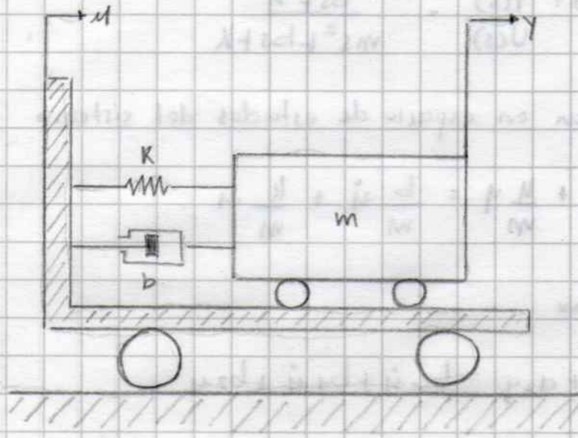
Punto 1. Segundo Parcial

Juan Sebastian Casas Barbosa
Cod: 20211005031

1. Ejemplo 3-3 5ta edicion Ogata

- Sistema masa-resorte-amortiguador montado en un carro sin masa



Se asume que el carro esta quieto para $t<0$ igual que el sistema masa resorte amortiguador, $u(t)$ es el desplazamiento del carro y la entrada del sistema, en $t=0$ el carro se mueve a velocidad constante $\dot{u}$ = constante, el desplazamiento $y(t)$ de la masa es la salida. Se asume que la fuerza de friccion es proporcional a $\dot{y}-\dot{u}$ y la fuerza del resorte proporcional a $y-u$

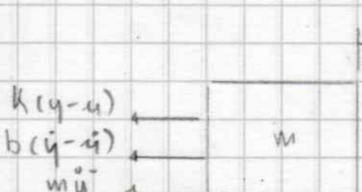
- Por segunda ley de Newton para el sistema traslacional

$$ma = \sum F$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

Por diagrama de cuerpo libre



$$\sum F$$

$$-k(y-u) - b(\dot{y}-\dot{u}) - m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku \quad (1)$$

- Aplicando transformada de Laplace asumiendo condición inicial cero

$$(ms^2+bs+k)Y(s) = (bs+k)U(s)$$

- Hallando función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

- Obteniendo expresión en espacio de estados del sistema

de (1) $\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$

de forma estandar

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = \frac{b}{m},\ a_2 = \frac{k}{m},\ b_0 = 0,\ b_1 = \frac{b}{m},\ b_2 = \frac{k}{m}$$

Por la derivada de la entrada (2-35) ogata

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

de (2-34) ogata

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

de (2-36) ogata

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

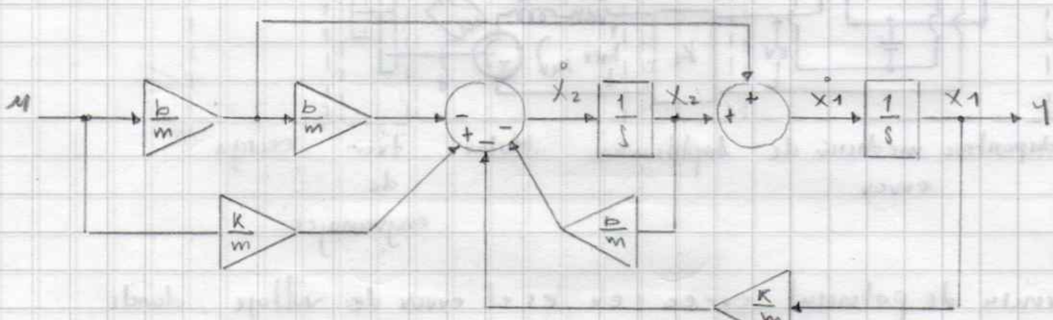
$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

- Representación en el espacio de estados

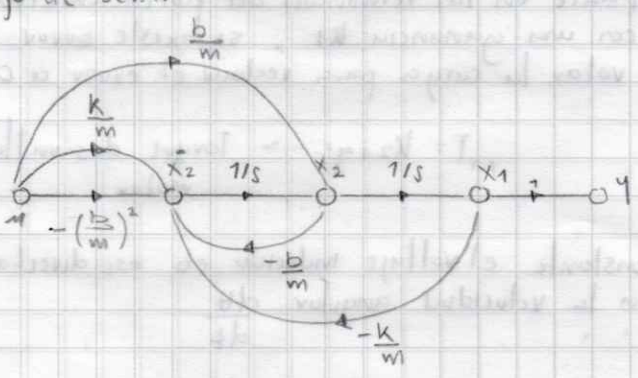
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{b}{m}\\ \frac{k}{m}-\left(\frac{b}{m}\right)^2\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Diagrama de Bloques



