OPTYMALIZACJA NIELINIOWA PROJEKT NR 1

SEBASTIAN ZŁOTEK

Opis danych

Dane użyte w projekcie zostały pobrane ze strony kaggle.com, oraz przedstawiają ceny rynkowe cebuli w 2020 roku, jej pochodzenie wraz z stanem, regionem, dystryktem, datą przybycia produktu, typu cebuli oraz ceny maksymalnej, minimalnej i modalnej.

Obróbka danych

Do obróbki danych użyłem języka R oraz środowiska R studio. W pierwszej kolejności wczytałem katalog z danymi, oraz usunąłem notacje wykładniczą, dzięki czemu małe liczby będą łatwiejsze do zapisania w dalszej części kodu.

Dane posortowałem według regionu Gujarat oraz rodzaju cebuli "white" a także zablokowałem duplikaty aby wykres w późniejszym czasie był bardziej przejrzysty.

Do utworzenia wykresu stworzyłem funkcję onion_modal przechowującą kolumnę z ceną modalną cebuli wcześniej już posortowaną według regionu i rodzaju, a także daty bez duplikatów

```
#wybranie katalogu glownego
getwd()
setwd("C:/Users/Sebastian/Desktop/studia/III rok 1 semestr/Optymalizacja_nieliniowa_PROJEKT")
#Usuniecie notacji wykladniczej
options(scipen = 999)

#Wczytanie danych
onion <- read.csv("onion2020.csv", sep = ',')

#Sortowanie danych wedlug stanu oraz rodzaju cebuli
onionsorted <- onion[which(onion$state == 'Gujarat' & onion$variety == 'White'),]

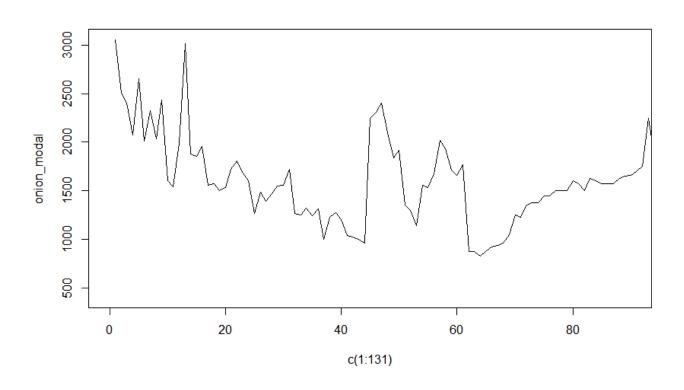
#Usuniecie duplikatow dat, dla uzyskania lepszego wykresu
onionsorted <- onionsorted[!duplicated(onionsorted[6]),]

#Utworzenie listy z cenami
onion_modal <- onionsorted$modal_price</pre>
```

Obrobiona ramka danych

optymalizacja-p1.R* × Q onion_modal × onionsorted ×									
•	state ‡	district ‡	market ‡	commodity ‡	variety ‡	arrival_date ‡	min_price ‡	max_price ‡	modal_price
1862	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	01/01/2020	2755	3355	305
1863	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	02/01/2020	2255	2755	25
1864	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	03/01/2020	2205	2605	24
1865	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	04/01/2020	1900	2255	20
1866	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	06/01/2020	2300	3010	26
1867	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	07/01/2020	1000	3015	20
1868	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	08/01/2020	1500	3150	23
1869	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	09/01/2020	1125	2950	20
1870	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	10/01/2020	2355	2515	24
1871	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	11/01/2020	1250	1950	16
1872	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	13/01/2020	1305	1775	15
1873	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	18/01/2020	1855	2125	19
1874	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	20/01/2020	2825	3205	30
1875	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	21/01/2020	1000	2760	18
1876	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	22/01/2020	1175	2535	18
1877	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	24/01/2020	1450	2475	19
1878	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	25/01/2020	1060	2050	15
1879	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	27/01/2020	1305	1845	15
1880	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	28/01/2020	1005	2005	15
1881	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	31/01/2020	1025	2035	15
1882	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	01/02/2020	1250	2205	17
1883	Gujarat	Bhavnagar	Bhavnagar	Onion	White	03/02/2020	1500	2110	18

Dane opisuje wykres



Gdzie na osi y opisana jest cena modalna cebuli, natomiast na x wektor danych od 1 do 131 (liczba wierszy w kolumnie)

Tworzenie regresji

Tworze ramkę danych o długości równej ilości wierszy w onion_modal, dzięki czemu w następnej linijce kodu mam możliwość stworzenia linii regresji, której potęga przy wartości x wynosi 10, do tego używam funkcji lm oraz poly, które jako gotowe funkcje matematyczne wbudowane w R dają możliwość użycia ramki danych i potęgi do utworzenia wcześniej wspomnianej regresji.

