Problema no. 1

Due processi aleatori, $\{a(t)\}$ e $\{b(t)\}$, stazionari, indipendenti, assumono entrambi valori compresi fra –1 e 1 e hanno densità di probabilità uniforme. I due processi vengono sommati, generando il processo aleatorio stazionario $\{x(t)\} = \{a(t)\} + \{b(t)\}$. Del processo $\{x(t)\}$ si conosce la forma dello spettro di densità di potenza: piatto fino alla frequenza di 100 Hz, nullo per frequenze maggiori.

1. Determinare la potenza di $\{x(t)\}$, la sua densità di probabilità (equazione e disegno), e calcolare la probabilità che, scelto a caso un campione di $\{x(t)\}$, il suo valore sia compreso fra –1 e 1.
2. Calcolare il coefficiente di correlazione fra due campioni adiacenti del processo $\{x(t)\}$, ipotizzando una frequenza di campionamento pari a 2 volte il limite di Nyquist. Se il k-esimo campione di una realizzazione di $\{x(t)\}$ vale 0.6, quale sarà il valore del campione k+1 secondo la stima lineare MSE?
3. Il processo $\{x(t)\}$ viene filtrato in un blocco non lineare alla cui uscita si trova il processo stazionario $\{y(t)\}$. La funzione ingresso-uscita del filtro è la seguente:

$$Y = -X \text{ se } X < 0 \quad ; \quad Y = 0 \text{ se } X \geq 0.$$

   Determinare, motivando le scelte, la funzione di densità di probabilità di $\{y(t)\}$ (equazione e disegno).

1) $f_a(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < A < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad f_b(B) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < B < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

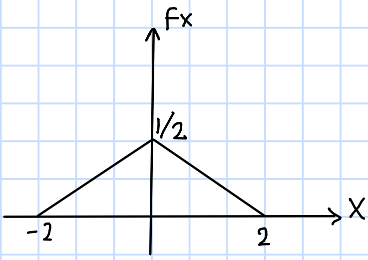
$\bar{a} = 0$

$\bar{b} = 0$

$\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \frac{1}{3} = P_a = P_b$

Poichè i processi aleatori sono indipendenti $P_x = P_a + P_b = \frac{2}{3}$

$$f_x = f_a * f_b = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x}{2}\right) * \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot 2\,\Lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{x}{2}\right)$$



$$Pr(-1 < X < 1) = \int_{-1}^{+1} f_x(\eta)\,d\eta = \int_{-1}^{0} f_x(\eta)\,d\eta + \int_{0}^{+1} f_x(\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\,dx + \int_{0}^{+1} -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}\right) + \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{4}} + 1 = \frac{-1+4}{4} = \frac{3}{4}$$

2. $f_s = 2 f_c$

Ponendoci al limite di Nyquist $f_c = 2W$

$$G_x(f) = k\,\Pi\left(\frac{f}{200}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} R_x(\tau) = 200\cdot k\,\text{sinc}(\tau 200)$$

Essendo $P_x = R_x(0) = \frac{2}{3}$ allora $200k = \frac{2}{3} \implies k = \frac{1}{300}$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{3}\,\text{sinc}(200\tau)$$

$$\rho_{x_k,x_{k+1}} = \frac{R_x(1/f_s) - \bar{x}^2}{R_x(0) - \bar{x}^2} = \frac{R_x(1/400)}{\frac{2}{3}} = \frac{\cancel{2/3}\ \text{sinc}\ 1/2}{\cancel{2/3}} = \text{sinc}\ \frac{1}{2} = 0{,}64$$

