Problema no. 1

Un gioco prevede l'estrazione contemporanea di due numeri interi, ciascuno di essi compreso fra 1 e 4, inclusi gli estremi. I due numeri estratti sono indipendenti fra loro e, per ciascuno di essi, i valori da 1 a 4 sono equiprobabili. Se può aiutare, si pensi al lancio di due dadi che abbiano 4 facce anziché 6 (più precisamente, il lancio di due tetraedi regolari). I due numeri estratti vengono fra loro sommati e il risultato della somma è indicato con S.

1. Calcolare le probabilità dei seguenti risultati:
   a. Uno dei due numeri (non importa quale) vale 2 e l'altro vale 3
   b. Il valore di S vale 5
   c. Il valore di S è maggiore di 5
   d. Ripetendo l'esperimento 10 volte, si ottiene 3 volte un numero S maggiore di 5
2. L'estrazione dei due numeri viene ripetuta ogni $T = 10^{-5}$ s e il valore di S viene utilizzato per creare un processo multilivello casuale $\{x(t)\}$. Tale processo aleatorio stazionario è prodotto generando un valore di tensione uguale a S e mantenendolo costante per un intervallo T, vale a dire, fino all'estrazione successiva. Determinare il coefficiente di correlazione fra due campioni del processo, acquisiti a distanza temporale di $T/2$. Contributo ai calcoli: il valore medio di questo processo aleatorio vale 5 e la sua potenza vale 27.5.
3. Il processo $\{x(t)\}$ viene moltiplicato per $\{y(t)\} = \cos(2\pi f_c t + \varphi)$, dove $f_c = 1$ MHz e φ è una variabile aleatoria con densità di probabilità uniforme in $[-\pi, \pi]$. $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ sono fra loro indipendenti. Determinare e disegnare lo spettro di densità di potenza del processo $\{z(t)\}$, $\{z(t)\} = \{x(t)\}\cdot\{y(t)\}$.

1a. $Pr(n \text{ sia } 2, n \text{ sia } 3) = Pr(n \text{ sia } 2) \cdot Pr(n \text{ sia } 3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

b.

n_1	n_2	$S=5$
1	1	4+1
2	2	3+2
3	3	
4	4	

$Pr(S=5) = Pr(n \text{ sia } 4, n \text{ sia } 1) + Pr(n=3, n=2) = \frac{1}{4}$

c. $Pr(S>5) = Pr(S=6) + Pr(S=7) + Pr(S=8) = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$

d. $Pr(k=3 \text{ volte su } n=10 \text{ ripetizioni}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{10!}{7!\,3!} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 = 0.236$

2. $T = 10^{-5}$ s $\quad \frac{1}{T} = 100$ Hz

Dalle dispense per un processo multilivello casuale la funzione di autocorrelazione è

$$R_x(\tau) = \begin{cases} P_x \frac{T-|\tau|}{T} + \bar{x}^2 \frac{|\tau|}{T} & |\tau| > T \\ \bar{x}^2 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \sigma_x^2 = P_x - \bar{x}^2 = 2.5$$

$$R_x(\tau) = \bar{x}^2 + \sigma_x^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) = 25 + 2.5\,\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

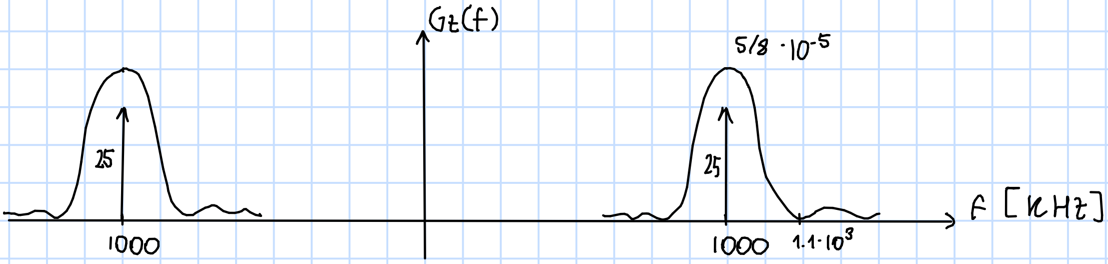
$$\rho_{x_n, x_{n+1}} = \frac{R(T/2) - \bar{x}^2}{R(0) - \bar{x}^2} = \frac{2.5\,\Lambda(1/2)}{2.5} = \frac{1.25}{2.5} = \frac{1}{2}$$

