Linhas de Transmissão

Antônio Sebastian Fernandes Rabelo
10797781
Engenharia de Computação - EESC/ICMC - USP
Paracatu - MG, Brasil
antoniosebastian@usp.br
&
Gabriell Tavares Luna
10716400
Engenharia de Computação - EESC/ICMC - USP
Aurora - CE, Brasil
gabrielltavsb@usp.br

Vitor Oliveira Caires
10748027
Engenharia de Computação - EESC/ICMC - USP
Salvador - BA, Brasil
vitorcaires@usp.br

***Resumo*—Relatório da implementação de um código em Python que permite, com o método FDTD aplicado às equações do telegrafista, a visualização de tensão e corrente em transientes em uma linha de transmissão sem perdas.**

Palavras-chave: Python, FDTD, equações do telegrafista, linha de transmissão.

I. Introdução

Como primeiro projeto da disciplina SEL0612 - Ondas Eletromagnéticas, o objetivo é estudar o método de análise de dados FDTD *(finite-difference time-domain)*, observar o comportamento das propriedades físicas de uma linha de transmissão e como as propriedades intrínsecas (Resistência, Condutância, Indutância e Capacitância) afetam a forma da onda de transmissão de corrente e tensão, através do comprimento da linha, do gerador à carga, e também em sentido oposto.

Implementando um código[1] em Python para visualização de tensão e corrente em transientes em uma linha de transmissão sem perdas.

II. Linha de transmissão

De acordo com Sadiku[6], linha de transmissão é uma estrutura de guiamento composta por dois ou mais fios condutores paralelos, utilizados para conectar o gerador à carga. Aplicáveis na distribuição de potência e também na telecomunicação.

III. Equações fundamentais da linha de transmissão

Nesse trabalho, utilizamos das equações do telegrafista, que descrevem, de modo geral, o comportamento de ondas de tensão e corrente através da linha. Essas equações lineares são resultados da derivação das equações de Maxwell, e a partir da discretização dessas equações no tempo foi possível desenvolver o projeto.

[1]O código desenvolvido está disponível no link do GitHub: https://github.com/gtavaresl/FDTD-tline

As equações do telegrafista são as seguintes:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \tag{1}$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \tag{2}$$

R denota a resistência por metro da linha, com unidade $\frac{\Omega}{m}$, L denota a indutância por metro da linha, unidade $\frac{H}{m}$. Ambas são representadas por elementos em série no circuito. Por outro lado, a capacitância por metro (C), medida em $\frac{F}{m}$, e a condutância por metro (G), de unidade $\frac{S}{m}$, podem ser representados por elementos em paralelo no circuito simplificado na figura 1. Sendo que cada componente elementar representa um segmento infinitamente pequeno (ΔZ) da linha de transmissão.

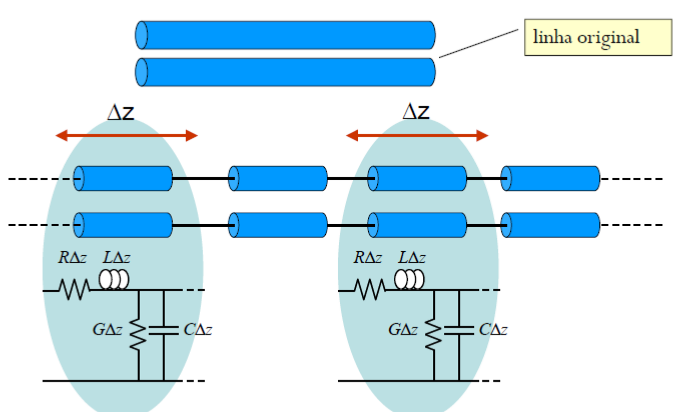

Figura 1. Representação da linha por componentes elementares. Figura extraída da Ref. [1].

IV. O método FDTD

O modelo de discretização das equações de Maxuell foi proposto por Kane Yee[2] em 1996, porém não recebeu o devido destaque científico naquele momento, devido à limitação da capacidade dos computadores da época.

As diferenças finitas no domínio do tempo, aplicadas às equações do telegrafista, tem como propriedade a discretização das derivadas da tensão e da corrente, dividindo o espaço em uma grade de pequenas diferenças de tempo fixo e mínimo, como mostrado na figura 2. Podemos então computar funções mais complexas e suas derivadas tomando a diferença entre dois pontos vizinhos da grade.

