Problema no. 1

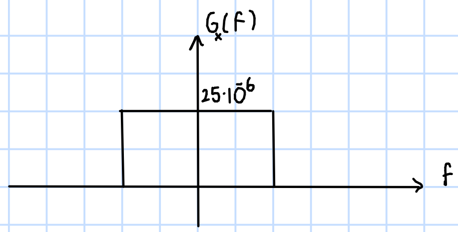
Un processo aleatorio, $\{x(t)\}$, stazionario e Gaussiano, ha valor medio nullo e varianza uguale a ¼. Lo spettro di densità di potenza di $\{x(t)\}$ è un rettangolo centrato nell'origine, di altezza $25\cdot10^{-6}$.

1. Determinare con quale probabilità un dato campione del processo assume valori, in modulo, maggiori di 1.
2. Determinare la massima frequenza, W, dello spettro di densità di potenza di $\{x(t)\}$ e l'espressione analitica della funzione di autocorrelazione. Supponendo che $\{x(t)\}$ venga campionato a frequenza $f_s = 4W$, chiamato x_k il k-esimo campione di una realizzazione di $\{x(t)\}$ e sapendo che $x_k = 1$, calcolare la stima lineare MSE del campione successivo, x_{k+1}.
3. Determinare (in tutti i dettagli) le espressioni analitiche e tracciare il grafico delle funzioni di densità di probabilità dei processi $\{y(t)\}$ e $\{z(t)\}$ le cui realizzazioni sono ottenute, a partire da quelle di $\{x(t)\}$, come segue:

$$y(t) = 4\,x(t) + 2$$
$$z(t) = 4\,|x(t)| + 2$$

1. $\bar{x} = 0$

$\sigma_x = \frac{1}{4}$



$$Pr(X>1) = 2\int_1^{\infty} g_{0,1/4}(x)dx = 2\cdot\left[\frac{1}{2} - erf\left(\frac{1-0}{1/2}\right)\right] = 4{,}55\cdot10^{-2}$$

2. $$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = 2W\cdot h = 2W\cdot 25\cdot10^{-6} = \frac{1}{4}$$ $$P_x = \sigma_x^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{4}$$

$$W = \frac{1}{2\cdot4\cdot25\cdot10^{-6}} = 5\ kHz$$

la funzione di autocorrelazione e' l'antitrasformata dello spettro di densità di potenza

$R_x(\tau) \leftrightarrow G_x(f)$

$$G_x(f) = 25\cdot10^{-6}\,\Pi\left(\frac{f}{10^4}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} R_x(\tau)\ 25\cdot10^{-6}\cdot10^4\,sinc(10^4 t) = 25\cdot10^{-2} sinc(10^4\tau) = \frac{1}{4} sinc(10^4\tau)$$

$f_s = 4kHz$

$\hat{x}_{k+1} = Ax_k + B$

$B = \bar{x}_{k+1} - A\bar{x}_k$

$$A = \rho_{x_k,x_{k+1}}\cdot\frac{\sigma_{x_k}}{\underset{\uparrow}{\sigma_{x_{k+1}}}} = \frac{R(1/20000) - \bar{x}^2}{R_x(0) - \bar{x}^2} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}\,sinc\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{\cancel{4}}} = sinc\,\frac{1}{2} = 0{,}64$$

$f_c = 4\cdot W$ (f_s)

=1 perche' Gaussiano stazionario

$B=0$ poiche' il processo e' stazionario a media nulla $\bar{x}_i = 0\ \forall i$

$\hat{x}_{k+1} = 0{,}64\,x_k = 0{,}64$

3. $y = g(x) = 4x(t)+2$ $\qquad Y = 4X+2 \qquad X_1 = \frac{Y-2}{4} \qquad g'(X_1) = 4$

$$f_Y(Y) = \frac{1}{4} f_X\left(\frac{Y-2}{4}\right)$$

Essendo $x(t)$ gaussiano la sua funzione di densità di probabilità sarà $f_X(X) = g_{0,1/4} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{4}}} e^{-X^2/{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} e^{-2X^2}$$

$$\Rightarrow f_Y(Y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \exp\left(-2 \cdot \left(\frac{Y-2}{4}\right)^2\right)$$

$$Z(t) = 4|X(t)| + 2$$

$\exists$ 2 soluzioni $Z>2$ $\quad Z = -4X+2 \quad X_1 = \frac{Z-2}{4} \quad |g'(X_1)| = |g'(X_2)| = 4$

