Esercizio 1. Si consideri il segnale deterministico periodico $q(t)$:

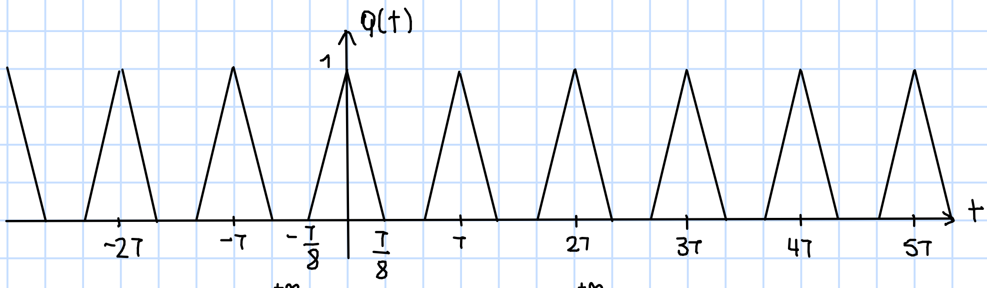
$$q(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T/8}\right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

dove $T = 10^{-4}$ s.

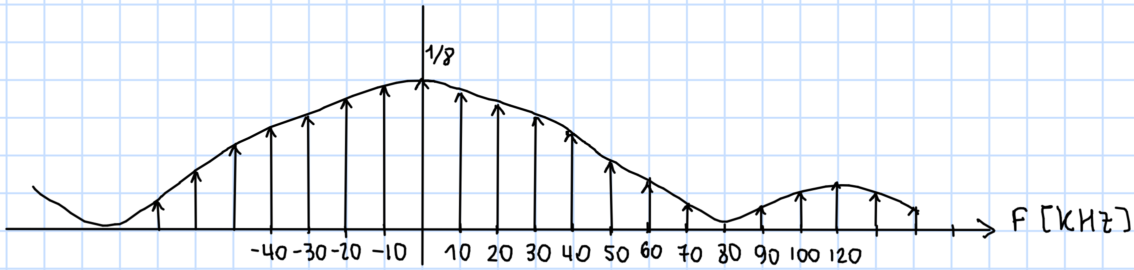
(a) Disegnare $q(t)$, determinare e disegnare la sue trasformata di Fourier $Q(f)$.

(b) Si consideri un campionatore *chopper* atipico, nel quale il segnale di uscita, $y(t)$, è ottenuto moltiplicando il segnale di ingresso, $x(t)$, per $q(t)$. Vale a dire: $y(t) = x(t) \cdot q(t)$. Determinare la trasformata di Fourier dell'uscita, $Y(f)$, lasciando indicato $X(f)$. Ipotizzando poi che $x(t)$ sia un segnale in banda base con frequenza massima $W = 10$ kHz il cui spettro è disegnato sotto, stabilire se $x(t)$ possa essere ricostruito a partire dal segnale campionato $y(t)$ o meno. In caso affermativo, progettare lo schema a blocchi del circuito necessario alla perfetta ricostruzione.

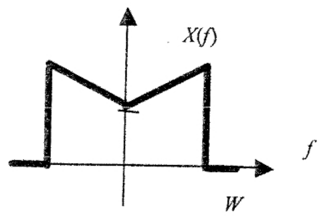
a)



$$q(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Q(f) = \frac{\cancel{T}}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T}{8}f\right) \cdot \frac{1}{\cancel{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{8} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{8}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



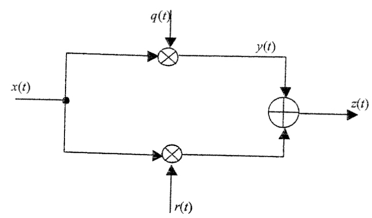
b) $Y(f) = X(f) * Q(f) = \frac{1}{8} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{8}\right) X\left(f - \frac{k}{T}\right)$



Dunque si tratta di un segnale avente al posto degli impulsi precedenti, lo spettro del segnale X(f). Dunque avendo precedentemente gli impulsi un intervallo di 10 KHz tra di loro, le repliche di X(f) si sovrappongono, dando luogo al fenomeno di aliasing. Questo comporta che X(f) NON è ricostruibile a partire da Y(f).

