Diseño de controlador para un sistema de 2do Orden que representa una insuficiencia cardiaca por medio del modelo Windkessel

Sebastián César González (21212146) Jesus Antonio Cobos Mejia (21212148)
Luis Abdiel Fernández Lira (21212154)
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Tijuana

December 11, 2024

Palabras clave: Insuficiencia Cardiaca; Modelo Windkessel; Circuito RLC; Controlador PID; Función de transferencia.

Correo: **{l21212146; l21212148; l21212154}@tectijuana.edu.mx**

Carrera: **Ingeniería Biomédica**

Asignatura: **Modelado de Sistemas Fisiológicos**

Profesor: **Dr. Paul Antonio Valle Trujillo** (paul.valle@tectijuana.edu.mx)

1 Función de transferencia

1.1 Ecuaciones principales

Se busca representar la Insuficiencia Cardiaca mediante el Modelo Windkessel. A este circuito, se le modifica la posición de ciertos componentes para obtener una representación más clara sobre esta patología. Con ello, se obtiene un circuito RLC de segundo orden. Se analizan las diferencias del voltaje de entrada $V_e\left(t\right)$, con el fin de obtener una función de transferencia que represente todo el sistema. Se concluye en 3 ecuaciones, siendo:

$$V_e(t) = I_2\left(t\right)R_1 + I_1\left(t\right)R_2 + \frac{1}{C}\int I_1\left(t\right)dt$$

$$L\frac{d\left[I_1\left(t\right) - I_2\left(t\right)\right]}{dt} = I_2\left(t\right)R_2$$

$$V_s\left(t\right) = \frac{1}{C}\int I_1\left(t\right)dt$$

1.2 Transformada de Laplace

Se aplica la transformada de Laplace a cada una de las tres ecuaciones, cambiando su dominio en el tiempo t a un dominio en s, eliminando tanto las derivadas como integrales.

$$V_e(s) = V_e(s) = I_2\left(s\right) R_1 + I_1\left(s\right) R_2 + \frac{1}{Cs} I_1\left(s\right),$$

$$Ls\left[I_1\left(s\right) - I_2\left(s\right)\right] = I_2\left(s\right) R_1,$$

$$V_s\left(s\right) = \frac{1}{Cs} I_1\left(s\right).$$

1.3 Procedimiento algebraico para la obtención de la FdT

A fin de obtener la función de transferencia, se comienza con el despeje de la corriente I_2 en la igualdad de voltajes del inductor con la resistencia. Donde:

$$Ls\left[I_1\left(s\right) - I_2\left(s\right)\right] = I_2\left(s\right) R_1,$$

Entonces, se agrupan las corrientes para L_s:

$$I_2\left(s\right) R_1 = LsI_1\left(s\right) - LsI_2\left(s\right),$$

Y al despejar la corriente I_2:

$$\left(R_1 + Ls\right) I_2\left(s\right) = LsI_1\left(s\right),$$

Finalmente, se despeja de nuevo I_2, obteniendo su función.

$$I_2\left(s\right) = \frac{LsI_1\left(s\right)}{R_1 + Ls}.$$

Ahora, se despeja I_2 en la función de V_e, a fin de eliminar la presencia esta corriente y despejar I_1. Donde:

$$V_e(s) = \left(\frac{LsI_1\left(s\right)}{R_1 + Ls}\right) R_1 + I_1\left(s\right) R_2 + \frac{1}{Cs} I_1\left(s\right),$$

Multiplicando el valor de I_2 por R_1:

$$V_e(s) = \frac{LsI_1\left(s\right)}{R_1 + Ls} R_1 + I_1\left(s\right) R_2 + \frac{1}{Cs} I_1\left(s\right),$$

Y con ello, es posible despejar la corriente I_1.

$$V_e(s) = \left(\frac{LsR_1}{R_1 + Ls} + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I_1\left(s\right),$$

Ahora, se lleva a cabo la suma de fracciones:

$$V_e(s) = \left(\frac{LsR_1 + R_2\left(R_1 + Ls\right)}{R_1 + Ls} + \frac{1}{Cs}\right) I_1\left(s\right),$$

Continuando:

$$V_e(s) = \left(\frac{Cs\left[LsR_1 + R_2\left(R_1 + Ls\right)\right] + R_1 + Ls}{Cs\left(R_1 + Ls\right)}\right) I_1\left(s\right),$$

Entonces, se agrupa la función del numerador.

$$V_e(s) = \left(\frac{Cs^2Ls^2R_1 + CsR_1R_2 + Cs^2Ls^2R_2 + R_1 + Ls}{Cs\left(R_1 + Ls\right)}\right) I_1\left(s\right),$$

Y con ello, se despeja s de cada función, obteniendo la ecuación completa de $V_e\left(s\right)$.

$$V_e(s) = \left(\frac{\left(CLR_1 + CLR_2\right)s^2 + \left(L + CR_1R_2\right)s + R_1}{Cs\left(R_1 + Ls\right)}\right) I_1\left(s\right).$$

Finalmente, considerando que la función de transferencia es el despeje de la función $\frac{V_s(s)}{V_e(s)}$, se recupera la función de $V_s\left(s\right)$.

$$V_s\left(s\right) = \frac{1}{Cs} I_1\left(s\right).$$

1.4 Resultado: Función de Transferencia

Para la obtención final de la función de transferencia, se despeja en la función anteriormente mencionada, donde:

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{\frac{1}{Cs}I_1\left(s\right)}{\left(\frac{(CLR_1+CLR_2)s^2+(L+CR_1R_2)s+R_1}{Cs(R_1+Ls)}\right) I_1\left(s\right)},$$

Después, se despeja el denominador Cs:

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{\frac{1}{Cs}I_1\left(s\right)}{\left(\frac{(CLR_1+CLR_2)s^2+(L+CR_1R_2)s+R_1}{R_1+Ls}\right)\left(\frac{1}{Cs}\right) I_1\left(s\right)},$$

Por lo que se elimina el numerador de la función, junto a la presencia de la corriente $I_1\left(s\right)$.

