ACTIVIDAD – Solución de ecuaciones de una sola variable

Informe presentado por:
Cristian David Quinayas Rivera, Joan Sebastian Tuquerrez Gomez

1. Introducción.

Calcular la raíz de una función ayuda a encontrar soluciones a ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, si se tiene una ecuación como "f(x) = 0", encontrar la raíz de la función "f(x)" es equivalente a encontrar el valor de "x" que satisface la ecuación. Dicho de otra forma, las raíces de una función son los valores donde la variable independiente, tiene un valor de cero, esto significa entonces que las raíces son los puntos en los que la gráfica de la función cruza o toca el eje x.

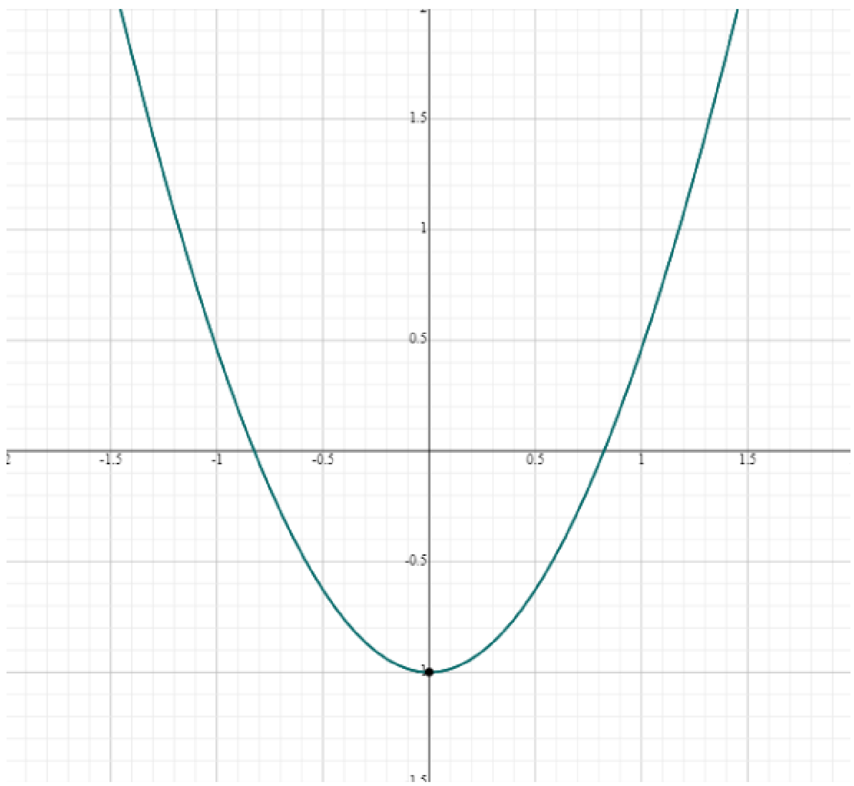
En el presente informe se abarca el estudio del uso de los métodos numéricos de bisección y regla falsa para encontrar las raíces de dos funciones específicas, estos métodos nos ofrecen una aproximación precisa y eficaz para calcularlas teniendo en cuenta un intervalo dado. Dicho estudio se realizará implementando los métodos en un programa que calcule las raíces utilizando ciclos repetitivos los cuales tendrán en cuenta un error relativo porcentual y una cantidad de iteraciones máximas. El lenguaje de programación a utilizar será C++.

En cuanto a los métodos, el método de bisección divide sistemáticamente un intervalo en subintervalos más pequeños hasta encontrar una raíz, mientras que el método de la regla falsa utiliza una interpolación lineal para estimar la raíz. Ambos métodos tienen sus propias ventajas y limitaciones, y su elección depende de la naturaleza de la ecuación y los requisitos de precisión. Como el objetivo del estudio es analizar el comportamiento de ambos métodos, estos serán utilizados independientemente de cual sea la función ingresada.

1.1. Justificación

1.1.1. Función f(x) = x^2 − cos(x)

Analizando la gráfica de la función es posible determinar los extremos del intervalo que serán ingresados al programa.



Teniendo en cuenta que la gráfica corta con el eje de las abscisas en el punto (-0.821, 0), es decir que en ese valor de x se encuentra la raíz, utilizaremos el intervalo **[-2, -0.5]** para comenzar a calcular las aproximaciones con el programa con los dos métodos.

