sqrt{2}}{4} g t.$$

En  $t_1 = 1\text{ s}$ , con  $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,

$$v_{A1} = 3.46 \text{ m/s}, \text{ deslizando hacia abajo.}$$

### 3. EJEMPLO

Un yo-yo está formado por dos discos de radio  $R$ , unidos por un eje cilíndrico de radio  $r$  en el cual se encuentra firmemente enrollada una cuerda, de modo que no desliza respecto al eje. Cada disco tiene masa  $M/2$  y el eje puede considerarse de masa despreciable.

- a) Estudiar el descenso vertical del yo-yo y hallar la velocidad que adquiere su centro al descender una altura  $h$ , usando tanto fuerzas y torques como trabajo y energía.

Sistema mecánico: el yo-yo, cuerpo rígido en movimiento plano, con rotación respecto a un eje de simetría, de dirección fija, por  $C$ , eje principal de inercia. El trozo de cuerda ideal, sin masa, que en cada instante está en contacto con el eje del cilindro y se mueve solidariamente con él, forma parte del sistema.

El punto que sostiene la cuerda mientras el yo-yo desciende, bien sea un techo o la mano, está fijo en el marco inercial del laboratorio. Ejes fijos a dicho marco inercial:  $y$  hacia abajo en



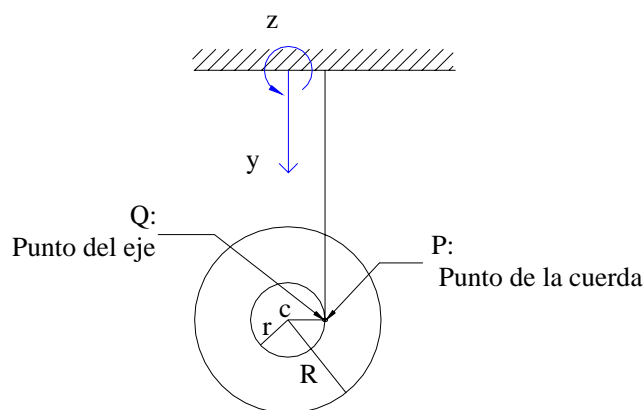
dirección de  $v_c$ ; el eje  $z$  en dirección de  $\omega$ . Recuérdese que los ejes del marco de referencia del centro de masa, en particular el eje  $z'$ , necesario para evaluar  $\omega$ ,  $\alpha$  y  $\tau_c$ , son paralelos respectivamente a los ejes del marco inercial y no los dibujamos en C para no recargar la figura.

El momento de inercia respecto al eje  $z'$  por C es

$$I_c = \frac{1}{2} \left( \frac{M}{2} \right) R^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{M}{2} \right) R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

y la masa total es M.

La relación cinemática entre la velocidad del centro de masa y la velocidad angular puede verse así



Todos los puntos de la cuerda inextensible desde el techo hasta el primer punto en contacto con el eje, punto P, están en reposo respecto al marco inercial y así  $v_p = 0$ . El punto Q del eje tiene respecto al techo una velocidad, en y,

$$v_Q = v_{Q/c} + v_c = -\omega r + v_c.$$

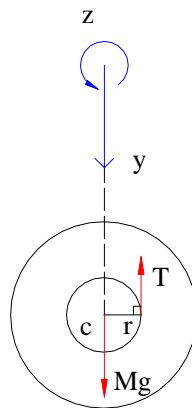
Asumiendo que la cuerda no desliza respecto al eje, la velocidad de P respecto a Q es cero y entonces

$$v_c = \omega r$$

y, derivando,

$$a_c = \alpha r.$$

El diagrama de fuerzas en situación general es



La suma de fuerzas, la suma de torques y la relación  $a_c = \alpha r$ , constituyen 3 ecuaciones para  $T$ ,  $a_c$ ,  $\alpha$ . Resolviendo se obtiene  $a_c$ , aceleración constante. Si se suelta desde el reposo, al descender  $h$ , se obtiene con la regla de la cadena,

$$v_c = \left[ \frac{2 g h}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^2} \right]^{1/2}.$$

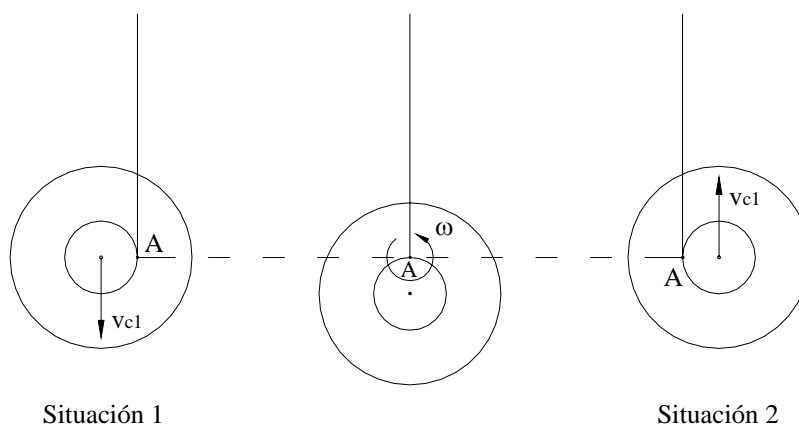
Este resultado es sencillo de cotejar por el método de trabajo y energía, teniendo en cuenta que el trabajo de  $T$  es nulo pues la velocidad instantánea de su punto de aplicación es, como vimos, cero.

Si la relación  $\frac{R}{r}$  es relativamente grande, la aceleración de descenso es muy baja y el yo-yo desciende muy lentamente. En un yo-yo común esa relación puede ser aproximadamente 10.

Si el yo-yo está subiendo el diagrama de fuerzas es idéntico y por tanto la aceleración y la tensión son las mismas. La tensión durante el descenso y durante el ascenso es constante y con una alta relación  $\frac{R}{r}$  es levemente inferior al peso.

Cuando la cuerda se desenrolla completamente, se experimenta un jalón o sacudida. La tensión media durante la sacudida puede estimarse de la siguiente manera. Supongamos que al desenrollarse toda la cuerda, su extremo inferior está firmemente sujeto al eje y no hay ningún deslizamiento. Otros yoyos diversos, llamados de rueda libre, permiten en cambio que el eje deslice respecto a la cuerda en la posición más baja.

El jalón de la cuerda transcurre entre una situación 1 en la cual  $C$  tiene una velocidad hacia abajo  $v_c$ , y una situación 2 en la cual  $C$  tiene una velocidad de igual magnitud pero ahora hacia arriba, suponiendo que la energía se conserva.



En el intervalo de tiempo transcurrido, el cuerpo ha girado media vuelta respecto al punto fijo A, extremo inferior de la cuerda. Asumamos como aproximación que dicho giro se ha obtenido con la velocidad angular  $\omega_1 = \frac{v_{c1}}{r}$  con la cual se llegó a la situación 1. El tiempo transcurrido durante el jalón es así

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi r}{v_{c1}},$$

que si  $\omega_1$  es grande es un tiempo pequeño.

Si  $T'$  es la tensión media durante la sacudida, la fuerza externa neta hacia arriba es  $T' - Mg$ , cuyo impulso es  $(T' - Mg)\Delta t$ , igual al cambio de momentum vertical  $\Delta P$ ,

$$(T' - Mg)\Delta t = \Delta P = 2 M v_{c1},$$

con lo cual

$$T' = Mg + \frac{2 M v_{c1}^2}{\pi r}.$$

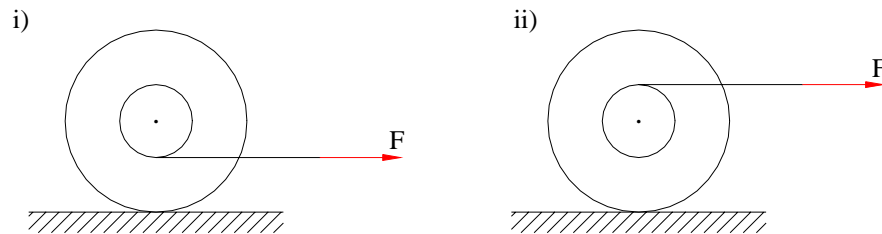
Si la longitud de cuerda que se ha desenrollado es  $L$ , como  $a_c$  es constante,

$$v_{c1}^2 = 2 a_c L$$

$$\text{y así, } T' = Mg \left( 1 + 4 \frac{a_c}{g} \frac{L}{\pi r} \right).$$

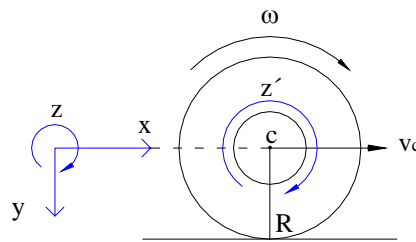
- b) Asumiendo que el yo-yo rueda sin deslizar por un piso horizontal rugoso cuando la cuerda se jala con una fuerza horizontal  $F$ , hallar en magnitud y dirección la aceleración

del centro de masa y la fuerza de fricción, tanto cuando la cuerda tensa está en la parte inferior del eje (i) como en la parte superior del eje (ii).



- i) Una realización experimental es muy importante para ilustrar el movimiento del yo-yo, que resulta poco intuitivo y sorprende al verlo avanzar hacia la derecha enrollando la cuerda.

Como estamos asumiendo que el cuerpo rueda sin deslizar, hay, como sabemos, una relación entre la velocidad del centro de masa y la velocidad angular. Si el cuerpo rueda avanzando hacia la derecha, una elección conveniente de ejes se ilustra:

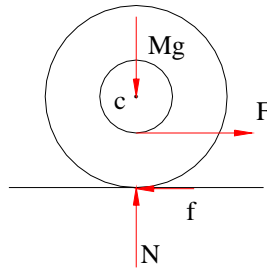


Hemos mostrado también la dirección de giro asociada con el eje  $z'$  por C, eje paralelo a  $z$ . En estos ejes  $v_c > 0$  y  $\omega > 0$  y la relación entre ellos es

$$v_c = \omega R, \quad \text{derivando,} \quad a_c = \alpha R.$$

La dirección de la fuerza de fricción estática en el punto de contacto, necesaria para que el cuerpo ruede sin deslizar, no es inmediata. Para estudiar dicha fricción se asume una de las dos direcciones posibles y se resuelve plenamente el problema, suponiendo que el cuerpo ruede sin deslizar. Si la fuerza  $f$ , que es una incógnita del problema, es positiva, la fricción estática será la dirección asumida, y si  $f$  es negativa será en la dirección contraria a la asumida. Además, para que sea posible rodar sin deslizar se requiere que  $|f| \leq \mu_c N$ , siendo  $\mu_c$  el coeficiente estático con el piso.

