# Mathe+ AG 2020/21

Jakob Hoffmann, Goethe University Frankfurt am Main

September 15, 2021

# Inhaltsverzeichnis

## Contents

# 1 Differentiation und Folgen

## 1.1 Ableitungen

Sei f(x) eine beliebig komplizierte Funktion, dann kann die Steigung im Allgemeinen nicht einfach berechnet werden, wie folgende Abbildung zeigt:

Figure 1:

Die Steigung kann also wie folgt berechnet werden:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Dies ist die Definition der sogenannten ersten Ableitung.
Die erste Ableitung beschreibt also die Steigung der Funktion an einem Punkt $x_0$.
Nicht alle Funktionen sind jedoch an jedem Punkt differenzierbar. Definition: Sei f eine Funktion, dann heit sie an einer Stelle $x_0$ differenzierbar wenn:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

existiert

Beispiele fr differenzierbare Funktionen sind:
-Polynomische Funktionen:

$$f(x) = x^2 \tag{3}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 \tag{4}$$

Also Konvergent
Beispiele fr nicht differenzierbare Funktionen sind:
-Wurzelfunktion am Punkt $x_0 = 0$

$$f(x) = \sqrt{x} \tag{5}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} \to \infty \tag{6}$$

Divergent

**Satz 1.1 :**
Sei f(x) eine differenzierbare Funktion, dann ist diese automatisch auch stetig

**Beweis. Zeige:**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{7}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) * 0 = 0 \tag{8}$$

$$\square \tag{9}$$

Wie berechnet man jedoch konkret erste Ableitungen von bestimmten Funktionen: Ein Paar Funktionen sind hier angegeben:

Table 1: Ableitungen von häufig verwendeten Funktionen

| f(x) | f'(x) |
|---|---|
| a | 0 |
| $ax$ | a |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $e^{ax}$ | $ae^{ax}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |

Allgemein Ableitungen von Polynomen:

**Lemma 1.1**

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{10}$$

Beweis folgt später in Abschnitt 1.2

### 1.2 Ableitungsregeln

Im letzten Abschnitt wurden die Ableitungen eingeführt bei einfachen Funktionen. Was aber wenn die Funktion komplizierter ist zum Beispiel ein Produkt oder Quotient aus mehreren Funktionen.
Sei F(x)=f(x)g(x) ein Produkt zweier Funktionen f und g, dann gilt:

**Satz 1.2 Produktregel**

$$\boxed{(f * g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g(x)'} \tag{11}$$

Herleitung hier nicht angegeben, da nicht relevant für weitere Themen

**Aufgabe 1.2.1**
Leitet die sogenannte Quotientenregel für eine Funktion F(x), die als Quotient von zwei Funktionen f(x ) und g(x) geschrieben werden kann mit identischen Schritten, wie bei der Produktregel her:

Eine weitere wichtige Regel ist die Ableitung von einer Funktion f(g(x)):
**Satz 1.3 Kettenregel**

$$\boxed{(f(g(x)))' = g'(f(x))f'(x)} \tag{12}$$

**Beweis:**

Sei f(y) die Funktion einer Tangente, dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \eta_1(x)(x - x_0) \text{ damit} \tag{13}$$
$$g(y) = g(y_0) + \eta_2(y)(y - y_0) \text{ wobei nach Definition: } \tag{14}$$
$$\lim_{x \to x_0} \eta_1(x) = f'(x_0) \tag{15}$$
$$\lim_{y \to y_0} \eta_2(y) = g'(y_0) \tag{16}$$
$$\to g(f(x)) = g(f(x_0)) + \eta_2(f(x))\eta_1(x)(x - x_0) \tag{17}$$
$$\text{Damit für (f(g(x)))':} \tag{18}$$
$$(f(g(x)))' = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \eta_2(f(x))\eta_1(x) = g'(f(x_0))f'(x_0) \tag{19}$$
$$\square \tag{20}$$

Mit diesen neuen Mitteln knnen wir jetzt auch Lemma 1.2 mithilfe von Induktion beweisen

**Beweis von Lemma 1.2:**

Für n=0:

$$\frac{d}{dx}(x^0) = 0 = 0 * x^{-1} \tag{21}$$

Für n=m+1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^{m+1}) = \frac{d}{dx}(x^m * x) = x^m + x * \frac{d}{dx}(x^m) \\ = x^m + x(m-1)x^{m-1} = x^m + x^m(m-1) = (n-1)x^{n-1} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\square \tag{23}$$

## 1.3 Graphische Interpretation von Ableitungen

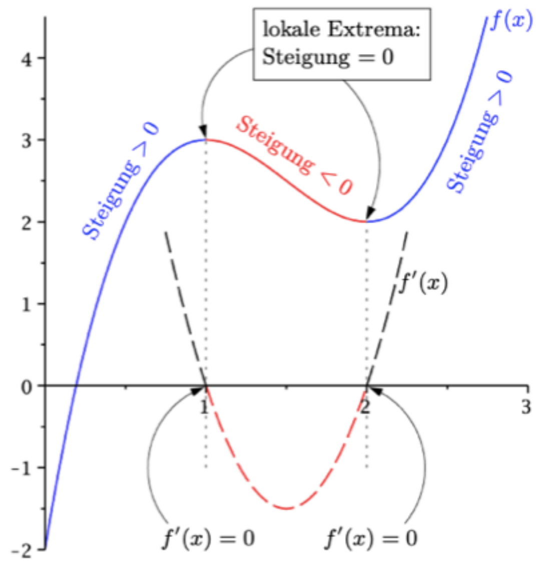



Figure 2: Kurve mit Minima und Maxima. Quelle: Skriptum zum Vorkurs Mathematik, Dr.Hartwig Bosse

Die Funktion f(x) hat also dort die Extrempunkte, wo die Steigung also die Ableitung $f'(x) = 0$ ist. Die erste Ableitung reicht jedoch nicht aus um zu entscheiden, ob der Extrempunkt ein Minimum oder Maximum ist. Dafr bentigt man die sogenannte zweite Ableitung

**Def: Zweite Ableitung:**

Die Zweite Ableitung ist die nderung der Steigung einer Funktion und entspricht somit der Krümmung. Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung geschrieben als f"(x) oder häufig als:

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \tag{24}$$

Anhand der zweiten Ableitung(Krümmung) kann jetzt durch das Vorzeichen zwischen verschiedenen Extrempunkten unterschieden werden dafr muss folgende Fallunterscheidung getroffen werden:

**Maximum:**
Sei $f'(x_0) = 0$ eine Extremstelle dann ist $x_0$ genau dann ein Maximum,falls die Krmmung negativ ist, also $f''(x_0) < 0$.

**Minimum:**
Sei $f'(x_0) = 0$ eine Extremstelle dann ist $x_0$ genau dann ein Minimum,falls die Krmmung positiv ist, also $f''(x_0) > 0$.

**Ausnahme:**
Wenn auch $f''(x_0) = 0$ dann mssen hhere Ableitungen untersucht werden, da keine zustzlichen Informationen gewonnen werden.

**Definition n-te Ableitung:** Die n-te Ableitung ist die n-fache Ableitung von einer Funktion $f(x)$ und wird geschrieben als:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x), \; n \in \mathbb{N} \tag{25}$$

Das Berechnen der n-ten Ableitung ist komplexer als von einer Ableitung mit einem bestimmten n.Hier ist ein Beispiel angegeben:

**<u>Lemma 1.3</u>**
Sei $f(x) = e^{2x}$ eine Reelle Funktion,dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{2x} = 2^n e^{2x} \tag{26}$$

**Beweis:** Gleichung ist intuitiv klar, der Beweis erfolgt durch Induktion:

Für n=1:

$$\frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x} \tag{27}$$

Für n=m+1

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} e^{2x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m}{dx^m} e^{2x}\right) = \frac{d}{dx}\left(2^m e^{2x}\right) = 2^m \cdot 2e^{2x} = 2^{m+1} e^{2x} \tag{28}$$

$$\square \tag{29}$$

Doch wie berechnet man jetzt konkret so eine Kurvendiskussion. Dazu kann der folgende Algorithmus benutzt werden:

**Algorithmus 1.1 Kurvendiskussion** Sei $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ ein Polynom 3.Grades, dann gilt fr die Extremstellen:

**1) Bestimmung in der 1.Ableitung der Funktion**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 12x^2 + 4x + 3 \tag{30}$$

**2) Nullstellen der Ableitung**

$$12x^2 + 4x - 3 = 0 => x_1 = 0,36 \;\; x_2 = -0,69 \tag{31}$$

**3) Untersuchung der Extremstellen**

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 24x + 4 \tag{32}$$

$$f''(x_1) = 12,6 > 0 => x_1 \text{ ist ein Minimum} \tag{33}$$

$$f''(x_2) = -12,5 < 0 => x_2 \text{ ist ein Maximum} \tag{34}$$

**Aufgabe 2.1:**

Von der Funktionsgleichung $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der ganzrationalen Funktion vierten Grades sind $a_4 = 1$ und $a_3 = 0$. Der Graph schneidet die y-Achse und die x-Achse jeweils bei -3 und berhrt bei x=-1 eine Gerade mit der Steigung m=16. Fhren Sie eine Kurvendiskussion, wie in der Vorlesung besprochen durch:

### 1.4 Folgen und Konvergenz

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Folgen und deren Eigenschaften beschftigen. Folgen und Reihen sind mathematische Objekte, welche verschiedene Zahlen verknpfen. Das einfachste Beispiel ist die konstante Folge $a_n = (c, c, c, c, c, .., c)$ auch bekannt aus dem Schulunterricht ist die Fibonacci Folge:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \;\; n \in \mathbb{N} \tag{35}$$

Die Fibonacci Folge ist ein Beispiel fr eine sogenannte rekursive Folge, die sich im Gegensatz zu anderen Folgen Elemente der Folge selbst enthlt.