3. $\{z(t)\}$ è frutto di una modulazione

Dato che $R_z(\tau) = R_x(\tau) \cdot R_y(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_z(f) = G_x(f) * G_y(f)$

$$R_z(\tau) = \left[25 + 2.5\,\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)\right] \cdot \frac{1}{2}(\cos 2\pi f_c t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_z(f) = [25\delta(f) + 2.5 \cdot T \operatorname{sinc}^2(fT)] *$$

$$* \frac{1}{4}[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]$$



Problema no. 2

Un segnale audio $x(t)$, in banda base, a media nulla, normalizzato in ampiezza, avente frequenza massima W e potenza media $S_x = 1/3$, viene trasmesso tramite modulazione PM, su un canale passa-banda ideale, avente larghezza di banda pari a 46 kHz e attenuazione di 80 dB. All'uscita del canale agisce un rumore AWGN con densità di potenza $G_n(f) = \eta/2 = (3/2)\cdot 10^{-15}$ W/Hz. Si ipotizzi che la deviazione di fase del modulatore sia 3 rad e che la potenza del segnale introdotto sul canale sia $S_T = 2$ W.

1. Determinare il massimo valore di W che consente di ottenere un corretto funzionamento della trasmissione e un rapporto segnale-rumore a destinazione maggiore o uguale a 40 dB.
2. Come cambierebbe la risposta se la modulazione fosse FM anziché PM, ipotizzando di impostare una deviazione di frequenza di 15 kHz?
3. Tornando a ipotizzare la modulazione PM di cui sopra, fissato però W = 1.5 kHz, che rapporto segnale-rumore a destinazione si otterrebbe se il filtro passa-basso posto all'uscita del demodulatore avesse una frequenza di taglio pari a 2.5 kHz?

1. $\left(\frac{S}{N}\right)_D = \varphi_\Delta^2 S_x \frac{S_T}{L\eta W} \geq 10^4 \Rightarrow W \leq \frac{\varphi_\Delta^2 \cdot S_x \cdot S_T}{L\cdot \eta \cdot 10^4} \leq \frac{\cancel{9}^{\,3} \cdot \cancel{1/3} \cdot 2}{10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-15} \cdot 10^4} \Rightarrow W_{max} = 2\,KHz$

Verifico la banda occupata e la soglia

$B_T = 2(\varphi_\Delta + 1)W = 16\,KHz \leq B_C$ ok!

$\gamma_{th} = 20(\varphi_\Delta + 1) = 80 < \gamma = \frac{S_T}{L\eta W} = 3333$ ok!

2. Se usassimo una modulazione FM il segnale rapporto segnale-rumore a destinazione sarebbe

$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3D^2 S_x \gamma = 3\frac{f_\Delta^2}{W^2} S_x \frac{S_T}{L\eta W} \geq 10^4 \qquad W \leq \sqrt[3]{\frac{3 f_\Delta^2 S_x S_T}{L\cdot\eta\cdot 10^4}} = \sqrt[3]{\frac{225\cdot 10^6 \cdot 1/3 \cdot 2\cdot 3}{10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-15} \cdot 10^4}} \Rightarrow W_{max} = 5{,}3\,KHz$

Verifico la soglia e la banda di trasmissione

$B_T = 2\left(\frac{f_\Delta}{W} + 2\right)W = 51.2$ NON VA BENE perchè $B_T \geq B_C$

$B_T \leq B_C \Rightarrow 2\left(\frac{f_\Delta}{W} + 2\right)W \leq B_C \qquad 2f_\Delta + 4W \leq B_C \Rightarrow W_{max} = \frac{B_C - 2f_\Delta}{4} = \frac{46\cdot 10^3 - 2\cdot 15\cdot 10^3}{4} = 4\,KHz$

$\gamma_{th} = 20(D+2) = 115 < \gamma = \frac{S_T}{L\eta W} = 1.6\cdot 10^3$ ok!

Controllo che la condizione sul valore di $(S/N)_D$ sia ancora valida

$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3D^2 S_x \frac{S_T}{L\eta W} = \cancel{3}\cdot 3{,}75^2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 1.6\cdot 10^3 = 22.5\cdot 10^3 \equiv 13.52 + 30 = 43.52\,dB$ ok!

3. $y_D(t) = \varphi_\Delta x(t) + \psi(t) \Big|_{\text{filtrato LPF}}$

$B_T = 2(\varphi_\Delta + 1)W = 12\ KHz$

$S_D = \varphi_\Delta^2 S_X$

$N_D = \int_{-2500}^{2500} G_\psi(f)\,df = \frac{5000\,\eta}{2\,S_R}$

$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{\varphi_\Delta^2 S_X \cdot 2 S_R}{5000\,\eta} = 8000 \equiv 39\,dB$

$\gamma_{th} = 80 < \gamma = 4444$ OK!