En este caso, tomando la fricción hacia la izquierda, el diagrama de fuerzas en situación general es



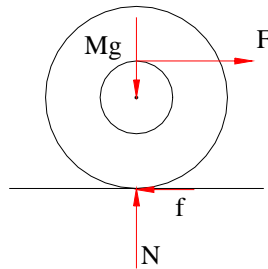
Las ecuaciones para el movimiento de C y la rotación respecto al eje por C, en los ejes elegidos, junto con la relación cinemática de rodamiento, permiten fácilmente hallar

$$a_c = \frac{2F}{3M} \left( 1 - \frac{r}{R} \right)$$

$$f = \frac{F}{3} \left( 1 + \frac{2r}{R} \right).$$

Como  $\frac{r}{R} < 1$ ,  $a_c > 0$  y  $f > 0$ , es decir la dirección asumida es correcta.

ii)



En este caso, asumiendo de nuevo la dirección de  $f$  hacia la izquierda y usando los ejes de i) se obtiene

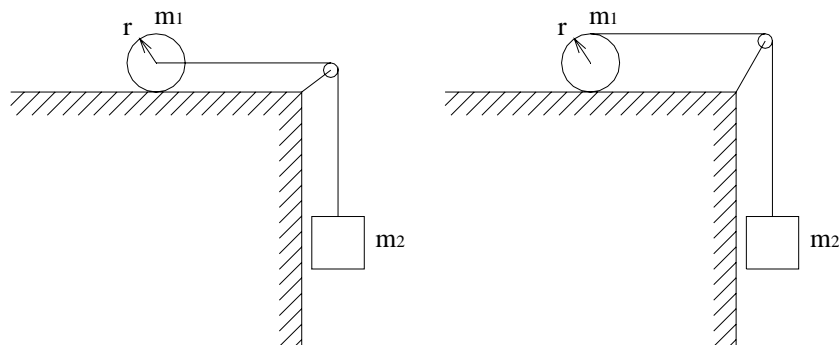
$$a_c = \frac{2F}{3M} \left( 1 + \frac{r}{R} \right)$$

$$f = \frac{F}{3} \left( 1 - \frac{2r}{R} \right).$$

Y así, si  $r = \frac{R}{2}$ ,  $f = 0$ , el yo-yo rueda sin deslizar sin necesidad de fricción. Si

$r < \frac{R}{2}$ ,  $f > 0$  y la fricción está en la dirección asumida. Si  $r > \frac{R}{2}$ ,  $f < 0$  y la fricción tiene dirección contraria a la asumida.

#### 4. EJERCICIO



Asumiendo que el cilindro macizo rueda sin deslizar y que la polea es ideal, hallar en ambos casos, tanto con cilindro jalado del eje como con cuerda enrollada, la aceleración de descenso de  $m_2$ .

Sean  $v_1$  y  $a_1$  la velocidad y aceleración del centro de masa del cilindro;  $\omega$  y  $\alpha$  la velocidad y la aceleración angulares;  $v_2$  y  $a_2$  la velocidad y la aceleración del bloque;  $T$  la tensión en la cuerda, igual a ambos lados de la polea ideal;  $f$  la fricción estática en el punto de contacto del cilindro con el piso. Los problemas tienen pues 5 incógnitas,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha$ ,  $T$  y  $f$ .

Las 5 ecuaciones son: las tres ecuaciones dinámicas:

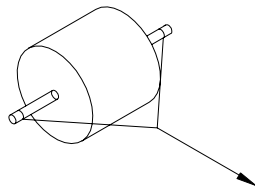
- (1) movimiento horizontal de C,
- (2) rotación respecto a eje por C,
- (3) movimiento de  $m_2$ ,

(no incluimos la ecuación en dirección vertical de C, que sirve para hallar la normal),

y dos ecuaciones cinemáticas:

- (4) relación de rodar sin deslizar,
- (5) relación entre los movimientos del cilindro y el bloque.

En esta última relación, si el cilindro está jalado del eje, como la cuerda es inextensible, las velocidades de C y de  $m_2$  son iguales; si la cuerda está enrollada, son iguales la velocidad de  $m_2$  y la velocidad instantánea del punto de arriba del cilindro.



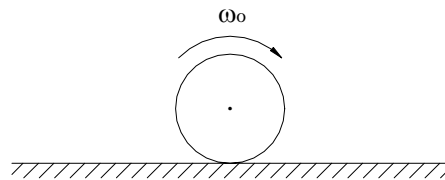
El cilindro debe jalarsse simétricamente del eje para que éste mantenga una dirección fija. En el caso de la cuerda enrollada mantener fija la dirección del eje para garantizar el movimiento plano puede presentar dificultades prácticas.

Los resultados para la aceleración de  $m_2$  son

$$\frac{2 m_2 g}{3 m_1 + 2 m_2} \qquad \frac{8 m_2 g}{3 m_1 + 8 m_2}$$

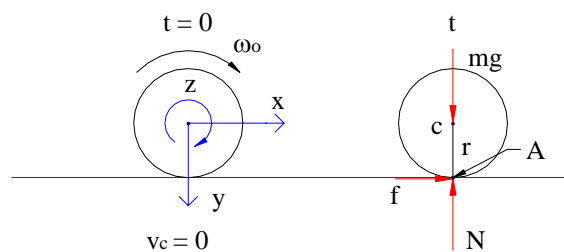
Este problema también puede estudiarse por el método del trabajo y la energía.

## 5. EJEMPLO



Un cilindro macizo de masa  $m$  y radio  $r$ , que rota con velocidad angular  $\omega_0$ , se coloca sobre un piso horizontal rugoso sin darle ninguna velocidad inicial al centro de masa y se deja libre. Estudiar su movimiento si el coeficiente cinético de fricción entre el cilindro y el piso es  $\mu$ .

Debido a que el punto de contacto comienza patinando hacia la izquierda respecto al piso inercial, aparece una fuerza de fricción dinámica hacia la derecha sobre el cilindro, cuerpo rígido en movimiento plano que es obviamente el sistema mecánico. Los ejes, las condiciones iniciales y el diagrama de fuerzas en situación general, mientras el cilindro está rodando y deslizando, son



En el eje  $y$ , con  $v_{cy} = 0 = a_{cy}$ ,

$$mg - N = 0,$$

$$N = mg,$$

y la fricción dinámica es

$$f = \mu N = \mu mg.$$

En  $x$  :  $f = m a_c \Rightarrow a_c = \mu g .$

Torques respecto a C, en  $z'$ :

$$-f r = I_c \alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{2\mu g}{r} .$$

Integrando, con la condición inicial,  $t = 0$ ,  $v_c = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ , se obtiene

$$v_c = \mu g t$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r} t .$$

La velocidad instantánea del punto A del cilindro en contacto con el piso es, en  $x$ ,

$$v_A = v_{Ac} + v_c = -\omega r + v_c$$

$$v_A = 3\mu g t - \omega_0 r = -(\omega_0 r - 3\mu g t)$$

Como efecto de la fuerza dinámica de fricción, la velocidad del centro de masa aumenta, la velocidad angular disminuye y la magnitud de la velocidad del punto de contacto disminuye. Llega así un momento, que llamaremos situación 1, en el cual la velocidad del punto de contacto se hace cero. A partir de ese momento el cilindro comienza a rodar sin deslizar. Esto sucede en  $t_1$  tal que

$$v_{A1} = 3\mu g t_1 - \omega_0 r = 0 ,$$

$$t_1 = \frac{\omega_0 r}{3\mu g}$$

$$v_{c1} = \frac{\omega_0 r}{3} = \omega_1 r$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{3} .$$

A partir de esta situación ya no hay deslizamiento ni fuerza de fricción. El cuerpo sigue rodando idealmente en forma indefinida. Realmente, como ya comentamos, hay una débil resistencia al rodamiento que termina por detener el movimiento.

Estudiemos ahora el trabajo realizado por la fuerza de fricción dinámica desde  $t = 0$  hasta  $t = t_1$ . El trabajo es

$$W^f = \int_0^{t_1} \vec{f} \cdot \vec{v}_A dt = - \int_0^{t_1} \mu mg (\omega_0 r - 3\mu g t) dt$$

integrando y remplazando  $t_1$



$$W^f = -\frac{1}{6} m \omega_0^2 r^2 .$$

Según el teorema del trabajo y la energía, ya que el trabajo de  $Mg$  es nulo, pues es perpendicular a  $\vec{v}_c$  y el trabajo de  $N$  es nulo por ser perpendicular a  $\vec{v}_A$ ,

$$W^f = \Delta K = K_1 - K_0 .$$

Podemos comprobar el valor del trabajo de esa fricción disipativa, calculando  $\Delta K$ .

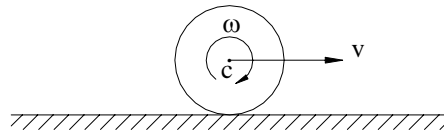
$$\Delta K = K_1 - K_0 = \frac{1}{2} m v_{c1}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_c \omega_0^2 .$$

Reemplazando los valores se obtiene fácilmente

$$\Delta K = -\frac{1}{6} m \omega_0^2 r^2 ,$$

en completo acuerdo con el trabajo de la fricción que habíamos calculado directamente.

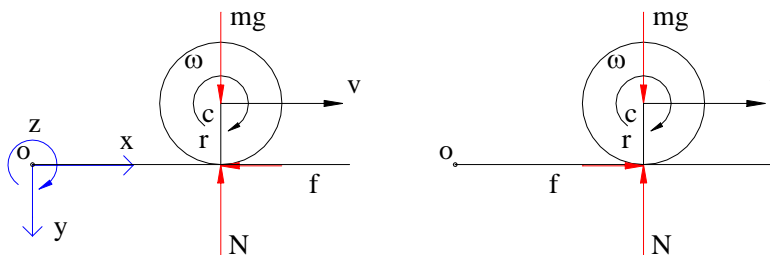
## 6. EJEMPLO



Un cilindro o una esfera ruedan deslizando con movimiento plano sobre una superficie horizontal. La masa es  $m$ , el radio es  $r$  y el momento de inercia respecto al eje por  $C$  es  $I$ . Si la velocidad del centro de masa es  $v$  y la velocidad angular es  $\omega$ , mostrar que durante el movimiento

$$m v r + I \omega = \text{constante},$$

- aplicando la ecuación  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  respecto a un punto  $O$  fijo en el piso horizontal,
- planteando las ecuaciones de movimiento de  $C$  y de rotación respecto a un eje por  $C$ .



La fuerza de fricción puede tener cualquiera de las dos direcciones mostradas, dependiendo de la dirección de la velocidad de deslizamiento del punto de contacto.