$\bar{x} = 0$ poiché $G_x(f)$ non presenta impulsi nell'origine

$f_s = 2f_c$ $\qquad f_c = 2W = 2 \cdot 100 = 200$ $\qquad W = 100\ \text{kHz}$

$f_s = 400$

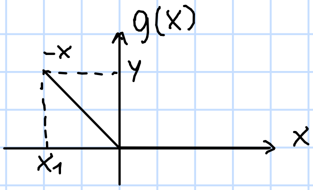
$\hat{x}_{k+1} = A x_k + B$

$B = \bar{x}_{k+1} - A\bar{x}_k = 0$ poiché stazionario con media nulla

$A = \rho_{x_k,x_{k+1}}$

$\hat{x}_{k+1} = 0{,}64 \cdot 0{,}6 = 0{,}384$

3) $\begin{cases} Y = -X & X < 0 \\ Y = 0 & X \geq 0 \end{cases}$



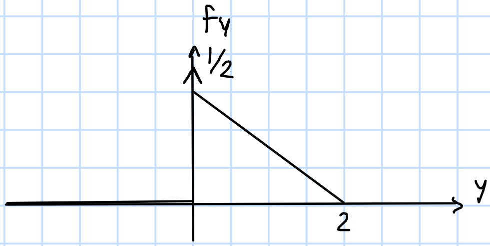
$g'(X) = 1$

$Pr(Y=0) = Pr(X \geq 0) = \frac{1}{2}$

Per $Y > 0$ $\exists$ 1 sola soluzione $x_1 = -Y$

$f_Y(Y) = f_X(-Y) \cdot \frac{1}{|g'(Y)|} = f_X(-Y) = f_X(Y) \quad y > 0$

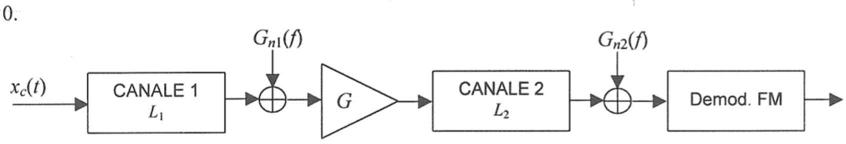
è pari



Problema no. 2

Un segnale aleatorio $x(t)$, stazionario ed ergodico, normalizzato in ampiezza, avente media nulla e potenza $S_x = 0.2$ e uno spettro in banda-base con frequenza massima $W = 10$ kHz, viene modulato in FM e trasmesso su un canale. Il modulatore usa una portante di ampiezza $A_c = 4$. Il canale è ideale, con larghezza di banda pressoché illimitata e attenuazione $L = 60$ dB. All'uscita del canale agisce un rumore AWGN avente spettro di densità di potenza $G_n(f) = 0.25 \cdot 10^{-11}$ W/Hz.

1. Ipotizzando ideale il demodulatore, calcolare il massimo rapporto segnale-rumore a destinazione che può essere ottenuto nelle suddette condizioni di lavoro, nonché la corrispondente deviazione di frequenza f_Δ.
2. Ipotizzando invece che il filtro passa-basso, posto all'uscita del demodulatore, non sia quello ideale, ma abbia una frequenza di taglio $f_t = 2W$, come si modifica il massimo rapporto segnale-rumore a destinazione? Più nello specifico, si derivi un'equazione generale per $(S/N)_D$ quando $f_t = 2W$ e la si applichi al caso in esame.
3. Si supponga ora che il canale di trasmissione sia modellabile come in figura, suddiviso in due tratte poste in serie, ciascuna ideale e con attenuazione $L_1 = L_2 = 30$ dB. All'uscita della prima tratta agisce un rumore AWGN con spettro $G_{n1}(f) = 0.125 \cdot 10^{-11}$ W/Hz. Prima di entrare nella seconda tratta il segnale transita in un amplificatore con guadagno di potenza G (maggiore o minore di 1). All'uscita della seconda tratta agisce un secondo rumore AWGN con spettro $G_{n2}(f) = G_{n1}(f)$, ma indipendente dal primo. Il demodulatore è ideale. Mantenendo i valori di S_x, W e A_c di cui sopra e fissato un rapporto di deviazione $D = 6$, calcolare il rapporto segnale-rumore in pre-rivelazione e a destinazione se $G = 1$. Determinare inoltre il valore di G per il quale $(S/N)_R = 10$.



1) $\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3D^2 S_x \gamma$

condizione di soglia $\left(\frac{S}{N}\right)_R \geq 10$ $\qquad \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10$ $\qquad B_T \leq \frac{S_T}{L\eta 10}$ $\qquad S_T = \frac{A_c^2}{2} = 8$

$B_T = \frac{8}{10 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6} = 16 \cdot 10^4 = 160\ \text{kHz}$

$$B_T = 2(D+2)W$$

$$D = \frac{B_T}{2W} - 2 = \frac{160 \cdot 10^3}{2 \cdot 10 \cdot 10^3} - 2 = 6$$

$$D = \frac{f_\Delta}{W} \Rightarrow f_\Delta = DW = 60\,KHz$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3D^2 S_x \gamma = 3D^2 S_x \frac{S_T}{L\eta W} = 3 \cdot 36 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{8}{10^6 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}5 \cdot 10^4} = 345{,}6 \cdot 10^1 = 3456 \cong 35{,}3\,dB$$

2) S_D rimane $f_\Delta^2 S_x$

N_D diventa $\displaystyle\int_{-2W}^{2W} \frac{\eta f^2}{2S_R}\,df = \frac{\eta f_t^3}{3S_R}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{f_\Delta^2 S_x \, 3S_R}{\eta f_t^3} = \frac{f_\Delta^2 S_x 3 S_R}{8\eta W^3} = \frac{3}{8} D^2 S_x \gamma = 432 \cong 26{,}4\,dB$$