(c) Si consideri ora lo schema di figura, in cui il segnale $r(t)$ è definito come segue:

$$r(t) = -\Lambda\left(\frac{t}{T/8}\right) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT - T/2)$$



Determinare la trasformata di Fourier del segnale di uscita, $Z(f)$, lasciando indicato $X(f)$. Sempre ipotizzando che la banda di $x(t)$ sia $W = 10$ kHz, si tracci il disegno di $Z(f)$ e si stabilisca se $x(t)$ possa essere ricostruito a partire dal segnale $z(t)$ o meno. In caso affermativo, progettare lo schema a blocchi del circuito necessario alla perfetta ricostruzione, dimensionando opportunamente tutti gli elementi necessari. [Suggerimento: si ricordi che: $e^{-j\pi k} = (-1)^k$, $k \in$ interi.]

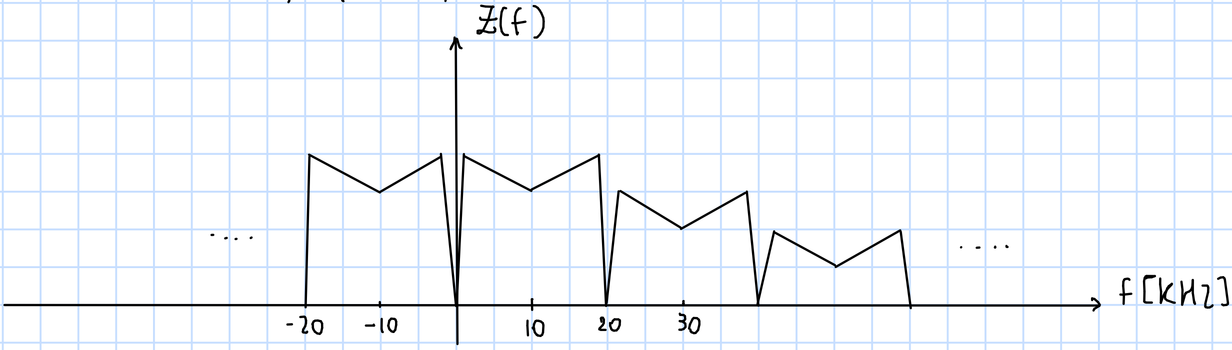
c) $r(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} R(f) = -\frac{\cancel{T}}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T}{8}f\right) \cdot \frac{1}{\cancel{T}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f T/2}\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = -\frac{1}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T}{8}f\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \frac{k}{T}\frac{T}{2}}\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

$= -\frac{1}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{T}{8}f\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\pi k}\,\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{8}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

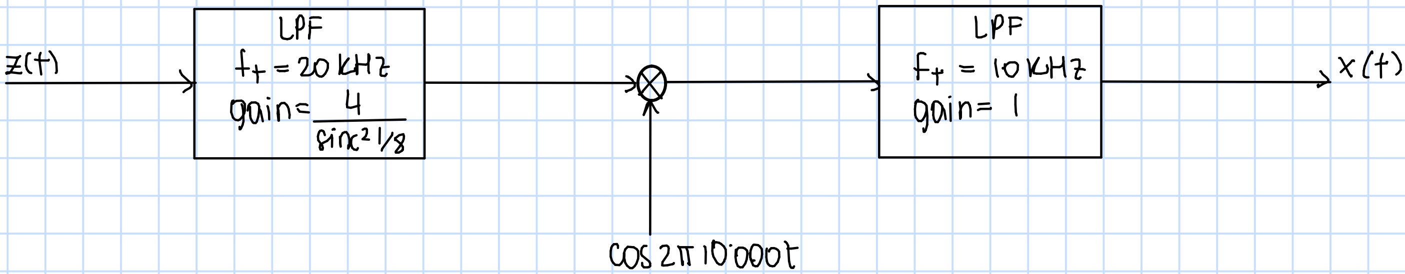
da suggerimento

$Z(f) = Y(f) + R(f) * X(f) = \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{8}\right)X\left(f-\frac{k}{T}\right) - \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{8}\right)X\left(f-\frac{k}{T}\right) =$

$= \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[1-(-1)^k\right]\,\text{sinc}^2\left(\frac{k}{8}\right)X\left(f-\frac{k}{T}\right)$



Le repliche NON sono sovrapposte, quindi è possibile ricostruire x(t) a partire da z(t)



Esercizio 2. Si vuole trasmettere mediante uno schema di trasmissione digitale un segnale musicale $x(t)$ di banda 20 kHz:

- $x(t)$ è campionato adottando, fra repliche adiacenti nello spettro del segnale campionato, una banda di guardia pari al 20% della banda di $x(t)$;
- assumendo $x(t)$ normalizzato nell'intervallo $[-1, 1]$ (ossia: $|x(t)| \le 1$), ciascun campione di $x(t)$ è codificato mediante PCM binaria con errore massimo di quantizzazione pari a 10^{-4};
- si adotta una trasmissione PAM a 16 livelli con la seguente forma d'onda al campionatore

$$g(t) = \text{sinc}^2\frac{t}{T}$$

dove T è il tempo di simbolo;
- il canale è ideale nella banda di trasmissione (con guadagno unitario e fase nulla).