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{1}{\left(\frac{(CLR_1+CLR_2)s^2+(L+CR_1R_2)s+R_1}{R_1+Ls}\right)},$$

Y, al aplicar ley de la tortilla, se concluye en la función de transferencia.

$$\frac{V_s\left(s\right)}{V_e\left(s\right)} = \frac{R_1 + Ls}{\left(CLR_1 + CLR_2\right)s^2 + \left(L + CR_1R_2\right)s + R_1}.$$

2 Estabilidad del sistema en lazo abierto

La estabilidad de un sistema en lazo abierto se determina al calcular los polos, es decir, las raíces del denominador de la función de transferencia.

$$(CLR_1 + CLR_2)\, s^2 + (L + CR_1R_2)\, s + R_1 = 0.$$

Al ser un sistema de segundo orden, el sistema cuenta con 2 polos. Al calcularlos, se toman en cuenta 2 escenarios: uno controlado donde el paciente es sano, y otro que cuenta con un caso de insuficiencia cardiaca.

1. Control, donde:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1000 \\ R_2 &= 100 \\ C &= 5 \times 10^{-6} \\ L &= 10 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Y sus polos son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2CLR_1 + 2CLR_2}\left(L + \sqrt{L^2 - 4CLR_1^2 + C^2R_1^2R_2^2 - 2CLR_1R_2} + CR_1R_2\right) = -6456.8,$$

$$\lambda 2 = -\frac{1}{2CLR_1 + 2CLR_2}\left(L - \sqrt{L^2 - 4CLR_1^2 + C^2R_1^2R_2^2 - 2CLR_1R_2} + CR_1R_2\right) = -2815.9.$$

Siendo ambos negativos.

2. Caso, donde:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1000 \\ R_2 &= 100 \\ C &= 30 \times 10^{-3} \\ L &= 10 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Y sus polos son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2CLR_1 + 2CLR_2}\left(L + \sqrt{L^2 - 4CLR_1^2 + C^2R_1^2R_2^2 - 2CLR_1R_2} + CR_1R_2\right) = -9090.6,$$

$$\lambda 2 = -\frac{1}{2CLR_1 + 2CLR_2}\left(L - \sqrt{L^2 - 4CLR_1^2 + C^2R_1^2R_2^2 - 2CLR_1R_2} + CR_1R_2\right) = -0.333\,34.$$

Siendo ambos negativos.

Por lo tanto, el sistema tendrá una respuesta estable sobreamortiguada.

3 Modelo de ecuaciones integro-diferenciales

El modelo de ecuaciones integro-diferenciales esta dado por las funciones de $I_1(t)$, $I_2(t)$ y $V_s(t)$. Siendo:

$$I_1(t) = \left[V_e(t) - I_2(t)R_1 - \frac{1}{C}\int I_1(t)dt\right]\frac{1}{R_2},$$

$$I_2(t) = \frac{1}{R_1}L\frac{d}{dt}\left[I_1(t) - I_2(t)\right],$$

$$V_s(t) = \frac{1}{C}\int I_1(t)dt.$$

4 Error en estado estacionario

El error en estado estacionario se calcula mediante el siguiente límite:

$$e(t) = \lim_{s\to 0} sR(s)\left[1 - \frac{V_s(s)}{V_e(s)}\right] = \lim_{s\to 0} sR(s)\left[1 - \frac{R_1 + Ls}{(CLR_1 + CLR_2)s^2 + (L + CR_1R_2)s + R_1}\right] = 0,$$

Por lo que el error en estado estacionario es $0\ V$. Donde:

$$\begin{array}{rcl} R(s) & : & \text{Representa la entrada al sistema [el escalón } \frac{1}{s}\text{].} \\ \dfrac{V_s(s)}{V_e(s)} & : & \text{Representa la función de transferencia del sistema.} \end{array}$$

5 Cálculo de componentes para el controlador PID

Utilizando la herramienta Tune en simulink, se obtuvieron los valoresd de las ganancias k_I, k_P y k_D. Siendo las siguientes:

$$\begin{aligned} k_P &= \frac{R_r}{R_e} = 351.7766 \\ k_I &= \frac{1}{R_eC_r} = 7637.7192 \\ k_D &= R_rC_e = 0.5354 \end{aligned}$$

A partir de las ganancias anteriores, se propuso un valor del capacitor C_r:

$$C_r = 1\mu F$$

De acuerdo a los valores previamente calculados junto al capacitor propuesto, es posible obtener el valor de las resistencias R_e y R_r.

$$
\begin{aligned}
R_e &= \frac{1}{k_I C_r} = 130.9291\Omega \\
R_r &= k_P R_e = 4899.9314\Omega \\
C_e &= \frac{k_D}{R_r} = 1.092668369x^{-4}
\end{aligned}
$$