# Respuesta en el Tiempo Para un Sistema Con Distintos Valores de K Mediante Expansion en Fracciones Parciales

Juan Sebastian Casas Barbosa - 20211005031
jscasasb@udistrital.edu.co

Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Facultad de Ingeniería
Proyecto Curricular Ingeniería Electrónica
Bogotá D.C. - Colombia

Septiembre 2024

## 1. Representación del Sistema

Se cuenta la siguiente función de transferencia:

$$G = \frac{1}{s(s+3)(s+6)} \tag{1}$$

Al aplicar el lazo cerrado y agregar un bloque de ganancia $K$ como se muestra en la siguiente figura:

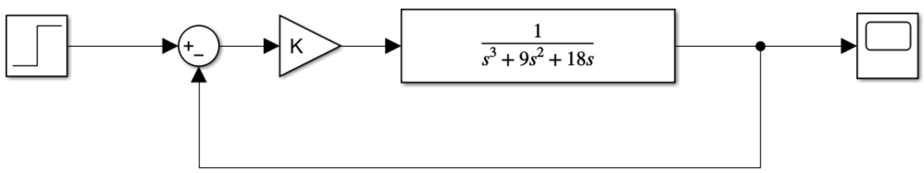


Figura 1: Modelo Lazo Cerrado

Se puede aplicar álgebra de bloques para el sistema en lazo cerrado, por lo cual se obtiene lo siguiente:

$$T = \frac{KGR}{1+KG}$$

Donde R es la entrada del sistema y G es la función de transferencia quedando así un solo bloque con la siguiente función de transferencia:

$$T = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{s^3+9s^2+18s+K} \tag{2}$$

Donde $\frac{1}{s}$ corresponde a la transformada de la laplace del escalón que es la entrada del sistema, así entonces se eligieron valores de $K$ con los cuales se obtenían diferentes polos y partiendo de esto realizar la expansión en fracciones parciales para obtener la respuesta en el tiempo del sistema.

Cabe aclarar que los polos se obtienen haciendo uso de MATLAB con este pequeño Script

```matlab
K = 0.1;
num = [K];
den = [1 9 18 K];
G = tf(num,den)
polos = roots(den)

```

Código 1: Script Polos

## 2. Polos Reales $K = 0{,}1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0{,}1}{(s+6{,}0055)(s+2{,}9889)(s+0{,}0056)}$$

Expandiendo en Fracciones Parciales:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{0{,}1}{(s+6{,}0055)(s+2{,}9889)(s+0{,}0056)} = \frac{A}{s+6{,}0055} + \frac{B}{s+2{,}9889} + \frac{C}{s+0{,}0056} + \frac{D}{s}$$

$$0{,}1 = A(s+2{,}9889)(s+0{,}0056)s + B(s+6{,}0055)(s+0{,}0056)s + C(s+6{,}0055)(s+2{,}9889)s +$$
$$D(s+6{,}0055)(s+2{,}9889)(s+0{,}0056)$$

si $s = 0$

$$0{,}1 = D(6{,}0055)(2{,}9889)(0{,}0056)$$

$$D = \frac{0{,}1}{(6{,}0055)(2{,}9889)(0{,}0056)} = 0{,}9948$$

si $s = -6{,}0055$

$$0{,}1 = A(-6{,}0055+2{,}9889)(-6{,}0055+0{,}0056)(-6{,}0055)$$

$$A = \frac{0{,}1}{(-6{,}0055+2{,}9889)(-6{,}0055+0{,}0056)(-6{,}0055)} = -0{,}0009$$

si $s = -2{,}9889$

$$0{,}1 = B(-2{,}9889+6{,}0055)(-2{,}9889+0{,}0056)(-2{,}9889)$$

$$B = \frac{0{,}1}{(-2{,}9889+6{,}0055)(-2{,}9889+0{,}0056)(-2{,}9889)} = 0{,}0037$$

si $s = -0{,}0056$

$$0{,}1 = C(-0{,}0056+6{,}0055)(-0{,}0056+2{,}9889)(-0{,}0056)$$

$$C = \frac{0{,}1}{C(-0{,}0056+6{,}0055)(-0{,}0056+2{,}9889)(-0{,}0056)} = -0{,}9976$$

