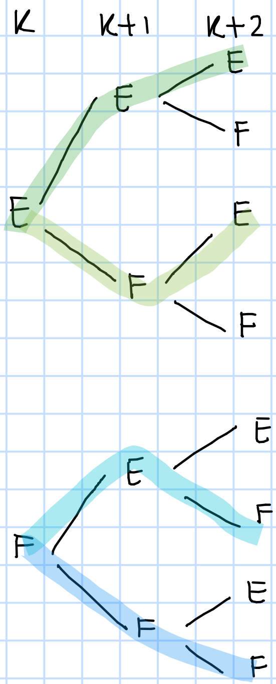
Problema no. 1

Un processo aleatorio binario condizionato, $\{x(t)\}$, commuta a intervalli T (de-sincronizzati rispetto all'origine dei tempi) fra due possibili stati equiprobabili, E ed F. Gli stati assunti in intervalli successivi <u>non</u> sono fra loro indipendenti: passando da un intervallo al successivo, la probabilità di mantenere lo stesso stato è 0.2, mentre la probabilità di cambiare stato è 0.8. Agli stati viene associato un segnale di tensione (costante per l'intero intervallo T) di -1 V per lo stato E e di 5 V per lo stato F.

1. Calcolare la probabilità nell'intervallo k+2 lo stato sia E, sapendo che nell'intervallo k lo stato fu E. Calcolare inoltre la probabilità che si manifesti lo stato F sia nell'intervallo k, sia nell'intervallo k+2.
2. Determinare l'espressione analitica e tracciare il disegno della funzione di autocorrelazione del processo $\{x(t)\}$, limitatamente all'intervallo $|\tau| \leq 2T$.
3. Al processo $\{x(t)\}$ viene sommato un processo aleatorio stazionario $\{y(t)\}$, indipendente, generando $\{z(t)\} = \{x(t)\} + \{y(t)\}$. Il processo $\{y(t)\}$ assume valori reali compresi nell'intervallo $[-1, 1]$ e ha densità di probabilità uniforme. Determinare e disegnare la funzione di densità di probabilità del processo $\{z(t)\}$ e quella del processo $\{q(t)\}$, essendo quest'ultimo il valore assoluto di $\{z(t)\}$, $\{q(t)\} = |\{z(t)\}|$.

1.



Pr

$0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$

$0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0.16$

$0.8 \cdot 0.8 = 0.64$

$0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

$0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

$0.8 \cdot 0.8 = 0.64$

$0.2 \cdot 0.8 = 0.16$

$0.2 \cdot 0.2 = 0.04$

Probabilità dei 2 casi favorevoli

$$Pr(E \text{ in } k+2 / E \text{ in } k) = \underbrace{2}_{\text{casi favorevoli}} \cdot (0.04 + 0.64) \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Pr di E in k}} = 0.68$$

$$Pr(F \text{ in } k+2, F \text{ in } k) = Pr(F \text{ in } k+2) \cdot Pr(F \text{ in } k) =$$

$$= (0.64 + 0.04) \cdot 0.5 = 0{,}34$$

2. $\boxed{0 \leq \tau \leq T}$

Dalle dispense abbiamo che $R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \underbrace{Pr\{t \in t+\tau \in SI\}}_{\frac{T-\tau}{T}} E\{x(t)x(t+\tau)/SI\} +$

$$+ \underbrace{Pr(t \in t+\tau \in DI)}_{\tau/T} E\{x(t)x(t+\tau)/DI\}$$

$$E\{x(t)x(t+\tau)/SI\} = P_x = -1^2 \cdot \frac{1}{2} + 5^2 \cdot \frac{1}{2} = +\frac{1}{2} + \frac{25}{2} = \frac{\cancel{26}}{\cancel{2}} = 13$$

Per quanto riguarda $E\{x(t)x(t+\tau)/DI\}$ abbiamo 4 combinazioni

$x(t)$	$x(t+\tau)$	$x(t)x(t+\tau)$	Pr
-1	-1	1	$0.5 \cdot 0.2 = 0.1$
-1	5	-5	$0.5 \cdot 0.8 = 0.4$
5	-1	-5	$0.5 \cdot 0.8 = 0.4$
5	5	25	$0.5 \cdot 0.2 = 0.1$

$$E\{x(t)x(t+\tau)/DI\} = \{1 \cdot 0.1 - 5 \cdot 0.4 - 5 \cdot 0.4 + 25 \cdot 0.1\} = -1.4$$

$$R_x(\tau) = \frac{T-\tau}{T} \cdot 13 + \frac{\tau}{T} \cdot (-1.4)$$

$\boxed{T \le \tau \le 2T}$

$$R_x(\tau) = E\{x(t)\,x(t+\tau)\} = \underbrace{Pr(t \text{ e } t+\tau \in IA)}_{\frac{2T-\tau}{T}}\, E\{x(t)x(t+\tau)/IA\} + \underbrace{Pr(t \text{ e } t+\tau \in IN)}_{\frac{\tau-T}{T}}\, E\{x(t)x(t+\tau)/IN\}$$