Tworzę także sekwencje danych od 1 do 131 pomagającą funkcji "line" w umieszczeniu linii regresji na wykresie (kolor czerwony).

```
#Wykres cen
plot( x = c(1:131), y=onion_modal, col = "black", type = "l", xlim = c(0,90))

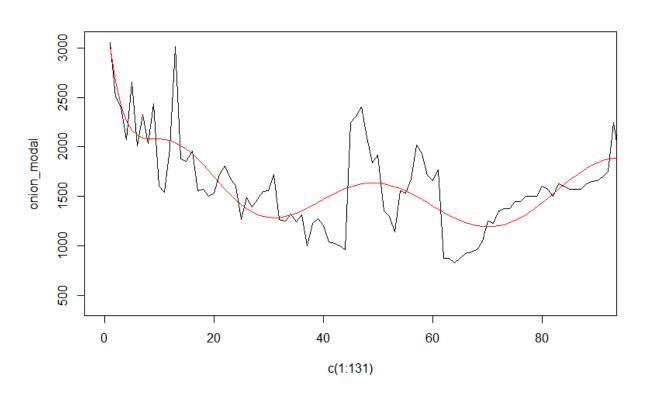
#Utworzenie ramki danych
onion_data <- data.frame( x = c(1:131), y = onion_modal )

#Utworzenie linii regresji 10 - potega przy x
onion_reg10 <- lm( y~poly( x, 10, raw = TRUE ), data = onion_data )

#Sekwencja danych
onionseq <- seq( 1, 131, length = 131 )

#Wyświetlenie linii regresji na wykresie (kolor czerwony)
lines( onionseq, predict( onion_reg10, data.frame(x = onionseq) ), col = 'red' )</pre>
```

Linia regresji na wykresie



Opis regresji oraz podobieństwo

Funkcje summary() i summary()\$adj.r.squared opisują kolejno:

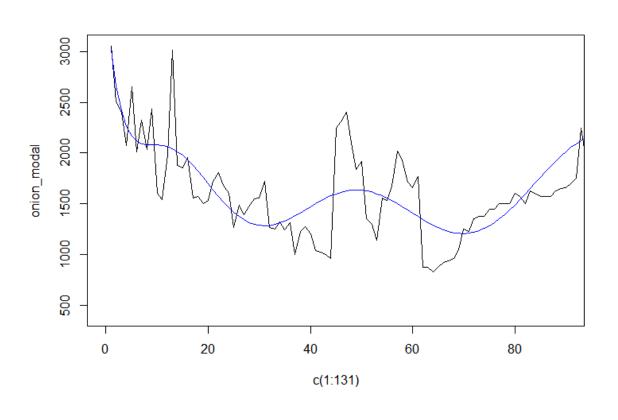
- regresję jako całość, dzięki czemu możemy odczytać wartości do naszej funkcji z kolumny "Estimate",
- obliczyć procent podobieństwa regresji do danych, który w moim przypadku wynosi 0.5850153 co oznacza, że regresja do danych jest dopasowana jeszcze w odpowiednim stopniu.

```
summarv(onion_reg10)$adi.r.sguared
[1] 0.5850153
lm(formula = y \sim poly(x, 10, raw = TRUE), data = onion_data)
    Min
             1Q Median
 -644.63 -171.20 -21.31 161.61 971.49
Coefficients:
                                                                                             Pr(>|t|)
                                                                           9.552 < 0.0000000000000000 ***
poly(x, 10, raw = TRUE)1
                                                                                              0.00159 **
poly(x, 10, raw = TRUE)2
                                                                                              0.00210 **
poly(x, 10, raw = TRUE)3
                                                                          -3.217
                            -7.52946661137093365
                                                                                              0.00166 **
poly(x, 10, raw = TRUE)4
                             0.32364959235614527
                                                                           3.202
                                                                                              0.00175 **
                                                     0.10109114407669079
polv(x, 10, raw = TRUE)5
                                                                                              0.00247 **
                             -0.00814851318300418
                                                    0.00263530324209718
poly(x, 10, raw = TRUE)6
                                                                                              0.00424 **
poly(x, 10, raw = TRUE)7
                                                                                              0.01559 *
poly(x, 10, raw = TRUE)8
                             0.00000000690730167
                                                     0.00000000281542171
poly(x, 10, raw = TRUE)9
                             -0.00000000002191333
                                                    0.0000000000995473
                                                                                              0.02963 *
                                                                                              0.05359 .
poly(x, 10, raw = TRUE)10
                                                    0.0000000000001506
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' '1
Residual standard error: 299.7 on 120 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.6169, Adjusted R-squared: 0.585
F-statistic: 19.33 on 10 and 120 DF, p-value: < 0.00000000000000022
```

