ENERGIA, POTENZA E SEGNALI PERIODICI

Si possono caratterizzare proprietà energetiche per due classi di segnali:
1. i segnali non periodici di energia
2. i segnali periodici di potenza

TEOREMA DI RAYLEIGHT: un segnale $x(t)$ è a energia finita se e solo se la sua trasformata di Fourier è anch'essa quadraticamente integrabile, ovvero vale che

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Definizione SPETTRO DI DENSITÀ DI ENERGIA: $G_x(f) = |X(f)|^2$

prende anche il nome di DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

Ai fini del calcolo dell'energia risulta importante solo il modulo della trasformata di Fourier, mentre è ininfluente la fase.
Se si pone in ingresso a un sistema LTI un segnale ad energia finita $x(t)$, la cui $H(f)$ è una funzione limitata, allora il segnale in uscita $y(t)$ è anch'esso ad energia finita e il suo spettro di densità di energia è:

$$\boxed{G_y(f) = |H(f)|\, G_x(f)}$$

Definizione BANDA ENERGETICA: è la larghezza di intervallo misurato sul semiasse positivo delle f, in cui è contenuta una percentuale molto grande dell'energia di $x(t)$

Definizione FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE: Si dice funzione di autocorrelazione di un segnale $x(t)$ ad energia finita la seguente relazione $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$

Quando $x(t)$ è un segnale reale essa misura la "similarità" tra $x(t)$ e una sua copia ritardata $x(t-\tau)$. Ha 3 proprietà:
1. $R_x(0) = E_x$
2. $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
3. $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$

la funzione di autocorrelazione ha SIMMETRIA HERMITIANA

TEOREMA DI WIENER-KHINCHIN: (per segnali ad energia finita) lo spettro di densità di energia di un segnale ad energia finita $x(t)$ è la trasformata di Fourier della sua autocorrelazione

$$\boxed{R_x(\tau) \longleftrightarrow G_x(f)}$$

Definizione SEGNALI PERIODICI: Un segnale $x(t)$ si dice periodico di periodo T_0 se per qualsiasi valore di t si è verifica la condizione

$$\boxed{x(t+nT_0) = x(t)} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Il segnale $x(t)$ si può ottenere replicando $x_0(t)$ con periodo T_0. Tale replicazione si può scrivere come una convoluzione con un treno di impulsi di Dirac avente periodo T_0
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT_0) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_0)$

In termini generali si rappresenta un segnale periodo come convoluzione tra un segnale di durata finita, che ne determina l'andamento all'interno di un singolo periodo, e un treno di impulsi di Dirac che ne determina la periodicità
lo spettro di un segnale periodico è uno SPETTRO A RIGHE

$$\boxed{X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \delta(f-kf_0)}$$

Un segnale periodico ha in generale energia infinita. Possiamo associare proprietà energetiche anche a segnali periodici operando in termini di POTENZA MEDIA

Definizione POTENZA MEDIA: $\boxed{P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt}$

Un segnale $x(t)$ è a POTENZA MEDIA FINITA se $P_x < +\infty$, cioè se l'integrale converge

TEOREMA DI PARSEVAL: Un segnale periodico $x(t)$ è a potenza media finita $\Leftrightarrow$ la serie del modulo quadro $|\alpha_k|^2$ dei suoi coefficienti di Fourier converge. In tal caso, vale l'uguaglianza

$$\boxed{P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2}$$

Definizione SPETTRO DI DENSITÀ DI POTENZA: si definisce $G_x(f)$ di un segnale periodico $x(t)$ di frequenza fondamentale f_0 e di potenza media finita

$$\boxed{G_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \delta(f-kf_0)}$$

CAMPIONAMENTO

Definiamo un SEGNALE CAMPIONATO IDEALMENTE $x_c(t) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_c)$ il cui spettro sarà

$$X_c(f) = X(f) * \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T_c}\right) = \underset{f_c=\frac{1}{T_c}}{f_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f-kf_c)$$

lo spettro del segnale campionato idealmente è quindi composto da una serie di REPLICHE dello spettro del segnale analogico originario, centrato a passi di f_c e scalate in ampiezza del fattore f_c

PRIMA CONDIZIONE DI NYQUIST: $\boxed{f_c \geq 2W \text{ ossia } T_c \leq \frac{1}{2W}}$ Indica che per prevenire l'aliasing si prelevino almeno 2 campioni per ogni periodo della componente sinusoidale alla massima frequenza presente nello spettro.

TEOREMA DI CAMPIONAMENTO: Sia $x(t)$ un segnale analogico. Se
- $x(t)$ è strettamente limitato in banda con spettro $X(f)=0$ per $f \geq W$
- $x_c(t)$ è il corrispondente segnale campionato idealmente
- la frequenza di campionamento f_c soddisfa la prima condizione di Nyquist

allora $x(t)$ è perfettamente ricostruibile da $x_c(t)$

Un FILTRO ANTIALIASING è necessario per limitare la banda del segnale prima del campionamento

Per ricostruire un segnale campionato idealmente è necessario un FILTRO DI RICOSTRUZIONE che solitamente è un LPF ideale con f_T compresa tra W e f_c-W, guadagno T_c e fase nulla

FORMULA DI INTERPOLAZIONE DI WHITTAKER-SHANNON: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_c}{T_c}\right)$