- Diagrama de flujo de señal

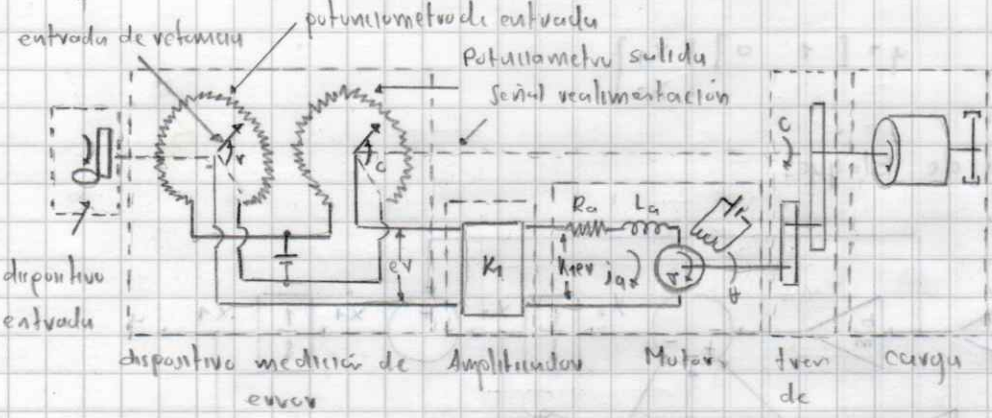


2. Ejercicio A-3-9 5ta edición Ogata

- El motor mostrado es un servomotor, diseñado específicamente para usarse en un sistema de control, la operación del sistema es la siguiente; un par de potenciómetros actuan como dispositivo de medición de errores. Convierten las posiciones de entrada y salida en señales electricas proporcionales, la señal de entrada determina la posición angular r del brazo del potenciometro de entrada. La posición angular r es la entrada de referencia al sistema y el potencial electrico del brazo es proporcional a la posición angular del brazo. La posición del eje de salida determina la posición angular c del brazo del potenciometro de salida, la diferencia entre la posición angular de entrada r y la posición angular de salida c es la señal de error e

$$e = r - c$$

- Esquema



la diferencia de potencial $e_r - e_c = e_v$ es el error de voltaje, donde e_r es proporcional a r y e_c es proporcional a C ; $e_r = K_0 r$, $e_c = K_0 C$, K_0 es una constante de proporcionalidad, el error de voltaje que aparece en las terminales del potenciometro es amplificado con una ganancia K_1. si existe error el motor desarrolla torque para rotar la carga para reducir el error a 0

$$T = K_2 i_a \rightarrow \text{Torque desarrollado por el motor}$$

Para flujo constante el voltaje inducido e_b es directamente proporcional a la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$

$$e_b = K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

- Obteniendo la función de transferencia entre el desplazamiento angular del eje y el voltaje de error e_v
- Ecuación diferencial para el circuito de la armadura

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \quad (1)$$

- Ecuación para el equilibrio de torque

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (2)$$

J_0 es la inercia combinada del motor, carga y engranaje
b_0 es el coeficiente de viscosidad combinada, motor, carga y engranaje

- Eliminando i_a de (1) y (2)

$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s} \quad (3)$$

- Asumiendo que el radio del tren de engranajes es tal que el eje de salida rota n veces por cada revolución

$$C(s) = n\theta(s) \quad (4)$$

- La relación entre $E_v(s)$, $R(s)$ y $C(s)$

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0 E(s) \quad (5)$$

- el diagrama de bloques del sistema se puede construir de (3) (4) y (5) y la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{C(s)}{\theta(s)} \frac{\theta(s)}{E_v(s)} \cdot \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]}$$

- Cuando L_a es pequeña se puede despreciar quedando la función de transferencia, de la siguiente manera

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 s^2 + \left(b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}\right) s}$$

- Simplificando la función de transferencia

$J = J_0 / n^2$ = momento de inercia referido al eje de salida

$B = [b_0 + (K_2 K_3 / R_a)] / n^2$ = coeficiente de viscosidad-fricción referido al eje

$K = K_0 K_1 K_2 / n R_a$

$$G(s) = \frac{K}{J s^2 + B s} \quad (6)$$

- otra manera

$$G(s) = \frac{Km}{s(Tms+1)}$$

$$Km = \frac{K}{B} \quad Tm = \frac{J}{B} = \frac{Ra J_0}{Ra b_0 + K_1 K_3}$$

- Para Representación en espacio de estados

· a partir de (6)

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs} \quad \text{donde } E(s) = R(s) - C(s)$$

$$\therefore \frac{C(s)}{R(s) - C(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

- Hallando $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$

$$C(s) = (R(s) - C(s))\left(\frac{K}{Js^2+Bs}\right) = \frac{R(s)K}{Js^2+Bs} - \frac{C(s)K}{Js^2+Bs}$$

$$\longrightarrow C(s) + \frac{C(s)K}{Js^2+Bs} = \frac{R(s)K}{Js^2+Bs} \longrightarrow C(s)\left(1 + \frac{K}{Js^2+Bs}\right) = \frac{R(s)K}{Js^2+Bs}$$

$$\longrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(Js^2+Bs)\left(1 + \frac{K}{Js^2+Bs}\right)} = \frac{K}{Js^2+Bs+K}$$

$$\therefore \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2+Bs+K} \quad (7)$$

- Para representación en el espacio de estados

- a partir de (7)

$$(Js^2 + Bs + K)C(s) = K R(s)$$

- Aplicando transformada inversa de laplace

$$J\ddot{c} + B\dot{c} + Kc = KR$$

$$\ddot{c} = -\frac{K}{J}c - \frac{B}{J}\dot{c} + \frac{K}{J}R \quad (8)$$

- Variables de estado

$x_1 = C$

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{C}$

$\dot{x}_2 = \ddot{C}$

Remplazando en (σ)