Funkcja główna

Z wspomnianej kolumny Estimate z funkcji summary zostały otrzymane współczynniki do utworzenia funkcji, której będziemy używać w algorytmach.

Wykres funkcji



Algorytm złotego podziału

Idea metody opiera się na założeniu, że w każdym kroku obliczeń długość przedziału zmniejszana jest w stałym stosunku równym α, gdzie

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.6180339 \quad \text{(złota liczba)}$$

Złota liczba jest to dodatnia liczba niewymierna będąca rozwiązaniem równania

$$x^2 - x - 1 = 0$$
 Równa:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339$$

Czasami złotą liczbą określa się też liczbę odwrotną

Algorytm złotego podziału

Ciągła i unimodalna funkcja $f: R \to R$ dla której szukamy minimum w przedziale [a, b]. W startowej (zerowej) iteracji przyjmujemy:

$$a^{(0)} = a i b^{(0)} = b$$

a następnie wybieramy dwa różne punkty $c^{(0)}$, $d^{(0)} \in [a^{(0)}, b^{(0)}]$ takie, że $c^{(0)} < d^{(0)}$

Przedział poszukiwań ma zmniejszać się, z iteracji na iterację, w stałym stosunku α. Oznacza to, że w każdej iteracji, wybrane punkty pośrednie muszą dzielić i-ty przedział tak, aby spełniony był warunek.

$$\frac{b^{(i)} - c^{(i)}}{b^{(i)} - a^{(i)}} = \frac{d^{(i)} - a^{(i)}}{b^{(i)} - a^{(i)}} = \alpha.$$

Algorytm złotego podziału

Z ostatniego warunku możemy wyznaczyć wartości punktów $c^{(i)}$ i $d^{(i)}$ w każdej iteracji używając wzoru

$$c^{(i)} = b^{(i)} - \alpha \left(b^{(i)} - a^{(i)} \right) = \alpha a^{(i)} + (1 - \alpha) b^{(i)},$$

$$d^{(i)} = a^{(i)} + \alpha \left(b^{(i)} - a^{(i)} \right) = (1 - \alpha) a^{(i)} + \alpha b^{(i)}.$$

Algorytm złotego podziału - min/max

Jeżeli w i-tej iteracji zachodzi:

$$f(c^{(i)}) < f(d^{(i)})$$

Wówczas w następnej iteracji poszukiwania będą prowadzone w przedziale $[a^{(i)} i d^{(i)}]$. Będziemy wtedy mieli:

$$a^{(i+1)} = a^{(i)},$$

$$b^{(i+1)} = d^{(i)},$$

$$c^{(i+1)} = \alpha a^{(i+1)} + (1-\alpha)b^{(i+1)},$$

$$d^{(i+1)} = (1-\alpha)a^{(i+1)} + \alpha b^{(i+1)} = (1-\alpha)a^{(i)} + \alpha d^{(i)} = \dots = c^{(i)}.$$

Jak widać w (i + 1)-szej iteracji jest potrzeba wyznaczenia tylko jednego nowego punktu, tzn. c (i+1). Pozostałe punkty znamy z poprzedniej iteracji.

Algorytm złotego podziału - min/max

Analogiczna sytuacja ma miejsce, jeżeli w i-tej iteracji zachodzi:

$$f(c^{(i)}) > f(d^{(i)})$$

Wtedy w następnej iteracji poszukiwania będą prowadzone w przedziale $[c^{(i)}, b^{(i)}]$. Będziemy wtedy mieli

$$a^{(i+1)} = c^{(i)},$$

$$b^{(i+1)} = b^{(i)},$$

$$c^{(i+1)} = \alpha a^{(i+1)} + (1-\alpha)b^{(i+1)} = \alpha c^{(i)} + (1-\alpha)b^{(i)} = \dots = d^{(i)},$$

$$d^{(i+1)} = (1-\alpha)a^{(i+1)} + \alpha b^{(i+1)}.$$

W tym przypadku w (i + 1)-szej iteracji jest również potrzeba wyznaczenia tylko jednego nowego punktu, tzn. d (i+1). Pozostałe punkty są już znane z poprzedniej iteracji.