Affinché il filtro di ricostruzione sia realizzabile è opportuno considerare una BANDA DI GUARDIA. Difatti solo tramite la presenza di B_g il filtro può ricostruire perfettamente il segnale campionato

$$\boxed{B_g = f_c - 2W}$$

SAMPLE & HOLD: è un sistema di campionamento con passo di campionamento T_c ed il valore di ciascun campione viene mantenuto costante per un intervallo costante $\tau \leq T_c$

$$x_{sh}(t) = x_c(t) * h(t) = x_c(t) * \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$X_{sh}(f) = X_c(f)\cdot H(f) = \underbrace{f_c\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f-kf_c)}_{X_c(f)}\cdot \tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)\cdot e^{-j\pi f\tau}$$

$\rightarrow$ introduce solo una fase lineare con f e corrisponde ad un ritardo in t

Poiché nella ricostruzione il prodotto tra repliche e sinc produce una DISTORSIONE si utilizza come filtro un LPF NON IDEALE (sagomato) con

$$H_R(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_c\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)} & |f| < f_t \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$f_t \rightarrow$ compresa tra W e f_c-W

CHOPPER: In corrispondenza di ogni intervallo di campionamento, il segnale in uscita dal chopper ricopia il segnale analogico $x(t)$ per un intervallo di durata τ e per il rimanente tempo vale zero

$$x_{ch}(t) = x(t)q(t) = x(t) \cdot \left[\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_c) \right]$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

costante, NON esprime ritardo nel tempo

$$X_{ch}(f) = X(f) * \left[\tau\, \mathrm{sinc}(f\tau) e^{-j\pi f\tau} \cdot \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_c \tau\, \mathrm{sinc}(kf\tau) e^{-jk\pi f_c \tau}}_{\text{coefficiente della k-esima replica}} X(f-f_c)$$

Si tratta nuovamente di una serie di **REPLICHE** ciascuna delle quali ha ampiezza dipendente dal valore della sinc. A differenza del sample and hold non c'è distorsione. Poiché le repliche non sono distorte per la ricostruzione è sufficiente un **LPF IDEALE**. Si ottiene $x(t)$ filtrando $x_{ch}(t)$ con un LPF ideale avente frequenza di taglio compresa tra W e $f_c - W$, fase nulla e guadagno in ampiezza pari a $g_a = \frac{1}{f_c \tau} = \frac{T_c}{\tau}$

PCM - PULSE CODE MODULATION

È una tecnica per la codifica in forma digitale dei segnali analogici. La rappresentazione numerica di un segnale digitale richiede la discretizzazione nel tempo e in ampiezza. La discretizzazione nel tempo è operata dal campionamento, mentre quella in ampiezza dalla quantizzazione. La PCM è in grado di convertire forme d'onda analogiche in segnali digitali tramite la catena di 3 operazioni:

1. **CAMPIONAMENTO**
2. **QUANTIZZAZIONE**
3. **CODIFICA**

Definizione ERRORE DI QUANTIZZAZIONE: $\boxed{\varepsilon_k \leq \frac{\Delta}{2}}$ → $\Delta = \frac{\max\{x(t)\} - \min\{x(t)\}}{Q}$

Q → LIVELLI DI QUANTIZZAZIONE

PAM - PULSE AMPLITUDE MODULATION

È una tecnica di trasmissione e ricezione digitale. Associa quindi forme d'onda ai simboli in uscita da una sorgente discreta per poterli rappresentare ed inviare su un canale. L'approccio PAM prevede che si associ a ciascun simbolo la stessa forma d'onda base avente però un'ampiezza dipendente dal simbolo stesso.

Il **RICEVITORE PAM** ha il compito di stimare la sequenza di simboli emessa dalla sorgente. Il **FILTRO IN RICEZIONE** ha lo scopo di "limitare" l'effetto del rumore introdotto nel canale e di contribuire a determinare la f.o. base in ingresso al campionatore.

PAM A BANDA ILLIMITATA: se $g_{tx}(t)$ ha **DURATA FINITA** allora il suo spettro ha estensione illimitata quindi solo un canale di **BANDA ILLIMITATA** consente la trasmissione di $g_{tx}(t)$ senza distorsioni

INTERFERENZA INTERSIMBOLICA: Se la banda del canale non è molto maggiore di r, la forma d'onda associata a ciascun simbolo sarà deformata in maniera non trascurabile

PAM A BANDA STRETTA: Si può realizzare una tecnica di trasmissione PAM che occupi **MENO BANDA** usando f.o. in trasmissione di durata maggiore di T, nonostante questo implichi ISI. Tuttavia basta osservare ciascuna f.o. in un istante opportuno che sia esente da ISI. L'aspetto cruciale della PAM a banda stretta è la **SINCRONIZZAZIONE**

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE DI ASSENZA DI ISI NEL TEMPO:

$$\boxed{g(kT) = \begin{cases} C \neq 0 & \text{per } k=0 \\ 0 & \text{per } k=\pm1, \pm2, \ldots \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases}}$$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE DI ASSENZA DI ISI NELLA FREQUENZA:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f-nr) = \text{costante}}$$

Affinché questa condizione sia verificata la somma delle repliche di $G(f)$ traslate nei multipli di r deve dare una costante non nulla.

CONDIZIONE NECESSARIA DI ASSENZA DI ISI:

$$\boxed{B_g \geq \frac{r}{2}}$$

B_g indica la frequenza massima di $G(f)$

SECONDA CONDIZIONE DI NYQUIST:

$$\boxed{B_c \geq \frac{r}{2} \quad \text{ossia } r \leq 2B_c}$$