Transza 3

Sebastian Trojan

1 Zadanie 1

Korzystając z symetryczności $\sum$ i równości $\sum^{-1} = \sum^{-\frac{1}{2}} \sum^{-\frac{1}{2}}$ mamy:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta}_{MUNK})' \sum^{-1}(Y - X\hat{\beta}_{MUNK})}{n-p} = \frac{(Y' - \hat{\beta}'_{MUNK}X') \sum^{-1}(Y - X\hat{\beta}_{MUNK})}{n-p} =$$

$$= \frac{(Y' \sum^{-\frac{1}{2}} - \hat{\beta}'_{MUNK}X' \sum^{-\frac{1}{2}})(\sum^{-\frac{1}{2}} Y - \sum^{-\frac{1}{2}} X\hat{\beta}_{MUNK})}{n-p} =$$

$$= \frac{[(\sum^{-\frac{1}{2}} Y)' - (\sum^{-\frac{1}{2}} X\hat{\beta}_{MUNK})'][\sum^{-\frac{1}{2}} Y - \sum^{-\frac{1}{2}} X\hat{beta}_{MUNK}]}{n-p} =$$

Niech: $\tilde{Y} := \sum^{-\frac{1}{2}} Y, \tilde{X} := \sum^{-\frac{1}{2}} X$ oraz $\tilde{\varepsilon} := \sum^{-\frac{1}{2}} \varepsilon$. Z wykładu wiemy, że $\hat{\beta}_{MUNK}$ jest estymatorem MNK w modelu $\tilde{Y} = \tilde{X}\beta + \tilde{\varepsilon}$. Stąd:

$$= \frac{(\tilde{Y} - \tilde{X}\hat{\beta}_{MUNK})'(\tilde{Y} - \tilde{X}\hat{\beta}_{MUNK})}{n-p} = s^2,$$ s^2 jest nieobciążony więc estymator $\hat{\sigma}^2$ rónież jest nieobciążony.

2 Zadanie 2

Z wykładu wiemy, że: $\hat{\beta}_r = (X'X + \lambda I)^{-1}X'Y$, skoro naszym Y jest z_r, to:

$$\hat{\beta}_r = (X'X + \lambda I)^{-1}X'z_r = V(D^2 + \lambda I)^{-1}V'VDU'd_{rr}u_{\cdot r} = V(D^2 + \lambda I)^{-1}DU'd_{rr}u_{\cdot r}$$

Zatem:

$$\frac{\hat{\beta}_r}{||\hat{\beta}_r||} = \frac{d_{rr}V(D^2 + \lambda I)^{-1}DU'u_r}{d_{rr}||V(D^2 + \lambda I)^{-1}DU'u_r||} = \frac{\sum_{i=1}^p v_{\cdot i} \frac{d_{ii}}{d_{ii}^2 + \lambda} < u_{\cdot i}, u_{\cdot r} >}{\sum_{i=1}^p v_{\cdot i} \frac{d_{ii}}{d_{ii}^2 + \lambda} < u_{\cdot i}, u_{\cdot r} >} =$$

Wektory $u_{\cdot i}$ są ortonormalne, więc kiedy $i = r$, to $< u_{\cdot i}, u_{\cdot r} >= 1$, a kiedy $i \neq r$, to $< u_{\cdot i}, u_{\cdot r} >= 0$.
Zatem:

$$= \frac{v_{\cdot r} \frac{d_{rr}}{d_{rr}^2 + \lambda}}{||v_{\cdot r} \frac{d_{rr}}{d_{rr}^2 + \lambda}||} = \frac{v_{\cdot r} \frac{d_{rr}}{d_{rr}^2 + \lambda}}{\frac{d_{rr}}{d_{rr}^2 + \lambda}||v_{\cdot r}||} = \frac{v_{\cdot r}}{||v_{\cdot r}||} = v_{\cdot r}.$$

Ostatnia równość wynika z ortonormalności wektora $v_{\cdot r}$.

3 Zadanie 3

Ustalmy i.
Z tego, że $H = H^2$ i $H = H'$ wynika, że:

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2.$$

Dla dowolnego j mamy: $h_{ij} = x'_{i\cdot}(X'X)^{-1}x_{j\cdot}$ co wynika z prostego rozpisania mnożenia: $X(X'X)^{-1}X$.
Zatem jeśli j takie, że: $x_{j\cdot} = x_{i\cdot}$, to $h_{ij} = h_{ii}$, a skoro mamy $c - 1$ takich $j \neq i$ spełniających tę równość, to:

$$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^2 = ch_{ii}^2 + \sum_{j: x_{j\cdot} \neq x_{i\cdot}} h_{ij}^2 \geq ch_{ii}^2 \Longrightarrow \frac{1}{c} \geq h_{ii}.$$