$\quad Z = 4X+2 \quad X_2 = -\frac{Z-2}{4}$

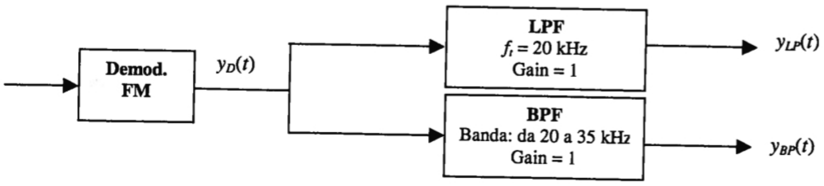
$\nexists$ soluzioni $Z<2 \Rightarrow f_Z(Z) = 0$

Dunque per $Z>2$ $\quad \frac{f_X(X_1)}{4} + \frac{f_X(X_2)}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot f_X(X_1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\frac{1}{4}}} \exp\left\{\frac{-(Z-2)^2}{8}\right\}$

Problema no. 2

Un segnale aleatorio stazionario, $x(t)$, normalizzato in ampiezza, avente media nulla, potenza $S_x = 0.7$, spettro di densità di potenza di forma rettangolare, centrato nell'origine e con frequenza massima $W = 35$ kHz, modula con tecnica DSB una portante di frequenza $f_c = 100$ MHz e ampiezza $A_c = 1$. Il segnale modulato così ottenuto è inviato su un canale passa-banda ideale, centrato a 100 MHz, avente un'attenuazione di 90 dB e una larghezza di banda $B_c = 350$ kHz. All'uscita del canale agisce un rumore AWGN avente spettro di densità di potenza $G_n(f) = \eta/2 = 10^{-18}$ W/Hz.

1. Supponendo ideale il demodulatore DSB, si calcoli il rapporto segnale-rumore a destinazione e la potenza complessiva del rumore a destinazione, nell'ipotesi che l'oscillatore locale del demodulatore produca un'oscillazione sinusoidale di ampiezza $A_0 = 2$. Si supponga altresì che i filtri del demodulatore abbiano guadagno unitario.
2. Quale sarebbe stato il massimo rapporto segnale-rumore a destinazione ottenibile se la modulazione fosse stata FM anziché DSB? Si supponga che la FM funzioni con la stessa f_c e la stessa A_c del modulatore DSB e che non venga applicato il meccanismo della de-enfasi.
3. Fissati i parametri della modulazione FM ai valori che forniscono il massimo rapporto segnale-rumore di cui al punto precedente, si supponga ora che il segnale all'uscita dal demodulatore FM ideale venga filtrato come mostrato in figura. All'uscita di ciascuno dei due filtri, si troverà una porzione di segnale utile e una porzione di rumore. Si calcolino i due rapporti segnale-rumore all'uscita dei due filtri.



1. Nel caso di un demodulatore ideale

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \gamma = \frac{S_T}{LW\eta} = \frac{A_c^2 S_x}{2L\eta W} = \frac{0{,}7}{2\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-18} \cdot 35\cdot 10^3} = 5\cdot 10^{-3}\cdot 10^6 = 5000 \cong 37\,dB$$

A valle del filtro di prerivelazione (gain = 1) il rumore è $n(t) = n_i(t)\cos(\omega_c t) - n_q(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$

$\overline{n^2} = \overline{n_i^2} = \eta \cdot B_T \leftarrow$ dalla teoria

la moltiplicazione per $A_0 \cos(\omega_c t)$ e il successivo filtraggio passa-basso producono a destinazione

$\frac{A_0}{2} n_i(t)$

Dunque $N_D = \frac{A_0^2 \overline{n_i^2}}{4} = \frac{A_0^2}{4} \cdot \eta \cdot B_T = \frac{A_0^2}{\cancel{4}2} \cdot \eta \cdot \cancel{2}W = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-18} \cdot 35 \cdot 10^3 = 140 \cdot 10^{-15} = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$

2. $S_T = \frac{1}{2} A_c^2 = 0{,}5$

$B_T = 2(D+2)W \qquad 2 \leq D \leq 10$

Essendo che $B_T \leq B_c \qquad 2(D+2)W \leq B_c \qquad D+2 \leq \frac{B_c}{2W} \qquad D \leq \frac{B_c}{2W} - 2$

$D_{max} = \frac{350 \cdot \cancel{10^3}}{2 \cdot 35 \cdot \cancel{10^3}} - 2 = 3$

$f_\Delta = DW = 3 \cdot 35 \cdot 10^3 = 105 \cdot 10^3$

$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3 D_{max}^2 S_x \gamma = 3 D_{max}^2 S_x \frac{S_T}{L \eta W} = 3 \cdot 9 \cdot 0{,}7 \cdot \frac{0{,}5}{10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-18} \cdot 35 \cdot 10^3} = 0{,}135 \cdot 10^6 = 135 \cdot 10^3 = 30 + 21{,}3$

$= 51{,}3$