Jede Folge besitzt auerdem einen Grenzwert, der sich wie folgt ergibt:

**<u>Definition Grenzwert:</u>**
Der Grenzwert a einer Folge $a_n$ ist als das Element der Folge für $n \to \infty$ definiert, also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \;\; a \in \mathbb{R} \tag{36}$$

Hier kann auerdem eine Fallunterscheidung unternommen anhand der Grenzwerte gemacht werden:

**Definiton Konvergent:**
Eine Folge heist Konvergent, wenn ein von unendlich verschiedener Grenzwert existiert,also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad a \neq \infty \tag{37}$$

Ein Beispiel fr Konvergente Folge,ist die folgende Folge:

$$a_n = \frac{1}{n} \tag{38}$$

Mit Folgegliedern $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$ und dem Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{39}$$

**Definition Divergent** Wenn eine Folge nicht konvergent ist, heisst sie divergent. Ein beispiel ist die lineare Funktion $f(x) = x$, da gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x = \infty \tag{40}$$

Also existiert kein Grenzwert und die Folge divergiert.

Grenzwerte kommen auch zum Beispiel in der Physik bei der Berechnung eines Zerfallsprozesses in der Elementarteilchenphysik dran:

$$Z \langle \Omega | T \phi_{in}(x_1) \phi_{in}(x_2) | \Omega \rangle = \lim_{t_1, t_2 \to -\infty} i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{i(1 - \Pi'(m^2))^{-1}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{41}$$

**Aufgabe 1.4.1** Bestimme die Grenzwerte der folgenden Funktionen:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad b) f(x) = \frac{5}{x-1}, \quad c) f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4} \tag{42}$$

$$d) f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2+3}, \quad e) f(x) = \frac{x^2+1}{4x^2}, \quad f) f(x) = \frac{x^3 - 20x^2 + 4}{30x^2 + 60x} \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

**Aufgabe 1.4.2** Ermitteln Sie die Zahlen $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktionen den jeweils gegebenen Grenzwert g besitzen:

$$a) f(x) = \frac{(ax-1)^2}{2x^2+3}; \quad g = 4, \quad b) f(x) = \frac{40x^2 - 2ax + 50}{2ax^2 - 2}; \quad g = 0,5 \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

**Aufgabe 1.4.3**
Die Ladekurve eines Kondensators ist gegeben durch $U(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

a) Berechnen Sie die Spannung fr seh grose Zeiten $t \to \infty$

b) Der Kondensator habe einen Widerstand von $R = 50M\Omega$ und eine Kapazitt von $C = 16\mu F$ .Berechnen Sie die Zeit nachdem die Spannung halbiert wurde

**Satz 1.4 Bernoulli-Ungleichung**

Für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:
$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{47}$$

**Beweis mit Induktion:**
Für n=1:
$$(1+x)^1 = 1+x = 1+1*x \tag{48}$$

Induktionsschritt:
zu zeigen:
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x, \quad mit \quad (1+x)^n \geq 1+nx \tag{49}$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx^2+nx+x \geq 1+nx \tag{50}$$
$$\Box \tag{51}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die sogenannte Monotonie Eigenschaft von Folgen:

**Definition: Monotonie** Eine Folge heisst Monoton steigend, wenn fr das Folgenglied $a_n, n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$a_{n+1} \geq a_n \tag{52}$$

Eine Folge heisst Monoton fallend, wenn fr $a_n, n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$a_{n+1} \leq a_n \tag{53}$$

## 1.5 Taylor-Entwicklung

Jede beliebige Reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann mithilfe einer Taylor-Entwicklung um einen Punkt $x_0$ durch ein Polynom angenähert werden:

**Definition Taylor-Entwicklung:**

Für hinreichend kleine $x$ gilt für $f(x)$ mit der Entwicklungsstelle $x_0$ :

$$(Tf)(x; x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{54}$$

Beispiel:
Sei $f(x) = e^x$ die Exponentialfunktion, dann ergibt sich folgende Taylorentwicklung um die Entwicklungsstelle 0:
n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x = 0) = e^0 = 1 \tag{55}$$

Somit:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \quad x \in \mathbb{R} \tag{56}$$

Da die Taylor-Näherung nur fr sehr kleine x gltig ist, kann schon meistens nach dem 2.Term abgebrochen werden.

**Aufgabe 1.5.1** Bestimme die Taylorentwicklung bis zu 3-Termen folgender Funktionen:

$$a) f(x) = \cos(x), \quad b) f(x) = \ln x, \ \text{ bei } x_0 = 1, \ \ c) f(x) = \sin x \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

**Aufgabe 1.5.2**
Beweisen Sie die Euler-Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, indem Sie die jeweiligen Taylor-Entwicklungen vergleichen.

# 2 Integralrechnung

## 2.1 Integrale als Summen

Bekannt aus der Schulphysik ist die Beziehung von Zeit, Weg und Geschwindigkeit als $s = v\Delta t$. Bei einer konstanten Geschwindigkeit, also $v(t) = const$ entspricht $s$ der Fläche unter dem Graphen fr $t \in [a; b]$ wobei $a$ und $b$ Start und Endpunkt der Wegmessung sind und $\delta t = b - a$. Was ist jetzt jedoch der Weg, also die Fläche wenn $v(t) \neq const$, damit $v(t)$ irgendeine komplizierte Funktion, dann ist der Weg $s(t)$ ebenfalls abhngig von $t$.

Die Fläche kann nicht menr durch Rechtecke dargestellt werden, jedoch durch Rechtecke angenhert werden. Sei N die Anzahl der Rechtecke und $\delta x$ di jeweilige Breite, dann gilt fr die Angenäherte Fläche $A_n$:
**Definition Riemannsumme:**

$$A_n = \sum_{n=0}^{N} f(x_n)\Delta x \tag{59}$$

Dies ist jedoch nur eine Näherung, da die Rechtecke nicht unter den Graphen passen. Um eine exakte Fläche zu erhalten braucht unendlich viele präzise Rechtecke, also $N \to \infty$ und $\Delta x \to 0$.

**Definition Integral**
Die Fläche berechnet unter einem Graphen berechnet sich allgemein zu:

$$\boxed{A(a,b) = \lim_{N\to\infty, \Delta x \to 0} \sum_{n=0}^{N} f(x_n)\Delta x = \int_a^b f(x)dx} \tag{60}$$

wobei $x \in [a; b]$ und a,b sind die sogenannten Integrationsgrenzen.

dx heisst Differential und ist definiert als:

$$dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \tag{61}$$

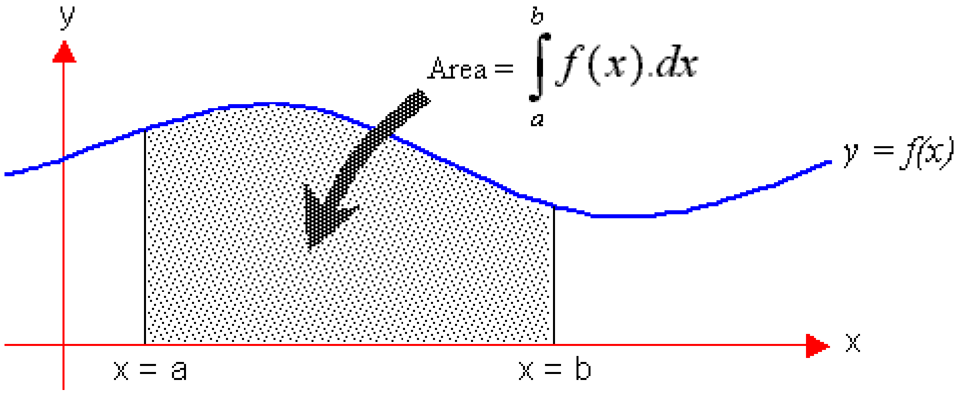



Figure 3: Fläche unter dem Graphen

Wie schon in der Vorlesung erwähnt sind nicht alle Funktionen $f(x)$ integrierbar. Mithilfe des Riemannschen Integrationskriteriums ist dies einfach nachzuprfen.
definiere zunchst sognannte Ober und Untersummen $OS$ bzw $US$ wie folgt:

**Definition 2.2**
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschrnkte Funktion. Ist $Z = x_0, ..., x_n$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist:

$$US(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\ \inf(f[x_{i-1}, x_i]) \quad und \tag{62}$$

$$OS(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\ \sup(f[x_{i-1}, x_i]) \tag{63}$$

$$\tag{64}$$

**<u>Lemma 2.1 Riemannsches Integrabilitätskriterium</u>**

**Behauptung:** f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon \geq 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt mit $OS(f, Z) - US(f, Z) < \epsilon$.