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{J}x_1 - \frac{B}{J}x_2 + \frac{K}{J}R$$

Donde tomando las mismas consideraciones

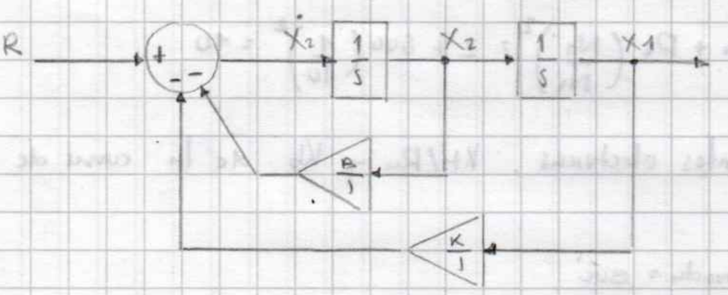
$J = J_0/n^2$; $B = [b_0 + (K_2K_3/R_a)]/n^2$; $K = K_0K_1K_2/nR_a$

- Representacion en espacio de estado

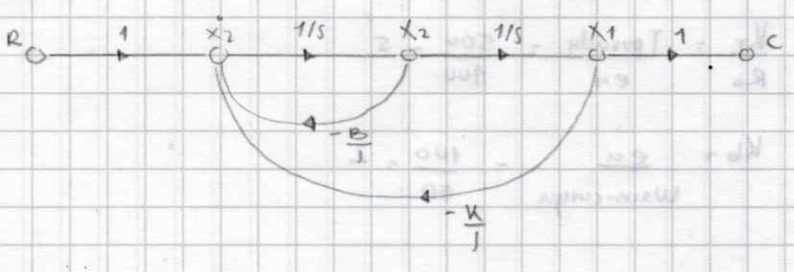
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{bmatrix} R$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Diagrama de Bloques

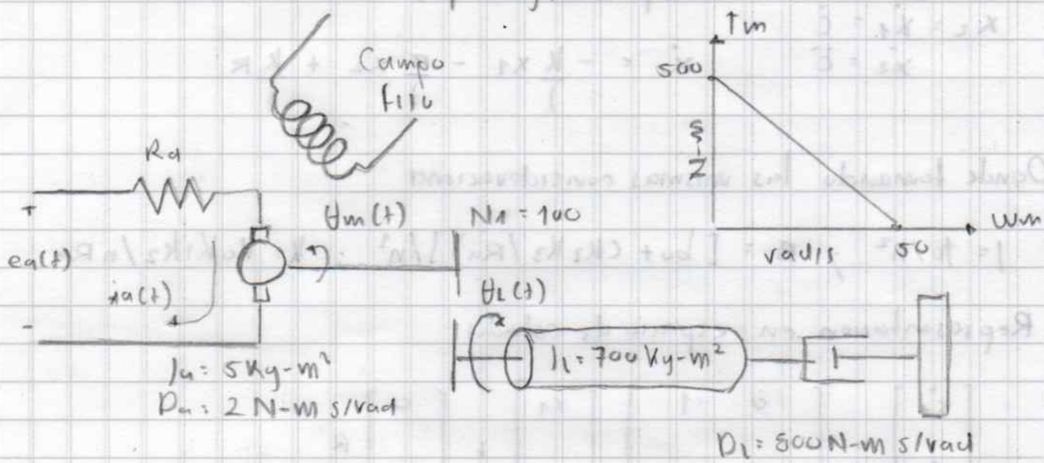


- Diagrama de flujo de señal



3. Ejemplo 2-23 Norman - nise

Funcion de transferencia Motor DC y Carga



- Hallando las constantes mecanicas Jm y Dm | la inercia en la armadura es

$$J_m = J_a + J_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 5 + 700\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 12$$

- la amortiguacion en la armadura del motor es

$$D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 2 + 800\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10$$

- Se hallan las constantes electricas, K_t/R_a y K_b de la curva de torque - velocidad

$$T_{parada} = 500$$
$$W_{sin\text{-}carga} = 50$$
$$e_a = 100$$

- las constantes son

$$\frac{K_T}{R_a} = \frac{T_{parada}}{e_a} = \frac{500}{100} = 5$$

$$K_b = \frac{e_a}{W_{sin\text{-}carga}} = \frac{100}{50} = 2$$

- Para hallar función de transferencia

- El voltaje es proporcional a la velocidad

$$V_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

- Aplicando transformada de laplace

$$V_b(s) = K_b s \theta_m(s) \quad (1)$$

- La relación entre la corriente de armadura, $i_a(t)$ el voltaje aplicado a la armadura $e_a(t)$ y la back emf $V_b(t)$ se obtiene de la malla del circuito de armadura

$$R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + V_b(s) = E_a(s) \quad (2)$$

- El torque devuelto por el motor es proporcional a la corriente de armadura

$$T_m(s) = K_t I_a(s) \quad (3)$$

- Para hallar la función de transferencia se remplaza (1) y (3) en (2)

$$\frac{(R_a + L_a s)T_m(s)}{K_t} + K_b s \theta_m(s) = E_a(s) \quad (4)$$

- Dm es el equivalente de amortiguamiento viscoso en la armadura que tambien incluye la carga reflejada a la armadura

$$T_m(s) = (J_m s^2 + D_m s)\theta_m(s) \quad (5)$$

- Sustituyendo (5) en (4)

$$\frac{(R_a + L_a s)(J_m s^2 + D_m s)\theta_m(s)}{K_t} + K_b s \theta_m(s) = E_a(s)$$