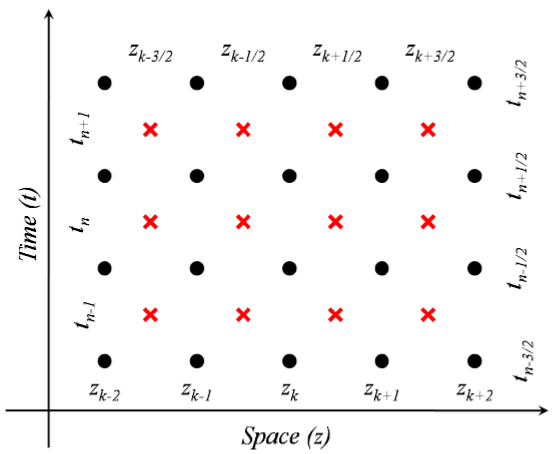

Figura 2. Pontos discretos no tempo. Figura extraída da Ref. [3].

Discretizando o espaço, temos as seguintes consequências nas equações do telegrafista[3]:

$$z_k = k\Delta z \tag{3}$$

$$t_n = n\Delta t \tag{4}$$

Por fim, as derivadas são transformadas em diferenças discretas entre os pontos:

$$-\frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta z} = Ri_k^n + L\frac{i_k^{n+1} - i_k^{n-1}}{2\Delta t} \tag{5}$$

$$-\frac{i_{k+1}^n - i_{k-1}^n}{2\Delta z} = Gv_k^n + C\frac{v_k^{n+1} - v_k^{n-1}}{2\Delta t} \tag{6}$$

A partir dessa fórmula, podemos escrever um programa que toma o valor ponto a ponto da grade, sendo capaz de processar esses dados, e então, calcular novos valores pontuais. Esse processo é repetido para cada ponto discreto na linha de transmissão.

V. Parâmetros da linha de transmissão

A. Linha de transmissão sem perdas

"Uma linha de transmissão é dita sem perdas se os condutores da linha são perfeitos e o meio dielétrico que os separa é sem perdas."[7]

Dessa forma, (R) e (G) das equações do telegrafista (1 e 2) são nulos, logo:

$$R = 0, G = 0 \tag{7}$$

Sendo:

$$Z_0 = \sqrt(\frac{L}{C}) \tag{8}$$

$$U_f = \frac{1}{\sqrt(LC)} \tag{9}$$

Temos que:

$$L = \frac{Z_0}{U_f} \tag{10}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt(U_f Z_0)} \tag{11}$$

B. A carga

Consideradas três casos para cargas:

- $R_L \longrightarrow \infty$, carga em aberto
- $R_L = 0$, carga em curto
- $R_L = 100\Omega$

C. A fonte

A fonte possui resistência interna fixa igual a 75 Ω podendo ser:

- $V_s(t) = 2u(t)$, $u(t)$ é a função degrau;
- $V_s(t) = u(t) - u(t - \frac{l}{10U_f})$, $U_f = 0,9c$, sendo c a velocidade da luz no vácuo.

VI. Algoritmo

Condições iniciais na fonte:

$$I_{[0,0]} = \frac{R_s}{R_s + Z_0} \tag{12}$$

$$V_{[0,0]} = Z_0 I_{[0,0]} \tag{13}$$

Algoritmo utilizado para calcular os valores de tensão e corrente, evitando os "meio passos":

$$\tilde{V}_{[k,n]} = \frac{C\Delta Z}{\Delta t} V_{[k,n]} \tag{14}$$

Condições iniciais no comprimento:

$$\tilde{V}_{[k,0]} = 0, para: k = 1, \ldots, K-1 \tag{15}$$

$$I_{[k,0]} = 0, para: k = 1, \ldots, K-2 \tag{16}$$

Para n ≥ 2 :
Condição de borda na fonte:

$$\tilde{V}_{[0,n]} = (1-\beta_1)\tilde{V}_{[0,n-1]} - 2I_{[0,n-1]} + \frac{2}{R_s}V_0(t_{n-1}) \tag{17}$$

Atualização no comprimento:

$$\tilde{V}_{[k,n]} = \tilde{V}_{[k,n-1]} - (I_{[k,n-1]} - I_{[k-1,n-1]}), para: k = 1, ..., K-1 \tag{18}$$

Condição de borda na carga, se não for um curto circuito:

$$\tilde{V}_{[K-1,n]} = (1-\beta_2)\tilde{V}_{[K,n-1]} + 2I_{[K-1,n-1]} \tag{19}$$

Condição de borda em curto circuito ($R_l = 0$):

$$V_{[K-1,n]} = 0 \tag{20}$$

Atualização na corrente

$$I_{[k,n]} = I_{[k,n-1]} - r(\tilde{V}_{[k+1,n]} - \tilde{V}_{[k,n]}), para : k = 0, ..., K-2 \quad (21)$$