**Beweis:**
$\Longrightarrow$ Sei f integrierbar mit $\int_a^b f(x)dx = UI(f) = OI(f) = c$. Da $OI(f)$ nach Definition die größte untere Schranke für die Obersummen von f ist,ist $c + \frac{\epsilon}{2}$

keine Schranke mehr d.h gibt es eine Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $OS(f,Z) < c+\frac{\epsilon}{2}$. Analog gibt es eine Zerlegung Z' von $[a,b]$ mit $US(f,Z') > c-\frac{\epsilon}{2}$. Die Zerlegung $Z \cup Z'$ erfllt die Eigenschaft, da:

$$OS(f,Z\cup Z')-US(f,Z\cup Z') \leq OS(f,Z)-US(f,Z') < (c+\frac{\epsilon}{2})-(c-\frac{\epsilon}{2}) = \epsilon \tag{65}$$

$\Longleftarrow$ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z$ damit:

$$OI(f) - UI(f) \leq OS(f,Z) - US(f,Z) < \epsilon \tag{66}$$

da das Ober und Unterintegral eine untere bzw. obere Schranke fr die Ober bzw. Untersummen bilden. Mit dem Grenzwert $\epsilon \to 0$ folgt $OI(f)-UI(f) \leq 0$, damit also $OI(f) = UI(f)$ somit ist f integrierbar.
$\square$

### 2.2 Stammfunktionen

Wie schon im Kapitel 1.Differentiation und Folgen knne wir an diesem Punkt zwar Stze für Integrale beweisen sie jedoch nicht ausrechnen. In dem folgenden Kapitel sollen konkret Integrale für Funktionen $f(x)$ ausgerechnet werden

Dazu wird die sogenannte Stammfunktion eingefhrt:

**Definition Stammfunktion** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion dann ist die Funktion:

$$F : x \mapsto \int_a^x f(x')dx' \tag{67}$$

differenzierbar mit $F' = f$ und heit Stammfunktion

$\Longrightarrow$ Das Integral ist die Umkehrung der Ableitung
In der folgenden Tabelle sind ein paar Stammfunktionen aufgelistet:

Table 2: Ableitungen von häufig verwendeten Funktionen

| f(x) | F(x) |
|---|---|
| a | $ax$ |
| $ax$ | $a\frac{x^2}{2}$ |
| $x^2$ | $\frac{x^3}{3}$ |
| $x^3$ | $\frac{x^4}{4}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $e^{ax}$ | $\frac{1}{a}e^{ax}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $lnx$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ |

Speziell für Polynomfunktionen, also:

**Lemma 2.1:**

**Behauptung**: Für eine Polynomfunktion $f(x) = x^n$ gilt:

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \tag{68}$$

**Beweis durch Induktion:**
Induktionsanfang: n=0:

$$\int_0^x x'^0 dx' = 1 * x^1 = x \tag{69}$$

Induktionsschritt:

$$F(x^{n+1}) = F(x^n * x) \neq F(x)F(x^n) \tag{70}$$

Produktregel ist also nicht von der Differentiation bertragbar. Das Problem wird im Zusammenhang mit der Partiellen Integration nochmal erlutert.

**Satz 2.1**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bestimmte Reelle Funktion, dann ist die Stammfunktion um eine Konstante verschiebbar, also ist $F'(x) = F(x) + c$ ebenfalls eine Konstante, da gilt:

$$\frac{d}{dx}F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}c = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{71}$$

Wir haben jetzt also das unbestimmte Integral kennengelernt. Wenn man jedoch in einem Intervall $x \in [a, b]$ integrieren mchte, dann gilt fr das bestimmte Integral:

**Theorem 2.1 Riemann Integral**
Das Riemann Integral einer Funktion $f(x)$ berechnet sich mit:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), x \in [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{72}$$

**Aufgabe 1.4.1** Bestimme die Stammfunktionen $F(x)$ der folgenden Funktionen und daraus die unbestimmten Integrale

$$a) f(x) = 3x, \quad b) f(x) = -0,5x^2, \quad c) f(x) = 4x^3 + 2x^2 + x \tag{73}$$
$$d) f(x) = 2x^2 - 3x, \quad e) f(x) = e^{2x}, \quad f) f(x) = ax^n - bx^{n-1} \tag{74}$$
$$g) f(x) = -5x^4 + 2x^2 \tag{75}$$

### 2.3 Methoden um Integrale zu berechnen

Wie schon zuvor erwhnt gibt es nicht viele Wege ein Integral auszurechnen, da die meisten Integrale gar nicht analytisch lsbar sind. Es gibt jedoch einige Wege, die im Folgenden besprochen werden:

**Defintion 3.1** Sei I ein Riemannsches Integral, dann nennt man die Operation eine Substitution wenn folgendes angewendet wird:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u(x))du, \ u = u(x) \tag{76}$$

somit wird anstatt ber x ber die neue Variable u integriert, die von x abhngt.

**Beispiel:** Sei $f(x) = xcos(x^2 + 1)$ dann gilt fr das Integral:

$$I = \int_0^2 xcos(x^2 + 1)dx \tag{77}$$

$$\tag{78}$$

Definiere eine neue Variable u als $u = x^2 + 1$, somit:

$$\frac{du}{dx} = 2x => dx = \frac{du}{2x} \tag{79}$$

$$u(a) = 1, \ \ u(b) = 5 \tag{80}$$

$$I = \int_1^5 \cos(u)\frac{1}{2x}xdu = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos(u)du = \frac{1}{2}\sin(u)\Big|_1^5 = \frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1) \tag{81}$$

Die Einfhrung der neuen Variable hat uns also ermglicht das Integral zu lsen.

**Aufgabe 2.3.1:** Berechne das folgende Integral mithilfe von geeigneter Substitution.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \tag{82}$$

Hinweis: $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x) + C$

**Aufgabe 2.3.2:** Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe von Substitution:

$$a) \int \frac{1}{\ln x x} dx \tag{83}$$

$$b) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \tag{84}$$

$$c) \int_0^1 (x+1)^3 dx \tag{85}$$

$$\tag{86}$$

Eine weitere Methode Integrale zu berechnen ist die sogenannte partielle Integration:

**Satz 3.2 partielle Integration**
Seien u,v : $[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbare Funktion, dann gilt:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx \tag{87}$$

**Beweis :**

Die Ableitung von $uv$ betrgt nach der Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$, damit ist $\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = [u(x)v(x)]_a^b$. die Behauptung erfolgt durch das Subtrahieren von $\int_a^b u(x)v'(x)$.

Beispiel:
Sei $I = \int x \cos x dx$ dann gilt fr die Berechnung:

$$u'(x) = cosx, \;\; v(x) = x \tag{88}$$

$$\int cosxdx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x \tag{89}$$

**Aufgabe 2.3.3**
Berechne die folgenden Integrale:

$$a) \int_0^1 x \arctan x dx \tag{90}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x) dx \tag{91}$$

$$c) \int \sin^2(x) \tag{92}$$

$$d) \int_1^4 \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx \tag{93}$$

$$\tag{94}$$

Hinweis zu b): $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

Wir haben jetzt zwei Methoden um Integrale zu berechnen kennengelernt. Es gibt noch viele andere Methoden. Eine davon ist der etwas unkonventionelle Feynman Trick

"Das Resultat war folgendes: Wenn die Leute am MIT oder in Princeton Schwierigkeiten hatten, ein bestimmtes Integral zu lösen, dann lag das daran, dass es mit den Standardmethoden, die sie in der Schule gelernt hatten, nicht ging. Dann komme ich und versuche unter dem Integralzeichen zu differenzieren, und das klappte oft. Auf diese Weise kam ich in den Ruf, gut Integrale lösen zu können, und das nur, weil ich einen anderen Werkzeugkasten hatte als die Anderen und weil sie alle ihre Werkzeuge an dem Problem ausprobiert hatten, bevor sie es mir vorlegten."

Richard Feynman(1918-1988) aus "Sie belieben wohl zu scherzen, Mr.Feynman !"

**Feynman Trick**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dann besteht die Idee des Feynman Tricks, darin einen neuen Parameter a einzufhren, sodass:

$$\int f(x)dx = \int \lim_{a\to 1} \frac{df(a,x)}{da} dx = \lim_{a\to 1} \frac{d}{da} \int F(x)dx \tag{95}$$

**Besipiel:**

Betrachte das folgende Integral:

$$\int xe^x dx = \int \lim_{a\to 1} \partial_a e^{ax} dx = \lim_{a\to 1} \partial_a \int e^{ax} dx = \lim_{a\to 1} \partial_a (\frac{1}{a} e^{ax}) = e^x(x-1) \tag{96}$$

Der Parameter a wird als Feynman Parameter bezeichnet

Allgemein gilt:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\delta(1-u-v)}{[uA+vB]^2} \tag{97}$$

was heutzutage in sehr vielen Rechnungen in der modernen Quantenfeldtheorie benutzt wird.

**Aufgabe 2.3.4** Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx \tag{98}$$

## 2.4 Integralsätze

In diesem Kapitel wollen wir uns wichtige Integralsätze anschauen und diese beweisen

**Satz 3.3 Majorisierte Integrierbarkeit**
Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ steige Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergieren, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \tag{99}$$

**Beweis :**

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.Damit:

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x)dx| \tag{100}$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)} \tag{101}$$

$$= \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \tag{102}$$

$$\square \tag{103}$$

Dieses Kriterium wird als die Majorisierte Integrierbarkeit bezeichnet.

