Problema no. 2

Si considerino due processi aleatori stazionari, indipendenti fra loro, $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$.

$\{x(t)\}$ è un processo telegrafico casuale che commuta fra i valori –1/3 e 1/3 in corrispondenza degli istanti di arrivo di punti casuali di Poisson. Questi ultimi hanno densità temporale $\lambda = 500$ punti/s.

$\{y(t)\}$ è invece un processo avente densità di probabilità uniforme compresa fra –2/3 e 2/3 e una funzione di autocorrelazione $R_y(\tau) = k\,\mathrm{sinc}(2000\tau)$.

Si indichi con $\{z(t)\}$ il processo aleatorio somma: $\{z(t)\} = \{x(t)\} + \{y(t)\}$.

1. Si calcolino le seguenti probabilità:
   a. La probabilità che in un intervallo di 1 ms non vi sia nessuno dei punti casuali di cui sopra.
   b. La probabilità che i valori di $\{z(t)\}$ siano compresi 0 e 1/3.
2. Il processo $\{z(t)\}$ viene posto in ingresso a un filtro passa-basso ideale con guadagno unitario e frequenza di taglio pari a 1000 Hz. Il processo aleatorio all'uscita del filtro è chiamato $\{a(t)\}$. Determinare l'espressione analitica e tracciare il disegno dello spettro di densità di potenza del processo $\{a(t)\}$.

Si ipotizzi ora che il processo $\{a(t)\}$ venga trasmesso tramite FM su un canale ideale passa-banda avente attenuazione $L = 93$ dB, all'uscita del quale agisce un rumore AWGN con densità spettrale di potenza $G_n(f) = \eta/2 = 5\cdot10^{-18}$ W/Hz. Il trasmettitore modula una portante di ampiezza $A_c = 0.5$. Riguardo al segnale modulante, per semplicità, si consideri la potenza di $\{a(t)\}$ uguale a quella di $\{z(t)\}$. Il ricevitore, anch'esso ideale, produce un rapporto-segnale rumore a destinazione di 50 dB.

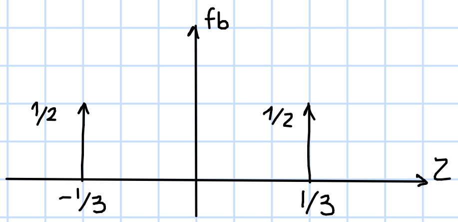
3. Calcolare la deviazione di frequenza che il modulatore ha utilizzato. Come sarebbe cambiata la risposta se il filtro passa-basso posto all'uscita del demodulatore avesse avuto una frequenza di taglio doppia di quella ottima?

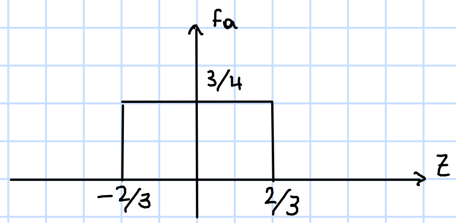
1.a. $\Delta t = 1\,ms$
$k = 0$

Dalle dispense $Pr(k \text{ punti in } \Delta t) = e^{-\lambda\Delta t}\dfrac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}$

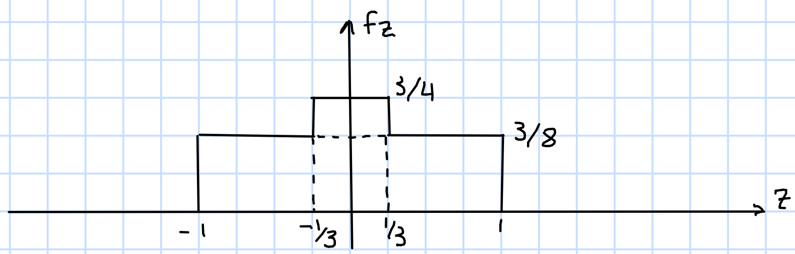
Considerando che vogliamo $k=0$ troviamo $Pr(\text{nessun punto in } \Delta t) = e^{-\lambda\Delta t}\dfrac{(\lambda\Delta t)^0}{0!} = e^{-\lambda\Delta t}$
$= e^{-500\cdot10^{-3}} = e^{-0,5} = 0,6$

1.b. Essendo due processi indipendenti $\Rightarrow f_z(Z) = f_a(Z) * f_b(Z)$





$$f_z(Z) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{3}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{3}\right)\right] * \frac{3}{4}\Pi\left(\frac{f}{4/3}\right)$$



$$Pr\left(0<z<\frac{1}{3}\right) = \int_0^{1/3} f_z(Z)\,dZ = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