Algorytm złotego podziału - minimum

```
#algorytm golden podstawowy - minimum
golden <- function(f,lower, upper, tol){</pre>
 czas1 <- Svs.time()</pre>
 alpha <- (sqrt(5)-1)/2
 x1 <- alpha * lower + (1-alpha) * upper
 f.x1 < -f(x1)
 x2 <- (1-alpha) * lower + alpha * upper
 f.x2 <- f(x2)
  i<-0
  cat("iteracja:",i,"a=",lower,"b=",upper,"b-a=",upper-lower,"\n")
  while(abs(upper - lower) > 2 * tol){
   i<-i+1
    if (f.x1 < f.x2){
      upper <- x2
      x2 <- x1
      f.x2 \leftarrow f.x1
      x1 <- alpha * lower + (1-alpha) * upper
      f.x1 < -f(x1)
      lower <- x1
      x1 < -x2
      f.x1 < -f.x2
      x2 <- (1-alpha) * lower + alpha * upper
      f.x2 <- f(x2)
    cat("iteracja:",i,"a=",lower,"b=",upper,"b-a=",upper-lower,"\n")
  czas2 <- Sys.time()</pre>
  cat("Czas działania: ",czas2-czas1,"\n")
  return((lower + upper) / 2)
```

Kod w RStudio

```
#Wartość minimalna golder
iteracja: 0 a= 22 b= 38 b-a= 16
iteracja: 1 a= 28.11146 b= 38 b-a= 9.888544
iteracja: 2 a= 28.11146 b= 34.22291 b-a= 6.111456
iteracja: 3 a= 28.11146 b= 31.88854 b-a= 3.777088
iteracia: 4 a= 29.55418 b= 31.88854 b-a= 2.334369
iteracja: 5 a= 30.44582 b= 31.88854 b-a= 1.442719
iteracja: 6 a= 30.44582 b= 31.33747 b-a= 0.8916494
iteracja: 7 a= 30.7864 b= 31.33747 b-a= 0.5510697
iteracja: 8 a= 30.7864 b= 31.12698 b-a= 0.3405798
iteracja: 9 a= 30.91649 b= 31.12698 b-a= 0.2104899
iteracja: 10 a= 30.99689 b= 31.12698 b-a= 0.1300899
iteracja: 11 a= 30.99689 b= 31.07729 b-a= 0.08039998
iteracja: 12 a= 31.0276 b= 31.07729 b-a= 0.04968992
iteracja: 13 a= 31.04658 b= 31.07729 b-a= 0.03071006
iteracja: 14 a= 31.04658 b= 31.06556 b-a= 0.01897986
iteracja: 15 a= 31.04658 b= 31.05831 b-a= 0.0117302
iteracja: 16 a= 31.05106 b= 31.05831 b-a= 0.007249662
iteracja: 17 a= 31.05383 b= 31.05831 b-a= 0.004480537
iteracja: 18 a= 31.05383 b= 31.0566 b-a= 0.002769124
iteracja: 19 a= 31.05489 b= 31.0566 b-a= 0.001711413
iteracja: 20 a= 31.05555 b= 31.0566 b-a= 0.001057711
iteracja: 21 a= 31.05555 b= 31.0562 b-a= 0.0006537016
iteracja: 22 a= 31.0558 b= 31.0562 b-a= 0.0004040098
iteracja: 23 a= 31.05595 b= 31.0562 b-a= 0.0002496918
iteracja: 24 a= 31.05595 b= 31.0561 b-a= 0.000154318
iteracja: 25 a= 31.05601 b= 31.0561 b-a= 0.00009537378
iteracja: 26 a= 31.05601 b= 31.05607 b-a= 0.00005894424
iteracja: 27 a= 31.05603 b= 31.05607 b-a= 0.00003642954
iteracja: 28 a= 31.05604 b= 31.05607 b-a= 0.00002251469
iteracja: 29 a= 31.05604 b= 31.05606 b-a= 0.00001391485
iteracja: 30 a= 31.05604 b= 31.05605 b-a= 0.000008599848
iteracia: 31 a= 31.05605 b= 31.05605 b-a= 0.000005314998
iteracja: 32 a= 31.05605 b= 31.05605 b-a= 0.00000328485
iteracja: 33 a= 31.05605 b= 31.05605 b-a= 0.000002030149
iteracja: 34 a= 31.05605 b= 31.05605 b-a= 0.000001254701
Czas działania: 0.01204109
[1] 31.05605
```