Damit knnen wir folgenden sehr wichtigen Satz beweisen:

**Satz 3.4 Vertauschung von Differentiation und Integration:**
Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} : X \to Y$ majorisiert integrierbar über $Y$, dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(x, y)dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(x, y)dy \tag{104}$$

**Beweis :**

Äquivalent ist der Beweis folgender Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+he_j)-F(x)}{h} \tag{105}$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_Y \frac{f(x+he_j,y)-f(x,y)}{h}dy \tag{106}$$

$$= \int_Y \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_j,y)-f(x,y)}{h}dy = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j}f(x,y)dy \tag{107}$$

Die Gleichungen 1 und 4 sind die Definitionen der Ableitung und die Gleichung 2 gilt wegen linearitt des Integrals. Bleibt also nur noch Gleichung 3 zu zeigen. Wegen der Majorisierten Integrierbarkeit existiert eine Funktion $f : Y \to [0,\infty]$ mit $\int_Y h < \infty$ und $|\frac{\partial}{\partial x}f(x)| \leq h(y)$, somit folgt Gleichung 3 nach Majorisierter Konvergenz
□

### 2.5 Numerische Integration

Siehe Professor Marc Wagner's Vorlesung Numerische Methoden der Physik SS 2018.

# 3 Differentialgleichungen

## 3.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bisher sind Ihnen aus dem bisherigen Schulunterricht die algebraischen Gleichungen bekannt, also Gleichungen der Form:

$$f(x) = 0 \tag{108}$$

wobei die Lösungen 0,1 oder mehrere Werte fr die Variable x sind.
Ein Beispiel ist z.b die Gleichung $x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 4 = 0$.

Was ist jedoch, wenn wir bestimmte Vernderungen von Funktionen in bestimmten Variablen z.b der Zeit t ausdrcken mchten, also eine Gleichung, welche eine Funktion $f(x)$ und ihre Ableitungen $f'(x), f''(x), ..f^{(n)}(x)$ in Beziehung setzen mchten.
Solche Gleichungen nennt man Differentialgleichungen.
Es gibt viele Typen von Differentialgleichungen. In diesem Kapitel beginnen wir jedoch zunchst mit den etwas weniger komplexen gewhnlichen Differentialgleichungen:
**<u>Definition 3.1:</u>**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig und differenzierbare Funktion, dann ist $F$ eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung wenn gilt:

$$F(x, f(x), f'(x), ...f^n(x)) = 0 \tag{109}$$

Die hchste Ableitungspotenz, die vorkommt heit Ordnung und wird mit $n$ bezeichnet.
**Merke:**
Die Lösung einer Differentialgleichung ist kein Wert $x$ sondern eine ganze Funktion $f(x)$

Um zu verstehen, wie Differentialgleichungen gelst werden schauen wir uns ein physikalisch motiviertes Beispiel an. Aus dem Schulunterricht ist bekannt, dass radioaktive Atome nach sehr kurzer Zeit zerfallen, auerdem ist die nderung $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ $N(t)$, also kann mithilfe der Ableitungen, die folgende Differentialgleichung geschrieben werden:

$$\dot{N}(t) = \frac{dN}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{110}$$

Der Parameter $\lambda$ heit Zerfallskonstante und gibt an, wie viel Atome in einer bestimmten Zeit zerfallen. Um diese Gleichung nach der Funktion $N(t)$ zu lsen benutzen wir die folgenden Schritte.

**Forme die Gleichung zunchst so um, dass alles was von N abhngt auf der linken und alles von t abhängt auf der rechten Seite steht, also werden N und t zunchst als unabhngig von einander betrachtet**

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \tag{111}$$

**Integriere nun beide Seiten nach den jeweiligen Variablen:**

$$\int_{N_0} \frac{dN'}{N'} = -\lambda \int_{t_0}^{t} dt' \tag{112}$$

$$ln(N) - ln(N_0) = -\lambda(t - t_0) \tag{113}$$

$$ln(\frac{N}{N_0}) = -\lambda(t - t_0) \tag{114}$$

$$\tag{115}$$

**Löse nach der gesuchten Funktion $N(t)$ auf:**

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{116}$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \tag{117}$$

$$\tag{118}$$

wobei $t_0$ die Anfangszeit und $N_0$ die Anzahl der Atome bei dieser Zeit ist. Um eine eindeutige Lsung zu finden, mssen wir also die Anfangswerte $N_0$ vorgeben. $\lambda$ ist definiert als das Inverse der sogenannten mittleren Lebenszeit $\tau$, also sei $t = 0$ der Anfangspunkt, dann gilt:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{119}$$

Einige Werte für Lebensdauern sind:

Table 3: Lebensdauern von einigen Elementen

| Element | $\tau$ |
|---|---|
| $^{131}I$ | $5d$ |
| $^{3}H$ | $12,3yr$ |
| $^{137}Cs$ | $30yr$ |
| $^{235}U$ | $703.800.000yr$ |
| $^{232}Th$ | $14.050.000.000yr$ |

Also haben wir hier unsere erste Differentialgleichung erster Ordnung gelst. Die Methode die wir benutzt haben wird Allgemein als Trennung der Variablen bezeichnet.Um eine Lsung eindeutig zu bestimmen mssen immer Anfangswerte vorgegeben werden, was wir uns im nchsten Kapitel noch genauer anschauen mchten, wenn wir die Formalen Definitionen von Differentialgleichungen anschauen.

Wie man sich schon denken kann, funktioniert die Trennung der Variablen nur bei Differentialgleichungen erster Ordnung. In unserem weiteren Beispiel schauen wir uns jedoch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung an.

Aus der Klassischen Mechanik ist bekannt, dass nach dem Zweiten Newtonschen Axiom die Kraft $F$ gleich der Masse mal der Beschleunigung ist. Auerdem wissen wir dass gilt $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, somit kann das Newtonsche Gesetz durch die folgende Differentialgleichug ausgderckt werden, da die Koordinate x stetig und differenzierbar ist:

$$m\ddot{x} = F(x(t), t) \tag{120}$$

Die Kraft F kann eine beliebig komplizierte Funktion sein, die von $x(t)$ und $t$ abhängt.
Da wir hier ein konkretes Beispiel betrachten wir $F = -Dx$(Hookesches

Gesetz), also eine Feder mit Federkonstante D, damit:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) \tag{121}$$
$$x(t) = sin(\omega t) \tag{122}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) = -\omega^2 \sin(\omega t) \tag{123}$$
$$-m\omega^2 \sin(\omega t) = -D\sin(\omega t) \tag{124}$$
$$\omega = \pm\sqrt{\frac{D}{m}} \tag{125}$$
$$\tag{126}$$

Somit gilt für die Lösung:

$$x(t) = A\sin(+\sqrt{\frac{D}{m}}) + B\sin(-\sqrt{\frac{D}{m}}) \tag{127}$$

Diese Lösung beschreibt eine periodische ungedämpfte Schwingung. Um die Koeffizienten A und B eindeutig zu bestimmen, mssten wir jetzt Anfangsbedingungen sowohl fr den Ort als auch fr die Geschwindigkeit festlegen.

Wir haben uns jetzt also zwei Beispiele für Differentialgleichungen in der Physik angeschaut. Diese waren beides sogenannte lineare Differentialgleichungen. In den folgenden Aufgaben werden noch mehr Gewöhnliche Differentialgleichungen besprochen:

**Aufgabe 3.1.1:** Löse die folgenden linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

$$a)\frac{dy}{dx} = y^2(x) \tag{128}$$
$$b)y' - \frac{x}{y} = 0 \tag{129}$$
$$c)y''(x) - 6y' + 9y = 0 \tag{130}$$
$$d)y'' - y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 0 \tag{131}$$
$$e)y'(x) = x^5, \, , \; y(0) = 3 \tag{132}$$
$$f)y''(x) = 0, \quad y(0) = 0 \tag{133}$$
$$g)y'(x) = \sqrt{y(x)}, y(0) = 1 \tag{134}$$
$$\tag{135}$$

**Aufgabe 3.1.2** Betrachten wir ein leeres Gefä mit konstanter Fläche A und fllen dieses mit Wasser, sodass der Wasserspiegel eine Variable Hhe $h(t)$ besitzt. Finden Sie die Funktion $h(t)$ für folgende Fälle, indem Sie eine passende Differentialgleichung aufstellen.In beiden Fällen gilt $h(t=0)=0$

$$a)\dot{V} = 0 \tag{136}$$

$$b)\dot{V} \neq 0 \tag{137}$$

$$\tag{138}$$

## 3.2 Residuensatz

Bevor wir uns mit den Differentialgleichungen weiter beschftigen, wollen wir uns in diesem Kapitel noch einen der Hauptsätze der Komplexen Funktionentheorie anschauen, den sogenannten Residuensatz, mit dem wir Integrale von komplexen Funktionen im Raum der Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lösen knnen.

**Definiton 3.2.1:** Eine komplexe Zahl $z$ ist ein Element des Vektorraums $\mathbb{C}$ und ist als die Erweiterung vom Raum der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert als:

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{139}$$

a ist der sogenannte Realteil $Re(z)$ und b der Imaginrteil $Im(z)$.