Asi entonces:

$$Y(s) = \frac{-0{,}0009}{s+6{,}0055} + \frac{0{,}0037}{s+2{,}9889} + \frac{-0{,}9976}{s+0{,}0056} + \frac{0{,}9948}{s}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = 0,0009e^{-6{,}0055t} + 0,0037e^{-2{,}9889t} - 0,9976e^{-0{,}0056t} + \mu(t)$$

A continuación se realizo la gráfica de la respuesta en MATLAB con el siguiente Script:

```
t = 0:0.01:5000;
u = heaviside(t);
y = -0.0009*exp(-6.0055*t) + 0.0037*exp(-2.9889*t) - 0.9976*exp(-0.0056*t) + u;

% Graficar la funcion
figure;
plot(t, y, 'LineWidth', 2);
title('Respuesta al escalon K=0.1');
xlabel('Tiempo (t)');
ylabel('Amplitud');
ylim([0 1.1]);
grid on;
```

Código 2: Script Polos

A continuación se muestra la gráfica de MATLAB y la salida obtenida en el scope de SIMULINK con el fin de verificar los resultados:

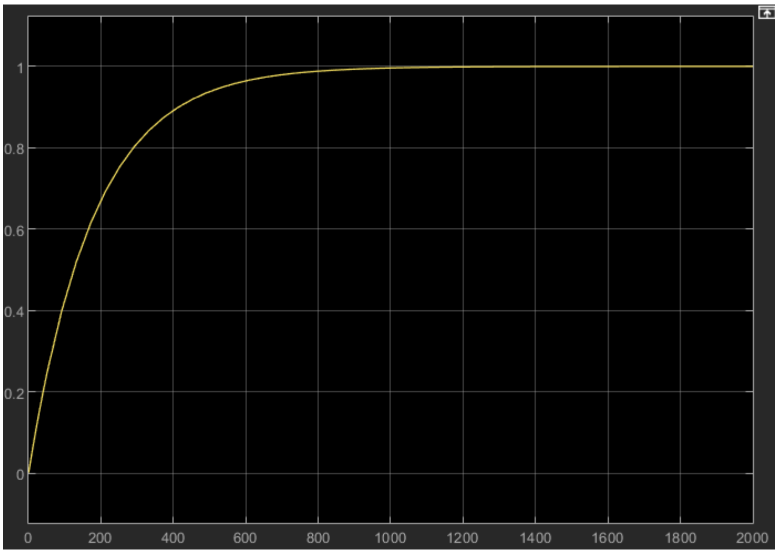


Figura 2: Simulink $K = 0{,}1$

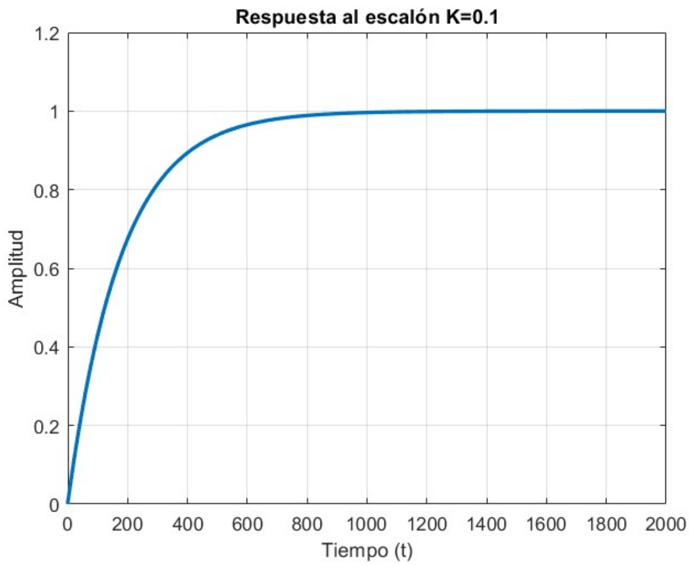


Figura 3: MATLAB $K = 0{,}1$

# 3. Polos iguales $K = 10{,}4$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{10{,}4}{(s + 6{,}4644)(s + 1{,}2678)^2}$$