Si richiede di:

(a) calcolare il numero minimo di bit per campione e la banda minima di trasmissione;

(b) calcolare la funzione di trasferimento del filtro di trasmissione e disegnarne il grafico, nell'ipotesi che il filtro di ricezione sia un LPF ideale con frequenza di taglio pari alla banda di trasmissione, guadagno g_R assegnato e fase nulla;

(c) calcolare la funzione di trasferimento del filtro di trasmissione, nell'ipotesi che il filtro di ricezione abbia la seguente funzione di trasferimento:

$$H_R(f) = \frac{1}{1+jfT}\Pi\left(\frac{fT}{2}\right)$$

a) $B_g = 20\%\, W = 4$ kHz

Ponendoci al limite di Nyquist avremo $f_c = 2W + B_g = 44$ kHz

$|\varepsilon_k| \leq \frac{\Delta}{2} \leq \frac{1}{q} \leq 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad q = 10^4$

$\Delta = \frac{\text{dinamica}}{q} = \frac{2}{q}$

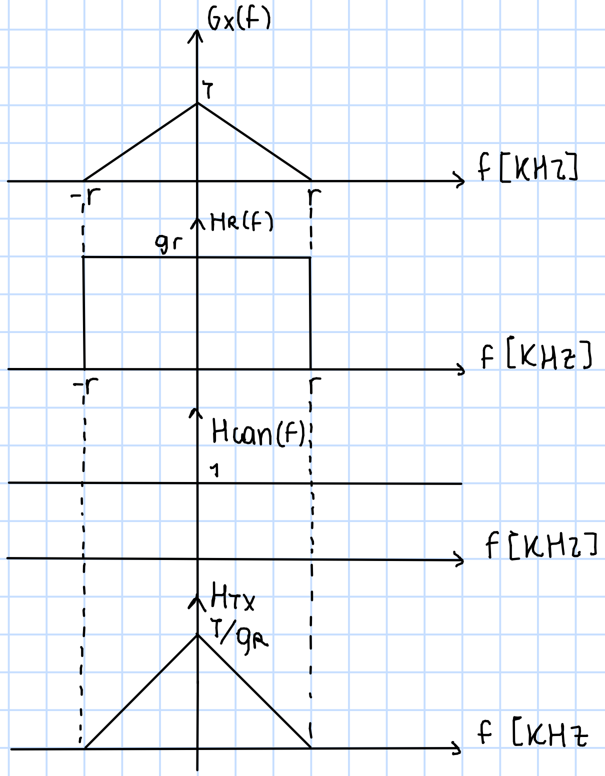
Essendo $n \geq \log_2 q$ $\quad n_{min} = 13{,}3$ ma essendo $n \in \mathbb{N}$ $\quad n_{min} = 14$

Essendo PAM con memoria a 16 livelli $16 = 2^4 \Rightarrow r_b = \frac{r_{bu}}{4} = \frac{n \cdot f_c}{4} = 154$ kbps

In ingresso al campionatore abbiamo $g(t) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(f) = T\Lambda(fT)$ con $T = 1/r_b$

$\Rightarrow B_T \cong r_b = \frac{n \cdot f_c}{4} = 154$ KHz

b) $G(f) = H_{can}(f) H_{Tx}(f) H_{Rx}(f) H_{eq}(f)$



non sono adottate tecniche di equalizzazione dunque $H_{eq}(f) = 0$

$H_R(f) = \begin{cases} g_R & \text{per } |f| \geq r \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Visto che $G(f) = 0$ per $|f| > r$, $H_{Tx}(f)$ è arbitrario e lo scelgo

$H_{Tx}(f) = 0$ per $|f| > r$

$H_{Tx}(f) = 1 \cdot \frac{1}{g_R} \cdot T\Lambda(fT) = \frac{T}{g_R} \Lambda\left(\frac{f}{r}\right)$

c) $G(f) = H_{TX}(f)\, H_{RX}(f)\, H_{can}(f)$

$$H_{TX}(f) = \frac{G(f)}{H_{RX}(f)\, H_{can}(f)}$$

$G(f) = 0$ per $|f| > r$ e scelgo $H_{TX}(f) = 0$ per le stesse frequenze

$\Rightarrow$ $H_{TX}(f) = T \Lambda(fT)(1 + jfT)$