Funzioni olomorfe nel disco con infiniti zeri

Sebastiano Boscardin
Relatore: Prof. Umberto Zannier

Scuola Normale Superiore
Colloquio della classe di scienze

29 Aprile 2022

Proprietà di Picard

Chiamerò $D = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$. In analogia al teorema di Picard si dà la seguente definizione.

Proprietà di Picard

Una funzione olomorfa $f : D \to \mathbb{C}$ ha la proprietà di Picard se assume ogni valore complesso in ogni intorno di ogni punto del bordo di D.

Una tale funzione

- ha D come dominio di olomorfia
- ha infiniti zeri
- è illimitata (ma esistono funzioni limitate con infiniti zeri)

Serie lacunarie

Lacunarietà

Una serie di potenze della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{k_n}$$

$c_n \in \mathbb{C}$, $k_n \in \mathbb{N}^+$ *si dice lacunaria se esiste* $q > 1$ *tale che* $k_{n+1}/k_n > q$.

Una tale serie di potenze ha coefficienti non nulli in corrispondenza di indici distribuiti con densità asintotica nulla nei naturali. Se ha raggio di convergenza 1, allora il teorema di Fabry garantisce che ha il disco come dominio di olomorfia. Si può dire in realtà di più.

Serie lacunarie illimitate

W. H. J. Fuchs ha dimostrato nel 1967 che ogni serie lacunaria olomorfa su D per cui $\limsup |c_n| > 0$ ha infiniti zeri nel disco. Un risultato ancora più forte è stato ottenuto da **T. Murai** nel 1980:

Teorema

Una serie lacunaria illimitata olomorfa su D ha la proprietà di Picard.

Schema della dimostrazione

Le dimostrazioni di Fuchs e Murai si basano sul seguente lemma che è un rafforzamento quantitativo del teorema della mappa aperta.

Lemma

$f : D(R) \to \mathbb{C}$ olomorfa, p intero positivo, se $|f^{(p)}(0)| \geq A$ e $|f^{(p)}(z)| \leq B$ per ogni $z \in D(R)$, allora esiste una costante K che dipende solo da p tale che l'immagine di f contiene il disco di centro $f(0)$ e raggio $KA^{p+1}B^{-p}R^p$.

La proprietà di lacunarietà permette di trovare un p_0 tale che per $p > p_0$ e per dischi opportuni (centrati in ogni punto del disco abbastanza vicino al bordo) la quantità che compare nel lemma è maggiore di una costante C che dipende solo da $q, p, limsup|c_n|$. A questo punto l'enunciato di Fuchs è verificato se per ogni $0 < r < 1$ esiste $z \in D(r)$ tale che $|f(z)| \leq C$.

Schema della dimostrazione

Supponiamo per assurdo che questo non valga, cioè esiste $r < 1$ tale che $|f(z)| > C$ se $|z| \geq r$.
Allora usando il primo teorema fondamentale della teoria di Nevanlinna si trova che la caratteristica di Nevanlinna $T(r, f) = T(r, 1/f) + O(1)$ è limitata in r. Una conseguenza nota di questo è che per quasi ogni θ esiste finito

$$lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$$

D'altra parte siccome $limsup|c_n| > 0$ si ha $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$. Questo unito alla lacunarietà di f implica che il limite precedente non esiste finito per quasi ogni θ generando quindi l'assurdo.

La serie di Fredholm

Il caso più semplice di serie lacunaria illimitata è la cosidetta serie di Fredholm

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$$

Questa serie ha la proprietà di Picard e quindi infiniti zeri, tuttavia poco si sa sulla loro distribuzione.
I teoremi di Mahler affermano che le funzioni che soddisfano una certa equazione funzionale "polinomiale" assumono valori trascendenti in punti algebrici.
Ad esempio per la serie di Fredholm vale

$$f(z) = z + f(z^2)$$

Deduciamo che f assume valore trascendente in ogni punto algebrico del disco. Allora f non ha zeri nei punti algebrici.

La serie di Fredholm

La dimostrazione che la serie di Fredholm ha la proprietà di Picard è articolata ma utilizza tecniche elementari. La dimostrazione proposta da U. Zannier in *A note on the zeroes of the Fredholm series* procede per vie completamente diverse rispetto ai lavori precedenti di Fuchs e Murai. Passi principali:

- passare da $f : D \to \mathbb{C}$ a $F : H \to \mathbb{C}$ attraverso un cambio di variabile $F(w) = f(e^{2\pi i w}) = f(e(w))$: l'equazione funzionale prende la forma più gestibile $F(w) = F(2w) + e(w)$
- usare il teorema di Rouchè per dimostrare che l'immagine di F ristretta ad ogni intorno del bordo di H coincide (a meno di una traslazione) con l'immagine di un'altra funzione $S(w) = F(w) + \sum_{l=1}^{\infty}[e(w/2^l) - e(-1/2^l)]$
- l'immagine di S è invariante per traslazione per opportune costanti c_m e per 1. La densità in $\mathbb{R}$ del semigruppo generato dalle parti reali di queste c_m e da $\mathbb{Z}$, usando il teorema della mappa aperta, conduce a $S(H) = \mathbb{C}$.