Expandiendo en fracciones parciales:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{10{,}4}{(s + 6{,}4644)(s + 1{,}2678)^2} = \frac{A}{(s + 6{,}4644)} + \frac{B}{(s + 1{,}2678)} + \frac{C}{(s + 1{,}2678)^2} + \frac{D}{s}$$

$$10{,}4 = A(s + 1{,}2678)^2 s + B(s + 6{,}4644)(s + 1{,}2678)s + C(s + 6{,}4644)s + D(s + 6{,}4644)(s + 1{,}2678)^2$$

si $s = 0$

$$D = \frac{10{,}4}{(6{,}4644)(1{,}2678)^2} = 1{,}0009$$

si $s = -6{,}4644$

$$A = \frac{10{,}4}{(-6{,}4644 + 1{,}2678)^2(-6{,}4644)} = -0{,}0595$$

si $s = -1{,}2678$

$$C = \frac{10{,}4}{(-1{,}2678 + 6{,}4644)(-1{,}2678)} = -1{,}5785$$

si $s = 1$

$$B = \frac{10{,}4 - (-0{,}0595)(1 + 1{,}2678)^2 - (-1{,}5785)(1 + 6,4644) - (1{,}0009)(1 + 6{,}4644)(1 + 1{,}2678)^2}{(1 + 6{,}4644)(1 + 1{,}2678)} = -0{,}9413$$

Así entonces:

$$\frac{-0,0595}{(s + 6{,}4644)} + \frac{-0,9413}{(s + 1{,}2678)} + \frac{-1,5785}{(s + 1{,}2678)^2} + \frac{1,0009}{s}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = -0{,}0595e^{-6{,}4644t} - 0{,}9413e^{-1{,}2678t} - 1{,}5785te^{-1{,}2678} + \mu(t)$$

Para la Grafica se utilzo el mismo script remplazando la expresion en el tiempo, asi entonces se obtuvo lo siguiente:

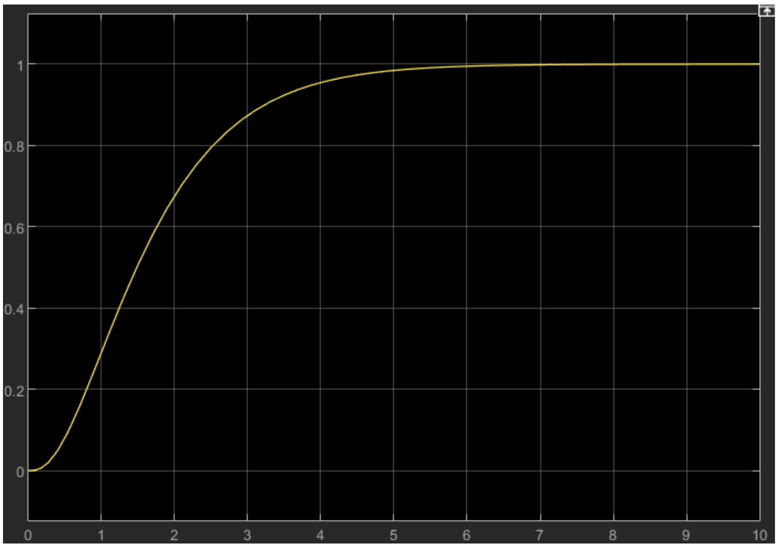


Figura 4: Simulink $K = 10{,}4$

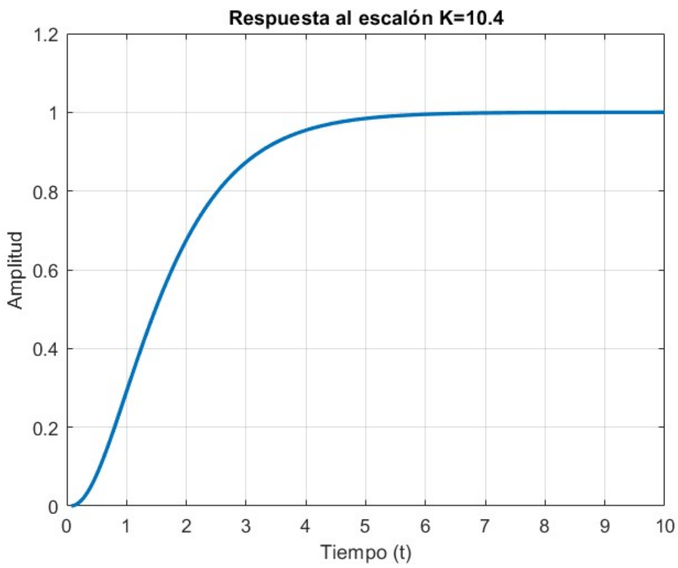


Figura 5: MATLAB $K = 10{,}4$

## 4. Polos Complejos conjugados $K = 35$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{35}{(s+7{,}1704)(s+0{,}9148-j2{,}0111)(s+0{,}9148+j2{,}0111)}$$