1.1.1.1. Método Bisección

Una vez ingresado el intervalo y seleccionado el método de bisección para dicha función el programa arroja la siguiente tabla de aproximaciones:

```
Metodo de biseccion
Funcion a evaluar: x^2 - cos(x)
Ingrese el valor inferior del intervalo: -2
Ingrese el valor superior del intervalo: -0.5
Ingrese la tolerancia (en porcentaje): 0.01
Ingrese el maximo numero de iteraciones: 100
La raiz es: -0.824142
Aproximaciones:
    1er aproximacion    2da aproximacion                 Epr       No. iteracion
               -1.25              -0.875         42.85714286                   1
              -0.875             -0.6875         27.27272727                   2
             -0.6875            -0.78125                  12                   3
            -0.78125           -0.828125         5.660377358                   4
           -0.828125          -0.8046875         2.912621359                   5
          -0.8046875         -0.81640625         1.435406699                   6
         -0.81640625        -0.822265625        0.7125890736                   7
        -0.822265625       -0.8251953125        0.3550295858                   8
       -0.8251953125       -0.8237304688        0.1778304683                   9
       -0.8237304688       -0.8244628906       0.08883624519                  10
       -0.8244628906       -0.8240966797       0.04443786106                  11
       -0.8240966797       -0.8242797852       0.02221399482                  12
       -0.8242797852       -0.8241882324        0.0111082312                  13
       -0.8241882324       -0.8241424561      0.005554424099                  14
```

Utilizando este método se observa que el programa llegó a la raíz -0.824 después de 14 iteraciones con una tolerancia de error relativo porcentual del 0.01%.

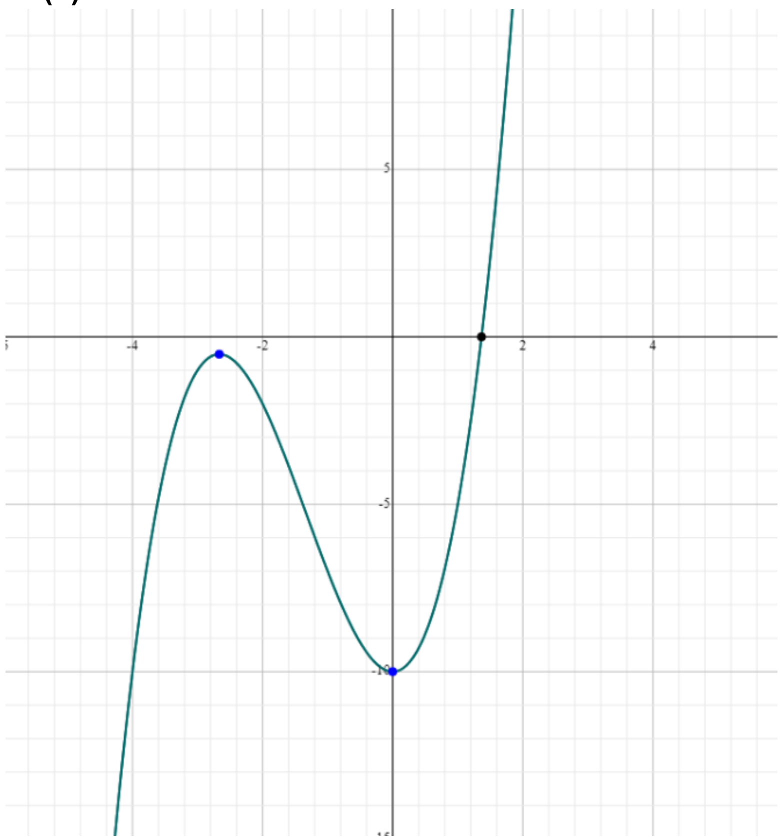
1.1.1.2. Método Regla falsa

Ahora con el mismo intervalo se trabajo para realizar las aproximaciones con el método de la regla falsa en la función, en este caso el programa arroja la siguiente tabla de aproximaciones:

```
Metodo de regla falsa
Funcion a evaluar: x^2 - cos(x)
Ingrese el valor inferior del intervalo: -2
Ingrese el valor superior del intervalo: -0.5
Ingrese la tolerancia (en porcentaje): 0.01
Ingrese el maximo numero de iteraciones: 100
La raiz es: -0.8241145659
Aproximaciones:
    1er aproximacion    2da aproximacion                 Epr       No. iteracion
       -0.6866424164       -0.7706822742           10.904605                   1
       -0.7706822742       -0.8041214523         4.158473574                   2
       -0.8041214523       -0.8167501192         1.546209373                   3
       -0.8167501192       -0.8214239626        0.5689928169                   4
       -0.8214239626        -0.823140709        0.2085605127                   5
        -0.823140709       -0.8237695301       0.07633458772                   6
       -0.8237695301       -0.8239996233       0.02792394436                   7
       -0.8239996233       -0.8240837857       0.01021283845                   8
       -0.8240837857       -0.8241145659      0.003734950035                   9
```

Utilizando este método se puede observar que llegó a la raíz de la función en menos iteraciones, en solo 9 iteraciones, nuevamente con una tolerancia de 0.01% de error relativo porcentual.