Die zahl i ist die sogenannte imaginäre Einheit und ist definiert durch die Lösung der folgenden Gleichung:

$$x^2 + 1 = 0, \quad x = \pm i \tag{140}$$

<u>**Satz 3.2 Euler Formel :**</u>
Bezeichne $\phi$ einen beliebigen Winkel im Intervall $[0, 2\pi]$ dann gilt:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \tag{141}$$

**Beweis :**
Der Beweis erfolgt mit der Taylor-Entwicklung:

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + ... \tag{142}$$

$$= (1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...) \tag{143}$$

$$= \cos\phi + i\sin\phi \tag{144}$$

$$\square \tag{145}$$

Insbesondere:

$$\cos(\phi) = Re(e^{i\phi}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{146}$$

$$\sin(\phi) = Im(e^{i\phi}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{147}$$

$$\tag{148}$$

Damit kann jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der sogenannten Polardarstellung geschrieben werden:

**Definition 3.2.2**

$$z = a + ib = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) \tag{149}$$
$$= r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi} \tag{150}$$

Mit $r = |z|$,$z \in \mathbb{C}$

**Laurent Reihe**

Sei $f : O \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion und $z_0$ Polstellen von $f(z)$, dann heißt die folgende Entwicklung Laurent Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{151}$$

Mit dieser Vorbereitung knnen wir den folgenden wichtigen Satz definieren:

**Satz 3.2.3 Residuensatz**

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in der komplexen Zahlenebene: Sei $D_f$ eine diskrete Teilmenge von D, $f : D \setminus D_f \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Komplexe Funktion ,$I$ ein reelles Intervall und $\Gamma : I \setminus D_f \to D$ ein geschlossener Weg, dann gilt fr das komplexe Integral entlang des Weges:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a \in D_f} ind_\Gamma(a) Res_a(f(z)) \tag{152}$$

$ind_\Gamma(a)$ wird als Umlaufzyklus bezeichnet und $Res_a$ als das Residuum von f.

**Beweis :**
Sei $S_2 = D \setminus S_2$ sowie $h_\mu$ der Hauptbestandteil der Laurentreihe von f um $a_\mu$. Wegen $h_\mu \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_\mu\})$ ist $f - \sum_{\mu=1}^{m} h_\mu$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus S_2$.
$\Gamma$ ist ein homogener Zyklus in $\mathbb{C}$, daher liefert der Cauchysche Integralsatz:

$$h_\mu(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\mu,-\nu}(z - a_\mu)^{-\nu} \tag{153}$$

Damit:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{\mu=1}^{m} \int_\Gamma h_\mu(z) = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\mu,-\nu} \int_\Gamma (z-a_\mu)^{-\nu} dz \tag{154}$$

$$= 2\pi i \sum_{\mu=1}^{m} c_{\mu,-1} n(\Gamma, a_\mu) \tag{155}$$

$$\square \tag{156}$$

Damit ist der Residuensatz bewiesen. Eine wichtige Eigenschaft ist hier, dass integriert wird ohne die Stammfunktion zu bilden.

Eine wichtige Anwendung des Residuensatz ist jedoch nicht bei komplexen Integralen, sondern reellen Integralen in der komplexen Ebene:

**Satz 3.2.4 Residuensatz für Polynomfunktionen**

Für Integrale der Form $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ mit $R = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p und q mit $\deg q \leq 2 + \deg p$ und $q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_a Res_a R \tag{157}$$

**Beweis :** R besitzt nur endlich viele Polstellen, welche fr $r \geq r_0$ in $U_r(0)$ liegen. Mit $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ folgt:

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_a Res_a R \tag{158}$$

Für $|z| \geq r$ ist $|R(z)| \leq \frac{c}{|z|^2}$ und somit $\left|\int_{\gamma_r} R(z)dz\right| \leq \frac{c\pi r}{r^2}$,
damit $\lim_{r\to\infty} \left|\int_{\gamma_r} R(z)dz\right| = 0$

Die Behauptung folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz. $\square$

Somit haben wir eine Methode gefunden, wie wir solche Integrale mit dem Residuensatz ausrechnen.

Um jedoch konkret solche Integrale auszurechnen, müssen wir noch das Residuum definieren. Eine bliche Definition des Residuums ist die Folgende: Das Residuum eines poles p-ter Ordnung ist gegeben durch:

$$Resf(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-1}\left[(z-z_0)^p f(z)\right]}{dz^{p-1}} \tag{159}$$

Um das alles noch mal besser zu verstehen, schauen wir uns mal ein Beispiel an:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ eine Polynomfunktion, dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{160}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \tag{161}$$

$$z = \pm i \tag{162}$$

$$\tag{163}$$

Die Funktion besitzt also zwei Pole erster Ordnung, damit ist das Residuum:

$$Res(f(z)) = \frac{1}{2i} \tag{164}$$

Insgesamt ergibt sich also für das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi \tag{165}$$

**Aufgabe 3.2.1**

Im folgenden sind der Betrag $r$ und der Phasenwinkel $\phi$ gegeben. Bestimme Sie jeweils die kartesische Darstellung der komplexen Zahl: Hinweis: benutze die Euler Formel

$$a)r = 3, \phi = \frac{\pi}{4} \tag{166}$$

$$b)r = 4, \phi = \frac{\pi}{2} \tag{167}$$

$$c)r = 1, \phi = \pi \tag{168}$$

$$d)a = 3, b = 4 \tag{169}$$

$$e)r = 4, b = 5 \tag{170}$$

$$\tag{171}$$

**Aufgabe 3.2.2**

Zeigen Sie, dass gilt:

$$e^{i\pi} = -1 \tag{172}$$

**Aufgabe 3.2.2**

Bestimmen Sie mithilfe des Residuensatzes das folgende Integral:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 2\cos x} dx \tag{173}$$

### 3.3 Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

In Kapitel 3.1 wurden verschiedene gewöhnliche lineare Differentialgleichung behandelt. In dem genannten Kapitel wurden diese Differentialgleichungen jedoch nicht kategorisiert. In diesem Kapitle werden wir uns verschiedene Arten von Differentialgleichung und die zugehrigen Lösungsmethoden anschauen.

Dazu starten wir mit den einfachsten Differentialgleichungen, die für viele Fälle lösbar sind, den sogenannten linearen Differentialgleichung 1.Ordnung, welche in der allgemeinsten Form geschrieben werden als:

$$y'(x) + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{174}$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ zwei stetige Funktionen sind, die beliebig Abhängig von x sind. Um diese Gleichung zu lösen definieren multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit $e^{R(x)}$, wobei $R(x) = \int_{x_0}^{x} P(x')dx'$.

$$e^{R(x)}(y'(x) + P(x)y) = e^{R(x)}Q(x) \tag{175}$$

$$\frac{d}{dx}(y(x)e^{R(x)}) = Q(x)e^{R(x)} \tag{176}$$

$$\tag{177}$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$y(x)e^{R(x)} = \int Q(x)e^{R(x)} \tag{178}$$

$$y(x) = e^{-R(x)} \int Q(x)e^{R(x)} \tag{179}$$

Um die spezielle Lösung zu finden, verwendet man die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = y_0 e^{-R(x)} + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{R(t)-R(x)}dt \tag{180}$$

Diese Formel stellt die allgemeine Lösung zu linearen Differentialgleichungen erster Ordnung dar:

**Aufgabe 3.3.1:**

Löse die folgende Differentialgleichung:

$$y'(x) + xy - 3 = 0 \tag{181}$$

**Aufgabe 3.3.2:**

Löse die Aufgabe 1-B-5 von dem Übungsblatt des MIT OCW

Wir haben jetzt eine Art von Differentialgleichung kennengelernt. Es gibt jedoch noch viele weitere Arten von Differentialgleichungen. Ein weiteres Beispiel sind die linearen Differentialgleichungen 2.Ordnung. Das sind Differentialgleichungen der Form:

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = D(x) \tag{182}$$

Wenn $D(x) = 0$ nennt man die Differentialgleichung homogen. Um dies besser zu illustrieren schauen wir uns mal ein physikalisches Beispiel, den harmonischen Oszillator mit Reibung an.

Hier bentigen wir das 2.Newtonsche Gesetz. Wir spezialisieren uns hier auf den freien Harmonischen Oszillator mit Reibung. Es gilt:

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F_{ges} \tag{183}$$

Die Resultierende Gesamtkraft $F_{ges}$ setzt sich aus der antreibenden Federkraft $F_k$ mit Federkonstante k und der Dmpfenden Reibungskraft $F_r$ mit Dämpfungskonstante $\gamma$ zusammen. Damit lautet die zu lösende DGL:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\dot{x} \tag{184}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m} \tag{185}$$

Dies ist in der Tat eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bei einer solchen Art von Differentialgleichung bietet es sich häufig an eine Lösung durch einen Ansatz mit bekannten Funktionen zu finden. Bei einer DGL mit konstanten Koeffizienten bietet sich daher immer eine Exponentialfunktion an.

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{186}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf:

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} + 2\beta\frac{d}{dt}e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \tag{187}$$

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0 \tag{188}$$

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{189}$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{190}$$

$$\tag{191}$$

Damit haben wir zwei Lösungen gefunden. Ein weiteres wichtiges Konzept bei linearen Differentialgleichungen ist das Konzept der linearen Superposition, dass besagt, dass die allgemeine Lösung von einer linearen DGL durch die Linearkombinationen von linear unabhängigen Lösungen gegeben ist. Zwei Lösungen $f_1$ und $f_2$ sind linear unabhängig, wenn deren Wronski Determinante verschieden von 0 ist. Also:

$$det\left(\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{bmatrix}\right) \neq 0 \tag{192}$$

Ausrechnen der Wronski Determinante ergibt:

$$det\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}\right) = e^{\lambda_1 t}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \tag{193}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} = (-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} + \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} \tag{194}$$

$$= (2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} \tag{195}$$

$$\tag{196}$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur wenn $\beta = \omega_0$. Dies ist ein Spezialfall, den wir uns noch anschauen werden. Allgemein knnen wir also als Allgemeine Lösung schreiben:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R} \tag{197}$$

Um die Allgemeine Lösung zu diskutieren kann man sich drei verschiedene Fälle anschauen, die zu jeweils drei unterschiedlichen physikalischen Lösungen fhren.