- a) Tomemos un punto O fijo en la superficie horizontal con los ejes mostrados.  $v$  y  $\omega$  son componentes positivas en los ejes  $x, z$ . Como en el eje  $y$  no hay movimiento de C,  $N = mg$  y entonces los torques de  $mg$  y  $N$  respecto a O se anulan. En cualquiera de los dos casos, el torque de  $f$  respecto a O es también cero. Así

$$\bar{\tau}_O = 0 = \frac{d\bar{L}_O}{dt} \Rightarrow \bar{L}_O \text{ es constante,}$$

el momentum angular respecto a O es constante. Recordemos que el momentum angular de un sistema de partículas y en especial de un cuerpo rígido, es

$$\bar{L}_O = M \bar{r}_C \times \bar{v}_C + \bar{L}'_C.$$

La primera parte corresponde al momentum angular de toda la masa, moviéndose con C y la segunda el momentum angular debido al movimiento respecto al marco C, que en nuestro caso es una rotación respecto a un eje fijo en ese marco de referencia C. Ambas partes tienen únicamente componente  $z$  y entonces

$$L_O = m r v + I \omega = \text{constante}.$$

$v$  y  $\omega$  pueden tener cualquier signo, según que el movimiento sea en las direcciones positivas o negativas de  $x, z$ .

- b) Las ecuaciones para el movimiento en  $x$  de C y para la rotación respecto al eje por C son

$$\mp f = m a, \quad \pm f r = I \alpha,$$

en los cuales el signo superior corresponde al diagrama de fuerzas de la izquierda y el inferior al diagrama de la derecha. Así,

$$f = \mp m a \Rightarrow \pm (\mp m a) r = I \alpha \Rightarrow m r a + I \alpha = 0,$$

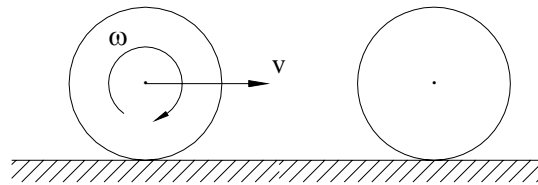
$$m r \frac{dv}{dt} + I \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (m r v + I \omega) = 0,$$

puesto que  $mr$  e  $I$  son constantes. Se obtiene entonces

$$m r v + I \omega = \text{constante}.$$

Esta expresión, válida en general cuando el cuerpo rueda y desliza, caso en el cual tanto  $\omega$  como  $v$  van variando, es también válida cuando el cuerpo rueda sin deslizar, caso en el cual  $f = 0$  y tanto  $v$  como  $\omega$  son constantes. Como una aplicación veamos el siguiente ejercicio:

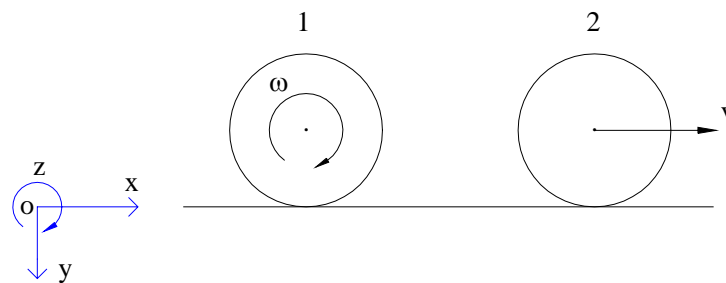
## 7. EJERCICIO



Una bola de billar rueda sin deslizar con velocidad de su centro igual a  $v$ . Choca frontalmente con otra bola idéntica que se encuentra en reposo. Frontalmente significa que  $\vec{v}$  está en dirección de la línea de centros. Suponiendo que la colisión es elástica y que durante ella no se afecta la velocidad angular de rotación, hallar las velocidades de traslación de las esferas una vez que están ambas rodando sin deslizar. Calcular además la fracción de energía perdida por el sistema de ambas esferas respecto a la energía inicial, debido a las fricciones por deslizamiento después de la colisión.

Sea  $m$  la masa,  $r$  el radio. Como la primera bola viene rodando sin deslizar,  $v = \omega r$ . El momento de inercia respecto al eje de rotación por C es  $I = \frac{2}{5} m r^2$ . Como en la colisión no se afecta la velocidad angular, lo cual es plausible si el contacto entre las dos bolas es liso, a diferencia del contacto bola-mesa que es rugoso, estamos en presencia de una colisión elástica entre dos masas iguales, una de ellas en reposo. Un instante después de esta colisión, que ya estudiamos antes, el centro de la primera bola queda en reposo y el centro de la segunda sale con  $v$ . En ese instante las velocidades angulares de ambas son las mismas que antes de la colisión. A partir de ese instante hay deslizamiento del punto de contacto en ambas, entra en juego la fricción dinámica con la mesa y se cumple entonces la relación  $m r v + I \omega = \text{constante}$  para cada bola, según lo demostramos en el ejemplo anterior.

Instante después del choque:



Planteando la constancia de  $m r v + I \omega$  para cada bola, con los ejes indicados, entre el instante después del choque y el momento en que cada bola comienza a rodar sin deslizar, y por tanto  $v_1 = \omega_1 r$ ,  $v_2 = \omega_2 r$ , tendremos

bola 1 : 
$$I \omega = m v_1 r + I \omega_1,$$

bola 2 :  $m v r = m v_2 r + I \omega_2 .$

Remplazando se tiene

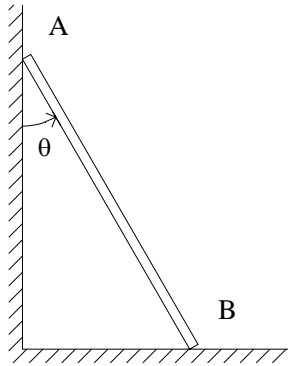
$$v_1 = \frac{2}{7} v$$

$$v_2 = \frac{5}{7} v .$$

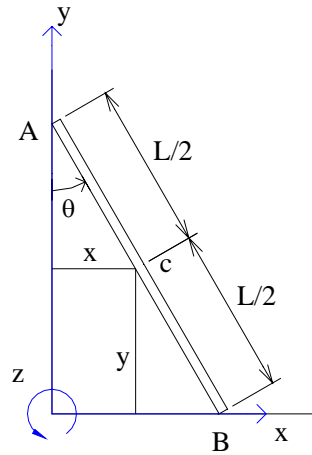
El cambio de energía debido a las fricciones dinámicas en ambas esferas puede calcularse fácilmente y la fracción de energía perdida respecto a la inicial será

$$\frac{|\Delta K|}{K_i} = \frac{20}{49} .$$

## 8. EJERCICIO



Una tabla de longitud  $L$  y masa  $M$  tiene un extremo apoyado en una pared vertical y el otro en una superficie horizontal. Ambas superficies son lisas. La tabla se suelta desde una situación inicial correspondiente a un ángulo  $\theta_0$  y comienza a descender con sus extremos apoyados en las superficies. La tabla es un cuerpo rígido en movimiento plano. Para estudiar dicho movimiento hay que estudiar tanto el movimiento del centro de masa como la rotación respecto al eje por  $C$ , perpendicular al plano del movimiento. El movimiento es de un grado de libertad. En efecto, dado el ángulo  $\theta$  queda completamente determinada la posición del cuerpo. Lo conveniente es así expresar las componentes de la posición, velocidad y aceleración del centro de masa en términos de  $\theta$ , de la velocidad angular  $\omega = \dot{\theta}$  y de la aceleración angular  $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ .



Las componentes de la posición general de C son

$$x = \frac{L}{2} \sin \theta$$

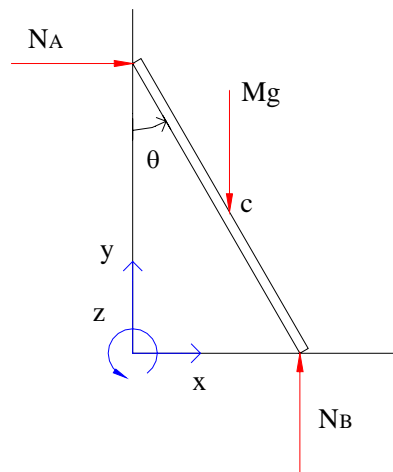
$$y = \frac{L}{2} \cos \theta .$$

Muestre que, derivando dos veces, se obtiene

$$a_{cx} = \ddot{x} = \frac{L}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta)$$

$$a_{cy} = \ddot{y} = -\frac{L}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta).$$

El diagrama de fuerzas en situación general es



Muestre que, planteando la ecuación de rotación respecto a un eje por C y las ecuaciones de movimiento de C en componentes  $x, y$ , se llega, después de un poco de álgebra, a

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \theta.$$

Integrando, con la regla de la cadena, y con condiciones iniciales  $t = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ , se llega a

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

Muestre ahora que la tabla se despegue de la pared vertical cuando la altura del extremo A es  $2/3$  de la altura inicial.

## 8.6 CONSIDERACIONES ELEMENTALES SOBRE EL MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

Las ecuaciones básicas de la dinámica de un cuerpo rígido son

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Aunque esas relaciones presentan una analogía formal, hay entre ellas diferencias muy importantes. En primer lugar, el momentum lineal puede escribirse de forma sencilla como  $\vec{P} = M \vec{v}_c$ , siendo  $M$  la masa del cuerpo, que es una cantidad escalar, de modo que  $\vec{P}$  y  $\vec{v}_c$  tienen siempre la misma dirección. Gracias a esta relación puede escribirse, para el movimiento del centro de masa,

$$\sum \vec{F} = M \vec{a}_c,$$

relación válida respecto a un marco inercial de referencia. En cambio, la relación entre el momentum angular respecto a un punto y la velocidad angular, es, en general, una relación matemática y físicamente mucho más compleja. Ya hemos dicho que en el caso general el momentum angular respecto a un punto no tiene la misma dirección que la velocidad angular, de modo que la conexión entre  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  no puede hacerse mediante una cantidad escalar como en el caso de  $\vec{P}$  y  $\vec{v}_c$ . En un estudio más avanzado del movimiento de los cuerpos rígidos, que excede los límites de esta introducción, se muestra que la relación entre el momentum angular respecto a un punto y la velocidad angular puede escribirse como  $\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$ , en la cual  $\mathbf{I}$  es una entidad matemática llamada tensor, en este caso el tensor de inercia respecto a

un punto. En unos ejes cartesianos, un vector puede representarse como una matriz fila o columna, con tres componentes,

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z),$$

y un tensor puede representarse como una matriz cuadrada,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

con 9 componentes. El tensor de inercia es simétrico y así el problema de saber en que circunstancias el momentum angular de un cuerpo rígido es paralelo a la velocidad angular, o sea  $\vec{L} = I \vec{\omega}$  con  $I$  escalar, equivale al problema

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega} = I \vec{\omega},$$

que es el problema de los valores y vectores propios de  $\mathbf{I}$ , conocido del álgebra lineal. Como  $\mathbf{I}$  es simétrico, hay en cada punto tres valores, llamados momentos principales de inercia y tres direcciones asociadas, llamadas direcciones principales de inercia, en las cuales  $\vec{L}$  está en dirección de  $\vec{\omega}$  y se cumple que

$$\vec{L} = I \vec{\omega},$$

siendo  $I$  un momento principal de inercia. Punto de gran relevancia es el centro de masa y el tensor de inercia respecto a él se llama el tensor central de inercia. Sus direcciones principales, como ya lo dijimos, están vinculadas con las simetrías del cuerpo. Por ejemplo, si un cuerpo tiene un eje de simetría, dicho eje es principal de inercia.