Expandiendo en Fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{A}{(s+7{,}1704)} + \frac{B}{(s+0{,}9148-j2{,}0111)} + \frac{B*}{(s+0{,}9148+j2{,}0111)} + \frac{C}{s}$$

$$35 = A(s+0{,}9148-j2{,}0111)(s+0{,}9148+j2{,}0111)s + B(s+7{,}1704)(s+0{,}9148+j2{,}0111)s$$
$$+B*(s+7{,}1704)(s+0{,}9148-j2{,}0111)S + C(s+7{,}1704)(s+0{,}9148-j2{,}0111)(s+0{,}9148+j2{,}0111)$$

si $s = 0$

$$C = \frac{35}{(7{,}1704)(0{,}9148-j2{,}0111)(0{,}9148+j2{,}0111)} = 1{,}0012$$

si $s = -7{,}1704$

$$A = \frac{35}{(-7{,}1704+0{,}9148-j2{,}0111)(-7{,}1704+0{,}9148+j2{,}0111)(-7{,}1704)} = -0{,}1131$$

si $s = -09148 + j2{,}0111$

$$B = \frac{35}{(-09148+j2{,}0111+7{,}1704)(-09148+j2{,}0111+0{,}9148+j2{,}0111)(-09148+j2{,}0111)} = -0{,}4435+J0{,}4033$$

y como $B*$ es el complejo conjugado $B* = -0{,}4435 - J0{,}4033$ Así entonces:

$$Y(s) = \frac{-0{,}1131}{(s+7{,}1704)} + \frac{-0{,}4435+J0{,}4033}{(s+0{,}9148-j2{,}0111)} + \frac{-0{,}4435-J0{,}4033}{(s+0{,}9148+j2{,}0111)} + \frac{1}{s}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace:

$$\frac{1}{s+\alpha-j\beta} = e^{-\alpha t}cos(\beta t) + je^{-\alpha t}sen(\beta t)$$

$$y(t) = -0{,}1131e^{-7{,}1704t} + (-0{,}4435+j0{,}4033)e^{-0{,}9148t}[cos(2{,}0111t) + jsen(2{,}0111t)]$$
$$+(-0{,}4435-j0{,}4033)e^{-0{,}9148t}[cos(-2{,}0111t) + jsen(-2{,}0111t)] + \mu(t)$$

Tomando

$$cos(-t) = cos(t)$$
$$sen(-t) = -sen(t)$$
$$y(t) = -0{,}1131e^{-7{,}1704t} + [-0{,}887cos(2{,}0111t) - 0{,}8066sen(2{,}0111t)]e^{-0{,}9148t} + \mu(t)$$

Graficando en MATLAB se obtuvo lo siguiente:

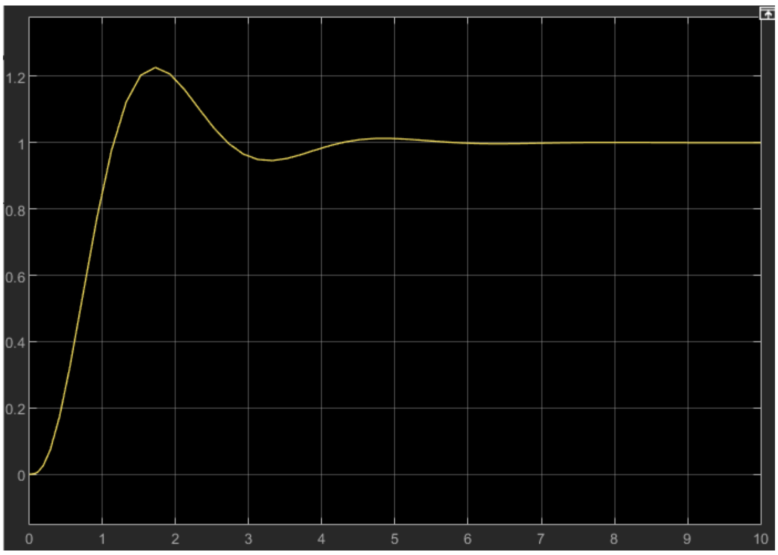


Figura 6: Simulink $K = 35$

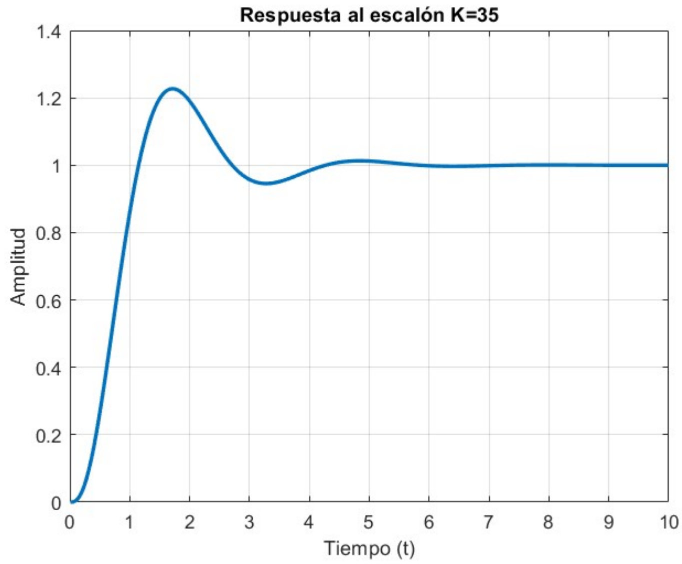


Figura 7: MATLAB $K = 35$

# 5. Zona de Frontera $K = 162$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{162}{(s+9)(s-4{,}2426)(s+4{,}2426)}$$

Expandiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A}{(s+9)} + \frac{B}{(s-4{,}2426)} + \frac{B*}{(s+4{,}2426)} + \frac{C}{s}$$

$$162 = A(s-4{,}2426)(s+4{,}2426)s + B(s+9)(s+4{,}2426)s$$
$$+B*(s+9)(s-4{,}2426)s + C(s+9)(s-4{,}2426)(s+4{,}2426)$$

si $s = 0$:

$$C = \frac{162}{(9)(-4{,}2426)(4{,}2426)} = 1$$

si $s = -9$:

$$A = \frac{162}{(-9-4{,}2426)(-9+4{,}2426)(-9)} = -0{,}1818$$

si $s = 4{,}2426$:

$$B = \frac{162}{(4{,}2426+9)(4{,}2426+4{,}2426)(4{,}2426)} = -0{,}4091 + j0{,}1928$$

y como $B*$ es el complejo conjugado $B* = -0{,}4435 - J0{,}4033$.

Así entonces:

$$Y(s) = \frac{-0{,}1818}{(s+9)} + \frac{-0{,}4091 + j0{,}1928}{(s-4{,}2426)} + \frac{B* = -0{,}4435 - J0{,}4033}{(s+4{,}2426)} + \frac{1}{s}$$

Así entonces:

$$Y(s) = \frac{-0{,}1818}{(s+9)} + \frac{-0{,}4091 + j0{,}1928}{(s-4{,}2426)} + \frac{-0{,}4091 - j0{,}1928}{(s+4{,}2426)} + \frac{1}{s}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace:

$$\frac{1}{s+\alpha-j\beta} = e^{-\alpha t}\cos(\beta t) + je^{-\alpha t}\sin(\beta t)$$

$$y(t) = -0{,}1818e^{-9t} + (-0{,}4091 + j0{,}1928)[\cos(4{,}2426t) + j\sin(4{,}2426t)]$$
$$+(-0{,}4091 - j0{,}1928)[\cos(4{,}2426t) + j\sin(4{,}2426t)] + \mu(t)$$

Tomando:

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$y(t) = -0{,}1818e^{-9t} - 0{,}8182\cos(4{,}2426t) - 0{,}3856\sin(4{,}2426t) + \mu(t)$$

Graficando en MATLAB se obtuvo lo siguiente:

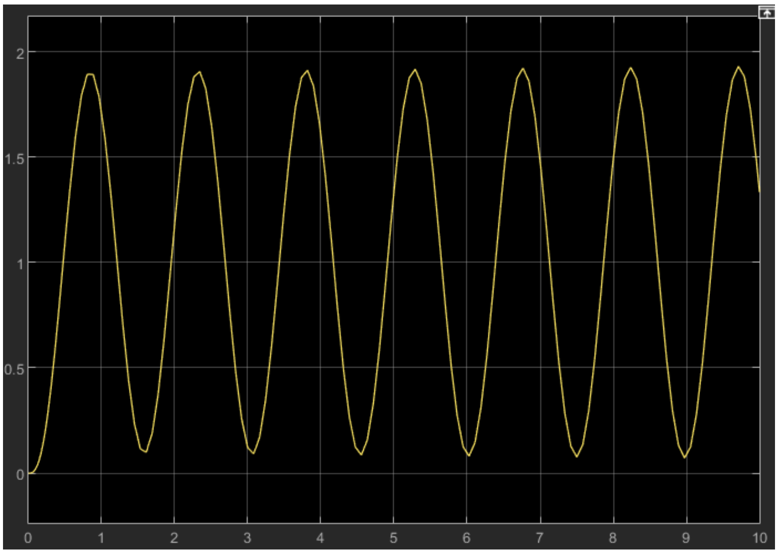


Figura 8: Simulink $K = 162$

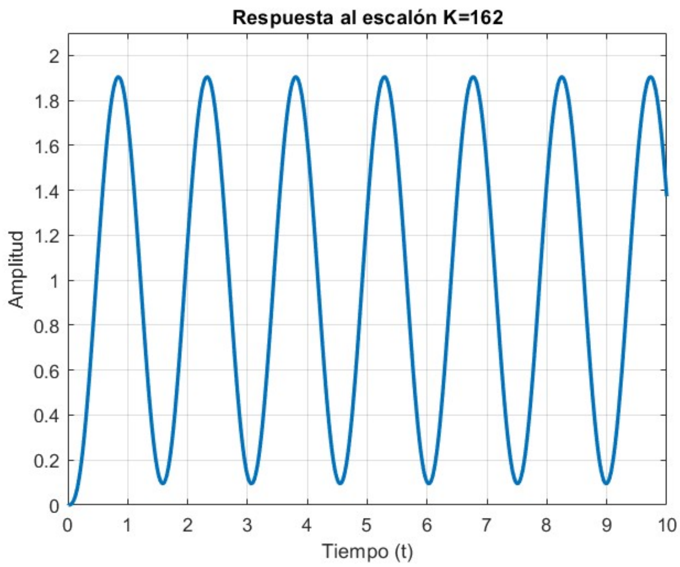


Figura 9: MATLAB $K = 162$

# 6. Regio de Inestabilidad $K = 1350$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1350}{(s+14{,}3235)(s-2{,}6617-j9{,}3363)(s-2{,}6617+j9{,}3363)}$$

Expandiendo en Fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{A}{(s+14{,}3235)} + \frac{B}{(s-2{,}6617-j9{,}3363)} + \frac{B*}{(s-2{,}6617+j9{,}3363)} + \frac{C}{s}$$

$$1350 = A(s-2{,}6617-j9{,}3363)(s-2{,}6617+j9{,}3363)s + B(s+14{,}3235)(s-2{,}6617+j9{,}3363)s$$

$$+B*(s+14{,}3235)(s-2{,}6617-j9{,}3363)s + C(s+14{,}3235)(s-2{,}6617-j9{,}3363)(s-2{,}6617+j9{,}3363)$$

Si $s=0$:

$$C=\frac{1350}{(14{,}3235)(-2{,}6617-j9{,}3363)(-2{,}6617+j9{,}3363)}=1$$

Si $s=-14{,}3235$:

$$A=\frac{1350}{(-14{,}3235-2{,}6617-j9{,}3363)(-14{,}3235-2{,}6617+j9{,}3363)(-14{,}3235)}=-0{,}2509$$

Si $s=2{,}6617-j9{,}3363$:

$$B=\frac{1350}{(2{,}6617-j9{,}3363+14{,}3235)(2{,}6617-j9{,}3363+2{,}6617+j9{,}3363)(2{,}6617-j9{,}3363)}=-0{,}3746{+}j0{,}0857$$

Y como $B*$ es el conjugado, $B*=-0{,}3746-j0{,}0857$.

