Problema no. 1
Si consideri il segnale periodico $x(t)$ in figura 1, dove T vale 0.01 s.

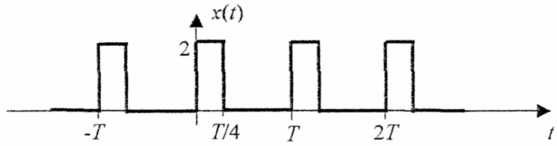


Fig. 1

1) Calcolare la potenza media del segnale $x(t)$. **[5 punti]**
2) Calcolare e disegnare lo spettro di densità di potenza del segnale $x(t)$. **[5 punti]**
3) Calcolare la potenza del segnale $y(t)$, ottenuto filtrando $x(t)$ mediante la cascata dei due sistemi lineari e tempo-invarianti riportati in figura 2. **[3 punti]**
4) Calcolare l'espressione esplicita del segnale $v(t)$, in uscita dal sistema lineare e tempo-invariante caratterizzato dalla funzione di trasferimento $H_1(f)$. **[3 punti]**

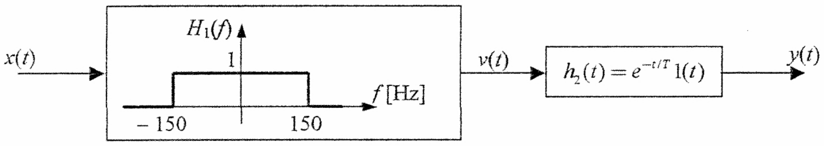


Fig. 2

a) $x(t) = 2\,\Pi\left(\frac{t - T/8}{T/4}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt$ Definizione potenza media

$P_x = \frac{1}{T}\int_0^{T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{2^2} \cdot \frac{\cancel{T}}{\cancel{4}} = 1$ 5 punti

b) Da definizione $G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \delta(f - kf_0)$

$T_0 = \frac{1}{f_0} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T_0} = 100\ Hz$ chiedi

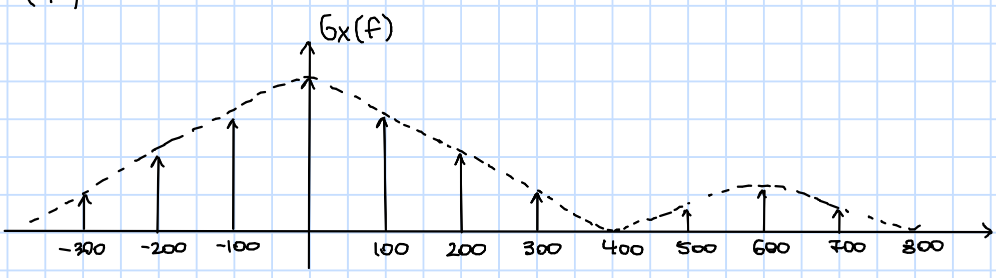
$X(f) = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{T}}{\cancel{4}2} \operatorname{sinc}\left(f\frac{T}{4}\right) e^{-j\cancel{2}\pi f T/\cancel{8}4} \cdot \frac{1}{\cancel{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{T}{4}\right) e^{-j\pi f T/4} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$

$a_k = \frac{1}{T} X_T(kf_0)$

$|a_k|^2 = \frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)$

3 punti

$\Rightarrow G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)\delta(f - kf_0)$



c) Da definizione $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df$, inoltre un segnale filtrato LTI ha $G_y(f)$ dato da:

$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$

$G_y(f) = |H_1(f)|^2\, |H_2(f)|^2\, G_x(f)$

$$H_1(f) = \Pi\left(\frac{f}{300}\right)$$

$$h_2(t) = e^{-t/T}\, 1(t) \Rightarrow H_2(f) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f} = \frac{T}{1 + j2\pi f T}$$

$$|H_2(f)|^2 = \frac{T^2}{1 + (2\pi f T)^2}$$

Poichè $H_1(f)$ taglia la sinc in $f = \pm 150\ Hz$ considero la sommatoria solo tra $k = \pm 1$

$$G_y(f) = |H_2(f)|^2 \cdot \sum_{k=-1}^{+1} \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta(f - kf_0) = \frac{T^2}{1 + (2\pi T f)^2} \cdot \sum_{k=-1}^{+1} \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta(f - kf_0) =$$

$$= \sum_{k=-1}^{1} \frac{1}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \frac{T^2}{1 + (2\pi k)^2}\, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f)\, df = \frac{T^2}{4} \sum_{k=-1}^{+1} \operatorname{sinc}^2 \frac{k}{4} \frac{1}{1 + (2\pi k)^2}$$

