Problema no. 1

Un processo aleatorio, $\{x(t)\}$, stazionario e Gaussiano, ha valor medio pari a 2 e potenza pari a 8. Lo spettro di densità di potenza di $\{x(t)\}$ è un rettangolo centrato nell'origine con frequenza massima di 10 kHz più un impulso di Dirac posto nell'origine. Il processo $\{x(t)\}$ viene elaborato da un filtro passa-banda ideale avente frequenza centrale di 10 kHz, larghezza di banda di 8 kHz e guadagno d'ampiezza pari a 3. Il processo all'uscita è chiamato $\{y(t)\}$. Il processo $\{y(t)\}$ così generato viene filtrato in un blocco non lineare che eleva al quadrato il segnale posto al suo ingresso. Il processo che si troverà all'uscita del blocco non lineare sarà anch'esso stazionario e verrà chiamato $\{z(t)\}$.

1. Determinare l'espressione analitica della funzione di autocorrelazione di $\{x(t)\}$ e tracciarne un disegno.
2. Determinare (in tutti i dettagli) le espressioni analitiche delle funzioni di densità di probabilità dei processi $\{y(t)\}$ e $\{z(t)\}$.
3. Si torni a considerare $\{x(t)\}$ e si supponga di campionarlo a frequenza di 40 kHz. Chiamato x_k il k-esimo campione di una realizzazione di $\{x(t)\}$ e sapendo che $x_k = 0.5$, calcolare la stima lineare MSE del campione successivo, x_{k+1}. Inoltre, ragionando sulla funzione di densità di probabilità congiunta dei due campioni, si determinino le 2 seguenti probabilità:

$$\Pr(x_{k+1} > x_k) \quad ; \quad \Pr(x_{k+1} > x_k \,,\, x_{k+1} > 4 - x_k).$$

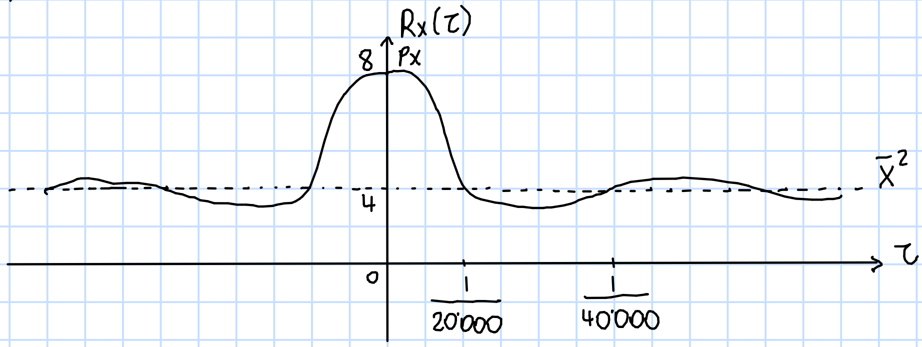
a) $R_x(\tau) \leftrightarrow G_x(f)$

$$G_x(f) = \underset{\uparrow \atop \bar{x}^2}{4}\,\delta(f) + \alpha\, \Pi\left(\frac{f}{20000}\right) \longleftrightarrow R_x(\tau) = 4 + \alpha \cdot 20000\,\mathrm{sinc}(20000\tau)$$

Poichè $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df = R_x(0) = 8$, affinchè tale condizione sia soddisfatta $4 + \alpha \cdot 20000 = 8$

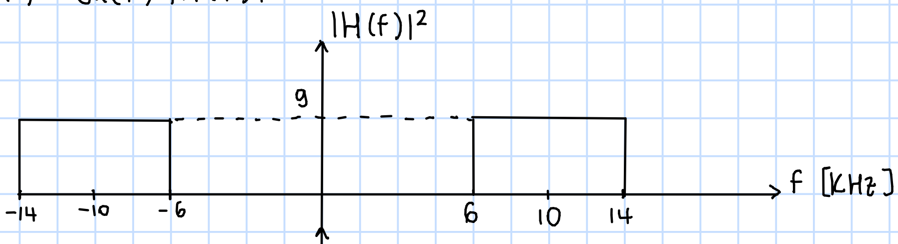
$$\alpha = \frac{\cancel{4}}{\cancel{20000}} = \frac{1}{5000}$$

$$R_x(\tau) = 4 + \frac{1}{\cancel{5000}}\,\overset{4}{\cancel{20000}}\,\mathrm{sinc}(20000\tau) = 4 + 4\,\mathrm{sinc}(20000\tau)$$