Constantes utilizadas no algoritmo:

$$\beta_1 = \frac{2\Delta t}{R_S C \Delta z} \quad (22)$$

$$\beta_2 = \frac{2\Delta t}{R_L C \Delta z} \quad (23)$$

$$r = \frac{(\Delta t)^2}{LC(\Delta z)^2} \quad (24)$$

Condição de estabilidade do algoritmo FDTD[8]:

$$dt \leq \frac{dz}{U_f} \quad (25)$$

Corrente e tensão teóricas no tempo infinito: (usadas para comparar com os resultados computados pela equipe)

$$I_\infty = \frac{Vs}{(R_s + R_l)} \quad (26)$$

$$V_\infty = \frac{R_l V_s}{(R_s + R_l)} \quad (27)$$

VII. O PROGRAMA E COMO FOI APLICADO

O programa, escrito em Python, está disponível no link do GitHub[2], no arquivo ”FDTD.py”, bem como o ”Readme”, que contêm os requerimentos, descrição do repositório, e como executar o código. Todo o funcionamento do código foi descrito através dos comentários presentes no mesmo.

Como o problema proposto estabelece apenas alguns parâmetros, podemos estabelecer os demais da simulação. Desse modo, utilizamos os seguintes parâmetros fixos:

- Tamanho da divisão no comprimento da linha: $dz = 1e^{-3}$
- Razão entre velocidade de propagação e $\frac{dz}{dt}$, $r = 0.5$

Sendo assim, o programa permite que o usuário escolha os valores inseridos a seguir:

- Fonte de Tensão (s), que pode ser uma das fontes propostas.
- Impedância da carga (R_l)
- Número de divisões no comprimento da linha (K)
- Número de reflexões da simulação (r)

Determinados todos os parâmetros da simulação, o código calcula os valores teóricos e utiliza do algoritmo FDTD para simular a corrente e tensão no comprimento, em função do tempo.

Como saída, o programa informa os valores teóricos e simulados, além do tempo gasto de processamento. Então é utilizada uma interface gráfica que exibe a animação da corrente e tensão variando no tempo. É possível também alterar a animação para que se exiba as variações no tempo em função de uma posição escolhida.

[2]Link para GitHub: https://github.com/gtavaresl/FDTD-tline

VIII. RESULTADOS E CONCLUSÕES

O tempo de simulação total foi igual ao proposto como estacionário, isto é, dez (10) vezes o tempo de ida ou de retorno:

$$t_\infty = \frac{10l}{U_f} \quad (28)$$

Para calcular a tensão e corrente simuladas, foi calculada a média dos valores na linha de transmissão, no tempo estacionário. Após inserir os parâmetros do programa, conseguimos obter os seguintes resultados a partir das simulações feitas no código:

Como referencial, a linha de transmissão possui comprimento l, a fonte está na posição $z = 0$ e a carga na posição $z = l$.

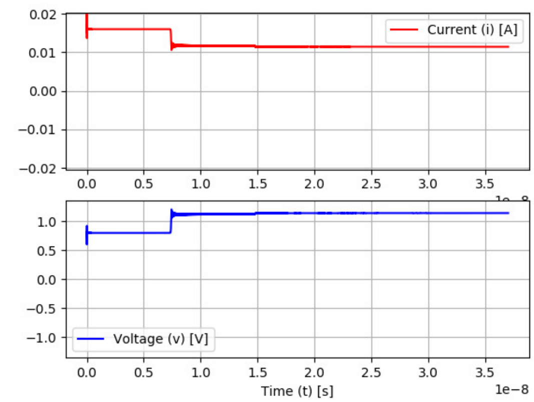

Figura 3. Tensão e corrente na posição da fonte ($z = 0$), em função do tempo para a fonte $V_s(t) = 2u(t)$

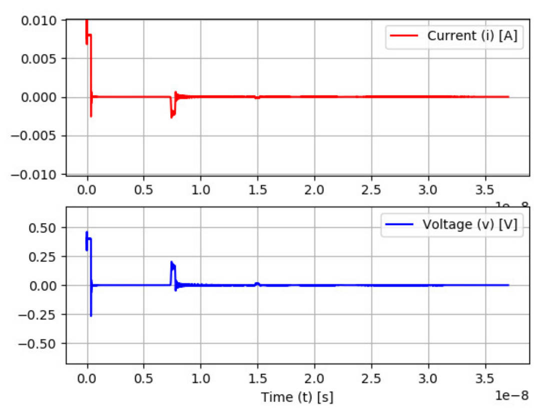

Figura 4. Tensão e corrente na posição fonte ($z = 0$), em função do tempo para a fonte $V(t) = u(t) - u(t - \frac{l}{10U_f})$

