Ejemplo 6-2 Mapa del lugar de las raíces para polos complejos conjugados en lazo abierto

Juan Sebastian Casas Barbosa Cod: 20211005031

Se considera un sistema con realimentación negativa cuya función de transferencia es:

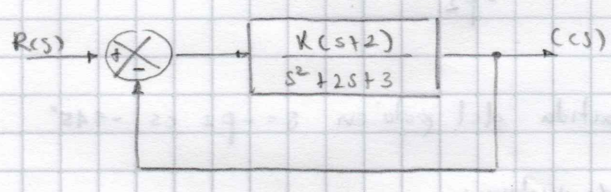
$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3} \qquad H(s) = 1$$

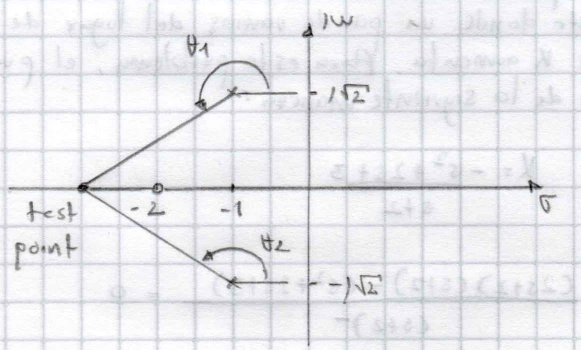
Donde $K \geq 0$ y $G(s)$ tiene un par de polos complejos conjugados en:

$$s = -1 + j\sqrt{2} \qquad s = -1 - j\sqrt{2}$$

El procedimiento típico para trazar el lugar de las raíces es el siguiente:

1. Determinar el lugar de las raíces en el eje real:
   Para determinar el lugar de las raíces se analiza como los polos complejos conjugados afectan este eje. Dado que su contribución angular es de 360°, su efecto neto en el eje real es cero. El lugar de las raíces en el eje real negativo se encuentra entre -2 y $-\infty$, lo que significa que este tramo es parte del lugar de las raíces. Este segmento está relacionado con los ceros del sistema y se divide en dos ramas que parten de los polos complejos conjugados.





2. Determinar el ángulo de salida de los polos complejos conjugados de lazo abierto:
   Este ángulo es importante ya que indica si el lugar de las raíces cerca de un polo complejo se dirige hacia el eje real o hacia una asíntota.

   Si se elige un punto de prueba y se mueve muy cerca del polo complejo conjugado en $s=-p_1$, se puede considerar que la suma de las contribuciones angulares desde el polo en $s=p_2$ y el cero en $s=-z_1$ hacia el punto de prueba permanece igual. Si el punto de prueba esta en el lugar de las raices entonces la suma de ϕ_1', $-\theta_1$ y $-\theta_2'$ debe ser igual a $\pm 180°(2K+1)$, donde $K=0,1,2,\ldots$

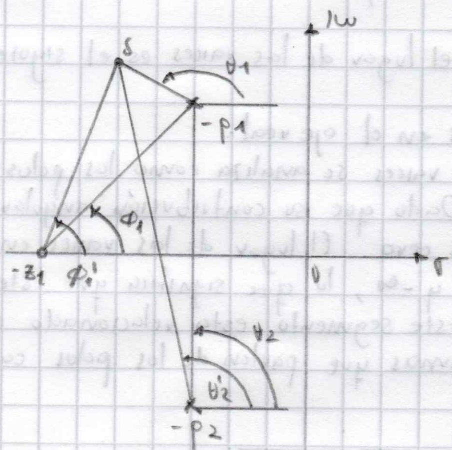
$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180°(2K+1)$$

o

$$\theta_1 = 180° - \theta_2' + \phi_1' = 180° - \theta_2 + \phi_1$$

El angulo de salida es entonces:

$$\theta_1 = 180° - \theta_2 + \phi_1 = 180° - 90° + 55° = 145°$$



Donde el angulo de partida del polo en $s=-p_2$ es $-145°$

3. Determinar el punto de ruptura:
Un punto de ruptura existe donde un par de ramas del lugar de las raices se fusionan a medida que K aumenta. Para este problema, el punto de ruptura se puede encontrar de la siguiente manera:

$$K = -\frac{s^2+2s+3}{s+2}$$

tenemos:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{(2s+2)(s+2)-(s^2+2s+3)}{(s+2)^2} = 0$$

lo que da:

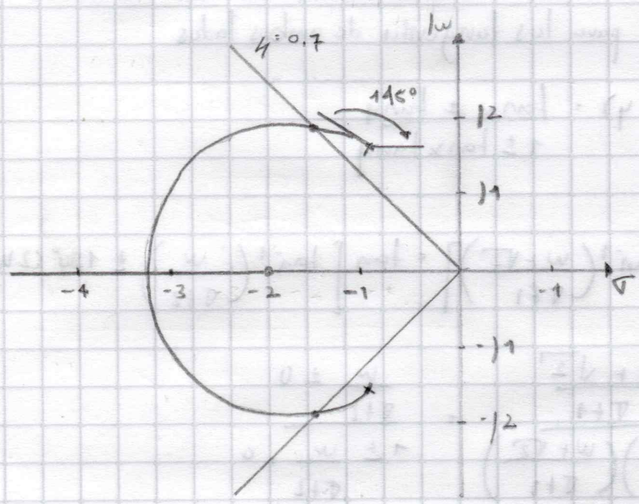
$$s^2+4s+1=0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$s=-3{,}7320 \quad o \quad s=-0.2680$$

Se observa que $s=-3,7320$ está en el lugar de las raíces, por lo tanto, este es un punto de ruptura real. En $s=-3,7320$, el valor de ganancia correspondiente es $K=5,4641$

4. Trazar un diagrama de lugar de las raíces, basado en la información obtenida en los pasos anteriores:
Se deben encontrar varios puntos por prueba y error entre el punto de ruptura y los polos complejos de lazo abierto. (Para facilitar el trazado del lugar de las raíces, se debe encontrar la dirección en la que se debe mover el punto de prueba sumando mentalmente los cambios en los ángulos de los polos y ceros)



El valor de la ganancia K en cualquier punto del lugar de las raíces se puede encontrar aplicando la condición de magnitud o utilizando MATLAB. El valor de K para el cual los polos complejos conjugados cerrados tienen una razón de amortiguamiento $\zeta=0,7$ se puede hallar ubicando las raíces, y calculando el valor de K

$$K=\frac{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}{s+2}$$

con $s=-1,67+j1,7$ el valor de $K=1,34$

Se observa que en este sistema el lugar de las raíces en el plano complejo es parte de un círculo. Dichos lugares circulares no ocurren en la mayoría de los sistemas. Los lugares de raíces circulares pueden ocurrir en sistemas que involucren dos polos y un cero, dos polos y dos ceros, o un polo y dos ceros.

Para mostrar la ocurrencia de un lugar de raíces circular, se necesita derivar la ecuación para el lugar de las raíces, la condición del ángulo es:

$$\angle s+2 - \angle s+1-j\sqrt{2} - \angle s+1+j\sqrt{2} = \pm 180°(2k+1)$$

Si $s = \sigma + j\omega$ se sustituye en la ultima ecuación

$$\angle \sigma + 2 + j\omega - \angle \sigma + 1 + j\omega - j\sqrt{2} - \angle \sigma + 1 + j\omega + j\sqrt{2} = \pm 180°(2k+1)$$

se puede escribir como:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \pm 180°(2k+1)$$

o

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180°(2k+1)$$

Usando la siguiente relación para las tangentes de ambos lados

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$$

se obtiene

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\right] = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+2}\right) \pm 180°(2k+1)\right]$$

o

$$\frac{\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1} + \frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}}{1-\left(\frac{\omega-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\left(\frac{\omega+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)} = \frac{\frac{\omega}{\sigma+2} \pm 0}{1 \pm \frac{\omega}{\sigma+2} \times 0}$$

se puede simplificar como

$$\frac{2\omega(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2-(\omega^2-2)} = \frac{\omega}{\sigma+2}$$

o

$$\omega\left[(\sigma+2)^2+\omega^2-3\right] = 0$$

La ultima ecuación es equivalente a

$$\omega = 0 \quad o \quad (\sigma+2)^2+\omega^2 = (\sqrt{3})^2$$

Estas dos ecuaciones son las ecuaciones del lugar de las raices para el sistema. Se observa que la primera ecuación con $\omega = 0$ es la ecuación para el eje real. El eje real desde $s=-2$ hasta $s=-\infty$ corresponde a un lugar de las raices para $k \geq 0$, la segunda ecuación es la de un circulo con centro en $s=-2$ $\omega=0$ y radio igual a $\sqrt{3}$. Esa es la parte del circulo a la izquierda de los polos complejos conjugados corresponde a un lugar de raices para $k \geq 0$, la parte restante para k negativo.