1.1.2. Función f(x) = x^3 + 4*x^2 − 10



Cómo es posible ver en la gráfica, (1.365, 0) es uno de los puntos donde se corta con el eje de las abscisas (una raíz) por lo que para analizar esta función con el programa se utilizará el intervalo **[0, 4].**

1.1.2.1. Método Bisección

Utilizando el método de bisección con los intervalos nombrados el programa arroja la siguiente tabla de aproximaciones:

```
Metodo de biseccion
Funcion a evaluar: x^3 + 4*x^2 - 10
Ingrese el valor inferior del intervalo: 0
Ingrese el valor superior del intervalo: 4
Ingrese la tolerancia (en porcentaje): 0.01
Ingrese el maximo numero de iteraciones: 100
La raiz es: 1.365112305
Aproximaciones:
    1er aproximacion    2da aproximacion                 Epr       No. iteracion
                   2                   1                 100                   1
                   1                 1.5         33.33333333                   2
                 1.5                1.25                  20                   3
                1.25               1.375         9.090909091                   4
               1.375              1.3125         4.761904762                   5
              1.3125             1.34375         2.325581395                   6
             1.34375            1.359375         1.149425287                   7
            1.359375           1.3671875        0.5714285714                   8
           1.3671875          1.36328125        0.2865329513                   9
          1.36328125         1.365234375        0.1430615165                  10
         1.365234375         1.364257812       0.07158196135                  11
         1.364257812         1.364746094       0.03577817531                  12
         1.364746094         1.364990234       0.01788588803                  13
         1.364990234         1.365112305      0.008942144326                  14
```

Se puede observar que con el método de bisección se encontró la raíz de la función en 14 iteraciones, con una tolerancia de 0.01% de error relativo porcentual.

1.1.2.2. Método Regla Falsa

Para el caso del método de la regla falta con la segunda función el programa lanzó la siguiente tabla de aproximaciones:

```
Metodo de regla falsa
Funcion a evaluar: x^3 + 4*x^2 - 10
Ingrese el valor inferior del intervalo: 0
Ingrese el valor superior del intervalo: 4
Ingrese la tolerancia (en porcentaje): 0.01
Ingrese el maximo numero de iteraciones: 100
La raiz es: 1.365053106
Aproximaciones:
    1er aproximacion    2da aproximacion                 Epr       No. iteracion
              0.3125        0.5893643446         46.97677203                   1
        0.5893643446        0.8161686901         27.78890544                   2
        0.8161686901        0.9894488488         17.51279603                   3
        0.9894488488         1.114533446         11.22304564                   4
         1.114533446         1.201035774         7.202310706                   5
         1.201035774         1.259050386         4.607806958                   6
         1.259050386         1.297149399         2.937133828                   7
         1.297149399         1.321821205         1.866500975                   8
         1.321821205         1.337652109         1.183484406                   9
         1.337652109         1.347750186        0.7492543781                  10
         1.347750186         1.354167074        0.4738622964                  11
         1.354167074         1.358234883        0.2994923435                  12
         1.358234883         1.360809605        0.1892051765                  13
         1.360809605         1.362437693        0.1194981676                  14
         1.362437693         1.363466558        0.0754594668                  15
         1.363466558         1.364116493       0.04764509183                  16
         1.364116493         1.364526956       0.03008099365                  17
         1.364526956         1.364786142       0.01899096104                  18
         1.364786142         1.364949788       0.01198918175                  19
         1.364949788         1.365053106      0.007568755225                  20
```

Se observa que para esta función el método de la regla falsa, tardó más iteraciones en encontrar la raíz, 20 en este caso con una tolerancia de 0.01% de error relativo porcentual.

2. Conclusiones

Con todas las observaciones y datos recolectados en cada función con los métodos de aproximaciones, se llegan a las siguientes conclusiones:

Realizando un análisis de los resultados arrojados por el programa, es posible afirmar que la elección de un modo u otro depende meramente de la naturaleza de la función y los requisitos de precisión del problema. En el informe, se compararon dos métodos, la bisección y la regla falsa, y se observó que cada uno tiene sus ventajas y limitaciones.

En la primera función $f(x) = x^2 - \cos(x)$, el método de la regla falsa demostró ser más eficiente al converger más rápido a la raíz. Se concluye entonces que funciones de este tipo (parábolas) tienen una mayor afinidad con dicho método ya que le permiten una aproximación más efectiva y puede ser preferido para resultados más rápidos.

En el segundo ejemplo con la función $f(x) = x^3 + 4 \cdot x^2 - 10$ se pudo observar que ambos métodos, tanto el de bisección como el de regla falsa, tuvieron un rendimiento similar en términos de iteraciones necesarias para encontrar la raíz. Este comportamiento indica que, en ciertas situaciones, la elección entre estos métodos puede ser menos decisiva, y los dos pueden proporcionar resultados igual de precisos.

Elegir la tolerancia es crucial para la aplicación de estos métodos, ya que puede generar más o menos iteraciones dependiendo del valor que se le dé al programa, haciendo que varíe el tiempo de cómputo, con esto se concluye que es importante que haya una relación equitativa entre la precisión y la eficiencia computacional.