2. $G_a(f) = |H(f)|^2 G_z(f)$

$G_z(f) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_z(\tau)$

Poichè $\{x(t)\}$ e $\{y(t)\}$ sono indipenti $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\bar{x}\bar{y}$

$R_x(\tau) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{-2\cdot 500|\tau|}$

$R_y(\tau) = k\,\mathrm{sinc}(2000\tau) \qquad \bar{y} = \frac{-2/3 + 2/3}{2} = 0 \qquad \sigma_y = \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{\cancel{16}\,4}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{12}\,3} = \frac{4}{27} = P_y$

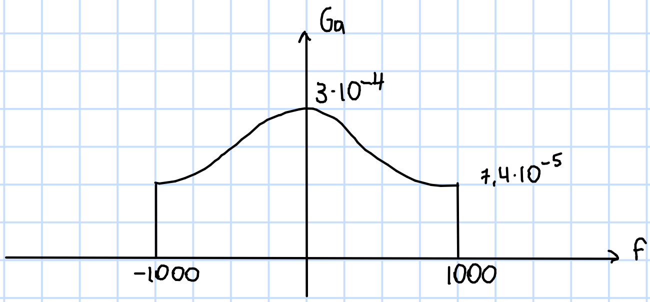
Poiché $R_y(0) = P_y$ allora $k = \frac{4}{27}$

$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + \cancel{2\bar{x}\bar{y}}$ $\quad \bar{y}=0$

$R_z(\tau) = \frac{1}{9} e^{-2\cdot 500\tau} + \frac{4}{27}\,\mathrm{sinc}(2000\tau)$

Essendo $G_z(f) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} R_z(\tau) \Rightarrow G_z(f) = \frac{2000}{10^6 + (2\pi f)^2} + \frac{4}{27\cdot 2000}\Pi\left(\frac{f}{2000}\right)$

$G_a(f) = |H(f)|^2 G_z(f) = \left|\Pi\left(\frac{f}{2000}\right)\right|^2 G_z(f) = \Pi\left(\frac{f}{2000}\right)\cdot\left[\frac{4}{27\cdot 2000} + \frac{1}{9}\frac{2000}{10^6+(2\pi f)^2}\right]$



$G_a(0) = 7{,}4\cdot 10^{-5} + \frac{2000}{9\cdot 10^6} =$

$= 7{,}4\cdot 10^{-5} + 222{,}2\cdot 10^{-6} =$

$= 7{,}45\cdot 10^{-5} + 22{,}2\cdot 10^{-6} = 3\cdot 10^{-4}$

3. $L = 93\,\text{dB} = 2\cdot 10^9$

$P_a = P_z = R_z(0) = \frac{1}{9}e^{-1000|0|} + \frac{4}{27}\,\mathrm{sinc}(0) = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} = \frac{3+4}{27} = \frac{7}{27} = 0{,}25 \qquad W = 1000\,\text{Hz}$

$f_\Delta = ? \qquad f_\Delta = DW$

$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3D^2 S_x \gamma = 3D^2 S_x \frac{S_T}{L\eta W} = 10^5 \qquad S_T = \frac{A_c^2}{2} = 0{,}125$

$D = \sqrt{\frac{10^5 L\eta W}{3 S_x S_T}} = \sqrt{\frac{10^5\cdot 2\cdot 10^9\cdot 10^{-17}\cdot 10^3}{3\cdot 0{,}25\cdot 0{,}125}} = 4{,}61$

$\gamma = \frac{S_T}{L\eta W} = \frac{0{,}125}{2\cdot 10^9\cdot 10^{-17}\cdot 10^3} = 0{,}0625\cdot 10^5 = 6250 > \gamma_{th} = 20(D+2) = 132{,}2$ OK!

$f_\Delta = D\cdot W = 4610\,\text{Hz}$

Nel caso in cui la frequenza di taglio fosse stata doppia il segnale utile rimane $S_D = f_\Delta^2 S_x$ mentre il rumore

$N_D = \int_{-2W}^{+2W} \frac{\eta f^2}{2S_R}\,df = \frac{\eta}{2S_R}\frac{f^3}{3}\Big|_{-2W}^{2W} = \frac{\eta(2W)^3}{6S_R} + \frac{\eta(2W)^3}{6S_R} = \frac{\eta(2W)^3}{3S_R} = \frac{8}{3}\frac{\eta W^3}{S_R}$

$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{3}{8}D^2 S_x \gamma = 10^5$

$D = \sqrt{\frac{8\cdot 10^5\cdot 2\cdot 10^9\cdot 10^{-17}\cdot 10^3}{3\cdot 0{,}25\cdot 0{,}125}} = 12{,}8 \Rightarrow f_\Delta = 12800\,\text{Hz}$

$\gamma = 6250 > \gamma_{th} = 20(D+1) = 276$ OK!