- Asumiendo La pequeña comparada con la resistencia de armadura

$$\left[\frac{R_a}{K_T}(J_m s + D_m) + K_b\right] s \theta_m(s) = E_a(s)$$

- Simplificando la función de transferencia deseada $\theta m(s)/Ea(s)$

$$\frac{\theta m(s)}{Ea(s)} = \frac{K_T/(Ra)Jm)}{s\left[s+\frac{1}{Jm}\left(\rho m+\frac{K_T K_b}{Ra}\right)\right]} \quad (6)$$

- Simplificando aun mas

$$\frac{\theta m(s)}{Ea(s)} = \frac{K}{s(s+a)}$$

- Al remplazar los valores en (6)

$$\frac{\theta m(s)}{Ea(s)} = \frac{5/12}{s\left[s+\frac{1}{12}(10+(5)(2))\right]} = \frac{0.417}{s(s+1.667)}$$

- Para encontrar $\theta_L(s)/Ea(s)$ se usa el radio de engranage, $N_1/N_2 = 1/10$

$$\frac{\theta_L(s)}{Ea(s)} = \frac{0.0417}{s(s+1,667)} \quad (7)$$

- Para hallar representación en el espacio de estados de (7)

$$(s^2 + s\,1,667)\,\theta_L(s) = 0,0417\,Ea(s)$$

- transformada inversa de laplace

$$\ddot{\theta}_L + \dot{\theta}_L\,1,667 = 0,0417\,Ea$$

$$\ddot{\theta}_L = -\dot{\theta}_L\,1,667 + 0,0417\,Ea \quad (8)$$

variables de estado

$$x_1 = \theta_L$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}_L$$
$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_L$$

Remplazando en (8)

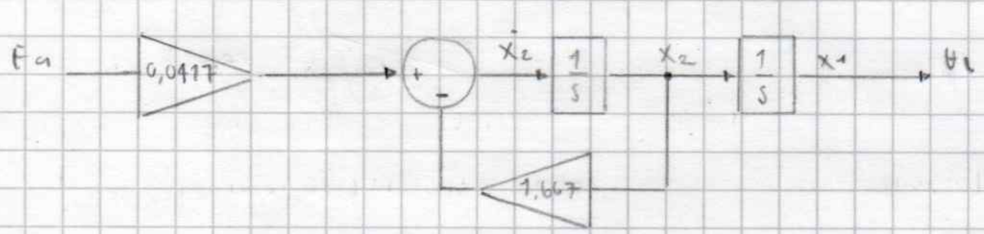
$$\dot{x}_2 = -x_2\,1,667 + 0,0417\,Ea$$

- Espacio de estados

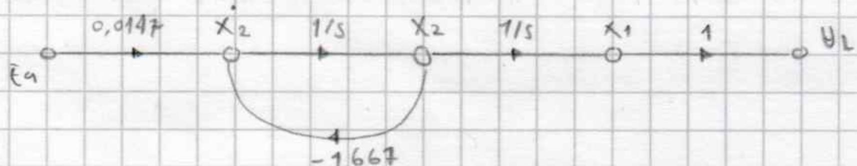
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0417 \end{bmatrix} E_a$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Diagrama de bloques



- Diagrama de flujo de señal



4. Conclusiones

El sistema planteado en el libro de Ogata es un servomotor y contiene una señal de realimentación, esta señal es la que lo diferencia respecto al sistema de solo el motor DC con carga pues para el primero la señal de realimentación implica un termino K en el denominador de la función de transferencia

Segundo Parcial Sistemas Dinamicos

Juan Sebastian Casas Barbosa
cod: 20211005031

1. Sistema rotacional

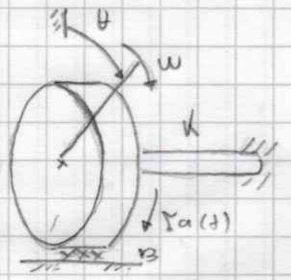
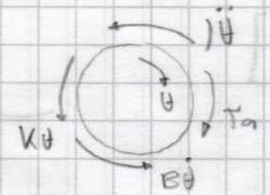


Diagrama de Cuerpo libre



ΣP

$$T_a - K\theta - B\dot{\theta} - J\ddot{\theta} = 0$$

$$T_a = K\theta + B\dot{\theta} + J\ddot{\theta} \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{K}{J}\theta - \frac{B}{J}\dot{\theta} + \frac{T_a}{J} \quad (2)$$

Hallando función de transferencia

d. Aplicando transformada de laplace de (1)

$$T_a(s) = (K + Bs + Js^2)\,\theta(s)$$

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K}}$$

a. Representación en espacio de estados

- Variables de estado

$$X_1 = \theta$$
$$X_2 = \dot{X}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{X}_2 = \ddot{\theta}$$

- Remplazando en (2)