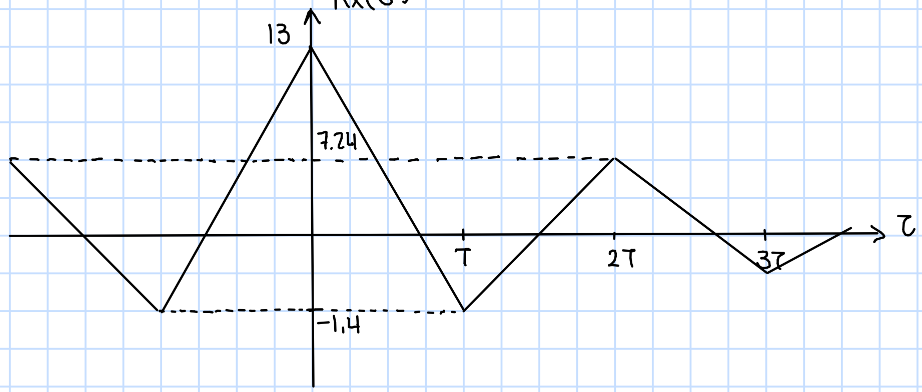
$E\{x(t)x(t+\tau)/IA\} = -1{,}4$ difatti corrisponde al caso $E\{x(t)x(t+\tau)/DI\}$

Per $E\{x(t)x(t+\tau)/IN\}$ costruiamo una nuova tabella

$x(t)$	intervallo intermedio	$x(t+\tau)$	$x(t)x(t+\tau)$	Pr
−1	−1	−1	1	$0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.02$
−1	−1	5	−5	$0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.08$
−1	5	−1	1	$0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.32$
−1	5	5	−5	$0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.08$
5	−1	−1	−5	$0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.08$
5	−1	5	25	$0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.32$
5	5	−1	−5	$0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.08$
5	5	5	25	$0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.02$

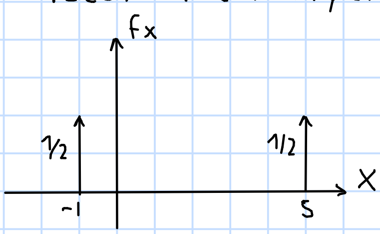
$$E\{x(t)x(t+\tau)/IN\} = \{1 \cdot 0.02 - 5 \cdot 0.08 + 1 \cdot 0.32 - 5 \cdot 0.8 - 5 \cdot 0.8 + 25 \cdot 0.32 - 5 \cdot 0.08 + 25 \cdot 0.02\} = 7.24$$

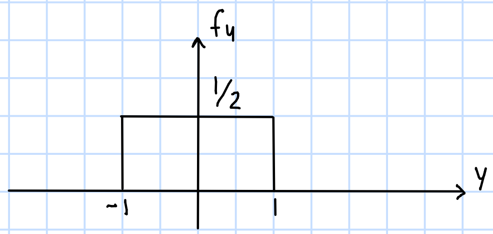
$$R_x(\tau) = \frac{2T-\tau}{T} \cdot (-1{,}4) + \frac{\tau - T}{T} \cdot 7{,}24$$



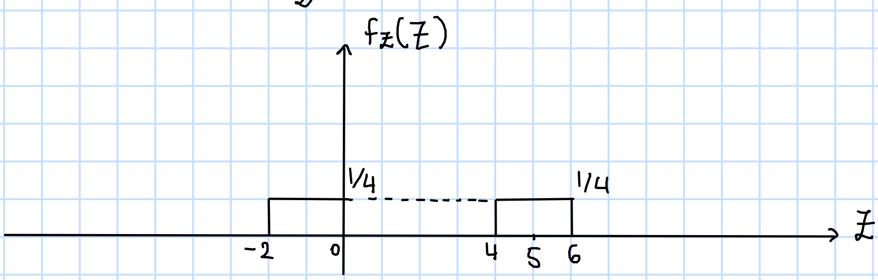
3. Poiché i processi $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ sono indipendenti tra loro dalle dispense so che

$$f_Z(Z) = f_X(X) * f_Y(Y)$$



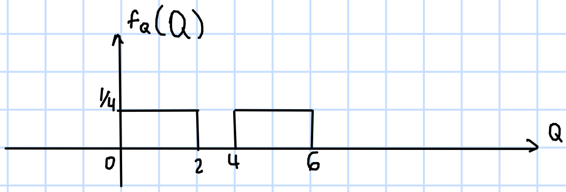


$$f_Z(Z) = \frac{1}{2}\left[\delta(Z-5) + \delta(f+1)\right\} * \frac{1}{2}\Pi(Z)$$