**Fall 1: Schwache Dämpfung $\beta < \omega_0$**

Dieser Fall wird als näherungsweise Freie Schwingung bezeichnet. Für die Argumente der Exponentialfunktion gilt damit, dass die Wurzel rein imaginär wird

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{198}$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega \tag{199}$$

$$\tag{200}$$

Dies führt zu einer allgemeine Lösung von:

$$x(t) = e^{-\beta t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) \tag{201}$$

Anhand dieser Lösung sieht man, dass es sich hier um eine harmonische Schwingung mit einer exponentiellen Dämpfung durch Reibung handelt.

Die Lösung, die wir gefunden haben ist jedoch nur eine Allgemeine Lösung. Um eine vollständige Lösung zu finden, müssen wir noch die Anfangsbedingungen berücksichtigen. Bei einer DGL zweiter Ordnung benötigen wir zwei Bedingungen jeweils für die Funktion und die erste Ableitung der Funktion.

$$v(t) = \dot{x}(t) = (i\omega - \beta)(Ae^{(i\omega-\beta)t} - Be^{(i\omega-\beta)t}) \tag{202}$$

gegeben sein folgende Anfangsbedingungen:

$$x(t=0) = x_0 v(t=0) = v_0 \tag{203}$$

**Aufgabe 3.3.1**

Berechne die Koeffizienten A und B aus den Anfangsbedingungen:

**Lösung**:

Einsetzen von t=0 in die Gleichungen für $x(t)$ und $v(t)$, ergibt:

$$x(t=0) = A + B = x_0 \tag{204}$$
$$v(t=0) = -\beta(A+B) + i\omega(A-B) = -\beta x_0 + i\omega(A-B) = v_0 \tag{205}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, dass nach A und B gelöst wird und ergibt:

$$A = \frac{v_0 + \beta x_0 + i\omega x_0}{2i\omega} \tag{206}$$
$$B = x_0 - A = x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0 + i\omega x_0}{2i\omega} \tag{207}$$
$$\tag{208}$$

Einsetzen in die Allgemeine Lösung,ergibt:

$$x(t) = e^{-\beta t}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) = e^{-\beta t}(Ae^{i\omega t} + (x_0 - A)e^{-i\omega t}) \tag{209}$$
$$= e^{-\beta t}(A(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + (x_0 - A)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))) \tag{210}$$
$$= e^{-\beta t}\left(x_0 \cos\omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{211}$$

Die finale Lösung lautet:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(x_0 \cos\omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{212}$$

**Aufgabe 3.3.2**

Lösen sie die Differentialgleichung für den Fall $\beta > \omega_0$, also starker Dämpfung

**Aufgabe 3.3.3**

Löse die Aufgaben 1B-11 vom MIT OCW

In den vergangenen Rechnungen haben wir uns den Schwingungsfall $\beta < \omega_0$ angeschaut. Im Folgenden möchten wir uns auch den Spezialfall $\beta = \omega_0$ anschauen. Für $\beta = \omega_0$ verschwindet die Wronski Determinante, damit sind die beiden Lösungen $f_1$ und $f_2$ nicht linear unabhängig voneinander. Damit haben wir in dem Fall nur eine spezielle Lösung der Differentialgleichung gefunden, jedoch keine allgemeine Lösung gefunden. Die Lösung lautet:

$$x(t) = e^{-\beta t} \tag{213}$$

Um jetzt die Allgemeine Lösung zu finden benutzen wir eine weitere Methode für inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Variation der Konstanten. Wir nehmen an, dass die Allgemeine Lösung gegeben ist durch:

$$x(t) = A(t)e^{-\beta t} \tag{214}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung, ergibt mit der Produktregel:

$$\dot{x}(t) = (\dot{A} - \beta A)e^{-\beta t} \tag{215}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \left(\frac{d^2A}{dt^2} - 2\beta\frac{dA}{dt} + \beta^2 A\right)e^{-\beta t} \tag{216}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{217}$$

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2} - 2\beta\frac{dA}{dt} + \beta^2 A + 2\beta\dot{A}\right)e^{-\beta t} = 0 \tag{218}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = 0 \tag{219}$$

$$A(t) = (a_1 + a_2 t) \tag{220}$$

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\beta t} \tag{221}$$

$$\tag{222}$$

Die Allgemeine Lösung lautet also:

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\beta t} \tag{223}$$

Dies ist jedoch nur die Allgemeine Lösung. Um die vollständige Lösung des Problems zu bekommen, müssen wir die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0$ und $v(t = 0) = v_0$ benutzen, um daraus die Koeffizienten $a_1$ und $a_2$ zu bestimmen.

**Aufgabe 3.3.4**

Berechne die Koeffizienten $a_1$ und $a_2$ aus den Anfangsbedingungen:

Nach einer simplen Rechnung erhält man für die vollständige Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[ x_0 + (v_0 + \beta x_0) t \right] \tag{224}$$

**Aufgabe 3.3.5**

Wann hat die Lösung $x(t)$ ein Minimum?

**Aufgabe 3.3.6**

Löse die Aufgaben 1D-5 vom MIT OCW

### 3.4 Substitution

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Methoden besprechen, mit der man einfache Differentialgleichungen 1.Ordnung lsen kann die sogenannte Substitution.

Die Substitution ist uns schon im Kapitel der Integrale begegnet. Allgemein führen wir eine Substitution durch, indem wir eine Variable durch eine neue Variable ersetzen

$$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^* \tag{225}$$

$$f(x) \to f(z), \quad x \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{K}^* \tag{226}$$

$$\tag{227}$$

Wir schauen uns jetzt diese Methode anhand der folgenden Differentialgleichung an

$$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2 \tag{228}$$

Sei u eine neue Variable mit $u = y^{-1}$, dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \tag{229}$$
$$-u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^x u^{-2} \tag{230}$$
$$-\frac{du}{dx} - u = e^x \tag{231}$$
$$\frac{du}{dx} + u = -e^{-x} \tag{232}$$
$$\frac{du}{dx} + u = 0 \tag{233}$$
$$\frac{du}{dx} = -u \tag{234}$$
$$\frac{du}{u} = -dx \tag{235}$$
$$u = e^{-x} \tag{236}$$
$$y = u^{-1} = Ce^x \tag{237}$$
$$\tag{238}$$

Anhand diesem Beispiel sieht man, dass das Einführen einer neuen Variable durch Substitution den Lösungsweg vereinfacht. Auffällig ist auerdem, dass wir uns hier nur den homogenen Teil der DGL angeschaut haben und den inhomogenen Teil ignoriert haben. Die Gleichung ist eigentlich eine inhomogene DGL erster Ordnung. Wie man solche Gleichungen löst werden wir uns im nächsten Kapitel anschauen.

**Aufgabe 3.4.1**

Löse die folgende Differentialgleichung mithilfe von Substitution:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} \tag{239}$$

**Aufgabe 3.4.2**

Löse die Aufgabe 1-B-5 mit dem MIT ocw

### 3.5 Inhomogene Differentialgleichungen

Wie schon im vorherigen Kapitel erwhnt wollen wir uns in diesem Kapitel Inhomogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung anschauen. Diese Art von Differentialgleichung ist deutlich komplexer zu lösen als die Homogenen Differentialgleichungen, da wir nun auch einen inhomogenen Term betrachten müssen. Allgemein können wir eine solche Differentialgleichung schreiben als:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = g(x) \tag{240}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist auf dem ersten Blick nicht deutlich weder gibt es ein allgemeines Verfahren, wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung.

Man kann jedoch zeigen, dass die allgemeine Lösung $y(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung die Summe aus der Allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h(x)$ und einer partikulären L"osung der inhomogenen Differentialgleichung $y_p(x)$ ist, also

**Satz 3.5**

Die Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung kann geschrieben werden als:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{241}$$

$$y(x) - y_p(x) = y_h(x) \tag{242}$$

$$\tag{243}$$

**Beweis:**

$y(x)$ und $y_p(x)$ sind beides Lösungen der Inhomogenen Differentialgleichung, damit:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = g(x) \tag{244}$$
$$a(x)y_p''(x) + b(x)y_p'(x) + c(x)y_p(x) = g(x) \tag{245}$$
$$\tag{246}$$

Subtrahieren dieser Gleichung, ergibt:

$$a(x)(y''(x) - y_p''(x)) + b(x)(y'(x) - y_p'(x)) + c(x)(y(x) - y_p(x)) = 0 \tag{247}$$
$$a(x)y_h''(x) + b(x)y_h'(x) + c(x)y_h(x) = 0 \tag{248}$$
$$y_h(x) = y(x) - y_p(x) \tag{249}$$
$$y = y_h + y_p \tag{250}$$
$$\square \tag{251}$$

Damit ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in der Tat die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung

Jetzt wollen wir uns mal ein physikalisches Beispiel für eine solche Differentialgleichung anschauen. Dafür schauen wir uns den freien Fall einer Masse mit Einbeziehung der Luftreibung an. In diesem System sind die einzigen Kräfte die wirken, die Gewichtskraft $F_g$ und die Luftreibungskraft $F_r$, damit gilt nach dem 2.Newtonschen Gesetz:

$$F_{ges} = F_r + F_g \tag{252}$$
$$F_r = \alpha\dot{z} \tag{253}$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\dot{z} = -mg \tag{254}$$
$$\tag{255}$$