Las dificultades de la aplicación general de la ecuación  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , que es válida bien respecto

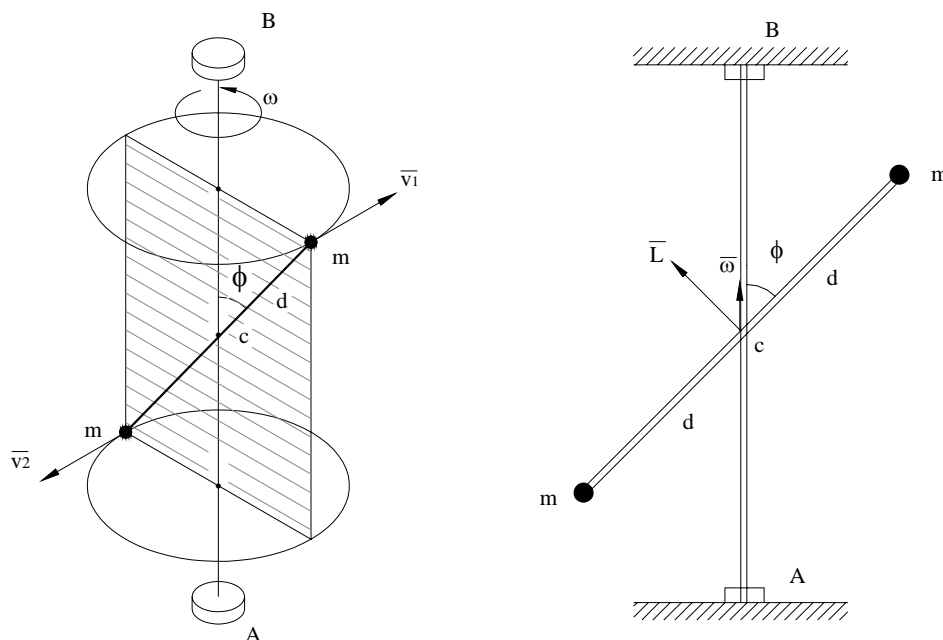
a un punto fijo en un marco inercial, bien respecto a  $C$  fijo en el marco en traslación del centro de masa, radican en el hecho de que la relación entre  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  es, en general, una relación tensorial. Además, el tensor de inercia es constante respecto a ejes fijos al cuerpo, pero dichos ejes varían de dirección respecto al marco inercial cuando el cuerpo rota en el espacio, y así la derivada temporal  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  se dificulta. Más aún, no hay unas coordenadas angulares sencillas,

simétricas, para definir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio, análogas a las coordenadas  $x, y, z$ , que existen para definir la posición de un punto. Por estas razones la rotación general de un cuerpo rígido no es un problema de la mecánica elemental. Hay, sin embargo, algunos aspectos importantes que pueden ser estudiados con relativa sencillez.

### 1. EJEMPLO. Ejes principales de inercia. Balanceo dinámico

Mencionemos en primer término la importancia dinámica de los ejes principales de inercia por el centro de masa. Son los únicos ejes alrededor de los cuales un cuerpo puede rotar con  $\vec{\omega}$  constante sin la acción de fuerzas ni torques externos. Veamos. Sea un cuerpo que rota respecto a un eje fijo, por ejemplo un eje montado en dos rodamientos fijos. Si el eje no pasa por el centro de masa  $C$ , este centro tendría un movimiento circular y habría por tanto una aceleración  $\vec{a}_c$  y  $\sum \vec{F}$  sería diferente de cero. Para que la fuerza externa neta sea nula se requiere que el eje pase por  $C$ . Si el eje no es un eje principal de inercia,  $\vec{L}$  no estará en dirección del eje y tendrá una componente rotante perpendicular al eje, que requiere la presencia de un par externo efectuado por los apoyos. Examinemos cuantitativamente esta situación en el caso de un cuerpo muy simple que rota respecto a un eje que no es principal.

Consideremos un cuerpo formado por dos masas iguales unidas por una varilla rígida de masa despreciable y longitud  $2d$ . La varilla está soldada por su punto medio a un eje vertical, igualmente de masa despreciable, que gira con velocidad angular constante, soportado por dos rodamientos en  $A$  y  $B$ , fijos en un marco inercial. La varilla forma un ángulo  $\phi$  con el eje de rotación

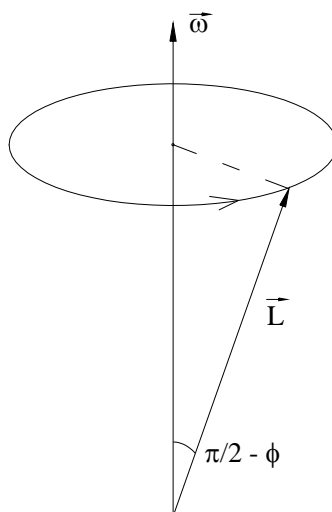


El plano determinado por el eje de rotación y la varilla se muestra sombreado a la izquierda y mirado de frente en el dibujo de la derecha. Dicho plano rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Como vimos en un ejemplo al estudiar el momentum angular de una partícula, el momentum angular de la partícula de arriba respecto al centro de masa  $C$ , es un vector rotante, contenido en el plano sombreado, perpendicular a la varilla y de magnitud  $L_1 = m d^2 \omega \sin \phi$ . Se muestra análogamente que el momentum angular respecto a  $C$  de la partícula de abajo es un vector igual, con lo que el momentum angular total del cuerpo rotante tiene magnitud



$$L = 2 m d^2 \omega \sin \phi ,$$

magnitud que es constante puesto que  $\omega$  es constante. El momentum angular es pues un vector rotante que describe un cono de ángulo  $\pi/2 - \phi$  alrededor del eje de rotación.



Estudiemos ahora el torque que debe actuar sobre el cuerpo según la relación  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .

Vamos a obtener la derivada del momentum angular de dos modos diferentes. En primer lugar veamos la estrecha analogía que hay entre el vector posición  $\vec{r}$  de una partícula que se mueve en círculo con velocidad angular  $\vec{\omega}$ , según vimos en la cinemática de la rotación respecto a un eje, numeral 8.3.2, y el vector  $\vec{L}$ , cuyo extremo describe un círculo con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Vimos allá que la derivada del vector rotante  $\vec{r}$ , de magnitud constante, podía expresarse como

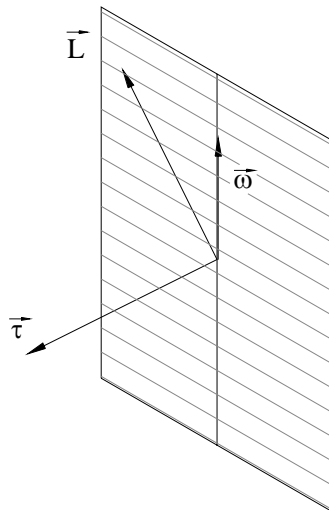
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} ,$$

vector, también rotante, perpendicular al plano de  $\vec{\omega}$  y  $\vec{r}$ , y que en ese caso tenía una interpretación física muy concreta, pues era el vector velocidad, usualmente dibujado en el extremo de  $\vec{r}$ .

Pues bien, de análoga manera, la derivada del momentum angular es en nuestro problema

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L} ,$$

vector, también rotante, perpendicular al plano de  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$ , es decir a nuestro plano sombreado, y que en este caso es el torque externo neto que actúa sobre el cuerpo, vector que suele dibujarse en el punto respecto al cual se toma, es decir en C.



La magnitud del torque es

$$\tau = \omega L \sin \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = 2 m d^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi .$$

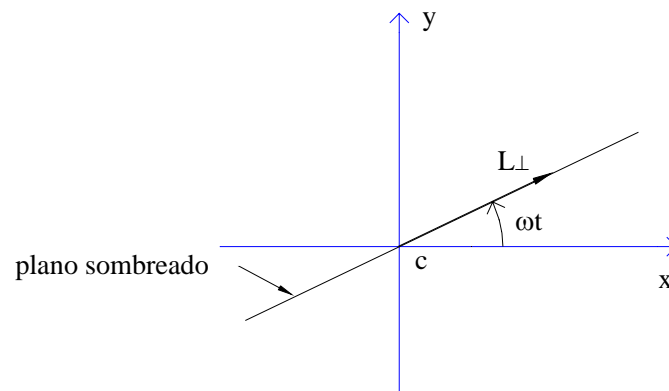
Para estudiar de otra manera la importante derivada de  $\vec{L}$ , descompongamos el vector en direcciones paralela y perpendicular al eje de rotación. La componente paralela tiene una magnitud.

$$L_{\parallel} = L \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = I \omega ,$$

igual, como ya sabíamos, al momento de inercia respecto al eje de rotación por  $\omega$ . Esa componente es constante en magnitud y dirección, de modo que su derivada es cero y no hay componente del torque en dirección del eje de rotación. La componente de  $\vec{L}$  perpendicular al eje tiene una magnitud

$$L_{\perp} = L \sin \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = L \cos \phi ,$$

y rota con velocidad angular  $\omega$ , manteniéndose en el plano sombreado. Haciendo un corte por un plano horizontal por C, dicha componente se vería así en un instante genérico t



Eligiendo unos ejes  $x, y$  fijos en el marco inercial y tomando como  $t = 0$  el momento en que el plano del cuerpo pasa por  $x$ ,  $L_{\perp}$  puede expresarse en esos ejes fijos como

$$L_{\perp x} = L \cos \phi \cos \omega t$$

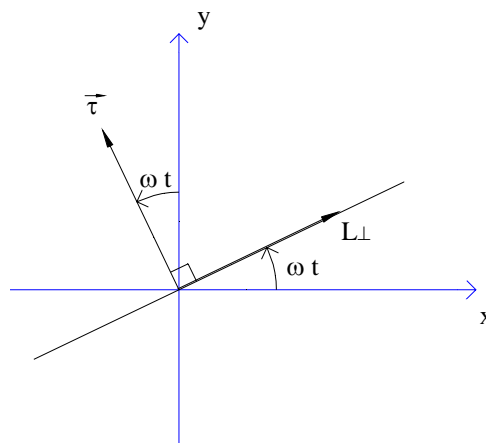
$$L_{\perp y} = L \cos \phi \sin \omega t .$$

