Parcial 1. Sistemas Dinámicos

Juan Sebastian Casas Barbosa
cod. 20211005031

5.0

7. Representar en espacio de estados y hallar la función de transferencia

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2f(t) \quad (1)$$

edo 1.0
cto ~~1.0~~
Mech ~~1.0~~
exers 0.5
Video 1.0
paper 1.0

Variables de estado

$$q_1 = x \qquad f(t) = u$$
$$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{x}$$
$$q_3 = \dot{q}_2 = \ddot{x}$$
$$\dot{q}_3 = \dddot{x}$$

Remplazando en (1)

$$\dot{q}_3 + q_3 + 2q_2 + q_1 = 2u$$

$$\dot{q}_3 = 2u - q_1 - 2q_2 - q_3$$

Representación en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Representación en espacio de estados

Funcion de transferencia

Aplicando transformada de Laplace en eq (1)

$$+ \mathcal{L}$$

$$s^3 \mathcal{L}[x] + s^2 \mathcal{L}[x] + 2s\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[x] = 2\mathcal{L}[f(t)]$$

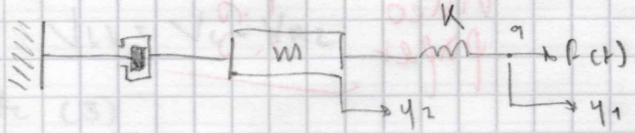
$$\mathcal{L}[x](s^3 + s^2 + 2s + 1) = 2\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[x] = X_s \qquad \mathcal{L}[f(t)] = F_s$$

$$\therefore \quad X_s(s^3+s^2+2s+1) = 2\,f_s$$

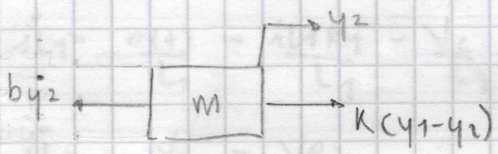
$$\frac{X_s}{f_s} = \frac{2}{s^3+s^2+2s+1}$$ Funcion de transferencia //

3. Hallar una expresion en espacio de estados valida para el sistema outputs: y_1 y y_2



Diagramas de cuerpo libre

Para masa m



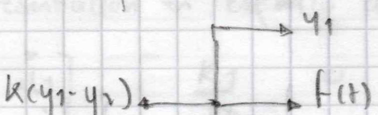
$$\Sigma F = ma$$

$$-b\dot{y}_2 + K(y_1-y_2) = m\ddot{y}_2$$

$$-b\dot{y}_2 + Ky_1 - Ky_2 = m\ddot{y}_2$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{K}{m}y_1 - \frac{K}{m}y_2 - \frac{b}{m}\dot{y}_2 \quad (1)$$

Para punto a



$$\Sigma F = 0$$

$$-k(y_1-y_2) + f = 0$$

$$-ky_1 + ky_2 + f = 0 \quad (2)$$

Variables de estado

$$q_1 = y_1 \qquad q_2 = y_2$$
$$q_3 = \dot{q}_2 = \dot{y}_2$$
$$\dot{q}_3 = \ddot{y}_2$$

Remplazando en eq (1) y (2)

$$\dot{q}_3 = \frac{K}{m}q_1 - \frac{K}{m}q_2 - \frac{b}{m}q_3 \quad (3)$$

$$-kq_1 + kq_2 + f = 0 \longrightarrow q_1 = q_2 + \frac{f}{k}$$

Remplazando en (3)

$$\dot{q}_3 = \frac{k}{m}\left(q_2 + \frac{f}{k}\right) - \frac{k}{m} q_2 - \frac{b}{m} q_3$$

$$= \cancel{\frac{k}{m}} q_2 + \frac{f}{m} - \cancel{\frac{k}{m}} q_2 - \frac{b}{m} q_3$$

$$\dot{q}_3 = \frac{f}{m} - \frac{b}{m} q_3$$

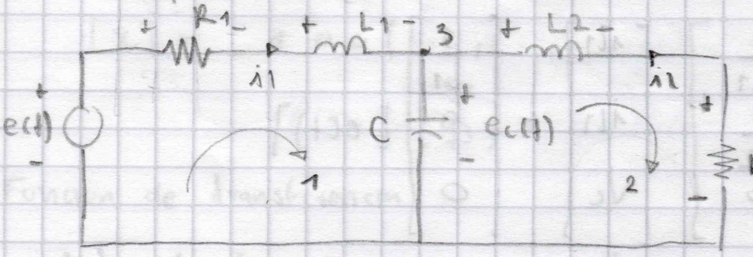
Representación en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} [F]$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Representación en espacio de estado

2. Encontrar una expresión en espacio de estados válida para el sistema outputs V_{R2}



Variables de estado i_{L1} i_{L2} V_C

Malla 1

$$-e(t) + V_{R1} + V_{L1} + V_C = 0$$

$$-e(t) + i_{L1} R_1 + V_{L1} + V_C = 0 \quad (1)$$

Malla 2

$$V_{L2} + V_{R2} - V_C = 0 \quad (2)$$

Nodo 3

$i_{L1} - i_C - i_{L2} = 0 \quad (3)$

de (1)

$V_{L1} = e(t) - i_{L1}R_1 - V_C$

de (2)

$V_{L2} = V_C - V_{R2}$

de (3)

$i_C = i_{L2} - i_{L1}$

tomando $V_L = L\dot{i}_L$ y $i_C = C\dot{V}_C$

$$\dot{i}_{L1} = \frac{e(t)}{L_1} - \frac{i_{L1}R_1}{L_1} - \frac{V_C}{L_1}$$

$$\dot{i}_{L2} = \frac{V_C}{L_2} - \frac{V_{R2}}{L_2}$$

$$\dot{V}_C = \frac{i_{L2}}{C} - \frac{i_{L1}}{C}$$

Representación en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e(t)]$$

Para la salida

$V_{R2} = i_{L2}R_2$

$$[V_{R2}] = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ V_C \end{bmatrix}$$

Representación en espacio de estados