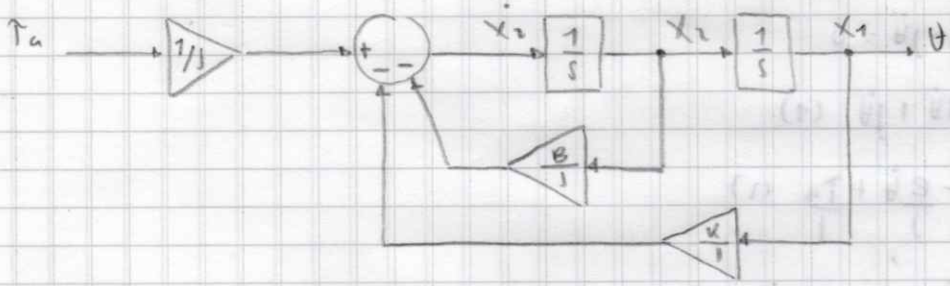
$$\dot{X}_2 = -\frac{K}{J}X_1 - \frac{B}{J}X_2 + \frac{T_a}{J}$$

- Espacio de estados

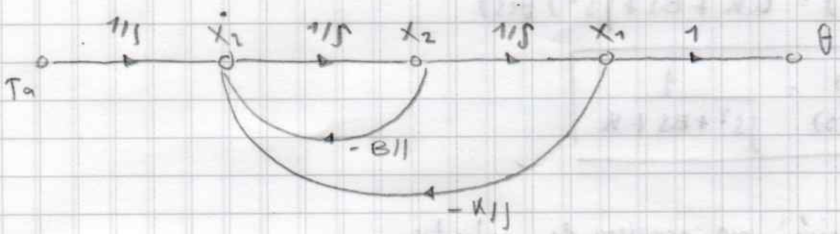
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} T_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

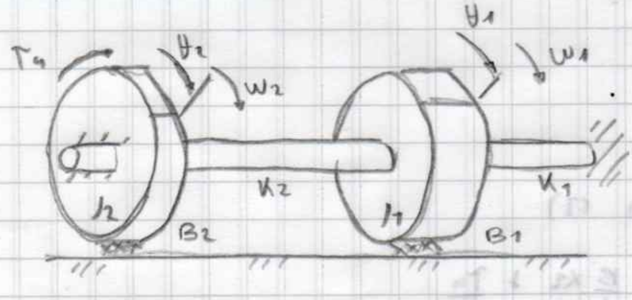
b. Diagrama de Bloques



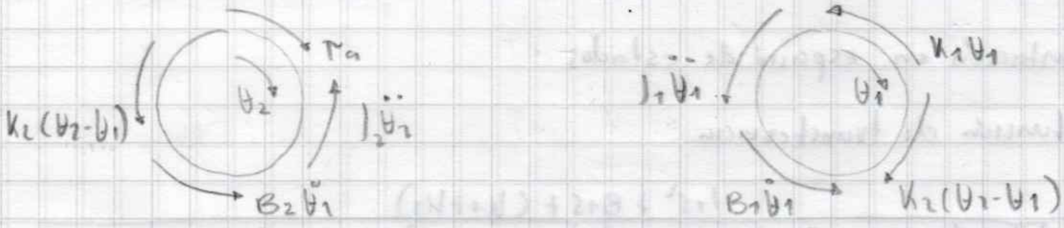
c. Diagrama de flujo de señal



2. Sistema Rotacional $\theta_2 > \theta_1$



- Diagramas de cuerpo libre



$\sum F$ $\qquad\qquad$ $\sum F$

$$T_a - K_2(\theta_2-\theta_1) - B_2\dot{\theta}_1 = J_2\ddot{\theta}_2 \quad (1) \qquad K_2(\theta_2-\theta_1) - B_1\dot{\theta}_1 - K_1\theta_1 = J_1\ddot{\theta}_1 \quad (2)$$

a. Función de transferencia

de (1) $\quad T_a = J_2\ddot{\theta}_2 + B_2\dot{\theta}_2 + K_2(\theta_2-\theta_1)$

Aplicando transformada de laplace

$$T_a(s) = \theta_2(s)\left(J_2 s^2 + B_2 s + K_2\right) - \theta_1(s)K_2 \quad (3)$$

de (2) $\quad K_2\theta_2 - K_2\theta_1 - B_1\dot{\theta}_1 - K_1\theta_1 = J_1\ddot{\theta}_1$

$$K_2\theta_2 = J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 + \theta_1(K_1+K_2)$$

Aplicando transformada de laplace

$$\theta_2(s)K_2 = \theta_1(s)\left(J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)\right)$$

$$\theta_1(s) = \frac{\theta_2(s)K_2}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)}$$

Remplazando en (3)

$$T_a(s) = \theta_2(s)\left(J_2 s^2 + B_2 s + K_2\right) - \frac{\theta_2(s)K_2}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)} \cdot K_2$$

$$T_a(s) = \theta_2(s)\left(J_2 s^2 + B_2 s + K_2 - \frac{K_2^2}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)}\right)$$

$$T_a(s) = \theta_2(s)\left(\frac{\left(J_2 s^2 + B_2 s + K_2\right)\left(J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)\right) - K_2^2}{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1+K_2)}\right)$$

$$\boxed{\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1 + K_2)}{(J_2 s^2 + B_2 s + K_2)(J_1 s^2 + B_1 s + (K_1 + K_2)) - K_2^2}}$$

b. Representación en espacio de estados de la función de transferencia

$$\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1 + K_2)}{J_2 J_1 s^4 + J_2 B_1 s^3 + J_2 (K_1 + K_2) s^2 + B_2 J_1 s^3 + B_2 B_1 s^2 + B_2 (K_1 + K_2) s + K_2 J_1 s^2 + K_2 B_1 s + K_2 K_1}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + (K_1 + K_2)}{s^4 (J_2 J_1) + s^3 (J_2 B_1 + J_1 B_2) + s^2 (J_2 (K_1 + K_2) + B_2 B_1 + K_2 J_1) + s (B_2 (K_1 + K_2) + B_1 K_2) + K_1 K_2} \quad (ec^1)$$