Derivando,

$$\tau_x = - L \omega \cos \phi \sin \omega t$$

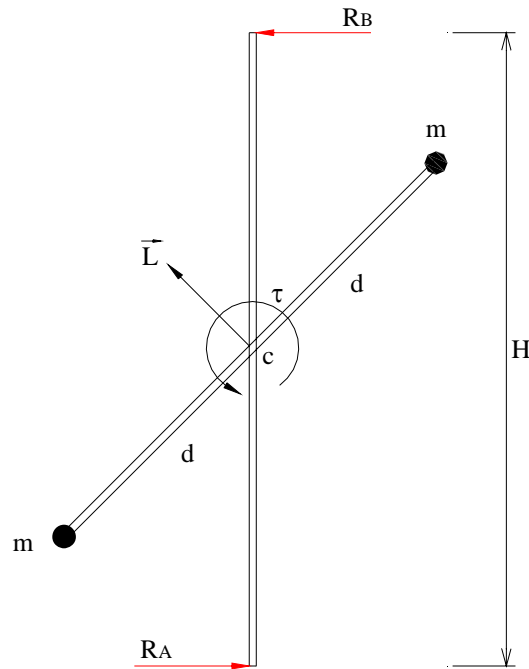
$$\tau_y = L \omega \cos \phi \cos \omega t ,$$

que son las componentes de un vector  $\vec{\tau}$  en el plano  $x, y$ , vector ortogonal al plano del cuerpo y de magnitud  $L \omega \cos \phi$ ,



en completo acuerdo con el resultado ya obtenido.

Ahora, ¿de dónde proviene ese torque externo rotante, perpendicular al eje de rotación? Veamos. Las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son: el peso de ambas masas, que podemos reemplazar por su sistema equivalente, peso total  $2mg$  en el centro de masa, fuerza equilibrada por una reacción vertical en el apoyo A. Como el centro de masa no se mueve pues está sobre el eje,  $\sum \vec{F} = 0$ , de manera que el sistema de fuerzas externas hechas por los rodamientos, exceptuando la reacción vertical que equilibra el peso, es un par cuyo torque es el que calculamos. Como el torque es perpendicular al plano del cuerpo, la pareja de reacciones en los rodamientos que produce dicho torque está en el plano del cuerpo y rota con él.

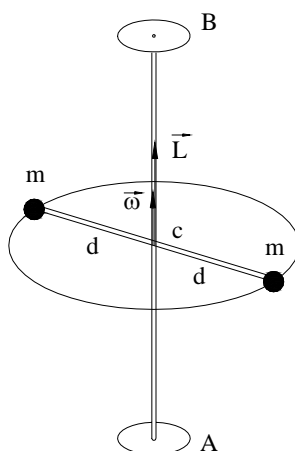


Esas reacciones, llamadas reacciones dinámicas, valen

$$R_A = R_B = \frac{\tau}{H} = \left( \frac{2 m d^2 \sin \phi \cos \phi}{H} \right) \omega^2 .$$

Esas fuerzas rotantes en los rodamientos, al ser proporcionales a  $\omega^2$ , se vuelven considerables para velocidades angulares grandes, produciendo vibraciones indeseables y desgaste en los apoyos. Un cuerpo como el que hemos estudiado, que rota respecto a un eje que no es un eje principal de inercia se dice que está dinámicamente desbalanceado.

En cambio, si el cuerpo rota respecto a un eje que pasa por C y es principal de inercia, el comportamiento es muy diferente. Consideremos por ejemplo la misma varilla con sus masas pero esta vez soldada a un eje de simetría por C y rotando con velocidad angular constante:



En este caso el eje de rotación es un eje principal de inercia por C y

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = 2 m d^2 \vec{\omega} ,$$

constante en magnitud y dirección. Por tanto

$$\vec{\tau} = \frac{d \vec{L}}{d t} = 0 ,$$

y además, como C está en el eje,

$$\vec{F} = M \vec{a}_c = 0 .$$

No hay torque externo neto ni fuerza externa neta. Las únicas fuerzas son el peso y la reacción vertical en el apoyo A que lo equilibra. Las reacciones son las mismas sea que el cuerpo se encuentre en reposo o en rotación uniforme. La rotación no induce pues ninguna fuerza de reacción en los apoyos y se dice entonces que el cuerpo está dinámicamente balanceado. Se busca con frecuencia que cuerpos que giran con velocidades angulares altas, como rotores de motores, como llantas de automóvil, estén dinámicamente balanceados para evitar nocivas reacciones dinámicas. Las máquinas de balanceo indican en que lugares del cuerpo es necesario añadir pequeñas masas para lograr dicho balanceo dinámico, es decir, para lograr que el eje de rotación sea un eje principal de inercia.

Volvamos a nuestro ejemplo de las dos masas girando con  $\vec{\omega}$  constante respecto al eje principal de inercia por C. Vimos que las únicas fuerzas son el peso, que actúa en C, y la reacción vertical en A. Si el eje es horizontal, hay simplemente reacciones estáticas en A y B que equilibran el peso, sin que la rotación haga aparecer ninguna fuerza adicional. Supóngase ahora que a ese cuerpo, rotando respecto a un eje principal de inercia, le quitamos los apoyos. Habrá un movimiento de traslación del centro de masa debido al peso pero, en ausencia de fuerzas como la fricción, respecto a C en el marco de referencia del centro de masa, el torque

neto es cero y como allí es válida la ecuación  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , el cuerpo mantiene su rotación con

$\vec{\omega}$  constante alrededor del eje principal de inercia por C. Los ejes principales de inercia por C son por eso llamados ejes de rotación libre o ejes permanentes de rotación. Son los ejes respecto a los cuales un cuerpo puede rotar manteniendo fija la dirección del eje de rotación sin torques externos. Si se lanza al aire un cuerpo, despreciando la fricción, el torque respecto al centro de masa es pues cero y por tanto hay conservación del momentum angular respecto a C,  $\vec{L}_C = \text{constante}$ . Pero en general  $\vec{\omega}$  no es constante. Sólo si la rotación es respecto a un eje principal será  $\vec{\omega}$  constante, lo cual depende de cómo se lance el cuerpo, es decir de las condiciones iniciales. Es interesante observar, por ejemplo, el movimiento de un bloque rectangular. Si se lanza de cualquier manera, describe unos complejos movimientos de cabeceo que corresponden a un momentum angular constante, pero a  $\vec{\omega}$  variable. En cambio, si se lanza rotando respecto a un eje perpendicular a su cara de mayor área, eje principal central de inercia, su movimiento se torna sencillo, mantiene constante su dirección de rotación, mientras el centro de masa describe, claro está, su movimiento parabólico. Si trata de lanzarlo rotando respecto a los otros ejes principales de simetría, probablemente podrá avizorar un problema más arduo, la estabilidad del movimiento de rotación: sólo son estables las rotaciones respecto a los ejes principales correspondientes a los momentos principales de inercia máximo y mínimo.

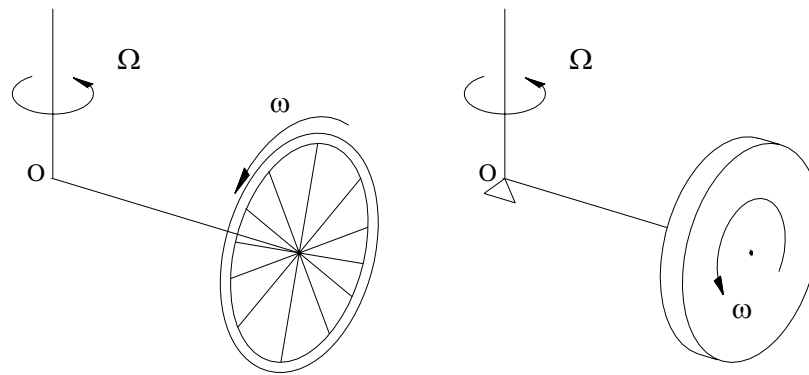
## 2. EJEMPLO

### Precesión uniforme de un giróscopo

Un giróscopo es un cuerpo rígido que rota con gran velocidad angular respecto a un eje, eje que puede tomar cualquier orientación en el espacio. Usualmente el cuerpo es simétrico respecto a su eje de rotación rápida. Es más, suele ser un sólido de revolución respecto a dicho eje. Hay giróscopos de muchas clases, por ejemplo, un trompo de juguete es un tipo de giróscopo de movimientos notables. Lo esencial de un giróscopo es una volante o rueda que tiene un eje con una suspensión adecuada que le permite variar libremente su dirección en el espacio.

Los giróscopos tienen gran riqueza de movimientos y encuentran numerosas aplicaciones. Su estudio detallado es un problema avanzado de la dinámica del cuerpo rígido. Nuestro propósito ahora es estudiar únicamente un caso particular, pero común e importante, del movimiento giroscópico, llamado movimiento de precesión uniforme, regular o estacionaria. Una rueda de bicicleta provista de un eje largo cuyo extremo se suspende de una cuerda vertical proporciona una demostración fácil de realizar, llamativa, sorprendente, de este movimiento.

Vamos a considerar un movimiento en el cual la rueda gira con rotación rápida, es decir con gran velocidad angular constante  $\omega$ , respecto a su eje geométrico. Esta rotación se llama la rotación propia del giróscopo. El eje de revolución de la rueda, que supondremos en el plano horizontal, rota a su vez respecto a un eje vertical con una pequeña velocidad angular constante  $\Omega$ . Esta rotación del eje se llama precesión uniforme o estacionaria y  $\Omega$  es la velocidad angular de precesión.

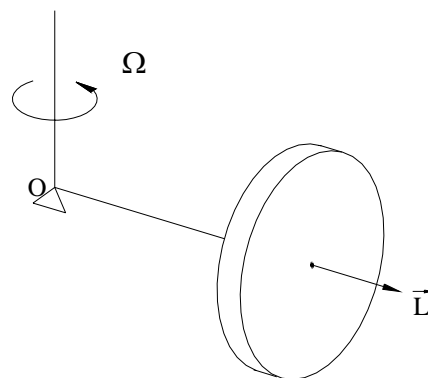


A la izquierda hemos dibujado la rueda de bicicleta suspendida de la cuerda vertical por el extremo O del eje. A la derecha representamos esquemáticamente la volante cuyo eje está apoyado en una articulación O. Un giróscopo de juguete con un eje terminado en una punta redondeada que se apoya en una cuenca semiesférica, permite también ver con claridad el movimiento de precesión.

