TESI DI LAUREA

PARTI FINITE

Federica Narciso

UniversitÃ degli studi di Torino
FacoltÃ di Scienze MM.FF.NN.
Corso di laurea in Matematica

Introduzione

Sia g una funzione reale di variabile reale. Nostro scopo Ã¨ dare un significato a $\int_a^b g(x)\,dx$, dove (a,b) Ã¨ un intervallo finito, nel caso in cui la definizione di integrale improprio di Riemann non sia sufficiente. Supporremo, in particolare, che nel punto a tale integrale sia *divergente.* Secondo un'idea introdotta da Hadamard nel 1932 si osserva che, sotto certe ipotesi,

$$\int_{a+\epsilon}^{b} g(x)\,dx$$

E' somma di alcune quantitÃ che divergono per $\epsilon \longrightarrow 0$ e di altre che, al contrario, per $\epsilon \longrightarrow 0$ convergono. Indicate queste ultime con $F(\epsilon)$, sarÃ

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} F(\epsilon)$$

la *parte finita* dell'integrale.

Le Parti Finite

Definizione

Sia $g : (a, b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *con* (a, b) *intervallo finito. Sia la funzione* g *integrabile su ogni intervallo finito* $(a + \epsilon, b)$ *per ogni* $\epsilon > 0$*, ma non integrabile su tutto* (a, b)*.*
Supponiamo che g *sia rappresentabile come somma di una funzione* h *integrabile su* (a, b) *e di un polinomio in* $\frac{1}{x-a}$*, ovvero:*

$$g(x) = P\left(\frac{1}{x-a}\right) + h(x) = \sum_{\nu} \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + h(x) \qquad (1)$$

con $A_\nu \in \mathbf{R}, \lambda_\nu \in \mathbf{R}$.
Allora si definisce la **parte finita dell'integrale** $\int_a^b g(x)\, dx$ *come:*

$$F = Pf. \int_a^b g(x)\, dx = -\sum_{\nu} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1} \left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + \int_a^b h(x)\, dx$$

Le Parti Finite

Definizione

per λ_ν *non interi,*

$$F = Pf.\int_a^b g(x)\,dx =$$

$$= -\sum_{\nu\neq 1}\frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + A_1\log(b-a) + \int_a^b h(x)\,dx$$

per λ_ν *interi, dove* A_1 *Ã¨ il coefficiente del termine di primo grado del polinomio* P*.*

Bibliografia

- I.M. Gel'fand & G.E. Shilov, *Generalized functions*, Academic Press, 1964.
- M. Bouix, *Les fonctions généralisées ou distributions*, Masson Editore, 1964.
- F.G. Tricomi, *Istituzioni di analisi superiore*, Cedam, 1970.
- F.J. Bureau *Divergent integrals and partial differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1955.