Tomando

$A = J_2 J_1$

$B = J_2 B_1 + J_1 B_2$

$C = J_2 (K_1 + K_2) + B_2 B_1 + K_2 J_1$

$D = B_2 (K_1 + K_2) + B_1 K_2$

$$\boxed{\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2}{A s^4 + B s^3 + C s^2 + D s + K_1 K_2}}$$

$$T_a(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{A s^4 + B s^3 + C s^2 + D s + K_1 K_2}} \xrightarrow{X_1(s)} \boxed{J_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2} \longrightarrow \theta_2(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{A s^4 + B s^3 + C s^2 + D s + K_1 K_2} \longrightarrow (A s^4 + B s^3 + C s^2 + D s + K_1 K_2) X_1(s) = T_a(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad A \ddddot{x}_1 + B \dddot{x}_1 + C \ddot{x}_1 + D \dot{x}_1 + K_1 K_2 x_1 = T_a \quad (4)$$

Variables de estado

$x_1 = x_1$

$x_2 = \dot{x}_1$

$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1$

$x_4 = \dot{x}_3 = \dddot{x}_1$

$\dot{x}_4 = \ddddot{x}_1$

Remplazando en (4)

$$A\dot{x}_4 + Bx_4 + Cx_3 + Dx_2 + k_1k_1x_1 = T_a$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{k_1k_1x_1}{A} - \frac{Dx_2}{A} - \frac{C}{A}x_3 - \frac{B}{A}x_4 + \frac{T_a}{A}$$

$$\theta_2(s) = (J_1s^2 + B_1s + (k_1+k_1))X_1(s)$$

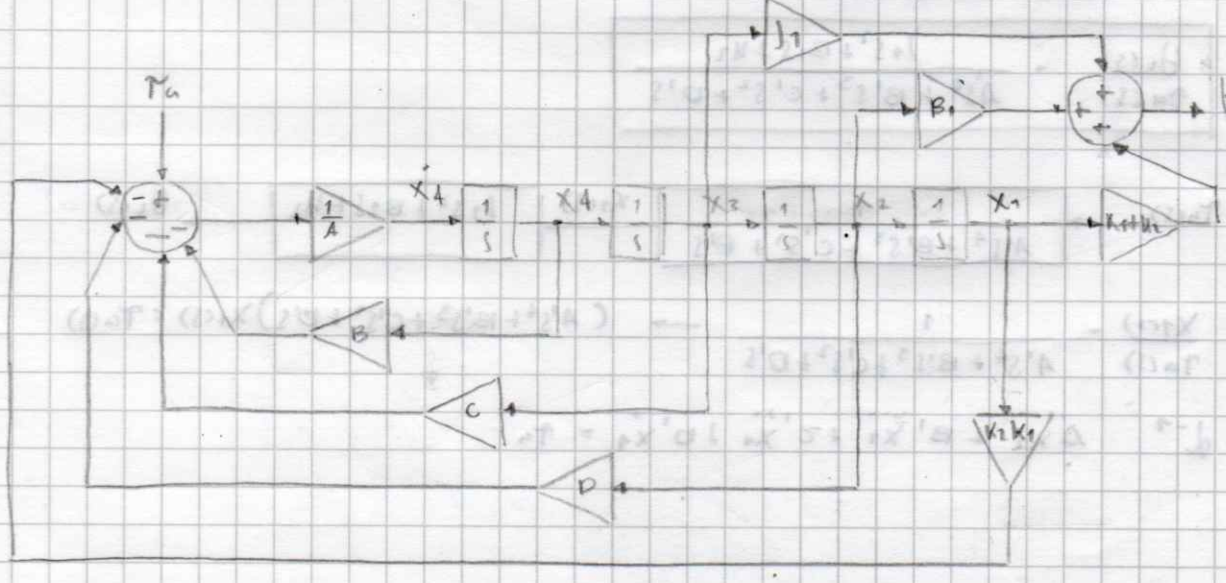
$$\mathcal{L}^{-1} \quad J_1\ddot{x}_1 + B_1\dot{x}_1 + (k_2+k_1)x_1 = \theta_2 \rightarrow \theta_2 = (k_2+k_1)x_1 + B_1x_2 + J_1x_3$$