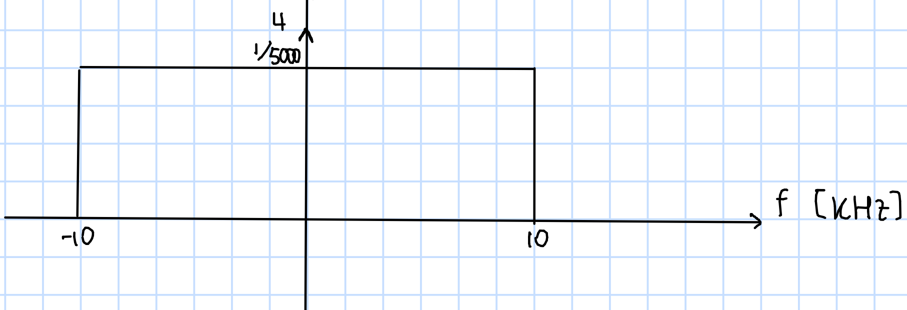


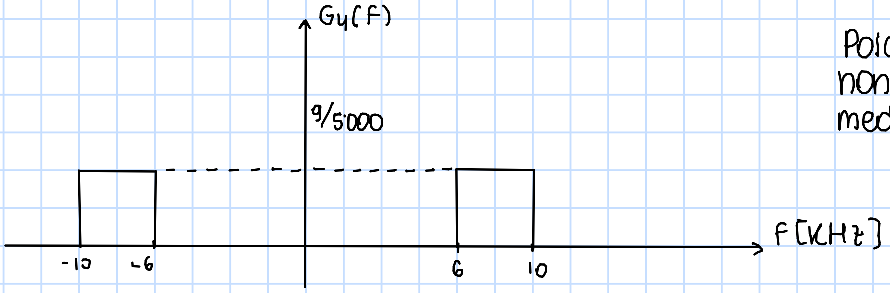
b) $f_y(y) = g_{\bar{y},\sigma_y^2}(y)$

$$G_y(f) = G_x(f)\,|H(f)|^2$$



$$G_y(f) = \frac{9}{5000}\left[\Pi\left(\frac{f-8000}{4000}\right) + \Pi\left(\frac{f+8000}{4000}\right)\right]$$





Poiché il grafico dello spettro di potenza $G_y(f)$ non presenta impulso nell'origine il valor medio $\bar{y}=0$

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} G_y(f)df = 2\cdot\int_{0}^{+\infty} G_y(f)df = 2\cdot\frac{9}{5\cancel{000}}\cdot 4\cancel{000} = 14{,}4 = \sigma_y^2$$

$$\Rightarrow f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, 14{,}4}}\, e^{-y^2/2\cdot 14.4} = g_{0,14,4}(y)$$

Anche $y(t)$ è gaussiano poiché ottenuto come filtraggio LTI di $x(t)$, anch'esso gaussiano.

$z = g(y) = y^2 \qquad z = y^2 \qquad \forall z \geq 0$

Le soluzioni possibili sono $\quad y_1 = \sqrt{z}$
$\quad y_2 = -\sqrt{z}$

$g'(y) = 2y \qquad g'(y_1) = 2\sqrt{z} \qquad g'(y_2) = -2\sqrt{z}$

$$\Rightarrow f_z(z) = \begin{cases} \dfrac{f_y(z_1)}{2\sqrt{z}} + \dfrac{f_y(z_2)}{2\sqrt{z}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 14{,}4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{z}}\, e^{-z/2\cdot 14.4} & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) $\hat{x}_{k+1} = A x_k + B$