Wir müssen jetzt also zunächst die homogene Differentialgleichung lösen, also:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \alpha\dot{z} = 0 \tag{256}$$

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{257}$$

$$\left(m\frac{d^2}{dz^2} + \alpha\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = 0 \tag{258}$$

$$\left(m\lambda^2 + \alpha\lambda\right)e^{\lambda t} = 0 \tag{259}$$

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda = 0 \tag{260}$$

$$\lambda_1 = 0 \tag{261}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha}{m} \tag{262}$$

$$\tag{263}$$

Somit ergibt sich für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$z(t) = A + Be^{-\frac{\alpha}{m}t} \tag{264}$$

Für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung überlegen wir uns: Die Gewichtskraft wird die Geschwindigkeit der Masse so lange erhöhen, bis die mit der Geschwindigkeit wachsende Reibungskraft im Gleichgewicht mit der Gewichtskraft ist. Der Fall kann beschrieben werden, als:

$$\dot{z} = -\frac{m}{\alpha}g \tag{265}$$

$$z(t) = -\frac{m}{\alpha}gt \tag{266}$$

$$\tag{267}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung und deren Ableitung:

$$z(t) = A + Be^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{m}{\alpha}gt \tag{268}$$

$$v(t) = -\frac{\alpha}{m}Be^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{m}{\alpha}g \tag{269}$$

$$\tag{270}$$

Die unbestimmten Koeffizienten können mit den Anfangsbedingungen $z(t = 0) = h$ und $v(t = 0) = 0$ gelöst werden

**Aufgabe 3.5.1**

Berechne die Koeffizienten A und B mithilfe der Anfangsbedingungen

**Lösung**:

Einsetzen von t=0 in die Gleichungen für $z(t)$ und $v(t)$, ergibt:

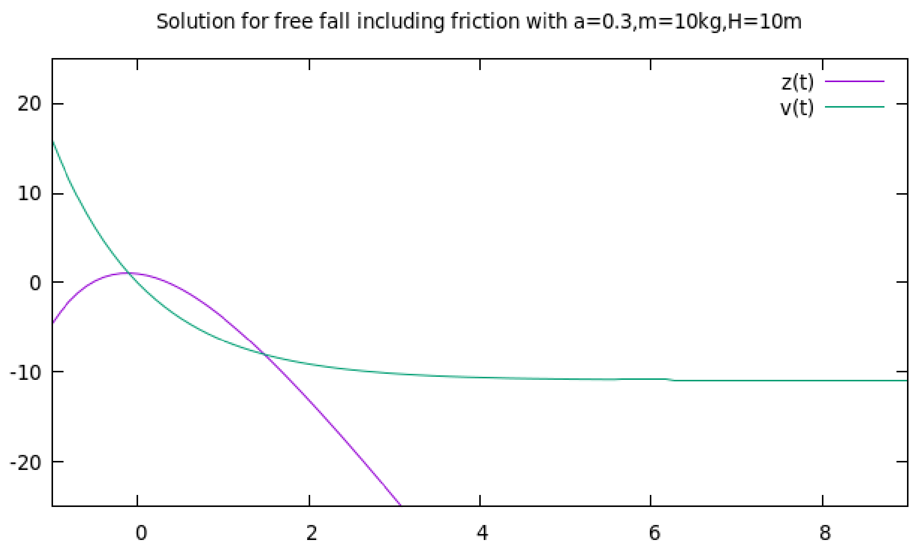
$$z(t=0) = A + B = h \tag{271}$$
$$v(t=0) = -\frac{\alpha}{m}B - \frac{m}{\alpha}g = 0 \tag{272}$$
$$A = h - B = h + \frac{m^2}{\alpha^2}g \tag{273}$$
$$B = -\frac{m^2}{\alpha^2}g \tag{274}$$

somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$z(t) = h + \frac{m}{\alpha}g\left[\frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) - t\right] \tag{275}$$
$$v(t) = \frac{m}{\alpha}g\left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1\right) \tag{276}$$
$$\tag{277}$$

**Aufgabe 3.5.2**

Bestimme jeweils für $z(t)$ und $v(t)$ das jeweilige asymptotische Verhalten für $t \to 0$ und $t \to \infty$ und bestimme den jeweiligen Grenzwert der Funktionen.




### Aufgabe 3.5.3

Bearbeitete die Aufgabe 1-B-12 vom MIT ocw, indem du 4 DGLs deiner Wahl löst

### Aufgabe 3.5.4

Löse die Aufgabe 1-D-6 b) vom MIT ocw

Hinweis : $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

**Lösung**:

Als Lösung ergibt sich die folgende Funktion mit Grenzwert

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}(t+C)\right), \quad C \in \mathbb{R} \tag{278}$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \tag{279}$$

# 4 Vektoren und Vektorräume

## 4.0 Kartesisches Koordinatensystem

## 4.1 Vektorbegriff

In diesem Kapitel wollen wir den Begriff des Vektors physikalisch motiviert einführen. Vektoren sind schon aus dem Physikunterricht bekannt. Ein Beispiel hierfür ist der Kraftvektor und damit zusammenhängend das Kräfteparallelogramm. Bei Kräften muss nicht nur der Betrag beim Addieren von Kräften sondern auch die Richtung mit mehreren Pfeilen dargestellt werden. Die geometrische Interpretation eines Vektors wird auch tatsächlich durch einen Pfeil wiedergegeben. Vektoren sind jedoch nicht nur physikalische Objekte, die Kräfte beschreiben sondern hochkomplexe sehr allgemeine mathematische Objekte mit vielen Eigenschaften. Im Folgenden wird hier nur der 3 Dimensionale Vektor diskutiert.

Um den Begriff Vektor zu veranschaulichen schauen wir uns nochmal das 3 dimensionale Kartesische Koordinatensystem etwas genauer an(siehe Handschriftliche Notizen ). Geometrisch ist ein Vektor definiert als ein Pfeil,der vom Koordinatenursprung zu einem bestimmten Punkt mit den Koordinaten $(x, y, z)$ zeigt. Der Vektor $\vec{r}$ kann dann als spalte geschrieben werden als:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{280}$$

Allgemein können wir definieren:

<u>**Definiton 4.1:**</u>

Ein Reeller 3 dimensionaler Vektor $\vec{a}$ ist ein 3-tupel von 3 Zahlen oder 3 Funktionen dargestellt als:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{281}$$

wobei $a_i$ als Komponenten von dem Vektor $\vec{a}$ bezeichnet werden mit $i \in [1, 3]$

**Aufgabe 4.1.1**

stellen Sie die folgenden Vektoren in einem 2 dimensionalen kartesischen Koordinatensystem dar

$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Wir haben jetzt Vektoren als mathematische Objekte eingeführt. Wir wissen jedoch noch nicht, wie wir mit diesen mathematischen Objekten rechnen sollen. Im Folgenden werden grundlegende algebraische Operationen eingeführt.

**Vektoraddition:**

Dies Summe aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist wieder ein Vektor $\vec{c}$ mit:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{282}$$

**Vektoraddition:**

Dies Differenz aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist wieder ein Vektor $\vec{c}$ mit:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \tag{283}$$

**Multiplikation mit Skalar:**

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $\vec{a}$ ein Vektor. Multipliziert amn die beiden Objekte ist der resultierende Vektor $\vec{b}$ genau um $\lambda$ gestreckt.

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \tag{284}$$

**Skalarprodukt :**

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann als $\vec{a} \cdot \vec{b}$ oder als $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ geschrieben werden und projiziert die Richtung von $\vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{a}$ womit sich ein neuer Vektor ergibt und berechnet dann dessen länge. Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{285}$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ, also gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Beachte $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq \vec{a}\vec{b}$

**Vektorprodukt :**

Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auch Kreuzprodukt genannt ist ein bestimmter Vektor $\vec{c}$ der senkrecht auf der von a und b aufgespannten Ebene steht. Im Kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \tag{286}$$

**Aufgabe 4.1.2**

Beweise, dass das Vektorprodukt antikommutativ ist d.h $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

**Betrag :**

Der Betrag $|\vec{a}|$ beschreibt die Länge eines Vektors und ist eine Skalare Zahl. bei Kräften würde dies z.b die resultierende Kraft als Zahl bezeichnen. Allgemein ist der Betrag definiert als:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{287}$$

Dies ist genau der verallgemeinerte Satz des Pythagoras, der schon aus der Schule bekannt ist.

### Aufgabe 4.1.3

Führe alle möglichen oben genannten Vektoroperationen mit den 3 folgenden Objekten aus:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 6 \tag{288}$$

### Aufgabe 4.1.4

Ein Auto bewege sich in einer Ebene mit dem Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12\frac{m}{s^2} \\ 5\frac{m}{s^2} \\ 0\frac{m}{s^2} \end{pmatrix}$ berechne die Geschwindigkeit des Autos nach 5 Sekunden.

## 4.2 Physikalisches Beispiel: Rotierende Bezugssysteme

In diesem Kapitel wollen wir uns ein sehr prominentes Beispiel aus der Newtonschen Mechanik anschauen nmlich Rotierende Bezugssysteme mit Vektoren zu beschreiben.