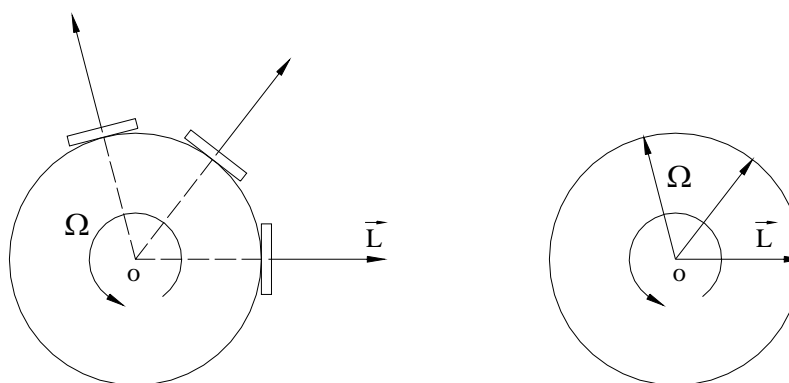
El momentum angular del giróscopo respecto al punto fijo O, es fundamentalmente el momentum angular debido a la rápida rotación propia respecto a su eje de revolución. Este momentum angular se suele designar con el nombre de spin y es un vector en dirección del eje de la rueda cuya magnitud es

$$L = I \omega ,$$

donde I es el momento de inercia de la rueda respecto a su eje de revolución.



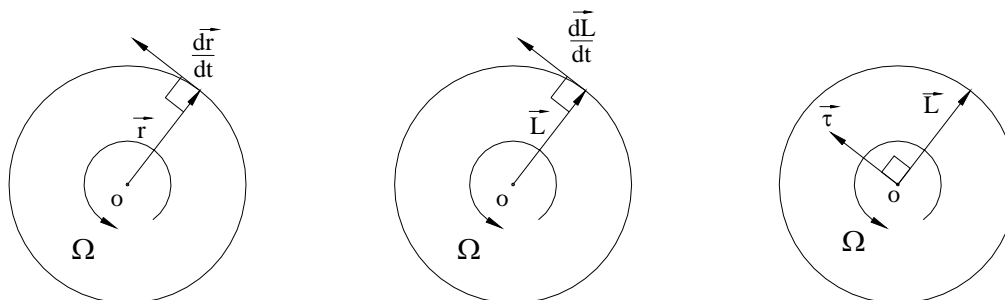
$\vec{L}$  es pues un vector rotante, de magnitud constante, que está en el plano horizontal por O, y que gira con el giróscopo a medida que éste precesa. Mirando desde arriba el plano horizontal,  $\vec{L}$  sería así:



En el gráfico de la izquierda hemos dibujado a  $\vec{L}$  como si tuviese origen en el centro de la rueda. Pero para estudiar su tasa de cambio es más conveniente dibujarlo con origen en O, como está a la derecha.

Debido al movimiento de precesión, hay también una contribución adicional al momentum angular respecto a O, pero como hemos asumido que  $\Omega$  es pequeña, podemos como aproximación despreciar esa contribución y considerar así que el momentum angular del giróscopo, es fundamentalmente igual al de la rotación propia,  $\vec{L}$ .

Para hallar la derivada temporal del vector rotante  $\vec{L}$ , usemos de nuevo la analogía con el vector posición  $\vec{r}$  que ya presentamos en el ejemplo anterior:



En el gráfico de la izquierda está un vector de posición  $\vec{r}$ , de magnitud constante, y que rota con velocidad regular  $\Omega$ , de modo que su extremo describe un círculo. La derivada temporal de  $\vec{r}$  es un vector perpendicular a  $\vec{r}$  en el sentido en que avanza el extremo por el círculo, y cuya magnitud es

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \Omega r,$$

vector que en este caso es simplemente el vector velocidad. En el gráfico central se muestra la situación completamente análoga para el vector momentum angular  $\vec{L}$ . Su derivada es un vector perpendicular a  $\vec{L}$ , es decir al eje de revolución del giróscopo y cuya magnitud es



$$\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \Omega L .$$

Ese vector es en este caso el torque externo neto y puede dibujarse en el punto O, como se indica a la derecha.

El hecho importante de que la derivada de un vector de magnitud constante pero dirección variable es perpendicular al vector puede verse algebraicamente así

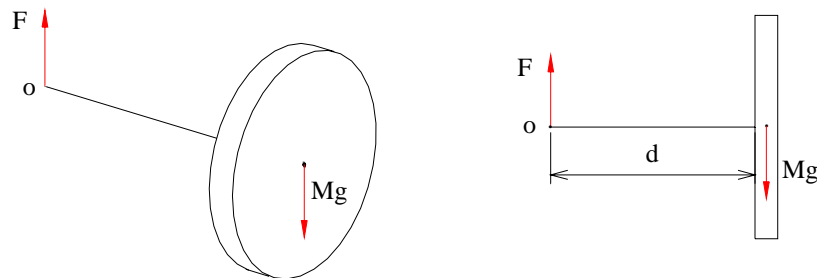
$$\vec{L} \text{ constante} \Rightarrow \vec{L} \cdot \vec{L} = \text{constante} .$$

Derivando,

$$2\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

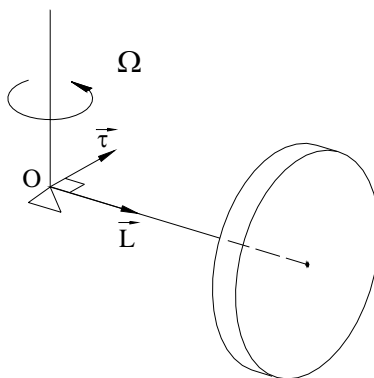
y por tanto  $\vec{L}$  y  $\frac{d\vec{L}}{dt}$  son ortogonales.

Veamos el diagrama de fuerzas externas sobre el cuerpo para ver de donde proviene ese torque.



Las fuerzas que actúan son el peso y la fuerza vertical por O, que puede ser la tensión de la cuerda o bien la reacción vertical del apoyo. El torque respecto al punto O es producido por el peso y es un vector en el plano horizontal, perpendicular al eje del giróscopo. Su magnitud es

$$\tau = Mgd .$$



La dirección de  $\vec{\tau}$  coincide pues con la que habíamos hallado para  $\frac{d\vec{L}}{dt}$ . Igualando las magnitudes

$$I \Omega \omega = M g d ,$$

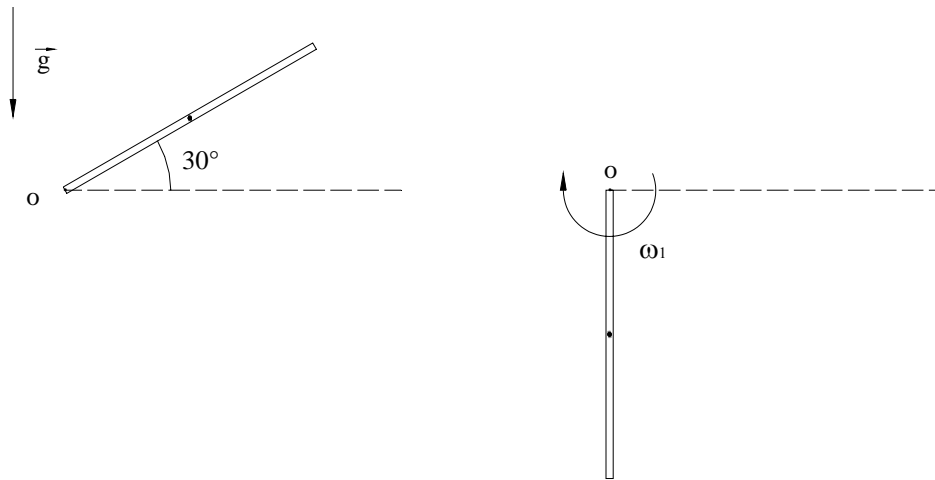
y la velocidad angular de precesión es en este caso

$$\Omega = \frac{M g d}{I \omega} .$$

Resulta sorprendente ver una rueda masiva, pesada, precesando mientras su eje se mantiene horizontal, sin caerse. Revisemos los conceptos para ver lo que sucede. Si no hay rotación de la rueda y  $\omega = 0$ , al soltar el eje desde la posición horizontal, el cuerpo se comporta como un péndulo físico. En este caso el torque del peso produce una aceleración angular en el plano vertical. Pero cuando hay rotación rápida de la rueda y ésta se encuentra precesando uniformemente, hay un momentum angular considerable en dirección del eje y en este caso el efecto del torque, perpendicular al momentum angular, es el de mantener la rotación uniforme del eje de revolución, modificando permanentemente la dirección de  $\vec{L}$ . La precesión uniforme es un caso particular del movimiento del giroscopo. En un movimiento más general, el extremo del eje opuesto al punto de suspensión realiza, además de la precesión, un movimiento oscilatorio vertical conocido como nutación. Sin embargo, en la demostración con la rueda de bicicleta que rota con velocidad angular alta, la amplitud de la nutación suele ser pequeña y el movimiento es prácticamente una precesión uniforme.

## PROBLEMAS

1.



Una barra de masa  $M$  y longitud  $L$  se suelta desde la posición mostrada y puede rotar en un plano vertical alrededor de un eje por  $O$ .

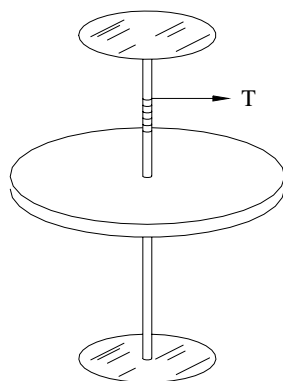
- Muestre con claridad la posición angular de la barra en situación general. Halle la aceleración angular. **Sugerencia:** Línea de referencia horizontal.
- Integre para obtener la velocidad angular en el punto más bajo. Halle allí la velocidad del centro de masa.
- Compruebe su resultado por el método de trabajo y energía

$$\omega_1 = 3 \sqrt{\frac{g}{2L}}$$

- Aplique la ecuación de movimiento del centro de masa en la posición particular más baja y calcule allí la fuerza hecha por el eje sobre la barra.