Otrzymane minimum na przedziale [22;38] Wynosi 31.05605 i wymagało 34 iteracji

Algorytm złotego podziału - maximum

```
#Algorytm golden podstawowy - maximum
golden_max <- function(f,lower, upper, tol){</pre>
  czas1 <- Sys.time()</pre>
  alpha \leftarrow (sqrt(5)-1)/2
  x1 <- alpha * lower + (1-alpha) * upper
  f.x1 <- f(x1)
  x2 <- (1-alpha) * lower + alpha * upper
  f.x2 <- f(x2)
  i<-0
  cat("iteracja:",i,"a=",lower,"b=",upper,"b-a=",upper-lower,"\n")
  while(abs(upper - lower) > 2 * tol){
   i<-i+1
    if (f.x1 > f.x2){
      upper <- x2
      x2 <- x1
      f.x2 \leftarrow f.x1
      x1 <- alpha * lower + (1-alpha) * upper
      f.x1 \leftarrow f(x1)
      lower <- x1
      x1 < -x2
      f.x1 \leftarrow f.x2
      x2 <- (1-alpha) * lower + alpha * upper
      f.x2 <- f(x2)
    cat("iteracja:",i,"a=",lower,"b=",upper,"b-a=",upper-lower,"\n")
  czas2 <- Sys.time()</pre>
  cat("Czas działania: ",czas2-czas1,"\n")
  return((lower + upper) / 2)
```

Kod w RStudio

```
#wartosc maksymalna golden
iteracja: 0 a= 44 b= 60 b-a= 16
iteracja: 1 a= 44 b= 53.88854 b-a= 9.888544
iteracja: 2 a= 47.77709 b= 53.88854 b-a= 6.111456
iteracja: 3 a= 47.77709 b= 51.55418 b-a= 3.777088
iteracja: 4 a= 47.77709 b= 50.11146 b-a= 2.334369
iteracja: 5 a= 48.66874 b= 50.11146 b-a= 1.442719
iteracja: 6 a= 48.66874 b= 49.56039 b-a= 0.8916494
iteracja: 7 a= 48.66874 b= 49.21981 b-a= 0.5510697
iteracja: 8 a= 48.87923 b= 49.21981 b-a= 0.3405798
iteracja: 9 a= 48.87923 b= 49.08972 b-a= 0.2104899
iteracja: 10 a= 48.95963 b= 49.08972 b-a= 0.1300899
iteracia: 11 a= 48.95963 b= 49.04003 b-a= 0.08039998
iteracja: 12 a= 48.99034 b= 49.04003 b-a= 0.04968992
iteracja: 13 a= 48.99034 b= 49.02105 b-a= 0.03071006
iteracja: 14 a= 49.00207 b= 49.02105 b-a= 0.01897986
iteracja: 15 a= 49.00207 b= 49.0138 b-a= 0.0117302
iteracja: 16 a= 49.00655 b= 49.0138 b-a= 0.007249662
iteracja: 17 a= 49.00932 b= 49.0138 b-a= 0.004480537
iteracja: 18 a= 49.00932 b= 49.01209 b-a= 0.002769124
iteracja: 19 a= 49.00932 b= 49.01103 b-a= 0.001711413
iteracja: 20 a= 49.00997 b= 49.01103 b-a= 0.001057711
iteracja: 21 a= 49.00997 b= 49.01062 b-a= 0.0006537016
iteracja: 22 a= 49.00997 b= 49.01037 b-a= 0.0004040098
iteracja: 23 a= 49.01012 b= 49.01037 b-a= 0.0002496918
iteracja: 24 a= 49.01012 b= 49.01028 b-a= 0.000154318
iteracja: 25 a= 49.01012 b= 49.01022 b-a= 0.00009537378
iteracja: 26 a= 49.01016 b= 49.01022 b-a= 0.00005894424
iteracja: 27 a= 49.01016 b= 49.0102 b-a= 0.00003642954
iteracja: 28 a= 49.01016 b= 49.01018 b-a= 0.00002251469
iteracja: 29 a= 49.01017 b= 49.01018 b-a= 0.00001391485
iteracja: 30 a= 49.01017 b= 49.01018 b-a= 0.000008599848
iteracja: 31 a= 49.01017 b= 49.01018 b-a= 0.000005314998
iteracja: 32 a= 49.01017 b= 49.01018 b-a= 0.00000328485
iteracja: 33 a= 49.01017 b= 49.01018 b-a= 0.000002030149
iteracja: 34 a= 49.01017 b= 49.01018 b-a= 0.000001254701
Czas działania: 0.006947041
[1] 49.01018
```

Otrzymane maximum na przedziale [44;60] Wynosi 49.01018 i wymagało 34 iteracji

Metoda siecznych stanowi modyfikację metody Newtona pozwalająca na uniknięcie konieczności wyznaczania drugiej pochodnej.