Problema no. 2

Un segnale audio $x(t)$ in banda base, avente larghezza di banda pari a $W = 20$ kHz viene trasformato in forma numerica binaria tramite un codificatore PCM.

La sequenza di bit così ottenuta viene trasmessa su un canale passa-basso avente larghezza di banda pari a 500 kHz, associando a ciascun bit una forma d'onda rettangolare la cui ampiezza può essere scelta fra due valori (PAM binaria). La forma d'onda rettangolare ha una durata pari al tempo di bit. La sequenza di rettangoli da trasmettere sul canale viene detta segnale numerico.

1) Qual è il massimo numero di livelli di quantizzazione che permette alla banda del segnale numerico (stimata al primo zero della sinc) di non superare la banda del canale? Giustificare la risposta. **[6 punti]**
2) Come cambia il massimo numero di livelli di quantizzazione se si vuole che la banda del canale sia almeno 3 volte maggiore della banda del segnale numerico (stimata ancora al primo zero della sinc)? **[5 punti]**
3) Si considerino 10 segnali audio aventi le stesse caratteristiche di $x(t)$. Ciascun segnale viene codificato PCM e la risultante sequenza di bit è inviata ad un trasmettitore PAM binario. I 10 segnali PAM così ottenuti sono infine multiplati FDM per consentire una loro trasmissione su un canale passa-banda. Calcolare l'occupazione di banda nelle condizioni seguenti:
   - la frequenza di campionamento è fissata al limite di Nyquist;
   - i livelli di quantizzazione sono 1024;
   - il multiplexing FDM è basato su modulazione DSB;
   - nel multiplexing FDM si adotta una banda di guardia pari al 10% della banda del singolo segnale modulato DSB.

   Come sopra, si stimi la banda dei singoli segnali modulanti in base al primo zero della sinc. **[5 punti]**

$B_c = 500$ KHz

$Q \leq 2^n$

Per la prima condizione di Nyquist $f_c \geq 2W \rightarrow f_{c,max} = 2W = 40$ KHz

$r = n \cdot f_c$

Per la seconda condizione di Nyquist $B_c \geq \frac{r}{2} \Rightarrow r \leq 2 B_c$

Dunque $r_{bu,min} = 2 B_c$

Essendo $r_{bu} = \frac{r}{2} \Rightarrow B_c = n \cdot f_c \quad n = \frac{B_c}{f_c} = \frac{500 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 12{,}5$ ma $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 12$ bit/campione

$\Rightarrow Q_{min} = 2^{B_c/f_c} = \boxed{4096}$

6 punti

b) $B_c = 3 B_{occ}$

$3 B_{occ} = r = n \cdot f_c \leq 500$ kHz $\quad n = \frac{500 \text{ kHz}}{3 \cdot 40 \text{ kHz}} = 4{,}1\overline{6} \quad n = 4$ chiedi

$Q = 2^n = \boxed{16}$

c) limite di Nyquist $f_c = 2W = 40$ KHz

$Q = 1024$

FDM basato su modulazione DSB

$B_g = 10\% \, B_{DSB}$

$Q = 1024 \Rightarrow n \geq \log_2 Q \Rightarrow n = 10$

$r = n \cdot f_c = 10 \cdot 40 = 400$ kbps

Ciascun segnale PAM ha banda $B = r = 400$ KHz

$B_{DSB} = 2B = 800$ kHz

$B_T = 10 \cdot B_{DSB} = 8$ MHz

Aggiungendo la $B_g = 10\% \, B_{DSB} = 80$ KHz

$B_T = 10 \cdot B_{DSB} + 9 \cdot B_g = 8{,}72$ MHz

5 punti