Vertical hacia arriba,  $\frac{13}{4} M g$

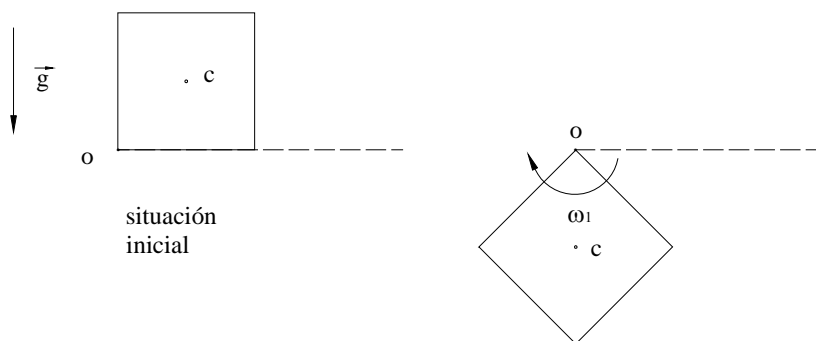
- Para poner en rotación rápida una pequeña volante de masa  $M = 0.1 \text{ kg}$  y radio  $R = 3 \text{ cm}$ , se enrolla firmemente una cuerda en su eje de radio  $r = 3 \text{ mm}$ , y se jala con una tensión constante  $T$  igual a 5 veces el peso de la volante.



Hallar la velocidad angular cuando se jala toda la cuerda, si inicialmente estaba enrollada 20 vueltas en el eje.

$$46 \frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

3.

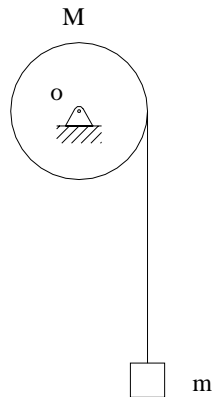


La placa cuadrada de lado  $L$ , se suelta desde la posición inicial mostrada y puede rotar en el plano vertical alrededor de un eje perpendicular a ella por  $O$ .

- Halle la aceleración angular e integre para obtener la velocidad angular en el punto más bajo. **Sugerencia:** Tome la horizontal como línea de referencia. El ángulo inicial será negativo.
- Corrobore su resultado por el método de trabajo y energía

$$\omega_1 = \left[ \frac{3}{2} \frac{g}{L} (\sqrt{2} + 1) \right]^{1/2}$$

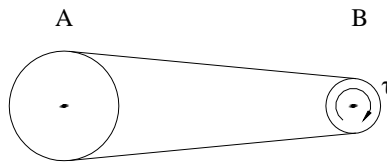
4.



Un bloque de masa  $m = 0.25 \text{ kg}$  está suspendido de una cuerda enrollada alrededor de una polea en forma de disco, de masa  $M = 1 \text{ kg}$  y radio  $R = 0.10 \text{ m}$ . Calcular el torque de fricción hecho por el eje sobre la polea si el bloque  $m$  tarda  $0.85 \text{ s}$  en descender  $1 \text{ m}$  soltado desde el reposo.

$$3.7 \times 10^{-2} \text{ N m}$$

5.



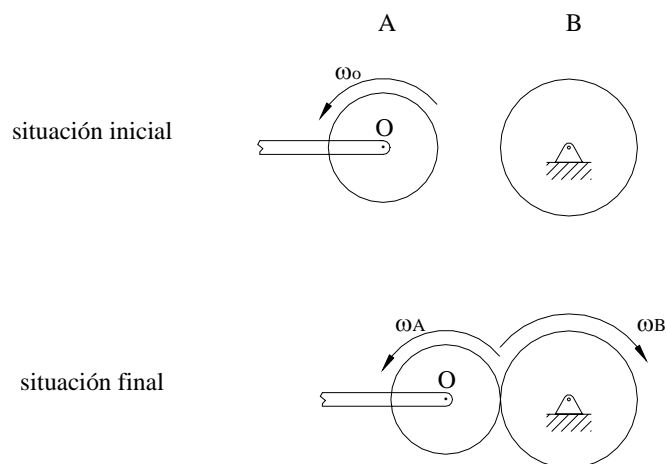
Dos discos A y B de masas  $M_A = 2 \text{ kg}$ ,  $M_B = 1 \text{ kg}$ , están unidos por una banda. Suponiendo que no hay deslizamiento entre la banda y los discos, hallar las aceleraciones angulares de los discos si al disco B se le aplica un par de torque  $\tau = 0.3 \text{ N m}$ . Los radios son  $r_A = 0.20 \text{ m}$ ,  $r_B = 0.10 \text{ m}$ .

**Sugerencia:** Aislar cada disco

$$\alpha_A = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha_B = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

6.



Inicialmente un disco A tiene una velocidad angular  $\omega_0$  y un disco B está en reposo. Los discos se ponen en contacto. En un comienzo hay deslizamiento entre ellos en el punto de contacto. Al cabo de un cierto tiempo, en la situación final, la velocidad relativa en el punto de contacto se anula. Hallar en esa situación las velocidades angulares de ambos discos. Las relaciones de masas y radios son  $\frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{r_B}{r_A} = \frac{4}{5}$ .

**Sugerencia:** Estudiar el cambio en el momentum angular, igual al impulso angular, para cada disco.

$$\omega_A = \frac{2}{3} \omega_0$$

$$\omega_B = \frac{5}{6} \omega_0$$

¿Qué fracción de energía respecto a la energía inicial se perdió en la interacción?

$$\frac{1}{3}$$

7. El centro de masa de un automóvil de peso  $W$  se encuentra en la mitad de la distancia entre las ruedas traseras y delanteras y a 0.60 m de altura sobre un piso horizontal. La distancia entre las ruedas es 2.40 m. Si el auto acelera a  $0.2g$ , ¿cuáles son las fuerzas normales en las ruedas delanteras y traseras?

**Sugerencia:** Tome el auto como cuerpo rígido en traslación. Entonces no hay rotación respecto al marco C y  $\sum \tau_c = 0$ .

Adelante 0.45 W

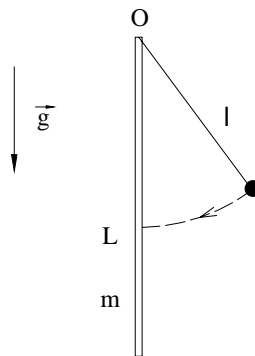
Atrás 0.55 W

¿Y si el automóvil estuviese subiendo una pendiente de  $15^\circ$  con la misma aceleración?

Adelante 0.37 W

Atrás 0.60 W

8.



Una barra de longitud  $L$  y masa  $m$  puede rotar en un plano vertical respecto a un eje por su extremo  $O$ . En el mismo plano un péndulo simple de igual masa  $m$  y longitud  $\ell$  está suspendido del mismo punto  $O$ . La barra está en equilibrio y el péndulo simple se suelta desde un ángulo cualquiera. ¿Cuál debe ser la longitud  $\ell$  si la partícula queda en reposo después de una colisión elástica con la barra?

**Sugerencia:** Momentum angular y energía del sistema conjunto durante la colisión

$$\ell = \frac{L \sqrt{3}}{3}$$

9. Una rueda de masa 5 kg y radio 0.3 m rueda sin deslizar por un plano inclinado  $15^\circ$  con la horizontal. Partiendo del reposo tarda 2 s en descender 3 m. Calcular su momento de inercia respecto al eje de rotación por su centro.

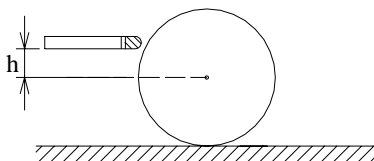
0.31 kg m<sup>2</sup>

10. Las llantas de una motocicleta tienen cada una: masa de 8 kg, radio de 0.3 m y momento de inercia respecto al eje por su centro de  $0.6 \text{ kg m}^2$ . La masa del chasis con el piloto es de 120 kg. Si el motor ejerce un par constante cuyo torque es de  $100 \text{ N m}$ , hallar la velocidad que adquiere la motocicleta cuando ha recorrido 50 m partiendo del reposo y suponiendo que las llantas ruedan sin resbalar.

**Sugerencia:** Trabajo y energía de la motocicleta completa, estudiando el trabajo interno hecho por el par motor

$$v = 14.94 \text{ m/s}$$

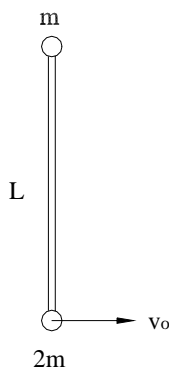
11.



¿A qué altura  $h$  por encima del centro debe golpearse horizontalmente una bola de billar para que comience su movimiento rodando sin deslizar? Durante el brevísimo lapso del impacto puede despreciarse la fricción con la mesa. Muestre que si el golpe es más alto, el centro comenzará a moverse después del impacto aumentando su velocidad, y si es más bajo, se moverá disminuyendo su velocidad.

$$h = \frac{2r}{5}$$

12.



Dos partículas de masas  $m$  y  $2m$  están unidas por una varilla rígida de masa despreciable y reposan sobre una superficie horizontal lisa. Como resultado de un impacto se le da a la masa  $2m$  una velocidad inicial  $v_0$  como se indica. Estudiar el movimiento



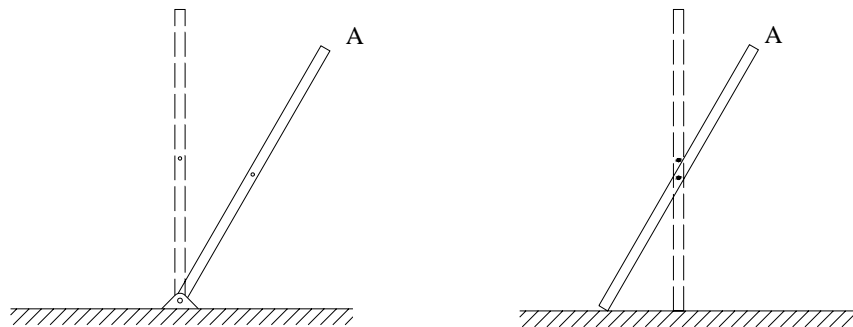
subsiguiente: hallar la velocidad del centro de masa y la velocidad angular. Hallar también la fuerza en la barra.

$$v_c = \frac{2}{3} v_o$$

$$\omega = \frac{v_o}{L}$$

$$F = \frac{2}{3} \frac{m v_o^2}{L}, \text{ tracción}$$

13.

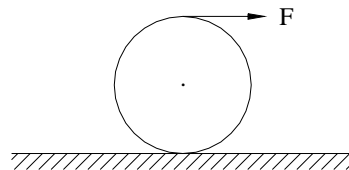


Una barra delgada de longitud  $L$  está inicialmente en reposo en posición vertical. La barra se mueve en el plano vertical, en un caso, rotando respecto a un eje por un extremo inferior, y en otro caso, con su extremo inferior deslizando sobre un piso completamente liso. Hallar en los dos casos la velocidad del extremo  $A$  cuando la barra llega a la posición horizontal. ¿Cuál es la trayectoria del centro de masa en ambos casos?

**Sugerencia:** Trabajo y energía

$$\sqrt{3 g L} \text{ en ambos casos}$$

14.