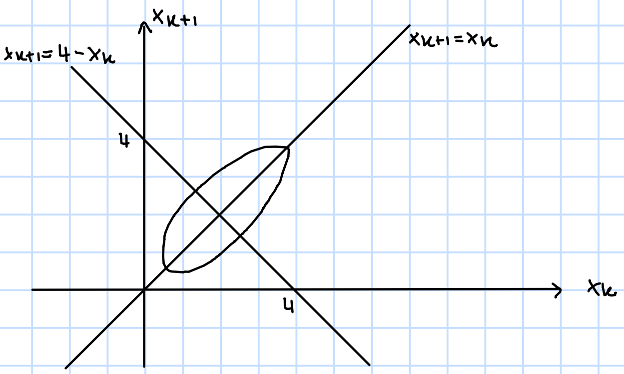
$B = \bar{x}_{k+1} - A\bar{x}_k$

$$A = \rho_{x_k,x_{k+1}} \underbrace{\frac{\sigma_{x_{k+1}}}{\sigma_{x_k}}}_{=1 \text{ perché Gaussiano e stazionario}} = \rho_{x_k,x_{k+1}} = \frac{R_x(1/40000) - \bar{x}^2}{R_x(0) - \bar{x}^2} = \frac{4\,\mathrm{sinc}(1/2)}{4} = \mathrm{sinc}\frac{1}{2} = 0{,}64$$

$B = \bar{x}_{k+1} - A\bar{x}_k = 2 - 0{,}64\cdot 2 = 0{,}72$

$\hat{x}_{k+1} = 0{,}64\cdot 0{,}5 - 0{,}72 = 1{,}04$

La densità congiunta $f_{x_k,x_{k+1}}$ ha una sezione ellittica il cui asse maggiore coincide con la bisettrice (Gaussiana bidimensionale)



$\Pr(x_{k+1} > x_k) = \int$ Gaussiana bid. sopra la bisettrice $= \frac{1}{2}$

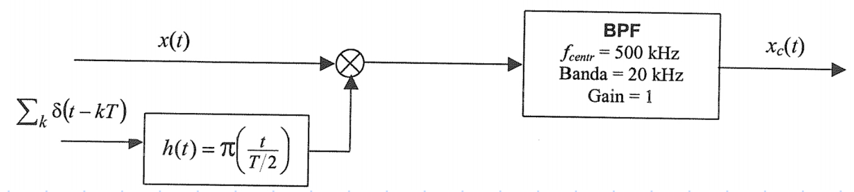
$\Pr(x_{k+1} > x_k,\ x_{k+1} > 4 - x_k) = \int$ Gaussiana bid su 1/4 della sua area $= \frac{1}{4}$

Problema no. 2

Un segnale $x(t)$, normalizzato in ampiezza, avente potenza $S_x = 0.3$ e uno spettro in banda-base con frequenza massima $W = 10$ kHz, viene modulato attraverso lo schema di figura, in cui $T = 2\cdot10^{-6}$ s. Il segnale modulato così prodotto, $x_c(t)$, viene trasmesso su un canale ideale, con larghezza di banda pressoché illimitata e attenuazione $L = 30$ dB. All'uscita del canale agisce un rumore AWGN avente spettro di densità di potenza $G_n(f) = \eta/2 = 0.5\cdot10^{-11}$ W/Hz.

1. Determinare l'espressione del segnale trasmesso sul canale, di che modulazione si tratta e quale sia la potenza trasmessa.
2. Calcolare il rapporto segnale-rumore a destinazione ottenibile con un demodulatore ideale (per quel tipo di modulazione) e calcolare come esso si modifichi nel caso in cui l'oscillatore locale del demodulatore sia sfasato di 18.4° rispetto al segnale modulato ricevuto.
3. Tornando all'ipotesi di utilizzare un demodulatore ideale, calcolare i rapporti segnale-rumore in pre-rivelazione e a destinazione qualora il rumore additivo all'uscita del canale non sia bianco ma abbia, nella banda di interesse, uno spettro di densità di potenza:

$$G_n(f) = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4}\cdot\frac{|f| - 5\cdot10^5}{10^4}$$