- Representación en espacio de estados

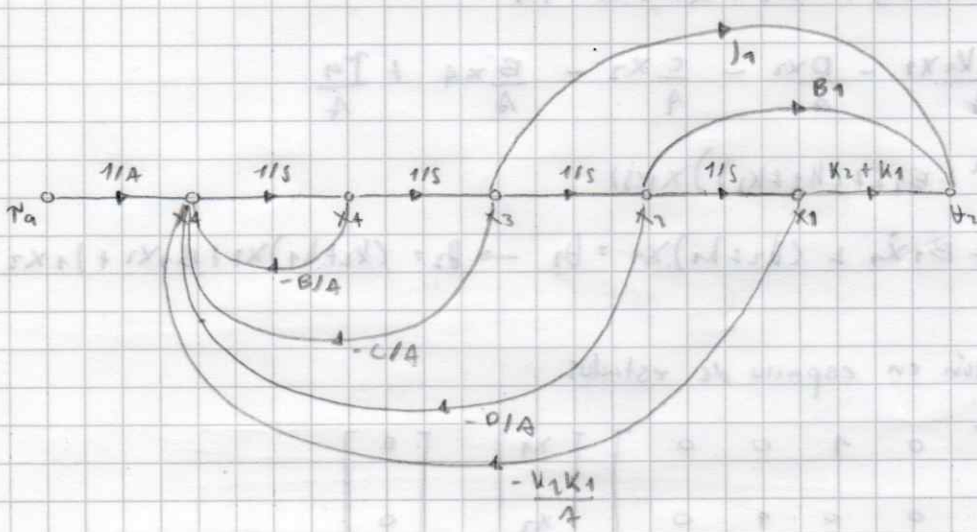
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_2k_1}{A} & -\frac{D}{A} & -\frac{C}{A} & -\frac{B}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A} \end{bmatrix} T_a$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} (k_2+k_1) & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

c. Diagrama de bloques



d. Diagrama de flujo de señal



3. Sistema anterior considerando $K_1 = 0$

Partiendo de (ec*) con $K_1 = 0$

$$\boxed{\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_2}{s^4 (J_2 J_1) + s^3 (J_2 B_1 + J_1 B_2) + s^2 (J_2 K_1 + B_2 B_1) + s (B_2 K_2 + B_1 K_2)}}$$

Tomando

$A' = J_2 J_1$
$B' = J_2 B_1 + J_1 B_2$
$C' = J_2 K_1 + B_2 B_1$
$D' = B_2 K_2 + B_1 K_2$

$$\boxed{\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_2}{A' s^4 + B' s^3 + C' s^2 + D' s}}$$

$$T_a(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{A's^4 + B's^3 + C's^2 + D's}} \xrightarrow{X_1(s)} \boxed{J_1 s^2 + B_1 s + K_2} \rightarrow \theta_2(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{T_a(s)} = \frac{1}{A's^4 + B's^3 + C's^2 + D's} \longrightarrow (A's^4 + B's^3 + C's^2 + D's) X_1(s) = T_a(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad A' \ddddot{x}_1 + B' \dddot{x}_1 + C' \ddot{x}_1 + D' \dot{x}_1 = T_a$$

Variables de estado

$$x_1 = x_1$$
$$x_2 = \dot{x}_1$$
$$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1$$
$$x_4 = \dot{x}_3 = \dddot{x}_1$$
$$\dot{x}_4 = \ddddot{x}_1$$

Remplazando

$$A'\dot{x}_4 + B'x_4 + C'x_3 + D'x_2 = T_a \longrightarrow \dot{x}_4 = -\frac{D'}{A}x_2 - \frac{C'}{A}x_3 - \frac{B'}{A}x_4 + \frac{T_a}{A}$$

$$\theta_2(s) = (J_1 s^2 + B_1 s + K_2)X_1(s)$$

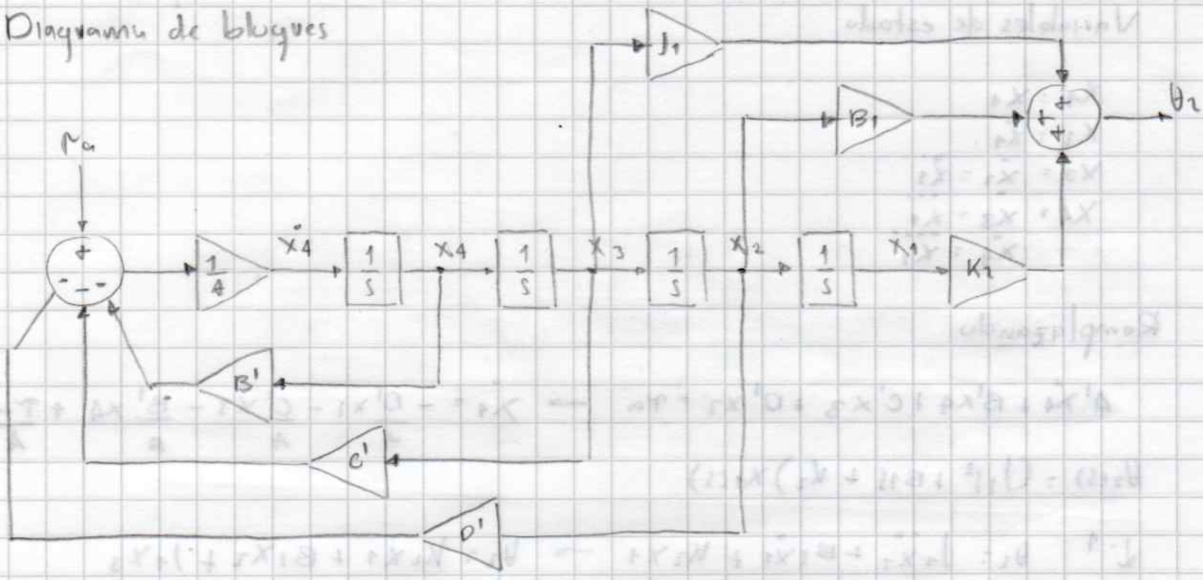
$$\mathcal{L}^{-1} \quad \theta_2 = J_1\ddot{x}_1 + B_1\dot{x}_1 + K_2 x_1 \longrightarrow \theta_2 = K_2 x_1 + B_1 x_2 + J_1 x_3$$