Um in das Thema besser einzusteigen finden Sie im Folgenden Aufgaben mit denen sie die Grundlagen von Rotationsbewegungen wiederholen knnen:

**Aufgabe 4.2.0.1**

Die Spitze eines Minutenzeigers einer Uhr hat die Geschwindigkeit $3\frac{m}{s}$. Wie lang ist der Zeiger?

**Aufgabe 4.2.0.2**

Eine Zentrifuge mit einem Radius von $R = 10cm$ macht 500 Umdrehungen pro Minute. Welchen Weg legt ein Teichen innerhalb von $3s$ zurück ?

**Aufgabe 4.2.0.3**

Beobachter A steht auerhalb eines Karussells, dass sich mit Winkelgeschwindigkeit $\omega$ dreht. Beobachter B steht bewegt sich auf dem Karussell mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0$ . Welche Geschwindigkeit sehen A und B jeweils in den jeweiligen Bezugssystemen?

**Aufgabe 4.2.0.4**

Ein Teilchen der Masse m startet von einer Hhe $h_0$ und durchläuft einen Looping mit Radius r. Wie muss $h_0$ gewählt werden, damit das Teilchen nicht abstürzt. Hinweis : Energieerhaltung

**Aufgabe 4.2.0.5**

Die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ zwischen zwei Massen m und M an den Orten $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ kann dargestellt werden als:

$$\vec{F}_G = -\frac{GmM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(\vec{r} - \vec{r}'\right) \tag{289}$$

Berechne den Betrag dieses Vektors. Auf welche bekannte Gleichung führt die Rechnung?

**Aufgabe 4.2.0.6**

Ein Punktteilchen der Masse m, der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ in x-Richtung und der Ladung q wird in ein Magnetisches Feld gefhrt. Auf das Teilchen wirkt die Lorentzkraft $\vec{F_l}$, die durch die Magnetische Feldstärke $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$, die Geschwindigkeit und die Ladung in Form eines Vektors ausgedrckt werden kann.

a) Drücken sie basierend auf ihrem Wissen ber Vektorrechnung die Lorentzkraft aus

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf

c) Lösen sie die BGL mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$ und $\dot{\vec{r}} = (v_0, 0, 0)$

d) Welche Bewegung wird durch diese Lösung beschrieben?

Damit wir uns den allgemeinen Fall eines rotierenden Bezugssystems anschauen können müssen wir uns vorher noch mit dem Begriff der Basis im Kartesischen Koordinatensystem beschäftigen.

Siehe Skizze

Jeder Ortsvektor kann also auch durch eine Summe von Vektoren mit Betrag 1 ausdrckt werden. Vektoren mit Betrag $|\vec{a}| = 1$ nennt man normiert. Wenn man jeden Vektor durch solche Vektoren ausdrcken kann nennt man diese Vektoren eine Basis des zugehörigen Vektorraums(siehe Kapitel 4.5 Vektorräume).

**<u>Definiton Basis</u>**

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_i\}$ eines Vektorraums $V$ heit Basis wenn gilt:

1) Jeder Vektor im Vektorraum lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen

2) Die Vektoren $a_i$ sind linear Unabhängig voneinander daher $c_i = 0$ ist die einzige Lsöung von:

$$\vec{a}_i = \sum_j c_j \vec{a}_j \tag{290}$$

Eine Vektorbasis in einem Koordinatensystem wird Koordinatenbasis genannt. Die Vektoren werden als Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ bezeichnet

Dies soll am Beispiel von den Einheitsvektoren im Kartesischen Koordinatensystem veranschaulicht werden. Die Einheitsvektoren sind gegeben durch:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{291}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{292}$$

Die Vektoren sind linear unabhängig, da gilt:

$$e_x = ae_y \tag{293}$$
$$1 = a * 0 \tag{294}$$
$$0 = a * 1 \tag{295}$$
$$\tag{296}$$

Jeder Ortsvektor kann auerdem als Linearkombination von diesen zwei Vektoren geschrieben als:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \tag{297}$$

Damit bilden die Einheitsvektoren des 2 dimensionalen Kartesischen Koordinatensystems eine Basis.

Des Weiteren nennt man eine Koordinatenbasis orthogonal, wenn gilt:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1, \quad \text{falls i=j} \tag{298}$$
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad \text{falls } i \neq j \tag{299}$$

**Aufgabe 4.2.1**

Prüfe nach, ob die Einheitsvektoren des 3 dimensionalen Koordinatensystems eine Basis bilden. Ist diese Basis orthogonal?

**Aufgabe 4.2.2**

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Vektoren eine Basis bilden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{300}$$

**Aufgabe 4.2.3**

Berechnen sie alle Winkel im Dreieck, dass durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschrieben wird

**Aufgabe 4.2.4**

Betrachte ein Elektron mit Masse m, dass sich in einem zeitlich vernderten Elektromagnetischen Feld bewegt, mit dem Elektrischen Feld $\vec{E}(t) = \alpha t \vec{e}_z$ und dem Magnetischen Feld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ für $t < t_0$ und $\vec{B} = 0$ für $t > t_0$.Löse die Bewegungsgleichungen mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ und $\dot{\vec{r}}_0 = (v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$

Nachdem wir uns die Basen von Vektorräumen angeschaut haben, wollen wir uns im Folgenden nach langer Vorarbeit die rotierenden Bezugssysteme anschauen und die Unterschiede zwischen beschleunigten und nicht beschleunigten Bezugssystemen anschauen.

Dazu definieren wir zunächst den Begriff des Inertialsystems. Es gibt viele Definitionen für ein Inertialsystem. Wir werden im Folgenden nur die Definition in der Newtonschen Mechanik benutzen.

**Definition Inertialsystem**

Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, indem jegliche Beschleunigungen $\vec{a}$ von Körpern durch Trägheitskräfte $\vec{F}$ erklärt werden. Damit gilt in allen Inertialsystemen das zweite Newtonsche Gesetz. Des Weiteren sind Inertialsysteme damit ausgezeichnet, dass sie sich gegenüber dem Fixsternhimmel nur geradlinig und gleichförmig bewegen, wobei die resultierende Beschleunigung verschwindet. Insbesondere sind beschleunigte rotierende Bezugssysteme keine Inertialsysteme.

Wie schon in der obigen Definition erwähnt sind nicht alle Bezugssysteme auch Inertialsysteme. Im Folgenden wollen wir uns als Beispiel hierfür das rotierende Bezugssystem anschauen. Sei $\Sigma$ ein Inertialsystem in Ruhe , indem wir physikalische Gröen messen und sei $\Sigma'$ ein Bezugssystem, dass um den Ursprung von $\Sigma$ in eine beliebige Richtung rotiert.

in beiden Koordinatensystemen können wir einen Ortsvektor $\vec{r}(t)$ definieren. Bisher in diesem Kapitel haben wir gesehen, dass wir einen Ortsvektor in einem Kartesischen Koordinatensystem auch schreiben können als:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3 \tag{301}$$

Damit kann ein beliebiger Vektor $\vec{A}$ ebenfalls durch die Basisvektoren ausgedrückt werden.

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \tag{302}$$

Für die zeitliche Ableitung ergibt sich dann:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{da_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{da_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{da_3}{dt}\vec{e}_3 \tag{303}$$

Genau der selbe Vektor kann natürlich auch in dem rotierenden Koordinatensystem $\Sigma^{'}$ durch die Basisvektoren $\vec{e}_i^{'}$ ausgedrückt werden.

$$\vec{A} = a_1^{'}\vec{e}_1^{'}(t) + a_2^{'}\vec{e}_2^{'}(t) + a_3^{'}\vec{e}_3^{'}(t) \tag{304}$$

wobei die Basisvektoren jetzt Zeitabhängig sind, da das Koordinatensystem rotiert und sich damit zeitlich verändert. Die Ableitung ist dann gegeben durch die Produktregel, indem sowohl die Skalare als auch die Vektoren abgeleitet werden.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{da_1^{'}}{dt}\vec{e}_1^{'}(t) + \frac{da_2^{'}}{dt}\vec{e}_2^{'}(t) + \frac{da_3^{'}}{dt}\vec{e}_3^{'}(t) + a_1^{'}\frac{d\vec{e}_1^{'}(t)}{dt} + a_2^{'}\frac{d\vec{e}_2^{'}(t)}{dt} + a_3^{'}\frac{d\vec{e}_3^{'}(t)}{dt} \tag{305}$$

Um diesen Ausdruck zu verstehen benutzen wir zwei Relationen. Man kann zeigen, dass $\vec{e}_1^{'}(t)$ und $\dot{\vec{e}}_1^{'}(t)$ senkrecht aufeinander stehen. Auerdem kann man benutzen, dass :

$$\dot{\vec{e}}_i^{'} \cdot \vec{e}_j^{'} = -\vec{e}_i^{'} \cdot \dot{\vec{e}}_j^{'} \tag{306}$$

**Aufgabe 4.2.5**

Beweise die beiden Identitäten.

Mit diesen Identitäten ist unser Zusammenhang zwischen $\dot{\vec{e}}_i^{'}$ und $\vec{e}_i^{'}$ festgelegt als:

$$\dot{\vec{e}}{}'_1 = a_1 \vec{e}{}'_2 + a_2 \vec{e}{}'_3 \tag{307}$$

$$\dot{\vec{e}}{}'_2 = a_3 \vec{e}{}'_1 + a_4 \vec{e}{}'_3 \tag{308}$$

$$\dot{\vec{e}}{}'_3 = a_5 \vec{e}{}'_1 + a_6 \vec{e}{}'_2 \tag{309}$$

$$\tag{310}$$