Así entonces:

$$Y(s)=\frac{-0{,}2509}{(s+14{,}3235)}+\frac{-0{,}3746+j0{,}0857}{(s-2{,}6617-j9{,}3363)}+\frac{-0{,}3746-j0{,}0857}{(s-2{,}6617+j9{,}3363)}+\frac{1}{s}$$

Aplicando Transformada Inversa de Laplace:

$$\frac{1}{s+\alpha-j\beta}=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)+je^{-\alpha t}\sin(\beta t)$$

$$y(t)=-0{,}2509e^{-14{,}3235t}+(-0{,}3746+j0{,}0857)e^{2{,}6617t}[\cos(9{,}3363t)+j\sin(9{,}3363t)]$$
$$+(-0{,}3746-j0{,}0857)e^{2{,}6617t}[\cos(-9{,}3363t)+j\sin(-9{,}3363t)]+\mu(t)$$

Tomando:

$$\cos(-t)=\cos(t)$$
$$\sin(-t)=-\sin(t)$$

$$y(t)=-0{,}2509e^{-14{,}3235t}+[-0{,}7492\cos(9{,}3363t)-0{,}1714\sin(9{,}3363t)]e^{2{,}6617t}+\mu(t)$$

Graficando en MATLAB se obtuvo lo siguiente:

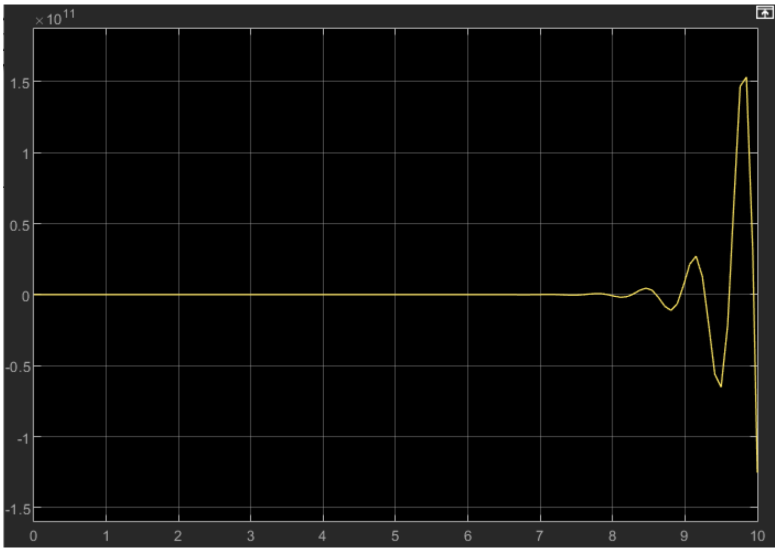


Figura 10: Simulink $K=1350$

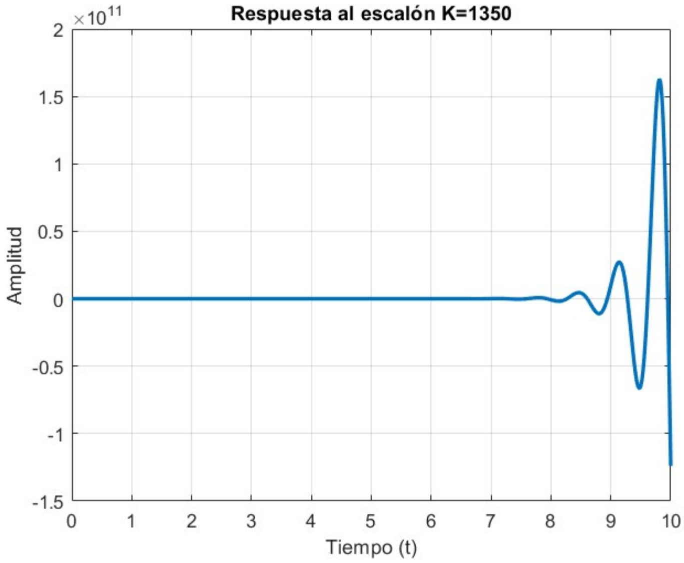


Figura 11: MATLAB $K = 1350$