$\{q(t)\} = |\{Z(t)\}|$

$$f_a(Q) = \begin{cases} f_z(Q) + f_z(-Q) & Q>0 \\ \emptyset & \text{altrove} \end{cases}$$



Problema no. 2

Un segnale aleatorio $x(t)$, stazionario ed ergodico, normalizzato in ampiezza, avente media nulla, valore quadratico medio $S_x = 0.25$ e uno spettro in banda-base con frequenza massima $W = 5$ kHz, modula AM una portante e il segnale modulato è trasmesso su un canale. Il modulatore usa una portante di ampiezza $A_c = 3$ e un indice di modulazione $\mu = 0.8$. Il canale è ideale, con larghezza di banda pressoché illimitata e una lunghezza di 108 km. All'uscita del canale agisce un rumore AWGN avente spettro di densità di potenza bilatera $G_n(f) = \eta/2 = 2\cdot10^{-12}$ W/Hz.

1. Volendo ottenere un rapporto segnale-rumore a destinazione di almeno 21.5 dB, da un ricevitore che impiega un demodulatore di inviluppo i cui filtri sono ottimizzati per i segnali in gioco, calcolare la massima attenuazione ammissibile per unità di lunghezza (espressa in dB/km) del canale.
2. Fissata l'attenuazione del canale al valore appena calcolato e ipotizzando ancora che la demodulazione avvenga attraverso la rivelazione d'inviluppo, qual è la massima larghezza di banda del filtro passa-banda posto all'ingresso del ricevitore, tale da poter mantenere un $(S/N)_D$ di 21.5 dB? Quale sarebbe invece il nuovo $(S/N)_D$ se il filtro passa-banda (posto all'ingresso del ricevitore) avesse una larghezza di banda di 15 kHz e il filtro passa-basso (posto all'uscita del ricevitore) avesse una frequenza di taglio di 9 kHz?
3. Infine, calcolare l'$(S/N)_D$ nel caso in cui, al posto del rivelatore di inviluppo, si impieghi un rivelatore sincrono con errore di fase di 25°, nell'ipotesi che i filtri abbiano larghezza di banda ideale, sia in ingresso che in uscita (cioè come al punto 1).

1. $$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\cdot\gamma = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\cdot\frac{S_T}{L\eta W} \geq 141{,}25 \qquad S_T = \frac{A_c^2}{2}(1+\mu^2 S_x) = 5.22$$

$$L \leq \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\cdot\frac{S_T}{\eta W}\cdot\frac{1}{141.25} \leq \underbrace{\frac{0.64\cdot0.25}{1+0.64\cdot0.25}}_{0.13793}\cdot\frac{5.22}{4\cdot10^{-12}\cdot5\cdot10^3\cdot141.25} = 2.54\cdot10^{-4}\cdot10^9 = 2.6\cdot10^5 \equiv 50+4 = 54\,dB$$

$L_{max} = 2.6\cdot10^5$

Controllo che sia rispettata la soglia

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow L \leq \frac{S_T}{10\eta 2W} = \frac{5.22}{4\cdot10^{-12}\cdot5\cdot10^3\cdot10\cdot2} = 0.1305\cdot10^8 = 1.3\cdot10^7 \quad \text{ok!}$$

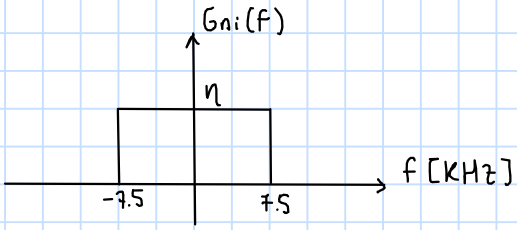
$$L_{unit/max} = \frac{54\,dB}{108\,km} = 0.5\,\frac{dB}{km}$$

2. $L = 2.6\cdot10^5$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \qquad B_T \leq \frac{S_T}{L\eta10} \leq \frac{5.22}{2.6\cdot10^5\cdot4\cdot10^{-12}\cdot10} = 0.5\cdot10^6 = 500\,KHz$$

↑ per rispettare la soglia

Se $B_T = 15\,KHz$



Se LPF ha $f_t = 9\,KHz$ tutto il rumore $n_i(t)$ giungerà a destinazione e $N_D = \eta B_T$ e non $\eta 2W$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x} \cdot \frac{2 \cdot S_T}{L\eta B_T} = \underbrace{\frac{0.64 \cdot 0.25}{1+(0.64 \cdot 0.25)}}_{0.13793} \cdot \frac{2 \cdot 5.22}{2.6 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot 15 \cdot 10^3} = 9.23 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 92.3 \equiv 19.6\,dB$$

3. $$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x} \cdot \frac{S_T}{L\eta W} \cdot \cos^2(\alpha) = 0.13793 \cdot \frac{5.22}{2.6 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^3} \cdot \cos^2 25 = 0.01137 \cdot 10^4 = 114 \equiv 20.5\,dB$$

spiegazione sul quaderno