Generalizzazioni

Nella dimostrazione gioca un ruolo fondamentale l'equazione funzionale $f(z) = f(z^2) + z$. Questo approccio si presta bene ad alcune generalizzazioni.

Lemma

Per ogni $a > 1$ intero e ogni funzione olomorfa $\phi : D \to \mathbb{C}$ con $\phi(0) = 0$ esiste un'unica $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa che rispetta $f(z) = f(z^a) + \phi(z)$ per ogni $z \in D$.

Per alcune scelte di ϕ si può dimostrare (seguendo passo passo la dimostrazione precedente con le opportune modifiche) che la funzione $f(z) = f(z^a) + \phi(z)$ ha la proprietà di Picard.

Una serie non lacunaria

Ad esempio scegliendo $a = 2$ e $\phi(z) = \sum_{b=0}^{\infty} \frac{z^{3^b}}{4^b}$ si ottiene

Serie non lacunaria

La serie

$$f(z) = \sum_{a=0,b=0}^{\infty} \frac{z^{2^a 3^b}}{4^b}$$

ha la proprietà di Picard.

Questa serie non è lacunaria poichè il limite del rapporto degli esponenti di due termini non nulli consecutivi è 1 (si riescono a trovare n e m tali che $\frac{2^n}{3^m}$ è arbitrariamente vicino a 1).
Questo risultato non è dunque conseguenza dei teoremi di Fuchs e Murai nè mi sembra che la loro dimostrazione si possa adattare.

Stima del numero degli zeri

Gli zeri della serie di Fredholm sono infiniti. Vogliamo trovare una stima dall'alto al numero degli zeri di modulo minore di r.

La formula di Jensen afferma che per una funzione g olomorfa su un aperto che contiene $\bar{D}(0,r)$ con $g(0)=1$, detti $a_1, ..., a_n$ gli zeri di g contenuti in $\bar{D}(0,r)$, vale

$$0 = \sum_{k=1}^{n} log\left(\frac{|a_k|}{r}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log^+|g(re^{i\theta})|d\theta$$

Se g è una funzione olomorfa sul disco con $g(0)=1$, una conseguenza semplice della formula di Jensen è la disuguaglianza

$$log\ M(kr) \geq n(r) log\ k \quad \forall\ r<1, \forall\ 1<k<\frac{1}{r}$$

dove $n(r)$ è il numero di zeri contati con molteplicità di g contenuti nel disco chiuso di raggio r e $M(r)$ è il massimo del modulo di g sul cerchio di raggio r.

Stima del numero degli zeri

Nel caso particolare di f la serie di Fredholm (o anche la serie non lacunaria precedente), considero $g(z) = f(z)/z$. Poichè $M(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n-1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, la disuguaglianza precedente si riscrive come

$$n(r) \leq -\frac{\log(1-kr)}{\log k}$$

per ogni $1 < k < \frac{1}{r}$. $n(r)$ è il numero di zeri di g contenuti in $\bar{D}(r)$, cioè gli zeri di f contenuti in $\bar{D}(r)$ tranne lo 0.
Se $r = e^{x \log x}$ una buona scelta di k è $k = \frac{1-x}{r}$ e quindi

$$n(r) \leq -\frac{\log(x)}{\log((1-x)/r)}$$

Stima del numero degli zeri

Con semplici passaggi algebrici si ottiene

Stima asintotica

$$\lim_{r\to 1^-} n(r) log(1/r) log\left(\frac{1}{log(1/r)}\right)^{-1} \leq 1$$

cioè si ha approssimativamente $n(r) \leq \frac{1}{log(1/r)} log\left(\frac{1}{log(1/r)}\right)$.

Alcune stime (esatte):

- $n(0.9) \leq 46$
- $n(0.99) \leq 761$
- $n(0.999) \leq 10238$

Bibliografia

- U. ZANNIER, *A note on the zeroes of the Fredholm series*, Rend. Lincei Mat.
- T. MURAI, *The value-distribution of lacunary series and a conjecture of Paley*, Annales de L'Institut Fourier
- W. H. J. FUCHS, *On the zeros of power series with Hadamard gaps*, Nagoya Math. J.
- W. RUDIN, *Real and Complex Cnalysis*, McGraw-Hill
- A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Cambridge University Press