El cilindro de masa  $m$  y radio  $r$  tiene una cuerda enrollada a su alrededor y se jala con una fuerza horizontal  $F$ . El coeficiente estático de fricción con el piso es  $\frac{1}{2}$ . Hallar la

máxima fuerza  $F$  posible si el cilindro rueda sin deslizar, tanto si es un cilindro macizo como si es un cilindro hueco de pared delgada.

$$\text{macizo, } F_{\text{máx}} = \frac{3}{2} mg$$

$$\text{hueco, no hay } F_{\text{máx}}$$

15. Un yo-yo está formado por dos discos cada uno de masa  $M/2$  y radio  $R$  unidos por un pequeño eje de radio  $r$  y masa despreciable. Hallar la aceleración del centro de masa y la tensión en la cuerda durante el descenso y el ascenso si  $\frac{R}{r} = 10$ .

$$a_c = \frac{g}{51}$$

$$T = \frac{50}{51} Mg$$

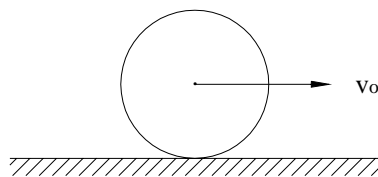
Si la delgada cuerda se ha enrollado 12 vueltas en el eje y el yo-yo se suelta, estimar la tensión media durante la sacudida al llegar a la posición inferior. Si  $r = 3 \text{ mm}$ , estimar el tiempo que dura el jalón.

**Sugerencia:** Asuma que en la parte inferior el yo-yo da media vuelta con velocidad angular constante.

$$T' = 2.5 Mg$$

$$\Delta t = 3 \times 10^{-2} \text{ s}$$

- 16.



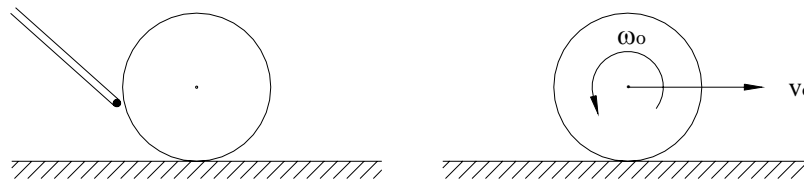
Una bola de billar de masa  $m$  y radio  $r$  se golpea centralmente con el taco horizontal, de modo que comienza moviéndose en  $t = 0$  con velocidad del centro de masa  $v_o$  y sin ninguna rotación. Si el coeficiente de fricción dinámica con la mesa es  $\mu$ , ¿al cabo de cuánto tiempo comenzará a rodar sin deslizar?

$$\frac{2}{7} \frac{v_o}{\mu g}$$

Calcule el trabajo efectuado por la fricción dinámica integrando en el tiempo la potencia desarrollada por dicha fricción, y coteje su resultado con el cambio en la energía cinética.

$$-\frac{1}{7} m v_o^2$$

17. A una esfera maciza de masa  $m$  y radio  $r$  que se encuentra sobre una superficie horizontal rugosa, se le da, en  $t = 0$ , una velocidad baja del centro de masa  $v_o$  y una velocidad angular relativamente alta  $\omega_o$ . Tal condición inicial se da muy aproximadamente en una bola de billar golpeada por la parte inferior y con el taco inclinado, para producir un movimiento de avance y luego de retroceso, llamado “retro”.



- Definir explícitamente los ejes en el marco inercial y estudiar en  $t = 0$  la velocidad del punto de contacto de la esfera con el piso para saber hacia dónde comienza a actuar la fuerza de fricción dinámica. Obtener luego en situación general la aceleración del centro de masa y la aceleración angular e integrar para hallar la velocidad del centro de masa y la velocidad angular como funciones del tiempo.
- Estudiar la situación particular 1 en la cual se detiene el centro de masa y hallar la velocidad angular de la esfera en ese instante. De allí puede obtenerse la condición entre  $v_o$  y  $\omega_o$  para que haya “retro”.

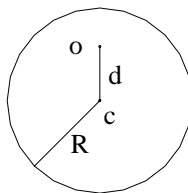
$$\omega_1 = \omega_o - \frac{5}{2} \frac{v_o}{r} \text{ antihoraria}$$

- ¿Al cabo de cuánto tiempo y en qué dirección comenzará a rodar sin deslizar?

$$\frac{2}{7 \mu g} (\omega_o r + v_o)$$

dirección contraria a  $v_o$

18.



Un disco homogéneo de radio  $R$  puede oscilar en un plano vertical, rotando alrededor de un eje por  $O$ . Si  $d = R$ , hallar el período de las pequeñas oscilaciones.

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

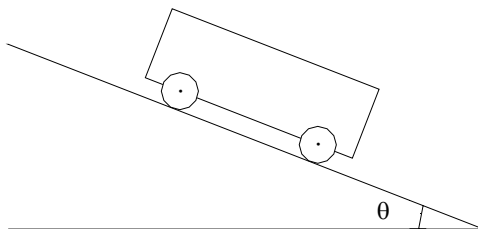
¿A qué distancia  $d$  del centro debe estar otro eje para que el período, suspendido de este nuevo eje, sea el mismo, es decir cuál es el centro de oscilación correspondiente a  $d = R$ ?

$$d = R/2$$

¿Cuál debe ser  $d$  para que el período sea el mínimo?

$$d = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

19.



Un carrito tiene 4 ruedas, cada una de masa  $m$ , radio  $r$  y en forma de discos homogéneos. El chasis (no incluye las ruedas) tiene masa  $M$ .

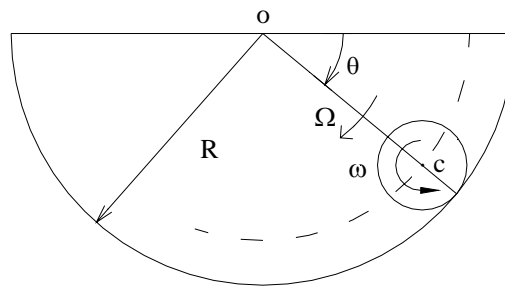
- a) Suponiendo que las ruedas ruedan sin deslizar, halle la aceleración de descenso del carrito por un plano inclinado un ángulo  $\theta$ .

**Sugerencia:** Estudie primero el movimiento de una rueda y luego el movimiento del carrito completo.

- b) Corrobore su resultado estudiando el trabajo y la energía de todo el carrito.

- c) Muestre que si  $\frac{m}{M} \ll 1$ ,  $a \approx g \sin \theta$ , aproximándose a la aceleración de deslizamiento de un bloque por un plano inclinado liso.
- d) Muestre que si dos carritos, uno de masa de chasis  $M = 8m$  y otro  $M = 4m$ , se sueltan uno al lado del otro, cuando el más masivo ha recorrido una distancia  $d$ , el otro va  $\frac{d}{15}$  atrás.

20.



Una esfera maciza de masa  $m$  y radio  $r$  rueda sin deslizar por el interior de una cuenca cilíndrica de radio  $R$ . La velocidad angular del movimiento circular del centro de masa  $C$  de la esfera respecto al marco inercial es  $\Omega$  y la velocidad angular de rotación de la esfera respecto al eje por  $C$ , fijo en el marco de referencia del centro de masa, es  $\omega$ . La esfera se suelta desde  $\theta_0 = 30^\circ$ .

- a) Muestre que la condición para que la esfera ruede sin deslizar puede escribirse como  $\Omega (R - r) = \omega r$ .
- b) Usando el método de trabajo y energía calcule la velocidad del centro de masa de la esfera cuando pasa por el punto más bajo.

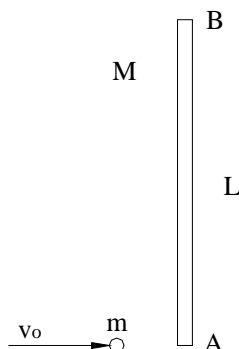
$$\sqrt{\frac{5}{7} g (R - r)}$$

- c) Compruebe su resultado usando las ecuaciones de movimiento de  $C$  y de rotación respecto al eje por  $C$  e integrando.
- d) Halle el mínimo coeficiente estático de fricción entre la esfera y la cuenca para que la esfera pueda efectivamente rodar sin deslizar.

**Sugerencia:** Halle la normal y la fricción en situación general y observe que la posición más crítica para la fricción es la posición inicial.

$$\mu_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \approx 0.5$$

21.



Una barra AB de masa  $M$  y longitud  $L$  se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Una partícula de masa  $m$  se aproxima a su extremo A con velocidad  $v_o$ , perpendicularmente a la barra, y choca elásticamente con ella. Si suponemos una barra lisa,  $m$  se moverá después de la colisión con velocidad  $v_1$  en la misma dirección que  $v_o$ . Hallar  $v_1$ .

**Sugerencia:** Estudiar el momentum lineal, el momentum angular y la energía del sistema conjunto  $m$  y  $M$ .

$$v_1 = v_o \frac{(4m - M)}{4m + M}$$

¿Cuál es el punto D que, justo después de la colisión, tiene velocidad nula? D es el centro de percusión respecto a A. Si la barra pudiese rotar en el plano horizontal respecto a un eje por D, no habría fuerzas impulsivas en dicho eje como resultado de la colisión y el momentum del sistema se conservaría durante ella.

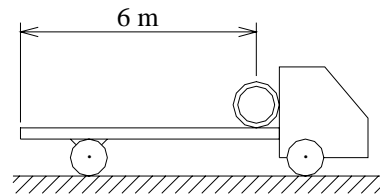
$$AD = \frac{2L}{3}$$

Suponga ahora que la barra puede rotar en el plano horizontal respecto a un eje fijo por B. Hallar  $v_1$  y el cambio en el momentum lineal del sistema. ¿Qué dirección tiene la fuerza impulsiva hecha por el eje?

$$v_1 = v_o \frac{(3m - M)}{3m + M}$$

$$\Delta P = \frac{m M v_o}{3m + M}$$

22.



Un tubo cilíndrico de paredes delgadas de masa  $m$  y radio  $r$ , se encuentra en reposo en la plataforma de un camión detenido en una carretera horizontal. El camión comienza a moverse con una aceleración de  $1.5 \text{ m/s}^2$ . El cilindro se mueve entonces rodando sin deslizar respecto a la plataforma hasta que cae. Hallar en ese instante la velocidad del centro respecto al piso y la velocidad angular.

**Sugerencia:** Estudiar movimiento de C respecto al marco inercial en el piso, la rotación respecto al eje por C, y ser cuidadoso con el movimiento relativo en la relación de rodar sin deslizar.

3 m/s hacia delante

$\frac{3}{r}$  antihoraria

Cuando el tubo cae al piso, rueda y desliza durante cierto tiempo. Hallar la velocidad de C cuando termina el deslizamiento del punto de contacto.

$$v_c = 0$$