- Representación en espacio de estados

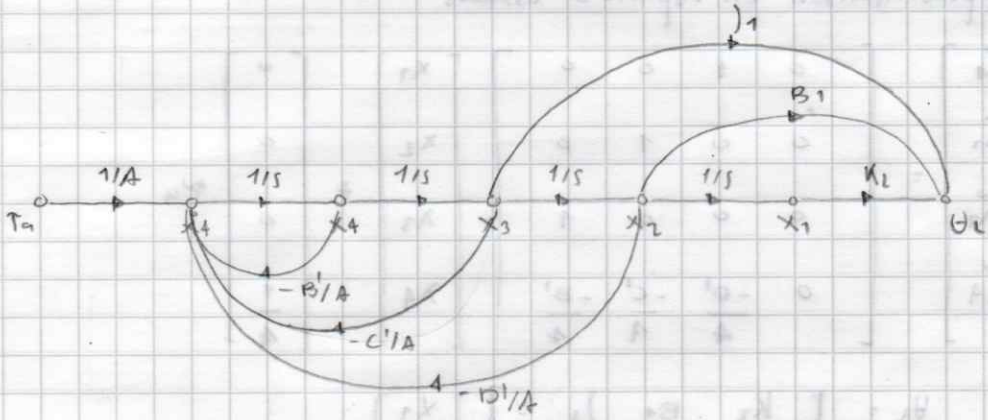
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D'}{A} & -\frac{C'}{A} & -\frac{B'}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{A} \end{bmatrix} T_a$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} K_2 & B_1 & J_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

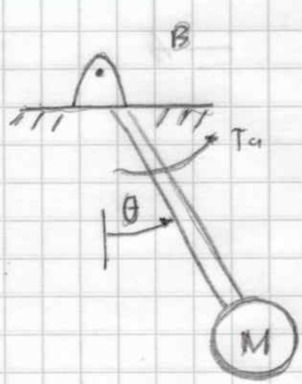
- Diagrama de bloques



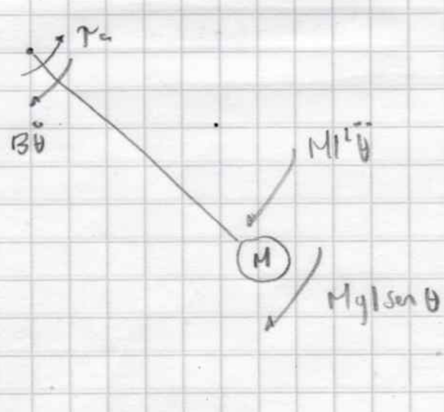
- Diagrama de flujo de señal



4. Sistema Rotacional



- Diagrama de cuerpo libre.



$$Ml^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + Mgl\,\mathrm{sen}\,\theta = \tau a(t) \quad (1)$$

Despejando $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgl\,\mathrm{sen}\,\theta}{Ml^2} - \frac{B}{Ml^2}\dot{\theta} + \frac{\tau a}{Ml^2}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{B}{Ml^2}\dot{\theta} + \frac{\tau a}{Ml^2}$$

Normalizando con $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{B}{Ml^2}\dot{\theta} + \frac{\tau a}{Ml^2} \quad (2)$$

$$\ddot{\theta}Ml^2 + Mgl\theta + B\dot{\theta} = \tau a \quad (3)$$

a. función de transferencia

Aplicando transformada de laplace

$$(Ml^2s^2 + Bs + Mgl)\,\theta(s) = \tau a(s)$$

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{\tau a(s)} = \frac{1}{Ml^2s^2 + Bs + Mgl}} \longrightarrow \frac{1}{s^2 + s\left(\frac{B}{Ml^2}\right) + \frac{g}{l}}$$

b. Representación en espacio de estados

Variables de estado

$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

Remplazando en (2)

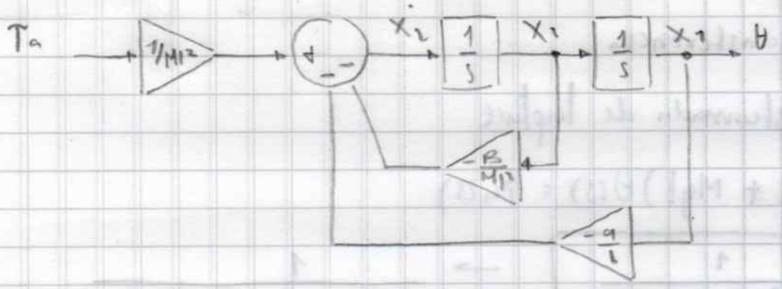
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_1 - \frac{B}{Ml^2}x_2 + \frac{\tau a}{Ml^2}$$

- Espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{B}{Ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix} T_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

c. Diagrama de Bloques



d. Diagrama de flujo de señal