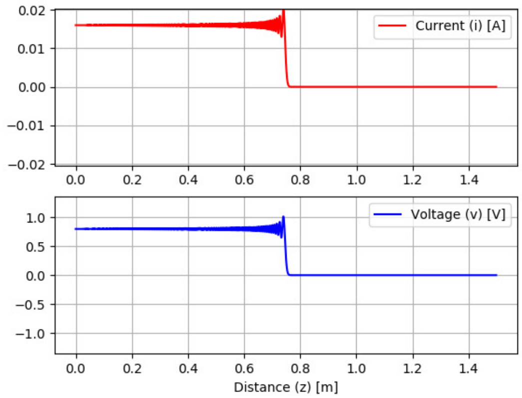

Figura 5. Tensão e corrente em função da distância para a fonte $V_s(t) = 2u(t)$

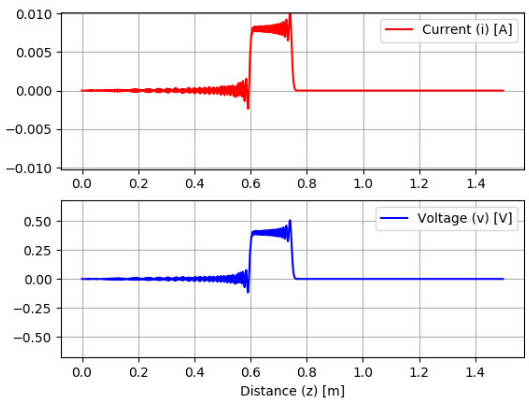

Figura 6. Tensão e corrente em função da distância para a fonte visto que temos $V(t) = u(t) - u(t - \frac{l}{10U_f})$

Para a fonte $V_s(t) = 2u(t)$, com $u(t)$ sendo a função degrau, obtemos a Tabela I.

Tabela I
RESULTADOS PARA $Vs(t) = 2u(t)$

Casos	**Tensões**		**Correntes**	
(R_l)	***Teórica***	***Simulada***	***Teórica***	***Simulada***
100	1.1428	1.1428	0.0114	0.0114
0	0	$-5.0321\text{e}{-6}$	0.0266	0.0266
∞	2	1.9993	0	$-1.6803\text{e}{-8}$

Para a fonte $V_s(t) = u(t) - u(t - \frac{l}{10U_f})$, visto que $U_f = 0,9c$ é a velocidade dos sinais de tensão e de corrente, obtemos a Tabela II, de valores experimentas:

O método utilizado (FDTD) não modela com precisão mudanças abruptas na fonte, isso significa que mesmo com a imprecisão em simular ondas de impulso quadrado, os erros matemáticos encontrados pelo programa foram mínimos, principalmente para os maiores valores de $\mathbf{K}$, visto que no

Tabela II
RESULTADOS COM $V(t) = u(t) - u(t - \frac{l}{10U_f})$

Casos	**Tensões**		**Correntes**	
(R_l)	***Teórica***	***Simulada***	***Teórica***	***Simulada***
100	0	$1.4543\text{e}{-7}$	0	$-2.4460\text{e}{-9}$
0	0	$-5.9695\text{e}{-5}$	0	$1.1235\text{e}{-6}$
∞	0	$-5.9695\text{e}{-5}$	0	$-1.1235\text{e}{-6}$

tempo estacionário os resultados de tensão e corrente se encontram compatíveis com o esperado.

Assim, podemos concluir que os resultados computados se encontram muito próximos dos resultados teóricos, visto que a aproximação dos valores finais tende a convergir conforme aumentamos os valores de $\mathbf{K}$ e de reflexões $\mathbf{r}$.

Tais parâmetros afetam diretamente o tempo necessário para processamento dos valores, e o grau de precisão que observamos a cada iteração do programa.

REFERÊNCIAS

[1] L. A. Ambrosio, *"AULAS 1 A 7 - LINHAS DE TRANSMISSÃO"*, SEL USP, http://www.sel.eesc.usp.br/leonardo/SEL0612/transmissionlines.pdf(current May. 19, 2020).

[2] Kane Yee, *"Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media"*, in IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 14, May 1966.

[3] J. R. Nagel. *"The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm"*, http://drjamesnagel.com/notes/Nagel%20-%20FDTD_Introduction.pdf.

[4] R. L. Luz, *"O método de diferenças finitas no domínio do tempo em eletromagnetismo"*, Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.

[5] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*,2nd.ed. 2001.

[6] M. N. O. Sadiku, *Elementos de Eletromagnetismo*, CRC Press LLC, Florida, 3rd.ed. 2012.

[7] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, United States of America by Cambridge University Press, New York, 2005.(pg 29-67).