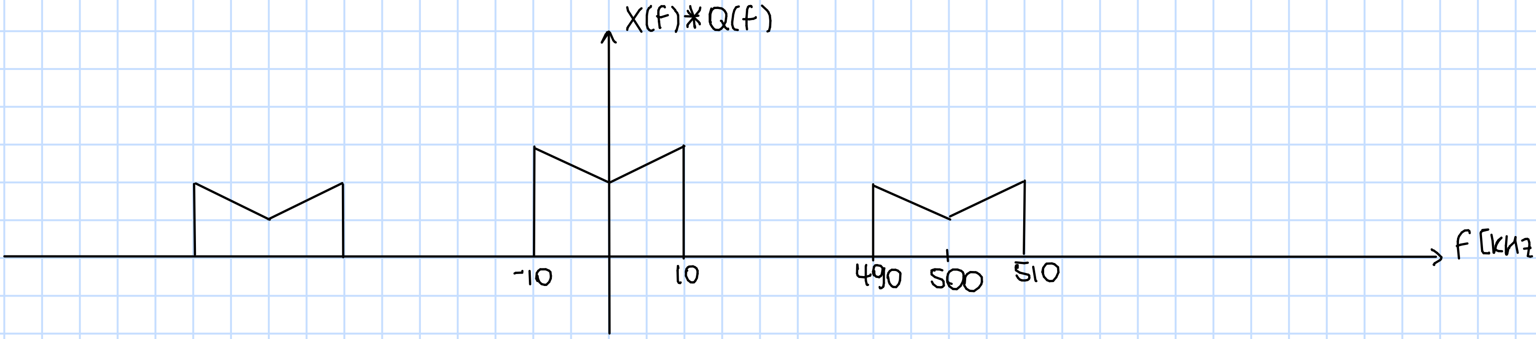


$$q(t) = \pi\left(\frac{t}{T/2}\right) * \sum_k \delta(t-kT) \qquad \text{con } T = 2\cdot10^{-6} \qquad \frac{1}{T} = 500 \text{ KHz}$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$Q(f) = \frac{\cancel{T}}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{T}{2}f\right)\cdot\frac{1}{\cancel{T}}\sum_n \delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{2}\sum_n \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$X(f)*Q(f) = \frac{1}{2}\sum_n \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) X\left(f-\frac{n}{T}\right)$$



Dal BPF esce solo $X_c(f) = \frac{1}{2}\text{sinc}\frac{1}{2}\left[X\left(f-\frac{1}{T}\right) + X\left(f+\frac{1}{T}\right)\right]$

$$\updownarrow$$

$$x_c(t) = \text{sinc}\frac{1}{2}\cdot x(t)\cdot\cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right) = 0{,}64\, x(t)\cos(2\pi\cdot500\cdot10^3 t)$$

Si tratta di modulazione DSB con ampiezza $A_c = 0{,}64$ e $f_c = 500\cdot10^3$

$\Rightarrow S_T = \frac{A_c^2}{2} S_x = \frac{0{,}64^2}{2}\cdot 0{,}3 = 0{,}06 \qquad B_T = 2W = 20000$ Hz

2. Nel caso in cui il demodulatore sia ideale il rapporto segnale-rumore a destinazione sarà

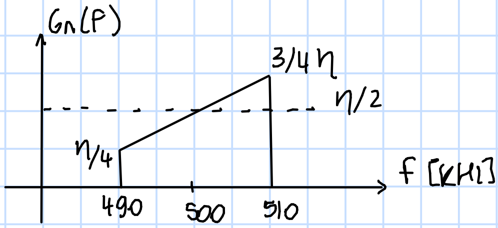
$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \gamma = \frac{S_T}{L\eta W} = \frac{0{,}06}{10^3\cdot10^{-11}\cdot10^4} = 0{,}06\cdot10^4 = 600 \equiv 27{,}7 \text{ dB}$$

Nel caso in cui il demodulatore sia sfasato avremo una differenza data da un fattore $\cos^2(\epsilon)$

con ε = sfasatura

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \gamma \cdot \cos^2(\varepsilon) = \frac{S_T}{L \eta W} \cdot \cos^2 18{,}4 = 600 \cdot 0{,}9 = 540 \cong 27{,}3 \text{ dB}$$

3. $G_n(f) = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} \cdot \frac{|f| - 5 \cdot 10^5}{10^4}$



$$N_R = \int_{490'000}^{510'000} G_n(f)\,df = 2 \cdot \frac{\eta}{2} \cdot 20'000 = 2 \cdot 10^{-7}$$

$$S_R = \frac{S_T}{L} = 0{,}06 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-5}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{S_R}{N_R} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-7}} = 300$$

A destinazione:

- segnale utile $\frac{0{,}64}{\sqrt{L}} \cdot x(t) \Rightarrow S_D = \frac{0{,}64^2 \, S_x}{L}$

- rumore $n_i(t)$ il cui spettro sarà $[G_n(f - 500 \cdot 10^3) + G_n(f + 500 \cdot 10^3)] \, \Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$

$N_D = \eta \cdot 2W$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{A_c^2 \cdot S_x}{\eta \, 2 \cdot W \cdot L} = \gamma = 600 \cong 27{,}8 \text{ dB}$$