Niech dana będzie różniczkowalna i unimodalna funkcja $f: R \to R$ dla której szukamy minimum w przedziale [a, b]. Jeżeli założymy, że została wykonana przynajmniej jedna iteracja algorytmu, to dysponujemy dwoma punktami $x^{(i)}$ oraz $x^{(i-1)}$, a także wartościami pochodnej w tych punktach. Możemy zatem przybliżyć $f''(x^{(i)})$ za pomocą współczynnika kierunkowego siecznej przechodzącej przez punkty $(x^{(i)}, f'(x^{(i)}))$ oraz $(x^{(i-1)}, f'(x^{(i-1)}))$.

Mamy

$$f''(x^{(i)}) \approx \frac{f'(x^{(i)}) - f'(x^{(i-1)})}{x^{(i)} - x^{(i-1)}},$$

zatem w algorytmie Newtona, w i-tej iteracji, wzór na przybliżenie szukanego minimum przyjmuje postać

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - f'(x^{(i)}) \frac{x^{(i)} - x^{(i-1)}}{f'(x^{(i)}) - f'(x^{(i-1)})}.$$

Metoda siecznych w procesie optymalizacji wykorzystuje tylko pierwszą pochodną, ale do rozpoczęcia optymalizacji potrzebuje dwóch punktów startowych.

Zatem liczmy pochodną naszej funkcji i używamy algorytmu:

```
dfdefonion <- function(x){ (0.000000000002937) * (x^9) + (-0.0000000019722) * (x^8) + (0.0000000552584)*(x^7)+ (-0.00000840001937831) * (x^6) + (0.00075398913448842) * (x^5) + (-0.0407425659150209) * (x^4) + (1.2945983694245811) *(x^3) + (-22.5883998341128010) * (x^2) + (189.2317702093672835) * (x) - 590.76471308716702424 }
```

```
#Algorytm siecznych - minimum
secant <- function(df, x1, x2, tol) {
    i <- 0
    cat("Iteracja: ",i,"x=",x1,"\n")
    df.x2 <- df(x2)
    repeat {
        i<-i+1
        df.x1 <- df(x1)
        new.x <- x1 - df.x1 * (x1 - x2) / (df.x1 - df.x2)

        cat("Iteracja: ",i,"x=",x1,"krok=",- df.x1 * (x1 - x2) / (df.x1 - df.x2),"\n")

    if (abs(new.x - x1) < tol) {
        return(new.x)
    }
    x2 <- x1
    df.x2 <- df.x1
    x1 <- new.x
    }
}</pre>
```

Kod w RStudio

```
> #Wartosc minimalna z uzyciem algorytmu siecznych
> secant(dfdefonion, 28, 38, 0.000001)
Iteracja: 0 x= 28
Iteracja: 1 x= 28 krok= 4.29939
Iteracja: 2 x= 32.29939 krok= -1.13826
Iteracja: 3 x= 31.16113 krok= -0.1106383
Iteracja: 4 x= 31.05049 krok= 0.005639795
Iteracja: 5 x= 31.05613 krok= -0.00002158958
Iteracja: 6 x= 31.05611 krok= -0.0000000004379006
[1] 31.05611
```

Otrzymane maximum na przedziale [28;38] Wynosi 31.05611 i wymagało 6 iteracji

Wnioski

Ilość wymaganych iteracji różni się w zależności od wybranego algorytmu, w przypadku algorytmów golden (złoty podział) i secant (siecznych) lepiej działa drugi, podając wynik po 6 iteracjach czyli ponad 5 razy mniej niż 34 iteracje algorytmu golden. W obu metodach otrzymaliśmy skutecznie obliczone, podobne wyniki minimum, ponadto algorytm złotego podziału obliczył także maksiumum, również wykonując 34 iteracje.

Dane

https://www.kaggle.com/datasets/ravisane1/market-price-of-onion-2020